Les espaces duaux pour les ensembles ordonnés arbitraires

R.R.Zapatrine

Abstract

On établit une dualité entre les ensembles ordonnés et certains espaces à deux fermetures.

1 Introduction

En 1982 R. Mayet a établi la dualité entre les ensembles ordonnés orthocomplémentés et certains espaces de fermeture (dites C-espaces). Suivant [1] tout ensemble ordonné orthocomplémenté peut être representé comme l'ensembles des parties à la fois fermées et ouvertes.

Dans cet article cette dualité est étendu aux ensembles ordonnés arbitraires. Le résultat a la forme suivante. Avec tout ensemble ordonné P on associe un espace à deux fermetures X tel que P est isomorphique à la collection des parties de X fermées par rapport d'une fermeture et ouvertes par rapport d'autre fermeture.

L'idée principale est d'utiliser la procedure de duplication de l'ensemble ordonné P. On construit la somme horizontale de P et son inverse P^{op} (9), la munit avec la complémentation à le façon canonique, et alors utilise les résultats de [1].

2 Espaces de fermeture

Un ESPACE DE FERMETURE est un couple $(X, \mathbf{C})$, X étant un ensemble et $\mathbf{C} : \exp X \to \exp X$ une fermeture sur X. Les parties de X de la forme

$A = \mathbf{C}A$ sont dites $\mathbf{C}$-FERMÉS et leurs complémants sont dites $\mathbf{C}$-OUVERTS. Désignons

$$C(X) = \{A \subseteq X \mid \quad A \text{ est } \mathbf{C}\text{-fermé}\}$$

$$O(X) = \{B \subseteq X \mid \quad B \text{ est } \mathbf{C}\text{-ouvert}\}$$

$$CO(X) = C(X) \cap O(X)$$

Une collection $K \subseteq \exp X$ des parties de X est dite la BASE DE LA FERMETURE $\mathbf{C}$, noté

$$\mathbf{C} = \mathtt{clos}(K)$$

si tout $\mathbf{C}$-fermé A est une intersection des éléments de K:

$$A \in C(X) \Leftrightarrow \exists I \quad A = \cap_{i \in I} K_i \ , \ K_i \in K$$

Pour deux espaces à femeture $(X, \mathbf{C})$, $(X', \mathbf{C}')$, une application $f : X \to X'$ est dite CONTINUE si pour tout $\mathbf{C}'$-fermé A' son preimage $f^{-1}(A')$ est $\mathbf{C}$-ouvert-fermé. Deux espaces à fermeture $(X, \mathbf{C})$ et $(X', \mathbf{C}')$ sont dites HOMÉOMORPHIQUE s'il existe un couple des bijections continues $X \to X'$ et $X' \to X$.

Un ESPACE À DEUX FERMETURES est un triple $(X, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ tel que $(X, \mathbf{C}_1)$ aussi que $(X, \mathbf{C}_2)$ sont des espaces de fermeture. Désignons pour $i, j = 1, 2$:

$$C_i(X) = \{A \subseteq X \mid \quad A \text{ est } \mathbf{C}_i\text{-fermé}\}$$

$$O_j(X) = \{B \subseteq X \mid \quad B \text{ est } \mathbf{C}_i\text{-ouvert}\}$$

$$C_iO_j(X) = C_i(X) \cap O_j(X)$$

les espaces à deux fermetures $(X, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ et $(X', \mathbf{C}_1', \mathbf{C}_2')$ sont dites HOMÉOMORPHIQUE si les couples des espaces de fermetures $(X, \mathbf{C}_1)$, $(X', \mathbf{C}_1')$ aussi que $(X, \mathbf{C}_2)$, $(X', \mathbf{C}_2')$ sont homéomorphiques.

3 Ensembles ordonnés

Un ensemble ordonné (EO) est un ensemble non-vide P muni d'une relation d'ordre. Un EO P est dit BORNÉ (EOB) s'il possède le plus grand élément 1 est le plus petit élément 0. Un EOB E est dit ENSEMBLE ORDONNÉ

COMPLÉMENTÉ (EOC) s'il est muni d'une loi unaire $p \to p^\perp$ telle que, quels que soient $p, q \in E$

$$p^{\perp\perp} = p \tag{1}$$

$$p \vee p^\perp = 1 \qquad p \wedge p^\perp = 0 \tag{2}$$

$$p \leq q \quad \text{entraîne} \quad q^\perp \leq p^\perp \tag{3}$$

Soient P, Q deux EO. Une application $f : P \to Q$ est dite CROISSANTE si pour tous $p, q \in P$ $p \leq q$ implique $f(p) \leq f(q)$, et ANTI-CROISSANTE si $p \leq q$ implique $f(q) \leq f(p)$. On designe

$$\mathtt{Mor}_{EO}(P, Q) = \{f : P \to Q \mid \quad f \text{ est croissante}\} \tag{4}$$

Pour tout EO P on définit son INVERSE P^{op} étant une copie de l'ensemble P avec l'ordre inverse. La bijection naturelle

$$\rho : P \to P^{op} \tag{5}$$

est anti-croissante.

Pour deux EOC E, F, une application croissante $f : E \to F$ est dite ORTHOCROISSANTE si f préserve les compléments: $f(p^\perp) = (f(p))^\perp$. Désignons

$$\mathtt{Mor}_{EOC}(E, F) = \{f : E \to F \mid \quad f \text{ est orthocroissante}\} \tag{6}$$

On remarque que pour tout espace à deux fermetures $(X, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ l'ensemble $C_1O_2(X)$ est un EO, et pour tout espace de fermeture $(X, \mathbf{C})$ l'ensemble $CO(X)$ est un EOC par rapport de complémentation des parties de X.

4 Espaces duaux de Mayet

Soit $\mathbf{B}_2$ un EOC à deux éléments: $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$, $1^\perp = 0, 0^\perp = 1$. Soit E un EOC, et introduisons son espace dual

$$X = \mathtt{Mor}_{EOC}(P, \mathbf{B}_2) \tag{7}$$

Pour tout $p \in E$ posons

$$\sigma(p) = \{x \in X \mid \quad x(p) = 1\}$$

et munissons l'ensemble X avec la fermeture $\mathbf{C}$ engendrée par $\sigma(E)$

$$\mathbf{C} = \mathtt{clos}(\sigma(E)) \tag{8}$$

Théorème 1 *Soit E un EOC et X son espace dual (7). Alors*

1. *$(X, \mathbf{C})$ et le C-espace*
2. *Les EOC E est $CO(X)$ sont isomorphique. Cet isomorphisme est réalisé par l'application $\sigma : E \to \exp X$ et son inverse*

Epreuve. Voir [1]. □

Corollaire. Les parties $CO(X)$ ne sont que les images $\sigma(p)$ des éléments $p \in E$.

5 La dualité pour les ensembles ordonnés arbitraires

Maintenant soit P un ensemble ordonné arbitraire, et soit $Q = P^{op}$ son inverse avec l'anti-isomorphisme canonique ρ (5). Formons l'EOC engendré par P:

$$E = P \cup Q \cup \{0, 1\} \tag{9}$$

avec l'ordre suivant. 1 est le plus grant élément de E, 0 est le plus petit, et pour tous $p, p' \in P \quad p \leq p'$ dans E si et seulement si $p \leq p'$ dans P, pour tous $q, q' \in Q \quad q \leq q'$ dans E si et seulement si $\rho^{-1}(q) \leq_P \rho^{-1}(q')$ dans P et tout couple $p \in P, q \in Q$ n'est pas comparable. Munissons l'espace $X = \mathtt{Mor}_{EOC}(E, B_2)$ (6) avec la fermeture $\mathbf{C}$ (8). Désignons

$$Y = \mathtt{Mor}_{EO}(P, B_2)$$

Soient pour tout $p \in P$:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1(p) & = & \{y \in Y \mid \quad y(p) = 1\} \\ \sigma_2(p) & = & \{y \in Y \mid \quad y(p) = 0\} \end{array} \tag{10}$$

et munissons l'espace Y avec un couple des fermetures $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ et avec la fermeture $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C}_1 & = & \mathtt{clos}\{\sigma_1(P)\} \\ \mathbf{C}_2 & = & \mathtt{clos}\{\sigma_2(P)\} \\ \mathbf{C} = & \mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2 = & \mathtt{clos}\{\sigma_2(P) \cup \sigma_2(P)\} \end{array} \tag{11}$$

Lemma 2 *Les espaces de fermeture $X, \mathbf{C}$ et $Y, \mathbf{C}$ sont homéomorphiques.*

Epreuve. Premièrement établissons la bijection entre les ensembles X et Y. Pour tout $x \in X$ sa restriction $x^P = x\mid_P \colon P \to B_2$ est un élement de Y. De contraire, soit $y \in Y$. Posons $y^E(0) = 0$ et $y^E(1) = 1$, pour tout $p \in P \subseteq E$ soit $y^E(p) = y(p)$ et pour tout $q \in Q$ (9) posons $y^E(q) = 1 - y(\rho^{-1}(q))$, alors cet expansion y^E de y devient l'élément de X étant orthocroissant.

Pour établir que les bijections $x \mapsto x^P$ et $y \mapsto y^E$ sont bicontinues il faut vérifier que les préimages des éléments des bases des fermetures appropriées sont fermés. Commençons avec $\phi : x \mapsto x^P : X \to Y$. Les éléments de la base de $\mathbf{C}(Y)$ sont les parties de Y de deux types (10). Pout tout $\sigma_1(p)$ nous avons $\phi^{-1}(\sigma_1(p)) = \sigma(p) \in C(X)$, pour tout $\sigma_2(p)$ nous avons $\phi^{-1}(\sigma_2(p)) = \{x \in X \mid \quad x(p) = 0\} = \sigma(p^\perp) \in C(X)$.

Considérons $\psi : y \mapsto y^E : Y \to X$. Notons que, suvant le corollaire de la théorème 1, les éléments de la base de $X, \mathbf{C}$ ne sont que les $\sigma(e)$, $e \in E = P \cup Q \cup \{0, 1\}$. Ainsi, il faut considérer les cas suivants: $e = 0$ ou $e = 1$, $e \in P$, et $e \in Q$. On a

$$\begin{array}{rcccl} \psi^{-1}(\sigma(0)) & = & \{y_1\} & = & \bigcap\{\sigma_1(p) \mid \quad p \in P\} \in C(Y) \\ \psi^{-1}(\sigma(1)) & = & \{y_0\} & = & \bigcap\{\sigma_0(p) \mid \quad p \in P\} \in C(Y) \\ \psi^{-1}(\sigma(p)) & = & \sigma_1(p) & & \forall p \in P \\ \psi^{-1}(\sigma(q)) & = & \sigma_0(\rho^{-1}(q)) & & \forall q \in Q \end{array} \tag{12}$$

et on voit que les espaces de fermeture $X, \mathbf{C}$ et $Y, \mathbf{C}$ sont en effet homéomorphiques. □

Il reste de souligner les éléments de P entre les parties $CO(Y)$. Rappelons que Y est encore muni de la couple des fermetures $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ (11).

Lemma 3 *L'ensemble ordonné P est isomorhique à la famille des parties* propres *à la fois $\mathbf{C}_1$-fermées et $\mathbf{C}_2$-ouvertes de l'espace Y:*

$$(P, \leq) \quad \simeq \quad (C_1O_2(Y) \setminus \{\emptyset, Y\}, \subseteq)$$

Epreuve. On montra que cet isomorhisme est accompli par $\sigma_1 : P \to \exp Y$ et son inverse. Rappelons encore que les éléments de la base de $X, \mathbf{C}$ ne sont que les $\sigma(e)$, $e \in E = P \cup Q \cup \{0, 1\}$. Il s'ensuit de (12) les preimages des éléments de P ne sont que les $\sigma_1(p)$, $p \in P$. Mais pour tout $p \in P$ la partie $Y \setminus \sigma_1(p) = \{y \in Y \mid \quad y(p) = 0\} = \sigma_0(p)$, alors $\sigma_1(p) \in O_2(X)$. Pour montrer que c'est l'isomorphisme notons que σ_1 est la restriction de l'isomorphisme (Théorème 1) σ sur une partie P de E. □

6 Le cas particulier: EOC

Etudions la relation de la représentation introduite ici avec telle concernante les EOC. Soit P un EOC avec la complémentation $p \mapsto p^c$. Notons que la complémentation $(\cdot)^c$ est aussi définite sur l'EO inverse $Q = P^{op}$ comme $q^c = \rho((\rho^{-1}(q))^c)$. Introduisons l'EOC E (9) et posons pour tout $x \in X$ (6)

$$\pi(x) = 1 - x(p^c) \tag{13}$$

Lemma 4 *Pour tout $x \in X$, $\pi(x) : E \to B_2$ est un élément de X, c'est à dire, $\pi(x)$ est orthocroissante par rapport de la complḿentation canonique $(\cdot)^\perp$ sur E.*

Epreuve. Pour tout $x \in X$, $\pi(x)$ est évidemment croissante étante la composition des applications anticroissantes. Pour tout $p \in P$, $p^{\perp c} = \rho((\rho^{-1}(p^\perp)))^c = p^{c\perp}$, ainsi $\pi(x)(p) + \pi(x)(p^\perp) = 1 - x(p^c) + 1 - x((p^\perp)^c) = 1 + 1 - (x(p^c) + x^((p^c)^\perp)) = 1$ et $\pi(x)$ est en effet *ortho*croissante. □

Lemma 5 *L'application $\pi : (X, C_1, C_2) \to (X, C_2, C_1)$ des éspaces à deux fermetures est bicontinue.*

Epreuve. Vérifions cela sur les bases des des fermetures appropriées. Soit $A = \sigma_1(p)$ pour quelconque $p \in P$, alors $\pi^{-1}(A) = \{x \mid \quad \pi(x(p)) = 1\} = \{x \mid \quad x(p^c) = 0\} = \sigma_2(p^c)$. Ça signifie que pour tout $A \in C_1O_2(X)$ nous avons $\pi^{-1}(A) \in C_2O_1(X)$. □

L'espace $X = \mathtt{Mor}_{EO}(P)$ est plus grand que $Y = \mathtt{Mor}_{EOC}(P)$, et on obtient la charactérization suivante:

Lemma 6 *Y est l'ensemble des points fixées $\mathtt{Fix}(\pi)$ de l'application $\pi : X \to X$.*

Epreuve. Soit $y \in Y$, alors pour tout $p \in P$ on a $\pi(y)(p) = 1 - y(p^c) = 1 - (1 - y(p)) = y(p)$. Conversement, soit $y \in \mathtt{Fix}(\pi)$, alors pour tout $p \in P$ on a $y(p) + y(p^c) = y(p) + 1 - \pi(y)(p) = 1$. □

Comme nous avons déjà mentionné, l'espace X possède la troisième fermeture $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2$ (11), qu'on peût restreindre à $Y \subseteq X$. Un objet de notre intérêt sera l'espace de fermeture $(Y, \mathbf{C})$.

Lemma 7 *Si P est un EOC, les EOC P et $CO(Y)$ sont isomorphiques.*

Epreuve. Il suffit de vérifier que les fermetures $\mathbf{C}_Y = \mathtt{clos}(\sigma(P))$ est $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \vee \mathbf{C}_2$ (11) coïncident. Mais c'est évident car ils ont les mêmes bases (ça s'ensuit de lemma 5). $\square$

Alors, tout est prêt pour formuler le théorème suivant.

Théorème 8 *Soit P un EO avec l'opération involutive $(\cdot)^c : P \to P$, et soit $X = \mathtt{Mor}_{EO}(P, B_2)$. Ce P est un EOC si et seulement si l'application π (13) est le homéomorphisme des espaces $(X, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$ et $(X, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1)$.*

Epreuve. La nécessité étante déjà établi dans les lemmas précédents, et il reste de vérifier que la condition du lemma est suffisante. Soit $p \in P$ et $q = p \vee p^c$, alors $\sigma_2(q) \subseteq \sigma_2(p) \cup \sigma_2(p^c)$. Mais $\sigma_2(p^c) = \pi(\sigma_1(p))$, alors $\sigma_2(q) \subseteq \sigma_1(p) \cup \sigma_2(p) = \emptyset$, ainsi $q = 1$ – le plus grand élément de P. Au même façon on montre que $p \wedge p^c = 0$, et on vérifie que $(\cdot)^c : P \to P$ fournit les compléments. $\square$

7 Conclusions

Dans cet article on a étendu la notion de l'espace dual pour un ensemble ordonné complémenté dans le cas le plus général des ensembles ordonnés arbitraires. Les techniques introduites ici peuvent être considérées comme la representation dans un sense "naturelle" des EO: on les représente avec les parties de l'universe approprié. De plus, la condition pour une involution sur un EO d'être complémentation est introduite ici.

On exprime la reconnaissance à Georges Chevalier et René Mayet pour les discussions.

References

[1] Mayet, R. *Une dualité pour les ensembles ordonnés orthocomplémentés*, C.R. Acad. Sc. Paris, **294**, 1982, 63

Départment des Mathématiques, SPb UEF,
Griboyedova 30/32,
191023, St.Petersbourg, Russie