The language of diagrams

Mt.Fuji

2025 年 12 月 25 日

概要

本稿は圏論アドベントカレンダー 22 日目のネタであり、1-圏論の単ソート一階述語論理式を視覚的に描く珍妙な方法を紹介する。この方法は、Peter J. Freyd と Andre Scedrov の categorical algebra、geometric logic 及び allegory に関する著書 [1] で多用されていたものである。

本稿の構成として、まず 1 節で最初に視覚化のルールを説明して、初等的で初歩的な数学の中で実演しながら概要を説明する。その次に 2 節で数学的な定式化を与え、最後に 3 節で同値関手との関係性を議論する。

2 節以降の構成は文献 [1] の大意に沿うが、この文献では数学的な定義や構成、および各種の主張の証明が驚くほど大胆に簡略化されていたので、本稿に書かれている定義や証明の中には、著者 (Mt.Fuji) が与えたものも多く混在していることをお断りしておく。

目次

1　例で見る図式言語

本稿の可換図式のルール

本稿の可換図式では、任意の閉路はデフォルトで可換である。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "z"] \arrow[d, "x"'] & D \arrow[d, "w"] \arrow[dl, "u"'] \\
B \arrow[r, "y"'] & C
\end{tikzcd}$$

例えばこの図式では、連立方程式 $y \circ x = w \circ z,\ x = u \circ z,\ w = y \circ u$ が表されている。図式の中で特定の閉路が可換であることを言わないために、⊹という記号を用いることにする。もし閉路の内側に⊹が置かれていた場合、そこでの等号成立を言わない。(これは**等号不成立を言うのではない**ことに注意。成立も不成立も言わない。)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "z"] \arrow[d, "x"'] & D \arrow[d, "w"] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\text{⊹}"] \\
B \arrow[r, "y"'] & C
\end{tikzcd}$$

今度の図式が表すのは、連立方程式 $y \circ x = w \circ z,\ x = u \circ z$ である。$w = y \circ u$ は⊹によってキャンセルされた。

1.1 イントロダクション

圏論には、可換図式という有用な視覚化ツールがある。主に diagram-chase に用いるが、定義の概要を図示するのに使うこともある。例えば、イコライザという概念は次の感じで表現される。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\exists!\bar{x}"'] \arrow[dr, "\forall x"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\text{⊹}"] & B
\end{tikzcd}$$

ただ、この図からは、量化の順序の情報が読み取れないし、e が f, g に基づいて存在していることも分からない。それらをも表現したければ、射が量化される段階ごとに図式を分けて描けば良い。

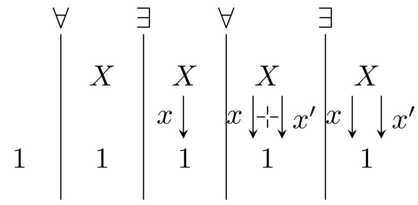
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\text{⊹}"] & B
\end{tikzcd}
\quad \Bigg|^{\exists} \quad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\text{⊹}"] & B
\end{tikzcd}
\quad \Bigg|^{\forall} \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "x"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\text{⊹}"] & B
\end{tikzcd}
\quad \Bigg|^{\exists!} \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\bar{x}"'] \arrow[dr, "x"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\text{⊹}"] & B
\end{tikzcd}$$

これならば、初学者であっても、イコライザがどういう概念なのかが一目瞭然だろう。

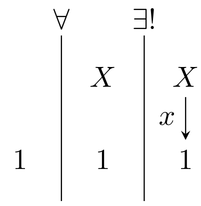
このように、量化記号を伴いながら情報量が単調増加していく有限図式の有限列や有限木のうち、次のルールを満たすもののことを、**図式言語 (the language of diagrams)** と呼ぶことにする。

- 一度現れた対象や射は、その後ずっと残り続ける。(決して消滅しない。)
- 出現時に区別されていた二つの対象が、後になって同一視されることは決して無い。
- 出現時に区別されていた二つの射が、後になって同一視されることは**有り得る**。
- 右隣の図式で対象や射が新しく出現したならば、量化記号はそれらに係るものと考えて良い。

出現時に区別されていた二つの射が、後になって同一視される例を示しておく。



これを略記したものが次の図式言語である。(終対象という概念の定義を表している。)



1.2 図式言語と双対概念

図式言語で何らかの概念の定義を表したとき、その双対概念は、図式言語の各図式の opposite を取ったもので表される。

monic,epic

射 m が monic であることは、次の図式言語で表現される。射 e が epic であるとは、monic の双対概念であることをいう。

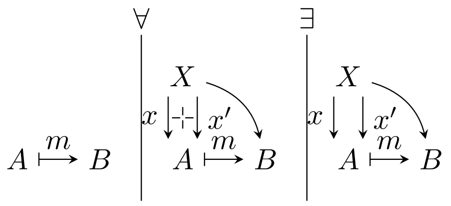


図 1: monic

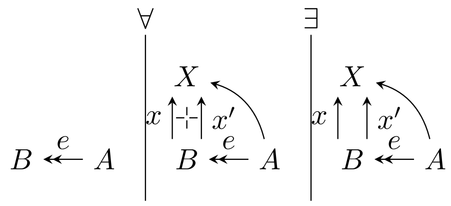


図 2: epic

終対象、始対象

対象 1 が圏の終対象であることは、次の図式言語で表せる。また圏の始対象 0 とは、終対象の双対概念である。

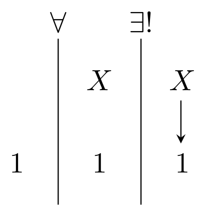


図 3: 終対象

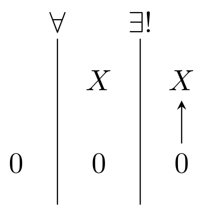


図 4: 始対象

二項積、二項余積

A, B の二項積は、次の図式言語で表せる。二項余積は、二項積の双対概念である。

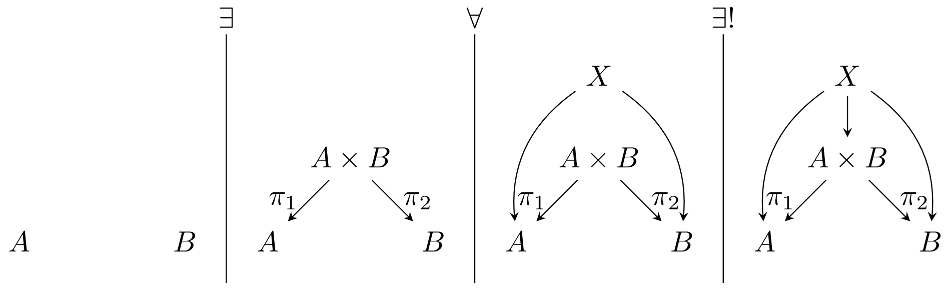


図 5: 二項積

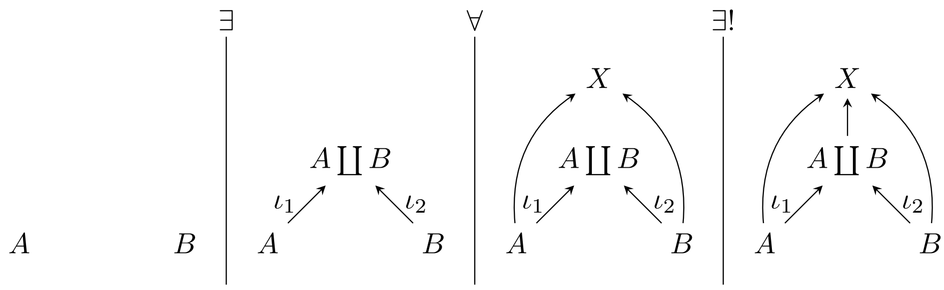


図 6: 二項余積

イコライザ、余イコライザ

射 $f, g\colon A \to B$ のイコライザは、次の図式言語で表せる。余イコライザは、その双対概念である。

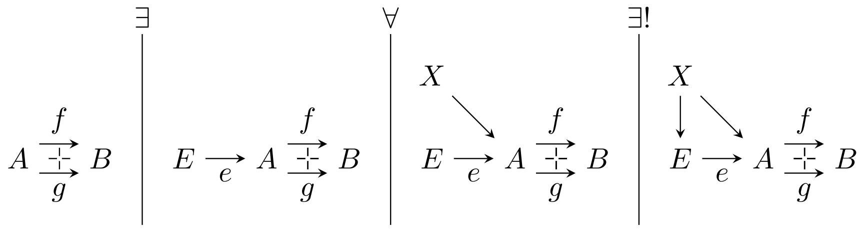


図 7: イコライザ

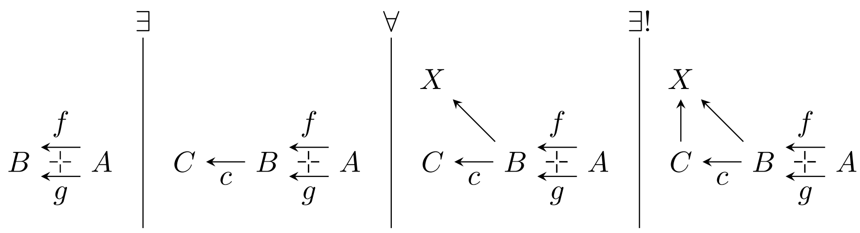


図 8: 余イコライザ

引き戻し、押し出し

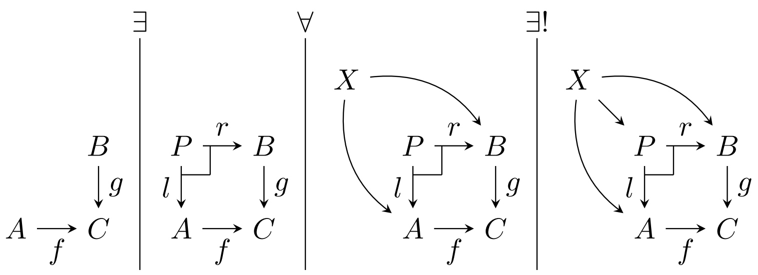


図 9: 引き戻し

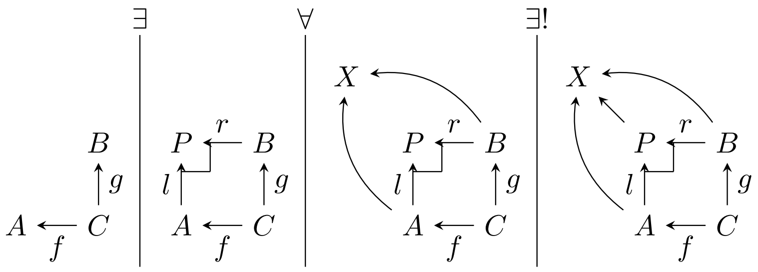


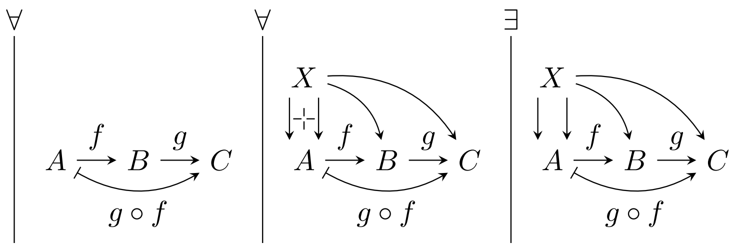
図 10: 押し出し

1.3　ちょっとした性質を一目瞭然にする

(1-) 圏論をやっていると、ほとんど自明で常識とされるけど一応確認したくなるような知識が私には結構ある。そういう知識のうち初等的なものは、図式言語によってほとんど一目瞭然に図解できることがとても多い。

$g \circ f$ が monic ならば f は monic

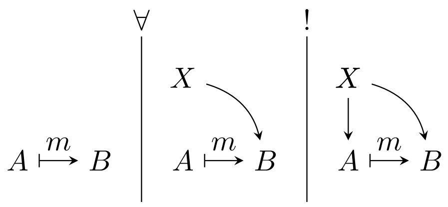
例えば、「任意の圏の任意の射 f, g に対して、$g \circ f$ が monic ならば f が monic」であることは、次のように図解できる。

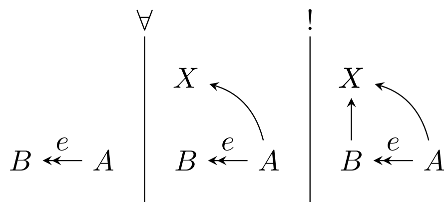


この図式言語の中に、f が monic であることの図式言語が埋まっているのが読み取れるだろう。さらに、いま描いた図式言語の矢印を全部反転させれば、「任意の圏の任意の射 f, g に対して、$f \circ g$ が epic ならば f が epic である」ことの図解が得られて一石二鳥である。

正則 monic、正則 epic

monic、epic 関連の話題だけでも、このような例は枚挙に遑がない。例えば、! を量化記号に見立てて「存在するならば一意」を表すことにしたとき、monic、epic の定義は次のように書くことができる。





これを踏まえれば、イコライザの射影 e が monic であることや、余イコライザの余射影 c が epic であることは、図式言語で描いた定義の中に現れている。

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & \exists & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & \exists & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} B & A \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "c"] & A \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X & & \\ C & B \arrow[l, "c"] \arrow[ul] & A \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X & & \\ C \arrow[u] & B \arrow[l, "c"] \arrow[ul] & A \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}
\end{array}
$$

ある（余）イコライザの（余）射影になっている monic(epic) を**正則 monic(正則 epic)** という。

分裂 monic、分裂 epic

射の組 (x, y) が**分裂 (split)** であることは、次の左図で表せる。また、射 e が**冪等 (idempotent)** であることは右図で表せる。

$$
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \\ & A \end{tikzcd}
$$

図 11: 分裂

$$
\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "e"'] & & A \\ & A \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}
$$

図 12: 冪等

任意の分裂が冪等射を生じることは次の図式から分かる。

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "e"'] & A \arrow[d, "x"] \arrow[dr, "1_A"] & \\
 & B \arrow[r, "y"'] \arrow[dr, "e"'] & A \arrow[d, "x"] \\
 & & B
\end{tikzcd}
$$

ところで任意の恒等射は monic かつ epic であることが次の図式言語から分かる。

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "x"] & \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, "x"] & \\ A \arrow[r, "1_A"'] & A \end{tikzcd}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c}
 & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} A & A \arrow[l, "1_A"] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X & \\ A & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[ul, "x"'] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X & \\ A \arrow[u, "x"] & A \arrow[l, "1_A"] \arrow[ul, "x"'] \end{tikzcd}
\end{array}
$$

よって、(x, y) が分裂ならば、x は monic かつ y は epic である。このような x, y のことをそれぞれ**分裂 monic**、**分裂 epic** と呼ぶ。

■分裂 monic ならば正則 monic　(x, y) を分裂とするとき、x は正則 monic でもあることを示す。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "e"] & \\
 & A \arrow[r, "x"] & B
\end{tikzcd}
$$

diagram-chase により、$x \circ y \circ x = x \circ 1_A$ が読み取れる。さらに圏の公理から、$x \circ 1_A = x = 1_B \circ x$ であるから、次の図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dr, bend left, "1_B"] & \\ & A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd}$$

そこで、任意の z を取り、$1_B \circ z = e \circ z$ が成り立つと仮定すると、diagram-chase より次が成り立つ。

$$\begin{array}{c|c|c} & \forall & \exists \\ \begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dr, bend left, "1_B"] & \\ & A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} X \arrow[dr, "z"] & & \\ A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dr, bend left, "1_B"] & \\ & A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} X \arrow[dr, "z"] \arrow[d, "zy"'] & & \\ A \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "1_A"'] & B \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "e"] \arrow[dr, bend left, "1_B"] & \\ & A \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd} \end{array}$$

x は monic であったから、図式言語中の ∃ には ! をつけてよい。したがって、x は e と 1_B のイコライザの射影である。図式言語中の矢印を全て逆向きにすることによって、分裂 epic は正則 epic であることの図解が得られる。

このように、図式言語では、初等的な命題の多くを詳らかに図解化できてしまう。

1.4 図式言語を交えて、全射についての雑考

図式言語は、初等的な概念を素朴に考える際の思考補助ツールとしても役に立つ。ここでは図式言語を交えながら、数学の全射という概念について素朴に圏論の上で考えていきたい。

集合と写像の圏では、monic は単射で、epic は全射ということが示される。monic の定義は、いかにも単射の定義の一般化である。その一方で、epic の定義は、個人的にはそこまで全射の定義の一般化という感じがしない。全射というのは、順像が終域の全体と一致している写像のことなのだから、次の図式言語で表される概念の方がより全射の定義に近いと感じられる。

$$\begin{array}{c|c|c} & \forall & \exists \\ \begin{tikzcd} A \arrow[d, "c"] \\ B \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[d, "c"] \\ B' \arrow[r, tail] & B \end{tikzcd} & \begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[d, "c"] \\ B' \arrow[r, tail, shift left] & B \arrow[l, shift left] \end{tikzcd} \end{array}$$

図 13: extremal epimorphism

この図式言語では、射 c を $c = f \circ m, m$ は monic となるように任意に分解したとき、常に m は同型射である、と言っている。これは、c が B の真部分対象を経由して分解できないということであり、全射の定義にかなり近いと感じられる。この図式言語を満たす c を **extremal epimorphism** という [2]。epimorphism というのは epic のことであるが、extremal epimorphism が本当に epic になるためには、十分な量のイコライザを必要とする。[*1]イコライザを持つ圏では、extremal epimorphism は epic であることが次の図式言語から分かる。

[*1] ChatGPT 5.2-Thinking に、extremal epimorphism が epic にならない圏の例を尋ねたところ、二元モノイド $\{0, 1\}(0 * 1 = 1 * 0 = 0 * 0 = 0$ で、1 は恒等射) の 0 が該当すると教えてくれて、確かにこれは正しい例であった。

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & \forall & \exists & \exists! \\
\begin{tikzcd} A \arrow[d, two heads, "c"'] \\ B \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} A \arrow[d, two heads, "c"'] \arrow[dr] & \\ B \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] \arrow[r, phantom, "+"] & X \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads, "c"'] \arrow[dr] & \\ E \arrow[r, tail, "e"'] & B \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] \arrow[r, phantom, "+"] & X \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\bar{c}"'] \arrow[d, two heads, "c"'] \arrow[dr] & \\ E \arrow[r, tail, "e"'] & B \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] \arrow[r, phantom, "+"] & X \end{tikzcd}
\end{array}
$$

上の図式言語で c が extremal epimorphism ならば、定義より e は同型射である。したがって $ef = eg \iff f = g$。これは c が epic であることを示しているから、確かに主張が成り立つ。

集合と写像の圏では、全射は extremal epimorphism と一致する。すると、epic が全射であるというのは、「集合と写像の圏では、epic ならば extremal epimorphism である」という性質が成り立つということである。この性質が成り立つ一般的な条件を考えてみよう。

部分対象分類子

圏 $\mathcal{A}$ が**有限完備**であるとは、二項積、イコライザが任意に存在しており、さらに終対象を持つことと同値である。有限完備な圏 $\mathcal{A}$ の対象 Ω が**部分対象分類子**であることは、次の図式言語で表せる。

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & \exists & \forall & \exists! \\
\Omega
&
\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] & A \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "\varphi_M"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & A \arrow[d, "\chi_M"] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
\end{array}
$$

図 14: 部分対象分類子

有限完備な圏に部分対象分類子があると、任意の monic は正則 monic であることが次の図式言語から読み取れる。

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & A \arrow[d, "\chi_M"] \arrow[dl] \\ 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\chi_M"] \arrow[dl] \\ & 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right] \arrow[dr, "\bar{x}"] & & \\ & M \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\chi_M"] \arrow[dl] \\ & 1 \arrow[r, "t"'] & \Omega \end{tikzcd}
\end{array}
$$

m は χ_M と $A \to 1 \xrightarrow{t} \Omega$ のイコライザの射影である。さて、任意の epic$f$ を $f = m \circ \bar{f}$,(m は monic) と分解したときに、部分対象分類子の存在から次の図式言語が成り立つ。

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \forall & \exists! \\
\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & B \\ & B' \arrow[u, tail, "m"'] \end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & B \arrow[r, "\chi_{B'}"] \arrow[dr, phantom, "+"] & \Omega \\ & B' \arrow[u, tail, "m"] \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[ur] & 1 \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}
\end{array}
$$

m は $\chi_{B'}$ と $t \circ \varphi_B$ のイコライザの射影であるが、いま f は epic であるから $\chi_{B'} = t \circ \varphi_B$ が成立する。

2 図式言語の数学的定義

2.1 圏の定義 (2 種類)

ここでは 2 種類の圏の定義を与える。各定義は、今後の用途に応じて使い分けていく。

まずは射だけで定義した圏である。[*2] この定義は、2.3 節で多用することになる。

定義 2.1 (圏の定義：essentially algebraic theory として)**.** 圏とは、射のクラス $\mathcal{A}$ 及びその上の三つの演算 $- \cdot -, \square(-), (-)\square$ から成る。$- \cdot -$ は合成と呼ばれる部分二項演算で、$\square(-), (-)\square$ は、いずれも全域的な単項演算である。三つの演算は以下の公理を満たす。任意の x, y, z に対し、

1. $x \cdot y$ は定義される　iff　$x\square = \square y$
2. $\square(x\square) = x\square$, かつ $(\square x)\square = \square x$
3. $(\square x) \cdot x = x$, かつ $x \cdot (x\square) = x$
4. $\square(x \cdot y) = \square(x \cdot (\square y))$, かつ $(x \cdot y)\square = ((x\square) \cdot y)\square$
5. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

等号 $f = g$ は、「f が定義されることと g が定義されることは同値で、かつ相等しい」ことを表す（Kleene 等号)。仮に定義可能性を非対称的にした等号 $\stackrel{\rightarrow}{=}$ を認める場合、つまり、$f \stackrel{\rightarrow}{=} g$ と書いて「f が定義されるならば g も定義され、相等しい」を表す場合、公理 4 は次と同値になる：

$$\square(x \cdot y) \stackrel{\rightarrow}{=} \square x, \text{かつ } (x \cdot y)\square \stackrel{\rightarrow}{=} y\square$$

$\stackrel{\rightarrow}{=}$ を有向等号と呼ぶことにする。

定義 2.1 の圏を扱う際には、合成は左結合で連結していくことにする。つまり、$x \cdot y \cdot z$ は $(x \cdot y) \cdot z$ の略記である。

定義 2.1 では、一見すると恒等射が与えられていない。しかし、次の命題によって恒等射は特徴付けられることが分かる。

命題 2.2 (恒等射の特徴づけ)**.** 射 e に対し、次は同値：任意の x に対し、$e\square = \square x$ ならば $ex = x$　iff　$\square e = e$

Proof.
■($\Longrightarrow$)　公理 2 より $e\square = \square(e\square)$ であるから、仮定より $e(e\square) = e\square$。一方、公理 3 より、$e(e\square) = e$。よって、$e = e\square$ であるから、$\square e = \square(e\square) = e\square = e$。

■($\Longleftarrow$)　$\square e = e$ と仮定して、任意の x を取るとき、$e\square = \square x$ ならば、$e\square = (\square e)\square = \square e = e$ より、$ex = (e\square)x = (\square x)x = x$。 □

この特徴づけと次の命題から、二つの単項演算 $\square(-), (-)\square$ は、それぞれ射に恒等射を対応づけているのだと分かる。

命題 2.3. $\square(\square x) = \square x$、かつ $(x\square)\square = x\square$。

Proof. 公理 2 を繰り返し適用することで次が成り立つ。$\square x = (\square x)\square = \square((\square x)\square) = \square(\square x)$。$(x\square)\square = x\square$ も同様に示せる。 □

[*2] この話題を取り上げた alg-d 氏の分かり易い動画が存在する。https://www.youtube.com/watch?v=0SrCQpjcQzI

定義 2.4. 定義 2.1 の圏 $\mathcal{A}$ が与えられているとする。このとき恒等射全体のクラスは次で与えられる。$\{e \in \mathcal{A} \mid \square e = e\}$。$\mathcal{A}$ の恒等射の全体を $|\mathcal{A}|$ と書くことにする。

定義 2.5 (関手)**.** $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を圏とするとき、クラス間写像 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が**関手**であるとは、次の公理を満たすことをいう。

- $x = \square y$ ならば、$Fx = \square(Fy)$
- $x = y\square$ ならば、$Fx = (Fy)\square$
- $z = xy$ ならば、$Fz = (Fx)(Fy)$

公理は次のように書いても同値である。

- $F(\square x) = \square(Fx)$
- $F(x\square) = (Fx)\square$
- $F(xy) \overset{\rightarrow}{=} (Fx)(Fy)$

最後の等式が有向等号になる理由は、$(Fx)\square = \square(Fy)$ だが $x\square \neq \square y$ になる場合が有り得るからである。この有向等号が真の等号になるためには、F は恒等射について単射でなければならない。（これは通常の定義でいうところの、対象上で単射な関手のことである。）

次に対象と射で与える圏の定義を導入する。基本的にはこちらで定義した圏を用いていく。

定義 2.6 (圏の定義（ポピュラー版）)**.** 圏 $\mathcal{A}$ とは、

- 対象のクラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- 各 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、A から B への射 (map,morphism) のクラス $\mathcal{A}(A, B)$
- 各 $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、合成と呼ばれる関数 $- \circ -$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(B, C) \times \mathcal{A}(A, B) &\to \mathcal{A}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

- 各 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、A 上の恒等射 $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$

これらの構造が以下の公理を満たすもののことをいう：

- **結合法則**： 任意の $f \in \mathcal{A}(A, B), g \in \mathcal{A}(B, C), h \in \mathcal{A}(C, D)$ に対し、$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- **単位法則**： 任意の $f \in \mathcal{A}(A, B)$ に対し、$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$

$f \in \mathcal{A}(A, B)$ の意味で、$f\colon A \to B$、あるいは $A \xrightarrow{f} B$ などと書く。定義より、任意の射 f に対して、$f\colon A \to B$ を満たす $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が明確に定まっている。A を f の定義域 (domain)、B を f の値域 (codomain) という。射 f に対し、その定義域を $\mathrm{dom}(f)$、値域を $\mathrm{cod}(f)$ とそれぞれ書くことにする。これ以降、f が $\mathcal{A}$ の射であることを $f \in \mathcal{A}$ と略記する。また A が $\mathcal{A}$ の対象であることを $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ と書くことにする。

注意 2.7. ふたつの定義で、射の合成の適用の順序が正反対であることに注意。xy と書いた場合、定義 2.1 の文脈では $x \cdot y$ で、先に x が来るが、定義 2.6 の文脈では $x \circ y$ で、先に y が来ることになる。混乱を避けるため、定義 2.6 の文脈の時には合成の記号を省略しないことにする。

命題 2.8 (ふたつの定義の等価性)**.** 二つの圏の定義は、一方が与えられれば、他方も得られる。

Proof. 定義 2.1 より、圏 $(\mathcal{A}, \square(-), (-)\square, - \cdot -)$ が与えられたとする。ここから定義 2.6 が定める圏を構築する。

- 対象 $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ として、恒等射全体のクラス $|\mathcal{A}|$ を採用する。以下、$\mathcal{A}$ の恒等射を対象として扱う際には、アルファベットの大文字を割り当てることにする。
- 各 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、1_A は A 自身。
- 各 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、射のクラス $\mathcal{A}(A,B) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \mid \square x = 1_A, x\square = 1_B\}$。$x\colon A \to B$ とは、$\square x = 1_A$ かつ $x\square = 1_B$ を表す。
- 任意の $x\colon A \to B, y\colon B \to C$ に対し、合成 $y \circ x \overset{\mathrm{def}}{=} x \cdot y$

このとき、結合法則と単位法則はそれぞれ公理 (1.5),(1.3) そのものであるから、定義 2.6 が定める圏が得られた。

次に、定義 2.6 により、圏 $\mathcal{A}$ が与えられたとする。このとき、

- 射のクラス $\mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \{f \mid \text{ある } A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \text{ で } f \in \mathcal{A}(A,B)\}$
- $\square f \overset{\mathrm{def}}{=} 1_{\mathrm{dom}(f)}$,　$f\square \overset{\mathrm{def}}{=} 1_{\mathrm{cod}(f)}$
- $f \cdot g \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} g \circ f & (\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)) \\ \text{定義されない} & (\mathrm{cod}(f) \neq \mathrm{dom}(g)) \end{cases}$

と定めて、定義 2.1 の公理が成り立つことを示そう。

(1.1) $f \cdot g$ が定義されるとき、$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるから、このとき $f\square = 1_{\mathrm{cod}(f)} = 1_{\mathrm{dom}(g)} = \square g$ が成立。逆に、$f\square = \square g$ であるとき、$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるから、$f \cdot g$ は定義される。

(1.2) $\square(f\square) = \square(1_{\mathrm{cod}(f)}) = 1_{\mathrm{dom}(1_{\mathrm{cod}(f)})} = 1_{\mathrm{cod}(f)} = f\square$、$(\square f)\square = (1_{\mathrm{dom}(f)})\square = 1_{\mathrm{cod}(1_{\mathrm{dom}(f)})} = 1_{\mathrm{dom}(f)} = \square f$

(1.3) $(\square f) \cdot f = f \circ 1_{\mathrm{dom}(f)} = f, f \cdot (f\square) = 1_{\mathrm{cod}(f)} \circ f = f$

(1.4) $\square(x \cdot y) \overset{\rightrightarrows}{=} \square(y \circ x) = 1_{\mathrm{dom}(x)} = \square x, (x \cdot y)\square \overset{\rightrightarrows}{=} (y \circ x)\square = 1_{\mathrm{cod}(y)} = y\square$

(1.5) $x \cdot (y \cdot z) \overset{\rightrightarrows}{=} (z \circ y) \circ x = z \circ (y \circ x) = (x \cdot y) \cdot z, (x \cdot y) \cdot z \overset{\rightrightarrows}{=} z \circ (y \circ x) = (z \circ y) \circ x = x \cdot (y \cdot z)$

以上より、$(\mathcal{A}, \square(-), (-)\square, - \cdot -)$ は定義 2.1 が定める圏である。 $\square$

2.2 圏論の単ソート一階言語と意味論

この小節では、圏論の一階述語論理式の定義を与える。この論理式では、圏の射だけを変数として扱う。対象は恒等射として射の中に含めるため、対象を指す変数は導入しない。

定義 2.9 (圏論の単ソート FOL)**.**
■圏論の単ソート一階言語　変数全体の可算集合を Var で固定する。変数は射を表す。圏論の単ソート一階言語 $\mathcal{L}$ は次のシグネチャからなる。

- 関数記号は、それぞれ始域、終域を表すふたつの単項演算 $\square(-), (-)\square$
- 述語記号は、定義可能な合成を表す三項述語 $\mathrm{Comp}(-,-,-)$[*3]

および等号記号 $=$ からなる。

三項述語 Comp は、合成演算という部分二項演算のグラフを表す述語だと考えて良い。$\mathrm{Comp}(f,g,h)$ と書いたとき、合成 $g \circ f$ が定義されて、$h = g \circ f$ が成り立つことを表している。一階述語論理では関数記号は全

[*3] 本当は essentially algebraic theory で統一したかったが、Kleene 等号が意味論で非常に扱いにくかったため、予定を変更した。

域演算であることが課されるので、部分演算である合成は関数記号ではなく述語記号で対処しようという魂胆である。

次に項を定義する。関数記号は始域演算と終域演算のみであるから、合成は項に現れない。

定義 2.10 (述語論理の項)**.** 項とは、変数記号と関数記号から再帰的に定義される記号列である。

$$\frac{x \in \mathrm{Var}}{x}\ (\mathrm{Var}) \qquad \frac{t}{\Box t}\ (\mathrm{source}) \qquad \frac{t}{t\Box}\ (\mathrm{target})$$

一階述語論理の項全体の集合を $\mathrm{Term}_{\mathbf{FOL}}$ と書くことにする。

項の次は論理式を定義する。なお、本稿で焦点を当てたいのは意味論であるから、一階述語論理の構文論には立ち入らない。

定義 2.11 (一階述語論理式)**.** 論理式を次のように再帰的に定義する。

$$\varphi ::= (t_1 = t_2) \ |\ \mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3) \ |\ (\varphi \wedge \psi) \ |\ (\varphi \vee \psi) \ |\ \neg\varphi \ |\ \forall x.\varphi \ |\ \exists x.\varphi$$

ただし $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_{\mathbf{FOL}}, x \in \mathrm{Var}$。

扱うのは古典論理である。含意 $\varphi \Rightarrow \psi$ は $\neg\varphi \vee \psi$ で表す。$\varphi \iff \psi$ は $\varphi \Rightarrow \psi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ の略記である。

定義 2.12 (変数割り当てと代入)**.** $\mathcal{B}$ を圏とするとき、**変数割り当て**とは写像 $\rho\colon \mathrm{Var} \to \mathcal{B}$ のことをいう。変数割り当て ρ が与えられているとして、変数 $x \in \mathrm{Var}$ と射 $b \in \mathcal{B}$ をそれぞれ取るとき、$\rho[x := b]$ と書いて、次の変数割り当てを表すものとする。

$$\rho[x := b](y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} b & (x = y) \\ \rho(y) & (x \neq y) \end{cases}$$

定義 2.13 (自由変数、束縛変数)**.** 項 t が持つ変数の集合を $\mathrm{Var}(t)$ で表す。その上で、論理式 φ が持つ**自由変数**の集合を $\mathrm{FV}(\varphi)$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(t_1 = t_2) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Var}(t_1) \cup \mathrm{Var}(t_2) \\
\mathrm{FV}(\mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3)) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Var}(t_1) \cup \mathrm{Var}(t_2) \cup \mathrm{Var}(t_3) \\
\mathrm{FV}(\varphi \wedge \psi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi) \\
\mathrm{FV}(\varphi \vee \psi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi) \cup \mathrm{FV}(\psi) \\
\mathrm{FV}(\neg\varphi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi) \\
\mathrm{FV}(\forall x.\varphi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\} \\
\mathrm{FV}(\exists x.\varphi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

$\forall x.\varphi, \exists y.\psi$ など、量化記号とともに現れる変数を**束縛変数**という。

■定義した一階述語論理で圏の公理を書く　定義した一階述語論理で、定義 2.1 の公理を翻訳したものが次のリストである。

- $\forall x.\forall y.x\Box = \Box y \iff (\exists z.\mathrm{Comp}(x, y, z))$
- $\forall x.\Box(x\Box) = x\Box \wedge (\Box x)\Box = \Box x$
- $\forall x.\forall y.(\mathrm{Comp}(\Box x, x, y) \iff y = x) \wedge (\mathrm{Comp}(x, x\Box, y) \iff y = x)$
- $\forall x.\forall y.\forall z.\mathrm{Comp}(x, y, z) \Rightarrow (\Box x = \Box z \wedge y\Box = z\Box)$

- $\forall x.\forall y.\forall z.\forall u.\forall v.\forall u'.\forall v'.\mathrm{Comp}(x,y,u) \wedge \mathrm{Comp}(u,z,v) \wedge \mathrm{Comp}(x,u',v') \wedge \mathrm{Comp}(y,z,u') \Rightarrow v = v'$

定義 2.14 (項と論理式の解釈、充足関係)**.** サイズの問題を避けるため、Grothendieck 宇宙 U を固定し、U-小圏で考える。圏 $\mathcal{B}$ を一つ固定し、変数割り当て $\rho\colon \mathrm{Var} \to \mathcal{B}$ を与えたものとする。項 $t \in \mathrm{Term}_{\mathbf{FOL}}$ の**解釈** $[\![t]\!]_\rho \in \mathcal{B}$ を次で定義する。

$$[\![x]\!]_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \rho(x)$$
$$[\![\Box t]\!]_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} 1_{\mathrm{dom}([\![t]\!]_\rho)}$$
$$[\![t\Box]\!]_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} 1_{\mathrm{cod}([\![t]\!]_\rho)}$$

次に論理式 φ の**充足関係** $\mathcal{B}, \rho \models \varphi$ を次のように定義する。

- 原子論理式：

$$\mathcal{B}, \rho \models (t_1 = t_2) \iff [\![t_1]\!]_\rho = [\![t_2]\!]_\rho$$
$$\mathcal{B}, \rho \models \mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3) \iff \mathrm{cod}([\![t_1]\!]_\rho) = \mathrm{dom}([\![t_2]\!]_\rho) \text{ かつ } [\![t_3]\!]_\rho = [\![t_2]\!]_\rho \circ [\![t_1]\!]_\rho$$

- 論理結合子：

$$\mathcal{B}, \rho \models \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{B}, \rho \models \varphi \text{ かつ } \mathcal{B}, \rho \models \psi$$
$$\mathcal{B}, \rho \models \varphi \vee \psi \iff \mathcal{B}, \rho \models \varphi \text{ または } \mathcal{B}, \rho \models \psi$$
$$\mathcal{B}, \rho \models \neg\varphi \iff \mathcal{B}, \rho \models \varphi \text{ は不成立}$$

- 量化子：

$$\mathcal{B}, \rho \models \forall x.\varphi \iff \text{任意の } b \in \mathcal{B} \text{ に対して、} \mathcal{B}, \rho[x := b] \models \varphi$$
$$\mathcal{B}, \rho \models \exists x.\varphi \iff \text{ある } b \in \mathcal{B} \text{ に対して、} \mathcal{B}, \rho[x := b] \models \varphi$$

例 2.15. m が monic であることの定義は、

$$\forall x.\forall y.(\exists z.\mathrm{Comp}(x,m,z) \wedge \mathrm{Comp}(y,m,z)) \Rightarrow x = y$$

と書ける。圏 $\mathcal{B}$ と変数割り当て ρ を与えた場合、この論理式が充足されることは、任意の射 $\rho(x), \rho(y) \in \mathcal{B}$ について、$\rho(m) \circ \rho(x) = \rho(m) \circ \rho(y)$ ならば $\rho(x) = \rho(y)$ であることを言っている。

2.3 圏の有限表示とその理論、及び有限表示圏

ここで一旦、図式の話に移ろう。可換図式は、射の連立方程式を有向グラフの形で図示した informal な概念である。formal には、有向グラフから圏を自由生成して、そこから出る関手の像を一般の圏の図式として扱う。教科書ではよく、グラフとグラフ写像から成る圏と、圏と関手からなる圏との間の随伴としてこの話題を扱うことがあるが、本稿ではそれとは少し違った角度で図式の普遍性を捉える。

有限図式に限定して考えるとき、essentially algebraic theory としての圏論では、可換図式は**有限表示 (finite presentation)** という formal な概念で記述できる。そして、有限有向グラフから自由生成される圏は、有限表示によって生成される代数のように構成できる。こうしておくと、あとで一階述語論理の解釈と図式言語を擦り合わせるときに、一般の小圏 $\mathcal{B}$ における論理式の充足と、$\mathcal{B}$ にある種の図式の族が存在することとが、容易に関連づけられるようになる。

定義 2.16 (圏の有限表示)**.** **圏の有限表示**とは、変数の有限集合 X と、X から生成された項の等式の有限集合 $\mathbf{Eq}$ の組 $(X, \mathbf{Eq})$ のことをいう。

定義 2.17 (有限表示の項)**.** 有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ が与えられているとき、有限集合 X から生成された項とは、次で再帰的に定義される記号列である。

$$\frac{x \in X}{x}\ (\text{Var of X}) \qquad \frac{t}{\Box t}\ (\text{Source}) \qquad \frac{t}{t\Box}\ (\text{Target}) \qquad \frac{t_1 \qquad t_2}{t_1 t_2}\ (\text{Comp})$$

一階述語論理の項では、合成演算は述語記号扱いして、項には合成を持ち込まなかった。しかし有限表示の項では、合成演算も項に含めることにする。

定義 2.18 (部分項)**.** 有限表示の項 t に対し、t の部分項全体の集合 $\mathrm{sub}(t)$ を次の再帰関数で定義する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{sub}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \quad (x \text{ は変数}) \\
\mathrm{sub}(\Box t) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t\} \cup \mathrm{sub}(t) \\
\mathrm{sub}(t\Box) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t\} \cup \mathrm{sub}(t) \\
\mathrm{sub}(t_1 t_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \{t_1, t_2\} \cup \mathrm{sub}(t_1) \cup \mathrm{sub}(t_2)
\end{aligned}$$

例 2.19 (有限図式を圏の有限表示に)**.** 有限図式の持つ情報は、圏の有限表示で正確に記述できる。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\bar{x}"'] \arrow[dr, "x"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[r, phantom, "+"] & B
\end{tikzcd}$$

- $X = \{f, g, e, x, \bar{x}\}$
- $\mathbf{Eq} = \{ef = eg, x = \bar{x}e\}$

可換図式からは、$xf = xg$ なども読み取れる。この等式は $\mathbf{Eq}$ に属していないが、$\mathbf{Eq}$ の各式と圏の公理から連立方程式を解いて導出できる。

$$x = \bar{x}e \text{ より、} xf = \bar{x}ef = \bar{x}eg = xg\text{、} \therefore xf = xg$$

有限表示にしたがって合同関係を作り、項集合を割って所望の圏を得たい。しかし、射の合成は部分演算であり、必ずしも任意のふたつの射の間には定義されていないので、項の中には未定義な合成を持っているものが存在しうる。そういう項がある中で合同類を取っても、未定義の合成を含んだ項の合同類という謎の射が発生しかねない。それを回避するために、定義可能な合成だけを持つ項の全体を与え、これを合同関係で割るという方針を取りたい。定義可能な項を定義し、その上の合同関係を与えるために、推論規則を導入する。

定義 2.20 (有限表示の理論)**.** 圏の有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ が与えられているとする。このとき、**有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ の理論**とは、$\mathbf{Eq}$ の各等式を公理として、図 15 の推論体系によって与えられる理論のことをいう。

推論規則の設計意図を述べる。$\mathbf{Eq}$ を理論の公理として定めたので、合成の定義可能性も、$\mathbf{Eq}$ から導出可能な条件に限られる。（つまり、$\mathbf{Eq}$ の各等式に、規則 (s-t) 及び (s-t sub) を適用して得られる等式の全体が、合成の定義可能性の全体を与える。）ところが、X から生成された項の中には、定義されない合成を含むものが存在し得るから、そういう項を避けて、定義される合成のみを含んだ項の全体を得ようとしている。[*4](defined-comp) はまさにそれを意図している。また、(refl on X) で等式の反射律が X の元に制限されていたり、圏の公理が推論規則として扱われているのも、この意図に基づく。則ち、反射律や圏の公理を、X から生成された項の全体に認めてしまうと、定義されない合成を含んだ項が出現し放題になってしまうから、反射律は X 上に制限し、一般の項 t に対しては、$t = t$ を証明することを課している。そして圏の公理も、$t = t$ が証明された項 t のみに対して適用するよう制限をかけている。なお、$t = t'$ が証明されるならば、(trans) と (symm) により、$t = t, t' = t'$ が直ちに証明されることに注意。

$\mathbf{Eq}$ から推論規則によって $t = t'$ が証明されることを、$\mathbf{Eq} \vdash t = t'$ と書くことにする。

例 2.21 (証明の例)**.** 任意の有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ の任意の項 t に対し、$\mathbf{Eq} \vdash t = t$ ならば $\Box(\Box t) = \Box t$ が成り立

[*4] 有向グラフから自由生成する圏で言うところの、可能な経路の全体を考えることに相当する。

$$\frac{x \in X}{x = x}\,(\text{refl on } X) \qquad \frac{t = t'}{t' = t}\,(\text{symm}) \qquad \frac{t = t' \quad t' = t''}{t = t''}\,(\text{trans})$$

$$\frac{t = t'}{\square t = \square t'}\,(\square\text{左}) \qquad \frac{t = t'}{t\square = t'\square}\,(\square\text{右})$$

$$\frac{t_1 = t_2 \quad t_3 = t_4 \quad t_1\square = \square t_3}{t_1 t_3 = t_2 t_4}\,(\text{defined-comp})$$

$$\frac{t = t_1 t_2}{t_1\square = \square t_2}\,(\text{s-t}) \qquad \frac{t = t' \quad t_1 t_2 \in \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')}{t_1\square = \square t_2}\,(\text{s-t sub})$$

$$\frac{t = t}{\square(t\square) = t\square}\,(\text{ax-2.1}) \qquad \frac{t = t}{(\square t)\square = \square t}\,(\text{ax-2.2})$$

$$\frac{t = t}{(\square t)t = t}\,(\text{ax-3.1}) \qquad \frac{t = t}{t(t\square) = t}\,(\text{ax-3.2})$$

$$\frac{t_1 = t_1 \quad t_2 = t_2 \quad t_1\square = \square t_2}{\square(t_1 t_2) = \square(t_1(\square t_2))}\,(\text{ax-4.1}) \qquad \frac{t_1 = t_1 \quad t_2 = t_2 \quad t_1\square = \square t_2}{(t_1 t_2)\square = ((t_1\square)t_2)\square}\,(\text{ax-4.2})$$

$$\frac{t_1 = t_1 \quad t_2 = t_2 \quad t_3 = t_3 \quad t_1\square = \square t_2 \quad t_2\square = \square t_3}{(t_1 t_2)t_3 = t_1(t_2 t_3)}\,(\text{ax-5})$$

図 15: 有限表示の理論の推論規則

つことを示そう。このことは、$t = t$ だけを仮定して $\square(\square t) = \square t$ を導出する証明図を実際に構成してみせれば良い。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{t = t}{(\square t)\square = \square t}\,(\text{ax-2.2})}{\square((\square t)\square) = \square(\square t)}\,(\square\text{左})}{\square(\square t) = \square((\square t)\square)}\,(\text{symm}) \quad \dfrac{\dfrac{t = t}{\square t = \square t}\,(\square\text{左})}{\square((\square t)\square) = (\square t)\square}\,(\text{ax-2.1})}{\square(\square t) = (\square t)\square}\,(\text{trans}) \quad \dfrac{t = t}{(\square t)\square = \square t}\,(\text{ax-2.2})}{\square(\square t) = \square t}\,(\text{trans})$$

図 16: $\square(\square x) = \square x$ の証明

定義 2.22 (($X, \mathbf{Eq}$) によって定義される項の集合)**.** 有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ が与えられているとき、$(X, \mathbf{Eq})$ の理論に登場する項全体の集合を $\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ と書くことにする。

$$\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})} \overset{\text{def}}{=} \{t \mid \mathbf{Eq} \vdash t = t\}$$

補題 2.23. 任意の項 u, t に関して、$u \in \mathrm{sub}(t)$ ならば、$\mathrm{sub}(u) \subseteq \mathrm{sub}(t)$。

Proof. u に関する項の構造帰納法。 □

補題 2.24. 任意の $(t = t') \in \mathbf{Eq}$ に対し、$\mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t') \subseteq \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$

Proof. $(t = t') \in \mathbf{Eq}$ を任意にとり、任意の u に対し、$u \in \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ ならば $u \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ であることを、u に関する項の構造帰納法で示す。

- $u \equiv x \in X$ ならば $\mathrm{sub}(u) = \emptyset \subseteq \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ が成立。
- (Source)、(Target) の場合は帰納法の仮定とそれぞれ (□ 左)、(□ 右) から直ちに従う。

- (Comp) の場合について。$u \equiv vw$ と置く。u は t または t' の部分項であるから、補題 2.23 より、$\mathrm{sub}(u) \subseteq \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ が成立。よって $v, w \in \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ であるから、帰納法の仮定より $v, w \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ が成立。したがって $\mathbf{Eq} \vdash v = v, \mathbf{Eq} \vdash w = w$ である。そして $u \equiv vw \in \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ であるから、(s-t sub) により $\mathbf{Eq} \vdash v\Box = \Box w$。よって (defined-comp) により、$\mathbf{Eq} \vdash vw = vw$、$\therefore u \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$。以上より任意の $u \in \mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t')$ に対し $u \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ であるから、$\mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t') \subseteq \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$。

□

補題 2.25 (部分項補題)**.** $\mathbf{Eq} \vdash t = t'$ ならば、$\mathrm{sub}(t) \cup \mathrm{sub}(t') \subseteq \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$

Proof. $t = t'$ を証明する証明図に関する構造帰納法。いずれも $\mathrm{sub}(-)$ の定義と帰納法の仮定と推論規則から単純計算できる。 □

補題 2.26 (正規化補題)**.** 任意の $t \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し、次のいずれかが成り立つ。

- ある $x \in X$ が存在して、$\mathbf{Eq} \vdash t = \Box x$ または $\mathbf{Eq} \vdash t = x\Box$
- ある $x_1, x_2, \cdots x_k \in X (x_i\Box = \Box x_{i+1}, 1 \leq i \leq k-1)$ が存在して、$\mathbf{Eq} \vdash t = x_1 x_2 \cdots x_k$

Proof. 部分項補題により、項の構造帰納法が回る。つまり、任意の $t \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し $\mathrm{sub}(t) \subseteq \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ であるから、帰納法の仮定が t の部分項に適用できる。 □

命題 2.27. $t, t' \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し、$t \sim t' \overset{\mathrm{def}}{\iff} \mathbf{Eq} \vdash t = t'$ という二項関係を定義すると、これは $\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ 上の合同関係である。

Proof. $\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ の定義や (symm)、(trans)、(□ 左)、(□ 右)、(defined-comp) からほとんど明らか。 □

定義 2.28 (有限表示圏)**.** 有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ が与えられたとき、有限表示の理論を通じて次の構成を標準的に得る。

- 射のクラスは、商集合 $\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}/\sim$
- $\Box[t] \overset{\mathrm{def}}{=} [\Box t]$
- $[t]\Box \overset{\mathrm{def}}{=} [t\Box]$
- $[t_1][t_2] \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} [t_1 t_2] & \mathbf{Eq} \vdash t_1\Box = \Box t_2 \\ \text{未定義} & \text{(それ以外)} \end{cases}$

これが圏の公理 2〜5 を満たすことは、推論規則 (ax 2.1)〜(ax 5) の存在から直ちに分かる。公理 1 に関しても、$[t]\Box = \Box[t']$ iff $[t\Box] = [\Box t']$ iff $\mathbf{Eq} \vdash t\Box = \Box t'$ であることから成立。よってこの構造物は圏を成す。この圏を、有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ から自由生成された圏、略して有限表示圏と呼ぶことにし、$\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})}$ と書くことにする。

命題 2.29. 任意の有限表示圏で、恒等射の全体は高々有限である。

Proof. 正規化補題により、任意の恒等射はある $x \in X$ によって $[\Box x], [x\Box]$ の形で表される。X が有限集合であるから、$n = |X|$ として、恒等射の総数は $2n$ 以下である。 □

定義 2.30 (有限表示の理論のストラクチャー)**.** 有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ が与えられたとする。このとき、対象領域

となる圏 $\mathcal{B}$ に対する変数割り当て $\rho\colon X\to\mathcal{B}$ に基づいて、解釈関数 $[\![-]\!]_\rho\colon \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}\to\mathcal{B}$ を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]_\rho &\overset{\mathrm{def}}{=} \rho(x)\\
[\![\Box t]\!]_\rho &\overset{\mathrm{def}}{=} \Box([\![t]\!]_\rho)\\
[\![t\Box]\!]_\rho &\overset{\mathrm{def}}{=} ([\![t]\!]_\rho)\Box\\
[\![t_1t_2]\!]_\rho &\overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases}[\![t_1]\!]_\rho[\![t_2]\!]_\rho & ([\![t_1]\!]_\rho\Box=\Box[\![t_2]\!]_\rho)\\ \text{未定義} & \text{それ以外}\end{cases}
\end{aligned}
$$

圏 $\mathcal{B}$ と変数割り当て ρ の組を、$\mathbf{Eq}$ の理論のストラクチャーと呼ぶことにする。

定義 2.31 (充足、$\mathbf{Eq}$ の解)**.** $(X,\mathbf{Eq})$ を有限表示、$\mathcal{B},\rho$ を $\mathbf{Eq}$ の理論のストラクチャーとする。項 t,t' に対して、$[\![t]\!]_\rho,[\![t']\!]_\rho$ が定義されて、かつ $[\![t]\!]_\rho=[\![t']\!]_\rho$ が成り立つとき、$\mathcal{B},\rho$ は $t=t'$ を充足すると言い、$\mathcal{B},\rho\models t=t'$ と書くことにする。さらに、Σ を $\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ の元に関する等式の集合とするとき、任意の $(u=v)\in\Sigma$ に対して $\mathcal{B},\rho\models u=v$ であるとき、$\mathcal{B},\rho$ は Σ を充足すると言い、$\mathcal{B},\rho\models\Sigma$ と書くことにする。$\mathcal{B},\rho\models\mathbf{Eq}$ が成り立つとき、ρ を $\mathbf{Eq}$ の解と呼ぶことにする。

命題 2.32. $\mathcal{B},\rho$ を $(X,\mathbf{Eq})$ の理論のストラクチャーとする。任意の $t\in\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し、$[\![t]\!]_\rho$ の値が定義されるならば、任意の $u\in\mathrm{sub}(t)$ に対し、$[\![t]\!]_\rho$ の値が定義される。

Proof. 部分項補題より、項の構造帰納法が回る。 □

定理 2.33 (健全性定理)**.** $(X,\mathbf{Eq})$ を有限表示とし、$\mathcal{B},\rho$ は理論のストラクチャーで、ρ は $\mathbf{Eq}$ の解だとする。このとき、$\mathbf{Eq}\vdash t=t'$ ならば $\mathcal{B},\rho\models t=t'$ が成り立つ。

Proof. $t=t'$ を証明する証明図に関する構造帰納法。(s-t sub) のみ変則的なので示そう。証明の最後のワンステップが

$$
\frac{t=t' \qquad t_1t_2\in\mathrm{sub}(t)\cup\mathrm{sub}(t')}{t_1\Box=\Box t_2}
$$

だったとする。$\mathbf{Eq}\vdash t=t'$ であるから、帰納法の仮定より、$[\![t]\!]_\rho,[\![t']\!]_\rho$ の値はそれぞれ定義されて、しかも相等しい。いま t_1t_2 は t または t' の部分項であるから、命題 2.32 より、$[\![t_1t_2]\!]_\rho$ の値は定義される。$[\![t_1t_2]\!]_\rho=[\![t_1]\!]_\rho[\![t_2]\!]_\rho$ であるから、右辺が定義されるということは、$[\![t_1]\!]_\rho\Box=\Box[\![t_2]\!]_\rho$。したがって、$\mathcal{B},\rho\models t_1\Box=\Box t_2$ が成立。 □

定義 2.34 (標準解、有限表示の理論の標準ストラクチャー)**.** 有限表示 $(X,\mathbf{Eq})$ が与えられたとする。有限表示圏 $\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})}$ と変数割り当て $\mathtt{ST}\colon X\to\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})},x\mapsto[x]$ の組 $(\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})},\mathtt{ST})$ をストラクチャーとするとき、$\mathtt{ST}$ は $\mathbf{Eq}$ の解となる。$\mathtt{ST}$ を標準解、$\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})},\mathtt{ST}$ を標準ストラクチャーと呼ぶことにする。

定理 2.35 (関手と解の一対一対応)**.** 有限表示 $(X,\mathbf{Eq})$ が与えられていて、$\mathcal{B},\rho$ は $\mathbf{Eq}$ の理論を充足する任意のストラクチャーだとする。このとき、ある関手 $F\colon\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})}\to\mathcal{B}$ が一意的に存在して、$[\![-]\!]_\rho=F\circ[\![-]\!]_{\mathtt{ST}}$ が成り立つ。

Proof. $[\![-]\!]_\rho\colon\mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}\colon\mathcal{B}$ が任意に与えられているとき、$F_\rho\colon\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})}\to\mathcal{B}$ を、$F_\rho[t]\overset{\mathrm{def}}{=}[\![t]\!]_\rho$ で定義する。このとき健全性定理より、$\mathbf{Eq}\vdash t=t'$ ならば $F_\rho[t]=[\![t]\!]_\rho=[\![t']\!]_\rho=F_\rho[t']$ であるから、F_ρ は well-defined である。そして、$F_\rho(\Box[t])=[\![\Box t]\!]_\rho=\Box[\![t]\!]_\rho=\Box(F_\rho[t])$、同様に $F_\rho[t\Box]=(F_\rho[t])\Box$、$F_\rho([t_1][t_2])\overset{?}{=}F_\rho[t_1t_2]=[\![t_1t_2]\!]_\rho=[\![t_1]\!]_\rho[\![t_2]\!]_\rho=(F_\rho[t_1])(F_\rho[t_2])$ より、F_ρ は関手の公理を満たす。$[\![-]\!]_\rho=F_\rho\circ[\![-]\!]_{\mathtt{ST}}$ も明らか。

逆に、関手 $F\colon\mathcal{A}_{(X,\mathbf{Eq})}\to\mathcal{B}$ が任意に与えられたとき、$\rho_F\colon X\to\mathcal{B}$ を $x\mapsto F[x]$ で定めることにする。このとき、$[\![-]\!]_{\rho_F}=F\circ[\![-]\!]_{\mathtt{ST}}$ が成立する。(項の構造帰納法から直ちに従う。) このとき、ρ_F は $\mathbf{Eq}$ の解で

ある：$(u = v) \in \mathbf{Eq}$ を任意の元とするとき、$\mathbf{Eq} \vdash u = v$ より $[u] = [v]$ であるから、$F[u] = F[v]$、よって $\mathcal{B}, \rho_F \models u = v$。 □

2.4 Q 木

図式言語の数学的定義を行う。1 節では、図式言語とは有限図式が作る有限列や有限木のうち、ある種のルールを満たすもののこととしていた。有限図式を圏の有限表示、更には有限表示圏に置き換えた場合、これは圏と関手が成す圏の中に現れるデータだと見なすことができる。それが具体的にどういうデータなのかを数学的に定式化してしまおう。そして、それらのデータが一階述語論理式と関係を持っていることを確認していこう。

グラフ理論の木のことを考える。根付きの木では、根 0 ではないノード v に対し、v の親ノードが一意に定まるという特徴がある。$v(\neq 0)$ の親ノードを、v^* で表すことにする。

定義 2.36 (Q 木、A_v 根部分 Q 木、有限 Q 木)**.** 根付きの木 T が与えられているとする。T のノードを $V(T)$ と書くことにする。このとき、圏 $\mathcal{A}$ の **Q 木**とは、三つの族 $(A_v)_{v \in V(T)}$（$\mathcal{A}$ の対象の族）、$(a_v \colon A_{v^*} \to A_v)_{v \in V(T) \setminus \{0\}}$（$\mathcal{A}$ の射の族）、$(Q_v)_{v \in V(T)}$（量化記号 $\forall$ または $\exists$ から成る族）の組である。これ以降、根付き木 T で添字づけられた Q 木を $\mathbf{T}$ と書くことにする。Q 木を描く際、葉（子を持たないノード）で添字づけられた $\forall$ は省略することにする。一方、葉で添字づけられた $\exists$ は明記する。

各 $v \in V(T)$ に対し、v を新たな根と見做してその子孫のノードが作る部分木を考えることができる。これを v 根部分木と呼ぶことにする。$\mathbf{T}$ が与えられているとき、各 $v \in V(T)$ に対し、$\mathbf{T}$ の部分木で v 根部分木に添字づけられたものが一意に定まる。これを A_v **根部分 Q 木**と呼ぶことにし、$\mathbf{T}_{v\downarrow}$ と書き表すことにする。

添字を与える根付き木が有限木のとき、Q 木 $\mathbf{T}$ を**有限 Q 木**と呼ぶことにする。これ以降、Q 木と言えば有限 Q 木を指すことにする。

Q 木は、おおよそ次のように模式化できる。

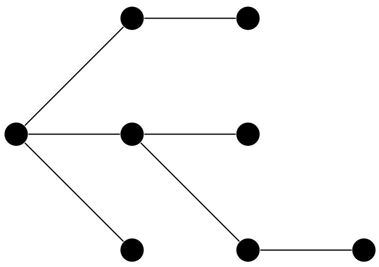


図 17: 根付き木 T のイメージ

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{Q_{v_1}}{A_{v_1}} \arrow[r, "a_{v_4}"] & \overset{Q_{v_4}}{A_{v_4}} & \\
\overset{Q_0}{A_0} \arrow[ur, "a_{v_1}"] \arrow[r, "a_{v_2}"] \arrow[dr, "a_{v_3}"] & \overset{Q_{v_2}}{A_{v_2}} \arrow[r, "a_{v_5}"] \arrow[dr, "a_{v_6}"] & \overset{Q_{v_5}}{A_{v_5}} & \\
 & \overset{Q_{v_3}}{A_{v_3}} & \overset{Q_{v_6}}{A_{v_6}} \arrow[r, "a_{v_7}"] & \overset{Q_{v_7}}{A_{v_7}}
\end{tikzcd}
$$

図 18: T で添字づけられた Q 木 $\mathbf{T}$ のイメージ

定義 2.37 (有限 Q 木の充足)**.** 有限 Q 木 $\mathbf{T} = ((A_v)_v, (Q_v)_v, (a_v)_{v \neq 0})$ が与えられたとする。このとき、射 $s_0 \colon A_0 \to B$ がこの Q 木を**充足する**ということを、再帰的に次のように定義する。

- $Q_0 = \forall$ の場合、0 の任意の子ノード $v \in V(T) \setminus \{0\}, v^* = 0$ と、任意の射 $s_v \colon A_v \to B$ に対し、$s_0 = s_v \circ a_v$ が成り立つならば、s_v は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足する。
- $Q_0 = \exists$ の場合、0 のある子ノード $v \in V(T), v^* = 0$ に対して、ある射 $s_v \colon A_v \to B$ で、$s_0 = a_v s_v$ かつ $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足するものが存在する。

$s_0\colon A_0 \to B$ が Q 木 $\mathbf{T}$ を充足することを、$B, s_0 \models \mathbf{T}$ と書くことにする。

定義 2.38 (相補 Q 木)**.** Q 木 $\mathbf{T} = ((A_v)_v, (Q_v)_v, (a_v)_{v\neq 0})$ が与えられたとする。このとき、全ての $v \in V(T)$ に対し、Q_v の $\forall, \exists$ を入れ替えたもののことを、**相補 Q 木**と呼ぶことにし、$\mathbf{T}^c$ で書き表す。Q_v の相補を、Q_v^c と書くことにする。例えば $Q_v = \forall$ ならば、$Q_v^c = \exists$。逆も然り。

命題 2.39. *Q 木 $\mathbf{T} = ((A_v)_v, (Q_v)_v, (a_v)_{v\neq 0})$ と射 $s_0\colon A_0 \to B$ が与えられているとする。このとき s_0 が $\mathbf{T}$ を充足するならば、s_0 は相補 Q 木 $\mathbf{T}^c = ((A_v)_v, (Q_v^c)_v, (a_v)_{v\neq 0})$ を充足しない。また、s_0 が $\mathbf{T}$ を充足しないならば、s_0 は $\mathbf{T}^c$ を充足する。*

Proof. 添字の木 T に関する構造帰納法。まず、添字が根だけからなる木構造の場合、定義より、$s_0\colon A_0 \to B$ がこれを充足することは、$Q_0 = \forall$ であることと同値。よって、相補を取ると、$Q_0 = \exists$ になり、s_0 はこれを充足しない。次に、木が根以外にもノードを持つ場合について。Q_0 の内容で場合分けして考察する。

- $Q_0 = \forall$ の場合。このとき、任意の $v \in V(T) \setminus \{0\}$ で $v^* = 0$ を満たすものに対し、$s_v\colon A_v \to B$ が $s_0 = s_v \circ a_v$ を満たすならば、s_v は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足する。帰納法の仮定から、これらの s_v は $\mathbf{T}_{v\downarrow}^c$ を充足しない。ここでいま $\mathbf{T}$ の相補 $\mathbf{T}^c$ を取ると、$Q_0^c = \exists$ となる。s_0 がこの相補木を充足するためには、0 のある子ノード $v \in V(T) - \{0\}, v^* = 0$ で $s_v\colon A_v \to B, s_0 = s_v \circ a_v$ かつ $\mathbf{T}_{v\downarrow}^c$ を充足するものが存在しなければならないが、帰納法の仮定はそれが成り立たないことを言っている。よって s_0 は $\mathbf{T}^c$ を充足しない。
- $Q_0 = \exists$ の場合。このとき、ある $v_1\colon v_1^* = 0$ に対し、$s_{v_1}\colon A_{v_1} \to B$ で、$s_0 = s_{v_1} \circ a_{v_1}$ かつ $\mathbf{T}_{v_1\downarrow}$ を充足するものが存在する。帰納法の仮定から、s_{v_1} は $\mathbf{T}_{v_1}^c$ を充足しない。ここでいま $\mathbf{T}$ の相補 $\mathbf{T}^c$ を取ると、$Q_0^c = \forall$ となる。しかしこのとき、s_{v_1} の存在により s_0 は $\mathbf{T}^c$ を充足し得ない。

よって s_0 は与えられた木の相補を充足しない。

s_0 が $\mathbf{T}$ を充足しないならば $\mathbf{T}^c$ を充足することも、同様の帰納法から証明が成り立つ。 □

2.4.1 $\mathbf{Cat}_{\mathcal{U}}$ の Q 木と論理式の充足

以下、Grothendieck 宇宙 $\mathcal{U}$ を固定し、$\mathcal{U}$-小圏と関手の成す圏 $\mathbf{Cat}_{\mathcal{U}}$ で考える。2.2 節で、一階述語言語とその充足について定義した。一方で、今、Q 木に対しても充足が定義されている。この二種類の充足が、$\mathbf{Cat}_{\mathcal{U}}$ に於いてある種の同値性を持つことを示していく。

定義 2.40 (有限表示的な Q 木)**.** $\mathbf{Cat}_{\mathcal{U}}$ の有限 Q 木 $\mathbf{T} = ((\mathcal{A}_v)_v, (Q_v)_v, (a_v)_{v\neq 0})$ が**有限表示的 (finitary presented)** であるとは、任意の $v \in V(T)$ に対し $\mathcal{A}_v$ が有限表示圏であることをいう。

定義 2.41 (正規 Q 木)**.** 有限表示的な Q 木 $\mathbf{T} = ((\mathcal{A}_v)_v, (Q_v)_v, (a_v)_{v\neq 0})$ が**正規 Q 木**であるとは、任意の $v \in \mathrm{V}(T) - \{0\}$ に対し、$\mathcal{A}_{v^*}, \mathcal{A}_v$ を与える有限表示 $(X_{v^*}, \mathbf{Eq}_{v^*}), (X_v, \mathbf{Eq}_v)$ で $X_{v^*} \subseteq X_v$ が成り立ち、かつ関手 $a_v\colon \mathcal{A}_{v^*} \to \mathcal{A}_v$ と対応する解が包含写像 $\mathrm{inc}_v\colon X_{v^*} \hookrightarrow X_v$ と標準割り当て $\mathtt{ST}_v\colon X_v \to \mathcal{A}_v$ の合成であること、則ち任意の $x \in X_{v^*}$ に対し、$a_v[x]_{v^*} = [x]_v$ が成り立つことをいう。

$$\begin{array}{ccc} X_{v^*} & \xhookrightarrow{\mathrm{inc}_v} & X_v \\ {\scriptstyle \mathtt{ST}_{v^*}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathtt{ST}_v} \\ \mathcal{A}_{v^*} & \xrightarrow[a_v]{} & \mathcal{A}_v \end{array}$$

図 19: 任意の $v \neq 0$ で、a_v は解 $\mathtt{ST}_v \circ \mathrm{inc}_v$ と一対一の関手

正規 Q 木というのは要するに、有限表示の変数集合が木構造にしたがって単調拡大し、任意のノード v で包含写像 $\mathrm{inc}_v\colon X_{v^*} \to X_v$ と標準割り当て $\mathtt{ST}_v\colon X_v \to \mathcal{A}_v$ の合成が解を成すような関係にあり、この解と一対一対応の関係にある関手を成分に選んで構成した有限表示的な Q 木のことである。次の命題は、正規 Q 木の各ノードを生成する各有限表示が、互いにどのような関係にあるのかを描いている。

命題 2.42 (変数集合の包含写像が解を誘導するための条件)**.** X, X' を変数の有限集合とし、$X \subseteq X'$ が成り立つものとする。有限表示 $(X, \mathbf{Eq}), (X', \mathbf{Eq}')$ を任意に取る。このとき、次の二つは同値。

- 包含写像 $\mathrm{inc}\colon X \to X'$ と標準割り当て $\mathtt{ST}'\colon X' \to \mathcal{A}_{(X',\mathbf{Eq}')}$ の合成 $\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}$ は $\mathbf{Eq}$ の解である
- 任意の $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し、$\mathbf{Eq} \vdash t_1 = t_2$ ならば $\mathbf{Eq}' \vdash t_1 = t_2$

Proof. 前提として、$X \subseteq X'$ ならば、X から生成される項は X' から生成される項でもあることを注意しておく。

$\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}$ は $\mathbf{Eq}$ の解であると仮定する。定義より、任意の $(t = t') \in \mathbf{Eq}$ に対し、$[\![t]\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}} = [\![t']\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}}$ が成り立つ。このとき健全性定理 (定理 2.33) より、任意の $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ に対し $\mathbf{Eq} \vdash t_1 = t_2$ ならば $[\![t_1]\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}} = [\![t_2]\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}}$ が成立。つまり $[t_1]' = [t_2]'$ が $\mathcal{A}_{(X',\mathbf{Eq}')}$ で成り立つから、$\mathbf{Eq}' \vdash t_1 = t_2$ が成立する。

次に任意の $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_{(X,\mathbf{Eq})}$ で $\mathbf{Eq} \vdash t_1 = t_2$ ならば $\mathbf{Eq}' \vdash t_1 = t_2$ であると仮定する。$\mathbf{Eq}$ は有限表示の公理の集合だから、任意の $(t_1 = t_2) \in \mathbf{Eq}$ に対し $\mathbf{Eq} \vdash t_1 = t_2$ が成立する。このとき仮定より、$\mathbf{Eq}' \vdash t_1 = t_2$ も成立し、これは $[\![t_1]\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}} = [t_1]' = [t_2]' = [\![t_2]\!]_{\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}}$ と同値。したがって $\mathtt{ST}' \circ \mathrm{inc}$ は $\mathbf{Eq}$ の解を与える。 □

つまり、正規 Q 木の各有限表示圏を図式だと思ったとき、ある図式の中で成り立つ等号は、それ以降に出現する図式でも必ず成り立っているということである。これは図式言語にかなり近づいていると言えよう。

さて、任意の圏論の一階述語論理式は、ある正規 Q 木で表せて、充足に関して同値になることを示していく。充足の同値を与える正規 Q 木は、論理式自体から構成して与えられる。

定義 2.43 (論理式から生える Q 木)**.** 任意の一階述語論理式 φ を取ったとする。このとき、φ から Q 木 $\mathbf{T}^{\varphi}$ がトップダウン式に再帰的に生成できる。この Q 木は論理式の木構造によって添字づけられており、各部分 Q 木の根には φ の部分論理式が添字として対応する。ノードの圏に関しては、葉ノードに原子論理式と対応する有限表示圏が配置され、それ以外は全て一貫して有限自由圏（有限表示 $(X, \emptyset)$ によって生成される有限表示圏）である。成分の射 $a\colon \mathcal{A}_{v^*} \to \mathcal{A}_v$ は全て、解 $\mathtt{ST}_v \circ \mathrm{inc}_v\colon X_{v^*} \to \mathcal{A}_v$ と対応する関手である。

- $X_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(\varphi)$ を φ 中の自由変数の全体として、有限表示 $(X_0, \emptyset)$ が生成する有限表示圏を根とする。
- φ の構造に応じて、再帰的に Q 木 $\mathbf{T}^{\varphi}$ の組み立てが行われる。$\mathcal{A}_{\varphi}, \mathbf{T}^{\varphi}$ と書いて、根の有限表示圏を明示した $\mathbf{T}^{\varphi}$ を表すものとして、各構成ステップは次の通り。
  - $\varphi \equiv t_1 = t_2$ のとき、$\mathbf{T}^{t_1 = t_2}$ は根 $\mathcal{A}_{t_1=t_2}, Q_{t_1=t_2} = \exists$ から子ノード $\mathcal{A}_L, Q_L = \forall$ を一つ持つ。($\mathcal{A}_L$ は葉ノード。) 自由圏 $\mathcal{A}_{t_1=t_2}$ を生成する有限表示を $(X, \emptyset)$ と書くとき、$\mathcal{A}_L$ は $(X, \{t_1 = t_2\})$ によって生成される有限表示圏。
  $$\overset{\exists}{\mathcal{A}_{t_1=t_2}} \longrightarrow \overset{\forall}{\mathcal{A}_L}$$
  - $\varphi \equiv \mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3)$ のとき、$\mathbf{T}^{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}$ は根 $\mathcal{A}_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}, Q_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)=\exists}$ と子ノード $\mathcal{A}_L, Q_L = \forall$ 一つを持つ。($\mathcal{A}_L$ は葉ノード。) 自由圏 $\mathcal{A}_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}$ を生成する有限表示を $(X, \emptyset)$ と書くとき、$\mathcal{A}_L$ を生成する有限表示は $(X, \{t_3 = t_1 t_2\})$ である。
  $$\overset{\exists}{\mathcal{A}_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}} \longrightarrow \overset{\forall}{\mathcal{A}_{(X,\{t_3=t_1t_2\})}}$$
  - $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき、$\mathbf{T}^{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$ は根 $\mathcal{A}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}, Q_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} = \forall$ とふたつの子ノード $\mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathcal{A}_{\varphi_2}$ を持つ。こ

の三つは全て同一の有限表示 $(X, \emptyset)$ から生成された自由圏で、定義より関手 $a_{\varphi_1}, a_{\varphi_2}$ はいずれも恒等関手である。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathbf{T}^{\varphi_1} \\ \overset{\forall}{\mathcal{A}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{A}_{\varphi_2}, \mathbf{T}^{\varphi_2} \end{tikzcd}$$

– $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$ のとき、$\mathbf{T}^{\varphi_1 \vee \varphi_2}$ は根 $\mathcal{A}_{\varphi_1 \vee \varphi_2}, Q_{\varphi_1 \vee \varphi_2} = \exists$ とふたつの子ノード $\mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathcal{A}_{\varphi_2}$ を持つ。この三つは全て同一の有限表示から生成された自由圏で、定義から $a_{\varphi_1}, a_{\varphi_2}$ は恒等関手になることが従う。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathbf{T}^{\varphi_1} \\ \overset{\exists}{\mathcal{A}_{\varphi_1 \vee \varphi_2}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{A}_{\varphi_2}, \mathbf{T}^{\varphi_2} \end{tikzcd}$$

– $\varphi \equiv \neg\varphi'$ のとき、$\mathbf{T}^{\neg\varphi'}$ は根 $\mathcal{A}_{\neg\varphi}, Q_{\neg\varphi}$ と一つの子ノード $\mathcal{A}_{\varphi'}$ を持つ。どちらも同一の有限表示 $(X, \emptyset)$ から生成された自由圏で、関手 $a_{\varphi'}$ は恒等関手。

$$\overset{\exists}{\mathcal{A}_{\neg\varphi'}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\neg\varphi'}, (\mathbf{T}^{\varphi'})^c$$

– $\varphi \equiv \forall x.\varphi'$ のとき、$\mathbf{T}^{\forall x.\varphi'}$ は $\mathcal{A}_{\forall x.\varphi'}$ を根に持ち、子は一つだけ $\mathcal{A}_{\varphi'}, \mathbf{T}^{\varphi'}$ を持つ。$\mathcal{A}_{\forall x.\varphi'}$ を生成する有限表示を $(X, \emptyset)$ とするとき、$\mathcal{A}_{\varphi'}$ を生成する有限表示は $(X \cup \{x\}, \emptyset)$ であり、$a_{\varphi'}$ は包含関手。

$$\overset{\forall}{\mathcal{A}_{\forall x.\varphi'}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\varphi'}, \mathbf{T}^{\varphi'}$$

– $\varphi \equiv \exists x.\varphi'$ のとき、$\mathbf{T}^{\exists x.\varphi'}$ は根 $\mathcal{A}_{\exists x.\varphi'}$ を持ち、子は $\mathcal{A}_{\varphi'}, \mathbf{T}^{\varphi'}$ を一つだけ持つ。$\mathcal{A}_{\exists x.\varphi'}$ を生成する有限表示を $(X, \emptyset)$ とするとき、$\mathcal{A}_{\varphi'}$ を生成するのは $(X \cup \{x\}, \emptyset)$ で、$a_{\varphi'}$ は包含関手。

$$\overset{\exists}{\mathcal{A}_{\exists x.\varphi'}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\varphi'}, \mathbf{T}^{\varphi'}$$

■Q 木は本当に正規 Q 木であること　$\mathbf{T}^{\varphi}$ が実際に正規 Q 木であるためには、任意の $v \neq 0$ で $\mathtt{ST}_v \circ \mathrm{inc}_v$ が有限表示 $(X_{v^*}, \mathbf{Eq}_{v^*})$ の理論の解であることを示さなければならない。しかしこのことは、有限自由圏の定義から明らかである。

定義 2.44 (有限自由圏)**.** 有限表示 $(X, \emptyset)$ によって生成された有限表示圏を有限自由圏と呼ぶ。この圏は、X の要素とそれらに付随する恒等射 $\{\Box x, x\Box \mid x \in X\}$ からなる有限圏であり、任意のふたつの恒等射でない射は互いに合成できない。模式図を書くと次のようになる。

$$\bullet \xrightarrow{x_1} \bullet \qquad \bullet \xrightarrow{x_2} \bullet \qquad \cdots \qquad \bullet \xrightarrow{x_k} \bullet$$

図 20: $(\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}, \emptyset)$ から生成した有限表示圏

定理 2.35 より、有限表示圏 $\mathcal{A}$ から他の圏に向かう関手は、$\mathcal{A}$ を生成した有限表示 $(X, \mathbf{Eq})$ の理論の解と一対一であった。いま $\mathcal{A}$ が有限自由圏ならば、任意の変数割り当て $\rho\colon X \to \mathcal{B}$ は（空疎に）解となり、関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を導く。$\mathcal{A}$ に存在する非自明な射は X の元と一対一であるから（要素一つからなる同値類）、関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ とは単に写像 $X \to \mathcal{B}$ のことだと考えてよい。よって、φ から生える Q 木では、$\mathtt{ST}_v \circ \mathrm{inc}_v$ は常に解を与え、関手 $a_v\colon \mathcal{A}_{v^*} \to \mathcal{A}_v$ を誘導する。

これまでに定義してきた二種類の充足性が、ある種の同値性を持つことを示す。

定理 2.45 (φ と $\mathbf{T}^{\varphi}$ の充足の同値)**.** 任意の一階述語論理式 φ をとり、圏 $\mathcal{B}$ と変数割り当て $\rho\colon \mathrm{Var} \to \mathcal{B}$ が与

えられたとする。このとき、φ から生やした正規 Q 木 $\mathbf{T}^{\varphi}$ は次の性質を満たす。

$$\mathcal{B}, \rho \models \varphi \iff \mathcal{B}, s_{\varphi} \models \mathbf{T}^{\varphi}$$

ただし $s_{\varphi} \colon \mathcal{A}_{\varphi} \to \mathcal{B}$ とは ρ を $\mathrm{FV}(\varphi)$ に制限した変数割り当てと一対一対応になる関手。

Proof. φ から $\mathbf{T}^{\varphi}$ を構成したものとする。これが主張を満たすことを、φ に関する構造帰納法で示す。

- $\varphi \equiv t_1 = t_2$ の場合

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{t_1=t_2} \arrow[rr, "\exists\ a_L"] \arrow[dr, "s_{t_1=t_2}"'] & & \mathcal{A}_L^{\ \forall} \arrow[dl, "s_L"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

  - $(\Longrightarrow)\mathcal{B}, \rho \models t_1 = t_2$ と仮定。$X_{\varphi} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{FV}(t_1 = t_2)$ とする。定義より $[\![t_1]\!]_{\rho} = [\![t_2]\!]_{\rho}$ が成立するから、ρ を X_{φ} に制限した変数割り当ては有限表示 $(X, \{t_1 = t_2\})$ の理論の解を与える。いま $\mathcal{A}_{t_1=t_2}$ は $(X_{\varphi}, \emptyset)$ が与える有限自由圏であるから、写像 $X \to \mathcal{B}$ と関手 $\mathcal{A}_{t_1=t_2} \to \mathcal{B}$ と一対一。そこで $s_{t_1=t_2} \colon \mathcal{A}_{t_1=t_2} \to \mathcal{B}$ を ρ の X_{φ} への制限と対応する関手で与えることにする。また、$\rho_{X_{\varphi}}$ は $(X_{\varphi}, \{t_1 = t_2\})$ の理論の解であるから、$s_L \colon \mathcal{A}_L \to \mathcal{B}$ が $s_L[x]_L \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_{X_{\varphi}}(x)$ によって与えられる。関手 $a_L \colon \mathcal{A}_{t_1=t_2} \to \mathcal{A}_L$ は解 $\mathtt{ST}_L \circ 1_X = \mathtt{ST}_L$ と対応する関手で、有限自由圏からの関手であるから、$s_{t_1=t_2} = s_L \circ a_L$ が成り立つことは定義から従う。よって、$\mathcal{B}, s_{t_1=t_2} \models \mathbf{T}^{t_1=t_2}$ が成立。
  - $(\Longleftarrow)$ ある関手 $s_L \colon \mathcal{A}_L \to \mathcal{B}$ が存在して、$s_{t_1=t_2} = s_L \circ a_L$ が成立すると仮定。s は $(X, \{t_1 = t_2\})$ の理論の解を $\rho : X_{\varphi} \to \mathcal{B}, x \mapsto s_L[x]_L$ で与える。そこで、$\bar{\rho} \colon \mathrm{Var} \to \mathcal{B}$ で、X_{φ} への制限が ρ と等しくなるものを任意に取れば、$\mathcal{B}, \bar{\rho} \models t_1 = t_2$。
- $\varphi \equiv \mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3)$ の場合。証明の方針は $\varphi \equiv t_1 = t_2$ の場合と同様である。
  - $(\Longrightarrow)\mathcal{B}, \rho \models \mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3)$ と仮定すると、ρ の $X_{\varphi} = \mathrm{FV}(\mathrm{Comp}(t_1, t_2, t_3))$ への制限 $\rho_{X_{\varphi}}$ はふたつの関手 $s_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}, s_L$ を与え、解 $\mathtt{ST}_L \circ 1_X$ と対応する関手 $a_L \colon \mathcal{A}_{t_1=t_2}$ は $s_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)} = s_L \circ a_L$ を満たす。よって $s_{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}$ は $\mathbf{T}^{\mathrm{Comp}(t_1,t_2,t_3)}$ を充足する。
  - $(\Longleftarrow)$ こちらも先ほどとほぼ同様に示せる。
- $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathbf{T}^{\varphi_1} \arrow[ddl, "s_{\varphi_1}"] \\ \mathcal{A}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}^{\forall} \arrow[ur, "a_{\varphi_1}"] \arrow[r, "a_{\varphi_2}"] \arrow[d, "s_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}"'] & \mathcal{A}_{\varphi_2}, \mathbf{T}^{\varphi_2} \arrow[dl, "s_{\varphi_2}"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

  - $(\Longrightarrow)\mathcal{B}, \rho \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ と仮定。帰納法の仮定より、$\mathcal{B}, s_{\varphi_1} \models \varphi_1$ かつ $\mathcal{B}, s_{\varphi_2} \models \varphi_2$ が成り立つ。φ から生える Q 木の定義より、$\mathcal{A}_{\varphi_1 \wedge \varphi_2}, \mathcal{A}_{\varphi_1}, \mathcal{A}_{\varphi_2}$ いずれも同一の有限表示 ($(X, \emptyset)$ とする) から生成した有限自由圏であるから、$a_{\varphi_1}, a_{\varphi_2}$ はどちらも恒等関手である。よって、任意の $s_1 \colon \mathcal{A}_{\varphi_1} \to \mathcal{B}, s_2 \mathcal{A}_{\varphi_2} \to \mathcal{B}$ に対し、$s_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} = s_i \circ a_{\varphi_i} (i = 1, 2)$ ならば、$s_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} = s_i (i = 1, 2)$ が成立する。帰納法の仮定より、$\mathcal{B}, s_{\varphi_1} \models \mathbf{T}^{\varphi_1}, \mathcal{B}, s_{\varphi_2} \models \mathbf{T}^{\varphi_2}$ が成り立つから、定義より $\mathcal{B}, s_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \models \mathbf{T}^{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$ が成り立つ。
  - $(\Longleftarrow)\mathcal{B}, s_{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \models \mathbf{T}^{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$ と仮定。このとき、$s_{\varphi_1}, s_{\varphi_2}$ はそれぞれ $\mathbf{T}^{\varphi_1}, \mathbf{T}^{\varphi_2}$ を充足するから、帰納法の仮定より、$\mathcal{B}, \rho \models \varphi_1$ かつ $\mathcal{B}, \rho \models \varphi_2$ が成り立つ。論理式の充足の定義より、このとき

$\mathcal{B}, \rho \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ が成立。

- $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$ の場合、$\wedge$ の場合と同様の考え方で成立が示せる。
- $\varphi \equiv \neg\varphi'$ の場合、$\mathcal{A}_{\neg\varphi'}, \mathcal{A}_{\varphi'}$ いずれも同一の有限表示から生成される。($(X, \emptyset$ としておく。)
  - $(\Longrightarrow)\mathcal{B}, \rho \models \neg\varphi'$ と仮定。このとき定義より、$\mathcal{B}, \rho \models \varphi'$ は成り立たない。帰納法の仮定から、$\mathcal{B}, s_{\varphi'} \models \mathbf{T}^{\varphi'}$ は成り立たないが、命題 2.39 より $\mathcal{B}, s_{\varphi'} \models (\mathbf{T}^{\varphi'})^c$ は成り立つ。よって定義から $s_{\neg\varphi'}$ は $\mathbf{T}^{\neg\varphi'}$ を充足する。
  - $(\Longleftarrow)\mathcal{B}, s_{\neg\varphi'} \models \mathbf{T}^{\neg\varphi'}$ と仮定。このとき $s_{\varphi'}$ は $(\mathbf{T}^{\varphi'})^c$ を充足するが、命題 2.39 よりそれは $\mathcal{B}, s_{\varphi'} \models \mathbf{T}^{\varphi'}$ が成り立たないことを導く。帰納法の仮定より、このとき $\mathcal{B}, \rho \models \varphi'$ が成り立たないが、それは $\mathcal{B}, \rho \models \neg\varphi'$ と同値。
- $\varphi \equiv \forall x.\psi$ の場合、$\mathcal{A}_{\forall x.\psi}$ を生成する有限表示を $(X, \emptyset)$ とすると、$\mathcal{A}_\psi$ を生成する有限表示は $(X \cup \{x\}, \emptyset)$ であり、a_ψ は包含関手。
  - $(\Longrightarrow)\mathcal{B}, \rho \models \forall x.\psi$ と仮定。よって任意の $b \in \mathcal{B}$ に対し、$\mathcal{B}, \rho[x := b] \models \psi$ が成り立っている。いま $s\colon \mathcal{A}_\psi \to \mathcal{B}$ で $s_{\forall x.\psi} = s \circ a_\psi$ を満たすものを任意に取るとき、a_ψ が自由圏の間の包含関手であるから、s は任意の $y \in X$ に対し $s[y]_\psi = \rho(y)$ を満たす。ここで $x \notin X$ であれば、x に任意に $\mathcal{B}$ の射を割り当てたものは $(X \cup \{x\}, \emptyset)$ の理論の解であるから、s は $\mathbf{T}^\psi$ を充足する。
- $\varphi \equiv \exists x.\psi$ の場合、$\forall x.\psi$ の場合と同様の筋立てで考えれば、定義と帰納法の仮定から成り立つことが分かる。

□

2.4.2 図式言語の数学的定義

図式言語には、次のルールがあった。

- 一度現れた対象や射は、その後ずっと残り続ける。(決して消滅しない。)
- 出現時に区別されていた二つの対象が、後になって同一視されることは決して無い。
- 出現時に区別されていた二つの射が、後になって同一視されることは**有り得る**。
- 右隣の図式で対象や射が新しく出現したならば、量化記号はそれらに係るものと考えて良い。

このルールを守ることは、**Cat** に於いて、正規 Q 木の更に特別なものを考えることと対応している。

定義 2.46 (図式言語)**.** **図式言語**とは、**Cat** に於ける正規 Q 木のうち、成分の射が全て対象上で単射な関手であるもののことをいう。

3 同値関手による充足の保存と反射

3.1 同値関手のインフレーション分解

定義 3.1 (同値関手)**.** 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が**充満**であるとは、任意の対象 $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、射のクラス間写像 $\mathcal{A}(A_1, A_2) \to \mathcal{B}(FA_1, FA_2), x \mapsto Fx$ が全射であることをいう。また F が**忠実**であるとは、この写像が単射であることをいう。以後、充満かつ忠実であることを縮めて充満忠実であると言うことにする。

充満忠実な関手は同型を反射する、つまり、Fx が同型射ならば x は同型射である。これを確かめるのは容易い。

F が**本質的に全射**とは、任意の $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に対し、ある $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が存在して、$FA \simeq B$ が成り立つことをいう。

F が**同値関手**とは、F が充満忠実かつ本質的に全射であることをいう。F が**強同値**であるとは、ある $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が存在して、$G \circ F \simeq 1_{\mathcal{A}}, F \circ G \simeq 1_{\mathcal{B}}$ が成り立つことをいう。

ある意味で、同値関手は同型関手のなりそこないである。始域と終域の圏で、対応する対象の同型類の濃度が異なったが為に、逆射の存在することが叶わなかったのだと考えられる。なので、もしも仮に、始域と終域の対象のクラスの差異を埋めることが出来れば、同値関手は同型関手を誘導するはずだ。次の構成は、それを実現してくれる。

定義 3.2 (圏の構成：圏のインフレーション)**.** 圏 $\mathcal{B}$ が与えられているとする。更にいま、クラス $\mathfrak{C}$ が与えられて、$\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ への全射 $T\colon \mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ も与えられているとしよう。このとき、次の方法で、$\mathfrak{C}$ の元の間に $\mathcal{B}$ の射を導入して、圏が構成できる。

- 各 $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}$ に対し、$(x, C_1, C_2)\colon C_1 \to C_2 \overset{\text{def}}{\iff} x \in \mathcal{B}(TC_1, TC_2)$
- 第一成分の射の合成は、$\mathcal{B}$ のそれに準拠する

各 $C \in \mathfrak{C}$ に対し、$1_C = (1_{TC}, C, C)$ であり、$(x, C_1, C_2)\colon C_1 \to C_2, (y, C_2, C_3)\colon C_2 \to C_3$ に対して $(y \circ x, C_1, C_3)\colon C_1 \to C_3$ であり ($x\colon TC_1 \to TC_2, y\colon TC_2 \to TC_3$ に対し $y \circ x\colon TC_1 \to TC_3$ が一意に存在しているため)、単位法則と結合法則は $\mathcal{B}$ から受け継いで満たしている。よって、$\mathfrak{C}$ を対象のクラス、$\{(x, C_1, C_2) \mid x\colon TC_1 \to TC_2\}$ を C_1, C_2 間の射のクラスとした圏が構成されている。このように、全射 $T\colon \mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に基づいて圏 $\mathcal{B}$ の構造を $\mathfrak{C}$ 上に移植して得た圏を、**$\mathcal{B}$ の T に関するインフレーション**と呼び、$[T]_{\mathcal{B}}$ と書くことにする。

定義 3.3 (インフレーションからの忘却関手)**.** $T\colon \mathfrak{C} \to \mathcal{B}$ を全射とし、インフレーション $[T]_{\mathcal{B}}$ が構成されたとする。定義より、$(x, C_1, C_2) \in [T]_{\mathcal{B}}(C_1, C_2) \iff x \in \mathcal{B}(TC_1, TC_2)$ であるから、射のクラスの間に標準的な全単射 $(x, C_1, C_2) \mapsto x$ が存在している。これを全射 $T\colon \mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に付与することで、忘却関手 $T\colon [T]_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ が定まる。

定義より、インフレーションからの忘却関手は、対象上で全射な同値関手であることが従う。

定義 3.4 (インフレーション横断面)**.** 全射 $T\colon \mathfrak{C} \to \mathcal{B}$ に基づいて、インフレーション $[T]_{\mathcal{B}}$ と、忘却関手 $T\colon [T]_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ が与えられているとする。ここで T に対し、$T \circ S = 1_{\mathcal{B}}$ を満たす関手 $S\colon \mathcal{B} \to [T]_{\mathcal{B}}$ を、**インフレーション横断面 (inflation cross-section)** と呼ぶことにする。定義より、S は射のクラス間に $x\colon B_1 \to B_2 \mapsto (x, SB_1, SB_2)$ という写像を与える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \\ S\downarrow & \searrow^{1_{\mathcal{B}}} & \\ [T]_{\mathcal{B}} & \underset{T}{\to} & \mathcal{B} \end{array}$$

命題 3.5 (インフレーション横断面は同値関手)**.** 全射 $T\colon \mathfrak{C} \to \mathcal{B}$ に基づいてインフレーション $[T]_{\mathcal{B}}$ と忘却関手 $T\colon [T]_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ が構成され、更に横断面 $S\colon \mathcal{B} \to [T]_{\mathcal{B}}$ が存在しているものとする。このとき、S は同値関手である。

Proof. インフレーション横断面の定義より、S は充満忠実である。更に T が対象上で全射な同値関手であるから、任意の $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に対しある $C \in \mathfrak{C}$ が存在して、$B = TC$。よって $SB = S(TC)$ である。$T \circ S = 1_{\mathcal{B}}$ であるから、$T(S(TC)) = TC = B$、よって T の充満忠実性により、$[T]_{\mathcal{B}}(C, S(TC)) \simeq \mathcal{B}(TC, T(S(TC))) = \mathcal{B}(B, B)$。ある $x \in (C, T(SC))$ で $Tx = 1_B$ を満たすものが存在している。同値関手は同型を反射するから、$x\colon C \to T(SC)$ は同型射。したがって任意の $C \in \mathfrak{C}$ に対し、$C \simeq S(TC)$。これは S が本質的に全射である

ことを示している。 $\square$

定理 3.6 (同値関手の分解)**.** $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を同値関手とする。このとき、F はインフレーション横断面と同型関手とインフレーション忘却関手の合成で表せる。

Proof. クラス $\mathfrak{C}$ を次で定義する：$\mathfrak{C} \overset{\text{def}}{=} \{(A, \theta, B) \mid \theta\colon FA \xrightarrow{\sim} B\}$。このとき、射影 $\Pi_{\mathcal{A}}\colon \mathfrak{C} \to \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ は全射である（任意の $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、$(A, 1_{FA}, FA) \in \mathfrak{C}$ より分かる）。そこで $\mathfrak{C}$ 上にインフレーション $[\Pi_{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}$ を構成できて、更にインフレーション横断面 $S_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to [\Pi_{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}, A \mapsto (A, 1_{FA}, FA), (x\colon A_1 \to A_2) \mapsto ((x, SA_1, SA_2)\colon SA_1 \to SA_2)$ を伴う。

射影は他にもある；$\Pi_{\mathcal{B}}\colon \mathfrak{C} \to \mathcal{B}, (A, \theta, B) \mapsto B$。いま F は同値関手と仮定したから本質的に全射であり、したがって $\Pi_{\mathcal{B}}$ は全射である（任意の B に対しある A, θ が存在して、$\theta\colon FA \xrightarrow{\sim} B$）。そこで、もう一つのインフレーション $[\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ を構成する。

$[\Pi_{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}$ と $[\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ の間には、標準的な同型関手が存在することを示そう。$\Theta\colon [\Pi_{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}} \to [\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ を次で与える。

$$(A, \theta, B) \mapsto (A, \theta, B)$$
$$(x, (A, \theta, B), (A', \theta', B')) \mapsto (\theta' \circ (Fx) \circ \theta^{-1}, (A, \theta, B), (A', \theta', B'))$$

$$\begin{array}{ccc} A & \theta & B \\ {\scriptstyle x}\big\downarrow & & \\ A' & \theta' & B' \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} A & \theta & B \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \theta' \circ Fx \circ \theta^{-1}} \\ A' & \theta' & B' \end{array}$$

Θ が射を写すイメージ

Θ は対象上で恒等写像であり、また F が充満忠実であること及び同型射の合成は可逆であることから、射に関しても全単射である。（逆写像は $b \mapsto a, \quad \text{where } Fa = \theta'^{-1} \circ b \circ \theta$ で与えられる。）

- $(1_A, (A, \theta, B), (A, \theta, B)) \mapsto (\theta \circ 1_{FA} \circ \theta^{-1}, (A, \theta, B), (A, \theta, B)) = (1_B, (A, \theta, B), (A, \theta, B))$ より恒等射を保存し、
- $(x, (A, \theta, B), (A', \theta', B')), (y, (A', \theta', B'), (A'', \theta'', B''))$ に対しては、$\theta'' \circ (F(y \circ x)) \circ \theta = (\theta'' \circ (Fy) \circ \theta'^{-1}) \circ (\theta' \circ (Fx) \circ \theta^{-1})$ であるから、射の合成を可換にする。

したがって Θ は関手、それも対象と射の両方で全単射な関手である。

逆写像 Θ^{-1} は対象上で恒等写像、射に関しては $(b, (A, \theta, B), (A', \theta', B'))$ を $(a, (A, \theta, B), (A, \theta, B))$ (ただし $Fa = \theta'^{-1} \circ b \circ \theta$) に写す。$\Theta^{-1}$ も関手の定義を満たすのを確かめること、また Θ^{-1} が Θ の逆射であることを確かめるのは単純な計算で出来る。

最後に、$F = \Pi_{\mathcal{B}} \circ \Theta \circ S_{\mathcal{A}}$ の成立は計算すれば直ちにわかる。 $\square$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "1_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "S_{\mathcal{A}}"'] \arrow[ddd, bend right, "F"'] & & \mathcal{A} \\
& {[\Pi_{\mathcal{A}}]_{\mathcal{A}}} \arrow[ur, "\Pi_{\mathcal{A}}"'] \arrow[d, "\Theta"] & \\
& {[\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}} \arrow[dr, "\Pi_{\mathcal{B}}"] & \\
\mathcal{B} \arrow[rr, "1_{\mathcal{B}}"'] & & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

注意 3.7 (同値関手ならば強同値か？)**.** 上の図で、もし仮にインフレーション横断面 $S_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to [\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}}$ が存在すれば、$G \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\mathcal{A}} \circ \Theta^{-1} \circ S_{\mathcal{B}}$ として F は強同値になる。横断面を得るには、各 $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に対し

$(A,\theta,B) \in \mathrm{Ob}([\Pi_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}})$ を対応付ける方法があれば良いが、これは必ずしも自然に存在していない。任意の同値関手が強同値であることをいうためには、適切な強度の選択公理が必要になる。

3.2　図式言語の充足と同値関手

定義 3.8 (図式言語の充足の保存と反射)**.** 根付き有限木 T のノードで添字づけられた図式言語 $((A_v)_v, (a_v)_{v\neq 0}, (Q_v)_v)$ が与えられているとする。$s_0\colon A_0 \to B$ が任意に与えられているとき、射（いまは関手）$F\colon B \to B'$ が s_0 **の充足を保存する**とは、s_0 が与えられた図式言語を充足するならば、$F \circ s_0\colon A_0 \to B'$ も同様であることをいう。また、F が s_0 **の充足を反射する**とは、$F \circ s_0$ が図式言語を充足するならば s_0 も同様であることをいう。

有限表示圏から出る関手 $A_0 \to B$ は、有限表示の理論の B に於ける解と一対一だったことを思い出してもらいたい。図式言語が表す論理式を φ とするとき、$F\colon B \to B'$ が s_0 の充足を保存することは、$B, \rho_{s_0} \models \varphi$ ならば $B', F \circ \rho_{s_0} \models \varphi$ が成り立つことと同値である。同様に、F が s_0 の充足を反射することは、$B', F \circ \rho_{s_0} \models \varphi$ ならば $B, \rho_{s_0} \models \varphi$ が成り立つことと同値。

同値関手は、図式言語の充足を保存し且つ反射することを示そう。

補題 3.9 (弱因子分解)**.** $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を任意の有限表示圏とし、$E\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ を任意の対象上単射な関手とし、$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ を、対象上全射な同値関手とする。（これも任意に取る。）このとき、任意の $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}, S''\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ に対し、$S'' \circ E = S \circ F$ が成り立つならば、ある $S'\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ が存在して、$S = S' \circ E$ かつ $S'' = F \circ S'$ が成り立つ。

$$\forall\ \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, "S''"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B}' \end{tikzcd} \qquad \exists\ \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, "S''"] \arrow[dl, "S'"'] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

図 21: E は対象上単射な関手、F は対象上全射な同値関手

Proof. まずは対象上の写像を作る。最初に、E の像に属する対象に注目する。E は対象上単射であるから、各 $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し、$A_1 \neq A_2$ ならば $EA_1 \neq EA_2$。よって、E の像に属する対象 A' に対して一意的に $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ が定まるから、$S'A' \overset{\mathrm{def}}{=} SA$ と定義できる。次に A' を E の像に属さない $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ の要素としたとき、これに対し $F^{-1}(S''A')$ から元を一つ選び、それを $S'A'$ の値とする。（F は対象上で全射であるから、$F^{-1}(S''A')$ は必ず元を有していることに注意。また、命題 2.29 より、$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ は有限集合なので、選択公理は不要である。）こうして、S' は任意の $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ に対し $SA = S'(EA)$、かつ任意の $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ に対し $F(S'A') = S''A'$ を満たすよう定義された。

次に射の写像を作る。F は充満忠実なので、各 $A'_1, A'_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}')$ に対し、$\mathcal{B}(S'A'_1, S'A'_2) \simeq \mathcal{B}'(F(S'A'_1), F(S''A'_2)) = \mathcal{B}'(S''A'_1, S''A'_2)$ が成り立つ。よって各 $f \in \mathcal{A}'(A'_1, A'_2)$ に対し、ある $b \in \mathcal{B}(S'A'_1, S'A'_2)$ で $Fb = S''f$ を満たすものが一意に定まる。この b を $S'f$ の値として定めることで、$S'' = F \circ S'$ が成り立つ。このとき任意の $f \in \mathcal{A}(A_1, A_2)$ に対し、$F(Sf) = F(S'(Ef))$ かつ $S'(Ef) \in \mathcal{B}(SA_1, SA_2)$ なので、F の充満忠実性から $Sf = S'(Ef)$ が従う。求める S' が得られたので、主張成立。 $\square$

補題 3.10. 射 $f\colon B \to B'$ が与えられているとする。任意の Q 木 $\mathbf{T} = ((A_v)_v, (a_v)_{v\neq 0}, (Q_v)_v)$ と任意の射

$s_0\colon A_0 \to B$ に対し、s_0 による $\mathbf{T}$ の充足を f が反射することは、相補 Q 木 $\mathbf{T}^c$ の s_0 による充足を f が保存することと同値。

Proof. 充足の反射の定義より、$f \circ s_0$ が $\mathbf{T}$ を充足するならば、s_0 も同様である。対偶より、s_0 が $\mathbf{T}$ を充足しないならば、$f \circ s_0$ も同様である。これは s_0 が $\mathbf{T}^c$ を充足するならば、$f \circ s_0$ も同様であることと同値。よって題意は成り立つ。 □

補題 3.11. 対象上で全射な同値関手は、任意の図式言語の任意の充足関係を保存する。

Proof. 図式言語の有限木に関する構造帰納法。$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ を対象上で全射な同値関手とする。図式言語 $\mathbf{T} = ((\mathcal{A}_v)_v, (a_v)_{v \neq 0}, (Q_v)_v)$ を任意に取り、$s_0\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}$ がこれを充足すると仮定する。このとき $F \circ s_0$ も $\mathbf{T}$ を充足することを示そう。なお図式言語では、任意の $v \neq 0$ に対し、a_v は対象上単射な関手であったことを思い出してもらいたい。

$Q_0 = \forall$ の場合、0 の任意の子ノード v と任意の $s'_v\colon \mathcal{A}_v \to \mathcal{B}'$ を取り、$F \circ s_0 = s'_v \circ a_v$ が成り立つと仮定すると、補題 3.9 より、ある $s_v\colon \mathcal{A}_v \to \mathcal{B}$ で $s_0 = s_v \circ a_v$ かつ $s'_v = F \circ s_v$ を満たすものが存在する。s_0 が $\mathbf{T}$ を充足すると仮定したので、s_v は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足することになる。帰納法の仮定より、F は s_v による $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ の充足を保存するから、$F \circ s_v$ は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足する。したがって s'_v は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足するから、$F \circ s_0$ は $\mathbf{T}$ を充足する。

次に $Q_0 = \exists$ の場合について。s_0 が $\mathbf{T}$ を充足すると仮定したので、0 の子ノード v のうちに、ある $s_v\colon \mathcal{A}_v \to \mathcal{B}$ で $s_0 = s_v \circ a_v$ かつ $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足するものが存在する。帰納法の仮定から、この s_v の充足は F によって保存され、$F \circ s_v$ は $\mathbf{T}_{v\downarrow}$ を充足する。いま $F \circ s_0 = F \circ (s_v \circ a_v) = (F \circ s_v) \circ a_v$ であるから、したがって s_0 は $\mathbf{T}$ を充足する。

以上より、F は s_0 の充足を保存する。 □

補題 3.12. 射 $f\colon B \to B', g\colon B' \to B''$ が与えられていて、$g \circ f$ と g は任意の Q 木の任意の充足関係を保存し反射すると仮定する。このとき、f も同様である。

Proof. 補題 3.10 より、任意の Q 木の任意の充足を保存することだけ示せば十分。仮定より、s_0 が $\mathbf{T}$ を充足するならば $g \circ f \circ s_0$ も同様。また仮定から、$g \circ (f \circ s_0)$ が充足するならば $f \circ s_0$ も同様。よって仮定の下では、s_0 が充足するならば $f \circ s_0$ も充足する。 □

補題 3.13. インフレーション横断面 $S_\mathcal{B}\colon \mathcal{B} \to [T]_\mathcal{B}$ は、任意の図式言語の任意の充足関係を保存し反射する。

Proof. 横断面の定義より、$T \circ S_\mathcal{B} = 1_\mathcal{B}$。インフレーションの忘却関手 T と恒等関手 $1_\mathcal{B}$ は対象上全射な同値関手であったから、図式言語の充足関係を保存し反射する。補題 3.12 より、$S_\mathcal{B}$ も同様。 □

定理 3.14. 任意の同値関手は、任意の図式言語の任意の充足関係を保存し反射する。

Proof. 定理 3.6 と補題 3.11、3.13 より成立。充足の保存と反射が射の合成で保たれることを確かめるのは容易い。 □

注意 3.15. 実は逆も成り立つ。つまり、射の単ソート一階述語論理式で表される任意の性質のうち、同値関手が保存し反射するものは、ある図式言語によって表現できる。

これの証明はまた別の機会があれば。

参考文献

[1] Peter J. Freyd and Andre Scedrov. *Categories, Allegories*, Vol. 39 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland, 1990.

[2] nLab authors. extremal epimorphism. https://ncatlab.org/nlab/show/extremal+epimorphism, December 2025. nLab, Revision 8.（参照 2025-12-20）https://ncatlab.org/nlab/revision/extremal+epimorphism/8.