



## Examen Régression Linéaire Master 1

Durée : 1 heure 30 minutes.

Calculatrice autorisée. Une page de notes manuscrites A4 autorisée. Tout autre document interdit.

Les questions ont une unique bonne réponse.

Des points négatifs pourront être affectés à des mauvaises réponses.

### Questions de cours

**Question 1** Dans un modèle de régression linéaire simple sous hypothèses standard, quelle hypothèse sur les bruits **ne fait pas** partie des hypothèses standard ?

- A Les bruits sont centrés.
- B Les moyennes des bruits sont nulles.
- C Les bruits sont des variables aléatoires décorrélées.
- D Les variances des bruits sont égales.
- E Les bruits sont des variables aléatoires indépendantes.

**Question 2** Dans certaines situations, il est raisonnable de supposer que la relation entre deux variables  $x$  et  $y$  passe par l'origine, ce qui conduit à considérer un modèle linéaire de la forme  $Y = \beta x + \epsilon$ . Etant donné un échantillon  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ , quelle est l'expression de l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  ?

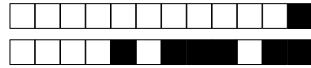
- A  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .
- B  $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ .
- C  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .
- D  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i Y_i$ .
- E  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$ .

**Question 3** Dans un modèle de régression linéaire simple, à quelle quantité le coefficient de détermination est-il égal ?

- A Au carré de la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.
- B A la racine carré du coefficient de corrélation entre la variable explicative et la variable réponse.
- C A la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.
- D Au carré du coefficient de corrélation entre la variable explicative et la variable réponse.
- E A la racine carrée de la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.

**Question 4** Dans un modèle de régression linéaire simple sous hypothèses standard de la forme  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , quelle est l'assertion vraie ?

- A Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales seulement si  $\beta_0 = 0$ .
- B Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont nulles lorsque  $\beta_1 = 0$ .
- C Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales seulement si  $\beta_1 = 0$ .
- D Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales.



- [E] Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont nulles si  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ .

**Question 5** Soient  $\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_n$  les résidus d'un modèle de régression linéaire multiple avec constante ajusté sur  $n$  observations. Quelle est la valeur de  $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i$  ?

- [A] Cela dépend des données.
- [B] 1.
- [C]  $n$ .
- [D] 0.
- [E]  $\sigma^2$ , la variance des bruits.

**Question 6** Si le coefficient de détermination est égal à 1, quelle est la valeur de la somme des carrés résiduelle ?

- [A] La variance des bruits.
- [B]  $+\infty$ .
- [C] 1
- [D] Cela dépend des données.
- [E] 0.

### Régression linéaire multiple

Soit le modèle de régression linéaire multiple  $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \epsilon$  sous hypothèses standard où  $\mathbb{X}$  est une matrice de taille  $n \times p$  et dont les éléments de la première colonne sont tous égaux à 1. On suppose de plus que  $\mathbb{X}'\mathbb{X}$  est diagonale et telle que  $\mathbb{X}'\mathbb{X} = \text{diag}(15, 1, 7, 10)$ . On donne  $\mathbb{X}'\mathbf{Y} = (1, 2, 3, 4)'$ . On note  $\sigma^2$  la variance des bruits, et  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)'$  l'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\beta$ .

**Question 7** Quelle est l'expression de la covariance entre  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$  ?

- [A]  $\frac{15\sigma^2}{1050}$ .
- [B]  $\frac{70\sigma^2}{1050}$ .
- [C] 0.
- [D]  $\frac{16\sigma^2}{15}$ .
- [E]  $\frac{\sigma^2}{1050}$ .

**Question 8** Quelle est la valeur de  $n$ ?

- [A] 33.
- [B] 15.
- [C] 10.
- [D] 7.
- [E] 1.

**Question 9** Quelle est la valeur de  $\bar{Y}$ , la moyenne empirique des  $Y_i$  ?

- [A]  $\frac{1}{7}$ .
- [B]  $\frac{1}{1050}$ .
- [C]  $\frac{7}{1050}$ .
- [D]  $\frac{15}{1050}$ .
- [E]  $\frac{1}{15}$ .

**Question 10** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_3$  ?

- [A] 0.4.
- [B] 0.1.
- [C]  $\frac{10}{1050}$ .
- [D]  $\frac{3}{7}$ .
- [E] 0.7.

**Question 11** Quelle est la valeur de la somme des carrés expliquée (SCE) ?

- [A] 6.89.
- [B] 5.85.
- [C] 9.15.
- [D] 3.35.
- [E] 2.25.

**Question 12** Quelle est l'expression de la variance de  $\hat{\beta}_0$  ?

- [A]  $33\sigma^2$ .
- [B]  $15\sigma^2$ .
- [C]  $\frac{15\sigma^2}{1050}$ .
- [D]  $\frac{15\sigma^2}{33}$ .
- [E]  $\frac{\sigma^2}{15}$ .

### Régression linéaire simple



Soit le modèle de régression linéaire simple  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  sous hypothèses standard. On note  $\sigma^2$  la variance des bruits,  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  les estimateurs des moindres carrés ordinaires,  $\hat{\epsilon}_i$  les résidus,  $\hat{Y}_i$  les valeurs ajustées,  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  les moyennes empiriques des  $x_i$  et  $y_i$ , et  $\rho_{xy}$  le coefficient de corrélation empirique des  $(x_i, y_i)$ . Pour les observations recueillies, on donne  $n = 35$ ,  $\rho_{xy} = 0.9515$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 172.1$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i = 747.6$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1069.3$  et  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 20139.8$ .

**Question 13** Quelle est la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  ?

- [A] 0.975.    [B] 0.455.    [C] 0.195.    [D] 0.905.    [E] 0.845

**Question 14** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_1$  ?

- [A] 8.95.    [B] 4.11.    [C] 6.21.    [D] 2.01.    [E] 1.15.

**Question 15** Quelle est la valeur de la somme des carrés expliquée (*SCE*) ?

- [A] 998.    [B] 1780.    [C] 4233.    [D] 691.    [E] 3776.

**Question 16** A quelle expression  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  est-elle égale ?

- [A]  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ .    [B]  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ .    [C]  $\sum_{i=1}^n Y_i^2 + \bar{Y}^2$ .  
[D]  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2$ .    [E]  $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2$ .

**Question 17** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_0$  ?

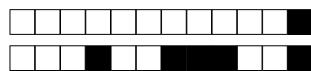
- [A] 1.128.    [B] 2.366.    [C] 6.027.    [D] 2.345.    [E] 4.035.

**Question 18** Quelle est la valeur de la somme des carrés totale (*SCT*) ?

- [A] 3547.    [B] 1824.    [C] 5012.    [D] 4171.    [E] 2194.

**Question 19** Quelle est l'expression de  $\hat{\beta}_1$  ?

- [A]  $\rho_{xy} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ .    [B]  $\rho_{xy}^2$ .    [C]  $\rho_{xy} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .  
[D]  $\frac{\rho_{xy}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ .    [E]  $\rho_{xy} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$ .



+1/4/57+



## Feuille de Réponses

0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9

← Codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et Prénom :

.....

*Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille. Les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.*

**IMPORTANT:** *Les cases contenant les réponses aux questions doivent être intégralement remplies.*

Question 1 :  A  B  C  D  E

Question 2 :  A  B  C  D  E

Question 3 :  A  B  C  D  E

Question 4 :  A  B  C  D  E

Question 5 :  A  B  C  D  E

Question 6 :  A  B  C  D  E

Question 7 :  A  B  C  D  E

Question 8 :  A  B  C  D  E

Question 9 :  A  B  C  D  E

Question 10 :  A  B  C  D  E

Question 11 :  A  B  C  D  E

Question 12 :  A  B  C  D  E

Question 13 :  A  B  C  D  E

Question 14 :  A  B  C  D  E

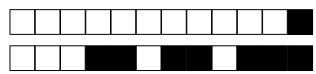
Question 15 :  A  B  C  D  E

Question 16 :  A  B  C  D  E

Question 17 :  A  B  C  D  E

Question 18 :  A  B  C  D  E

Question 19 :  A  B  C  D  E



+1/6/55+