1. 给出算法符号 O 的定义，并证明：

(1) $100n^2+1=O(n^2)$

(2) $O(f(n)\,g(n))=O(f(n))\,O(g(n))$

答案：

算法符号 O 的定义：

$O(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 存在正常数 c 和 n_0 使得对所有 $n \geq n_0$ 有：$0 \leq f(n) \leq cg(n) \}$

(1) 注意到当 $n\geq 1$ 时，$100n^2 \leq 100n^2$，$1 \leq n^2$，从而取 c=101，$n_0=1$ 时有

$$100n^2+1 \leq cn^2$$

从而 $100n^2+1=O(n^2)$

(2)对于任意 $f_1(n) \in O(f(n))$，存在正常数 c_1 和自然数 n_1，使得对所有 $n \geq n_1$，有 $f_1(n) \leq c_1 f(n)$。

类似地，对于任意 $g_1(n) \in O(g(n))$，存在正常数 c_2 和自然数 n_2，使得对所有 $n \geq n_2$，有 $g_1(n) \leq c_2 g(n)$。

令 $c_3=c_1*c_2$，$n_3=\max\{n_1, n_2\}$。则对所有的 $n \geq n_3$，有

$f_1(n) * g_1(n) \leq c_1 f(n) * c_2 g(n) = c_3 f(n) * g(n) = O(f(n)g(n))$.

故有关系

$O(f(n)\,g(n))=O(f(n))\,O(g(n))$

2. 给出算法符号的定义，并注明

$4n^2+1 = \boldsymbol{\Omega}(10n^{1.5})$

答案：

算法符号$\boldsymbol{\Omega}$的定义：

$\boldsymbol{\Omega}(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 存在正常数 c 和 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$ 有：$0 \leq cg(n) \leq f(n) \}$

对于 $c=\frac{1}{10}$，$n_0=1$，当 $n \geq n_0$ 时有

$$0 \leq n^{1.5} \leq 4n^2+1$$

从而 $4n^2+1 = \boldsymbol{\Omega}(10n^{1.5})$

3. 给出算法符号Θ的定义，并证明

$n^2 + 4n\lg n + 2n^3 = \Theta(n^3)$

答案：

算法符号Θ的定义：

$\Theta(g(n))$ = { f(n) | 存在正常数 c_1,c_2 和 n_0，使得对所有 $n \geq n_0$ 有：$c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$ }

对于 $c_1=\frac{1}{10}$，$c_2=10$，$n_0=100$，当 $n \geq n_0$ 时有

$$\frac{1}{10}n^3 \leq n^2 + 4n\lg n + 2n^3 \leq 10n^3$$

从而$n^2 + 4n\lg n + 2n^3 = \Theta(n^3)$

或者用极限证明二式比值是一个常数，或者证明 f(n)既是 g(n)的渐进上界也是 g(n)的渐进下界.。

4. 给出算法符号 o 的定义，并证明

$$4n\log n + 7 = o(2n^2 + 3n\log n + 3)$$

答案：

算法符号 o 的定义：

$o(g(n))$ = { f(n) | 对于任何正常数 c>0,存在正数 n_0 >0, 使得对所有 n≥n0 有：$0 \leq f(n) < cg(n)$ }

由于

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n\log n+7}{2n2+3n\log n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\log n}{2n+3\log n} = 0$$

从而 $4n\log n + 7 = o(2n^2 + 3n\log n + 3)$

此题根据定义，对任意的正常数 c，找到n_0也可证明。

5. 给出算法符号ω的定义，并证明

$$2^n + n + 1 = \omega(20n^2 + 100)$$

答案：

算法符号ω的定义：

$\omega(g(n))$ = { f(n) | 对于任何正常数 c>0,存在正数 n_0 >0 使得对所有 $n \geq n_0$ 有：$0 \leq cg(n) < f(n)$ }

由于

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n+1}{20n^2+100} \to \infty$$

从而 $2^n + n + 1 = \omega(20n^2 + 100)$

此题根据定义，对任意的正常数 c，找到n_0也可证明。