



## Examen Régression Linéaire Master 1

**Durée : 1 heure 30 minutes.**

*Calculatrice autorisée. Une page de notes manuscrites A4 autorisée. Tout autre document interdit.*

*Les questions ont une unique bonne réponse.*

*Des points négatifs pourront être affectés à des mauvaises réponses.*

### Questions de cours

**Question 1** Dans un modèle de régression linéaire simple sous hypothèses standard, quelle hypothèse sur les bruits **ne fait pas** partie des hypothèses standard ?

- ☐ A Les bruits sont centrés.
- ☐ B Les moyennes des bruits sont nulles.
- ☐ C Les bruits sont des variables aléatoires décorrélées.
- ☐ D Les variances des bruits sont égales.
- ☐ E Les bruits sont des variables aléatoires indépendantes.

**Question 2** Dans certaines situations, il est raisonnable de supposer que la relation entre deux variables  $x$  et  $y$  passe par l'origine, ce qui conduit à considérer un modèle linéaire de la forme  $Y = \beta x + \epsilon$ . Etant donné un échantillon  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ , quelle est l'expression de l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  ?

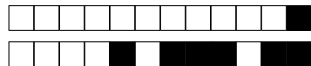
- ☐ A  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .
- ☐ B  $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ .
- ☐ C  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .
- ☐ D  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i Y_i$ .
- ☐ E  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$ .

**Question 3** Dans un modèle de régression linéaire simple, à quelle quantité le coefficient de détermination est-il égal ?

- ☐ A Au carré de la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.
- ☐ B A la racine carré du coefficient de corrélation entre la variable explicative et la variable réponse.
- ☐ C A la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.
- ☐ D Au carré du coefficient de corrélation entre la variable explicative et la variable réponse.
- ☐ E A la racine carrée de la covariance entre la variable explicative et la variable réponse.

**Question 4** Dans un modèle de régression linéaire simple sous hypothèses standard de la forme  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , quelle est l'assertion vraie ?

- ☐ A Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales seulement si  $\beta_0 = 0$ .
- ☐ B Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont nulles lorsque  $\beta_1 = 0$ .
- ☐ C Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales seulement si  $\beta_1 = 0$ .
- ☐ D Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont égales.



☐ Les variances des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont nulles si  $\beta_0 = \beta_1 = 0$ .

**Question 5** Soient  $\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_n$  les résidus d'un modèle de régression linéaire multiple avec constante ajusté sur  $n$  observations. Quelle est la valeur de  $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i$  ?

☐ Cela dépend des données.

☐ 1.

☐  $n$ .

☐ 0.

☐  $\sigma^2$ , la variance des bruits.

**Question 6** Si le coefficient de détermination est égal à 1, quelle est la valeur de la somme des carrés résiduelle ?

☐ La variance des bruits. ☐  $+\infty$ . ☐ 1

☐ Cela dépend des données. ☐ 0.

### Régression linéaire multiple

Soit le modèle de régression linéaire multiple  $\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \epsilon$  sous hypothèses standard où  $\mathbb{X}$  est une matrice de taille  $n \times p$  et dont les éléments de la première colonne sont tous égaux à 1. On suppose de plus que  $\mathbb{X}'\mathbb{X}$  est diagonale et telle que  $\mathbb{X}'\mathbb{X} = \text{diag}(15, 1, 7, 10)$ . On donne  $\mathbb{X}'\mathbf{Y} = (1, 2, 3, 4)'$ . On note  $\sigma^2$  la variance des bruits, et  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)'$  l'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\beta$ .

**Question 7** Quelle est l'expression de la covariance entre  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$  ?

☐  $\frac{15\sigma^2}{1050}$ . ☐  $\frac{70\sigma^2}{1050}$ . ☐ 0. ☐  $\frac{16\sigma^2}{15}$ . ☐  $\frac{\sigma^2}{1050}$ .

**Question 8** Quelle est la valeur de  $n$  ?

☐ 33. ☐ 15. ☐ 10. ☐ 7. ☐ 1.

**Question 9** Quelle est la valeur de  $\bar{Y}$ , la moyenne empirique des  $Y_i$  ?

☐  $\frac{1}{7}$ . ☐  $\frac{1}{1050}$ . ☐  $\frac{7}{1050}$ . ☐  $\frac{15}{1050}$ . ☐  $\frac{1}{15}$ .

**Question 10** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_3$  ?

☐ 0.4. ☐ 0.1. ☐  $\frac{10}{1050}$ . ☐  $\frac{3}{7}$ . ☐ 0.7.

**Question 11** Quelle est la valeur de la somme des carrés expliquée (SCE) ?

☐ 6.89. ☐ 5.85. ☐ 9.15. ☐ 3.35. ☐ 2.25.

**Question 12** Quelle est l'expression de la variance de  $\hat{\beta}_0$  ?

☐  $33\sigma^2$ . ☐  $15\sigma^2$ . ☐  $\frac{15\sigma^2}{1050}$ . ☐  $\frac{15\sigma^2}{33}$ . ☐  $\frac{\sigma^2}{15}$ .

### Régression linéaire simple



Soit le modèle de régression linéaire simple  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  sous hypothèses standard. On note  $\sigma^2$  la variance des bruits,  $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  les estimateurs des moindres carrés ordinaires,  $\hat{\epsilon}_i$  les résidus,  $\hat{Y}_i$  les valeurs ajustées,  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  les moyennes empiriques des  $x_i$  et  $y_i$ , et  $\rho_{xy}$  le coefficient de corrélation empirique des  $(x_i, y_i)$ . Pour les observations recueillies, on donne  $n = 35$ ,  $\rho_{xy} = 0.9515$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 172.1$ ,  $\sum_{i=1}^n y_i = 747.6$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1069.3$  et  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 20139.8$ .

**Question 13** Quelle est la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  ?

- ☐ A 0.975. ☐ B 0.455. ☐ C 0.195. ☐ D 0.905. ☐ E 0.845

**Question 14** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_1$  ?

- ☐ A 8.95. ☐ B 4.11. ☐ C 6.21. ☐ D 2.01. ☐ E 1.15.

**Question 15** Quelle est la valeur de la somme des carrés expliquée ( $SCE$ ) ?

- ☐ A 998. ☐ B 1780. ☐ C 4233. ☐ D 691. ☐ E 3776.

**Question 16** A quelle expression  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  est-elle égale ?

- ☐ A  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ . ☐ B  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ . ☐ C  $\sum_{i=1}^n Y_i^2 + \bar{Y}^2$ .  
☐ D  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2$ . ☐ E  $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2$ .

**Question 17** Quelle est la valeur prise par  $\hat{\beta}_0$  ?

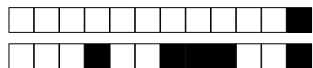
- ☐ A 1.128. ☐ B 2.366. ☐ C 6.027. ☐ D 2.345. ☐ E 4.035.

**Question 18** Quelle est la valeur de la somme des carrés totale ( $SCT$ ) ?

- ☐ A 3547. ☐ B 1824. ☐ C 5012. ☐ D 4171. ☐ E 2194.

**Question 19** Quelle est l'expression de  $\hat{\beta}_1$  ?

- ☐ A  $\rho_{xy} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ . ☐ B  $\rho_{xy}^2$ . ☐ C  $\rho_{xy} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .  
☐ D  $\frac{\rho_{xy}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ . ☐ E  $\rho_{xy} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$ .



+1/4/57+



## Feuille de Réponses

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

← Codez votre numéro d'étudiant  
ci-contre, et inscrivez votre nom et  
prénom ci-dessous.

Nom et Prénom :

.....

*Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille. Les  
réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.*

**IMPORTANT:** *Les cases contenant les réponses aux questions doivent être  
intégralement remplies.*

- Question 1 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 2 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 3 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 4 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 5 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 6 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 7 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 8 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 9 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 10 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 11 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 12 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 13 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 14 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 15 : 

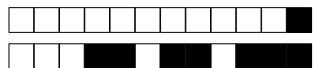
A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 16 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 17 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 18 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---
- Question 19 : 

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---



+1/6/55+