E.N.I.T. **Unité Pédagogique de Mathématiques Appliquées**

1ére année TA AU: 2019-2020

Projet d'Analyse Numérique

Optimisation de la température d'un four

April 6, 2020

Objectif du travail

L'objectif de ce projet est d'étudier numériquement le problème suivant:

On considère un four représenté par un domaine $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_c \subset \mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$, comportant un certain nombre de résistances électriques. On se propose de chercher la consigne en température des résistances de sorte que la température dans une pièce placée à l'intérieur du four soit proche d'une consigne T_c fixée à l'avance.

On suppose que $\Omega = \Omega_a \cup \Omega_c$ avec Ω_c représente la pièce à cuir et $\Omega_a = \Omega \backslash \overline{\Omega}_c$ est le domaine occupé par l'air.

Dans un premier temps, et à partir de la valeur de chaque résistance, on se propose de calculer la température à l'intérieur du four, et en particulier la température de l'objet mis à cuire. Cette première approche est appelée **problème direct**.

Mais en réalité et dans la pratique, le **problème inverse** consiste à déterminer les valeurs minimales de résistances, considérées comme inconnues, qui donnent une température idéale au cuisson. C'est l'objet de la deuxième partie du travail.

1 Problème directe

1.1 Modélisation et formulation du problème

Le four est modélisé par un domaine rectangulaire $\Omega =]0, L_x[\times]0, L_y[$ de longueur L_x et de largeur L_y. La cuisson occupe le domaine rectangulaire $\Omega_c =]\frac{L_x}{4}, \frac{3L_x}{4}[\times]\frac{L_y}{4}, \frac{3L_y}{4}[$ et le reste du domaine est occupé par l'air (c-à-d $\Omega_a = \Omega \backslash \overline{\Omega_c}$). On note par $\partial\Omega$ (resp. $\partial\Omega_c$) la frontière de Ω (resp. Ω_c) qui est composée par quatre segments $\Gamma_i, i = 1, ..., 4$ (resp. $\gamma_i, i = 1, ..., 4$) comme l'indique la figure (1).

On suppose que sur les deux parties de bord Γ_1 et Γ_3, la température est fixée à T_b et T_h respectivement et que Γ_2 et Γ_4 sont parfaitement isolées.

Le problème physique de diffusion de la chaleur s'écrit alors sous la forme:

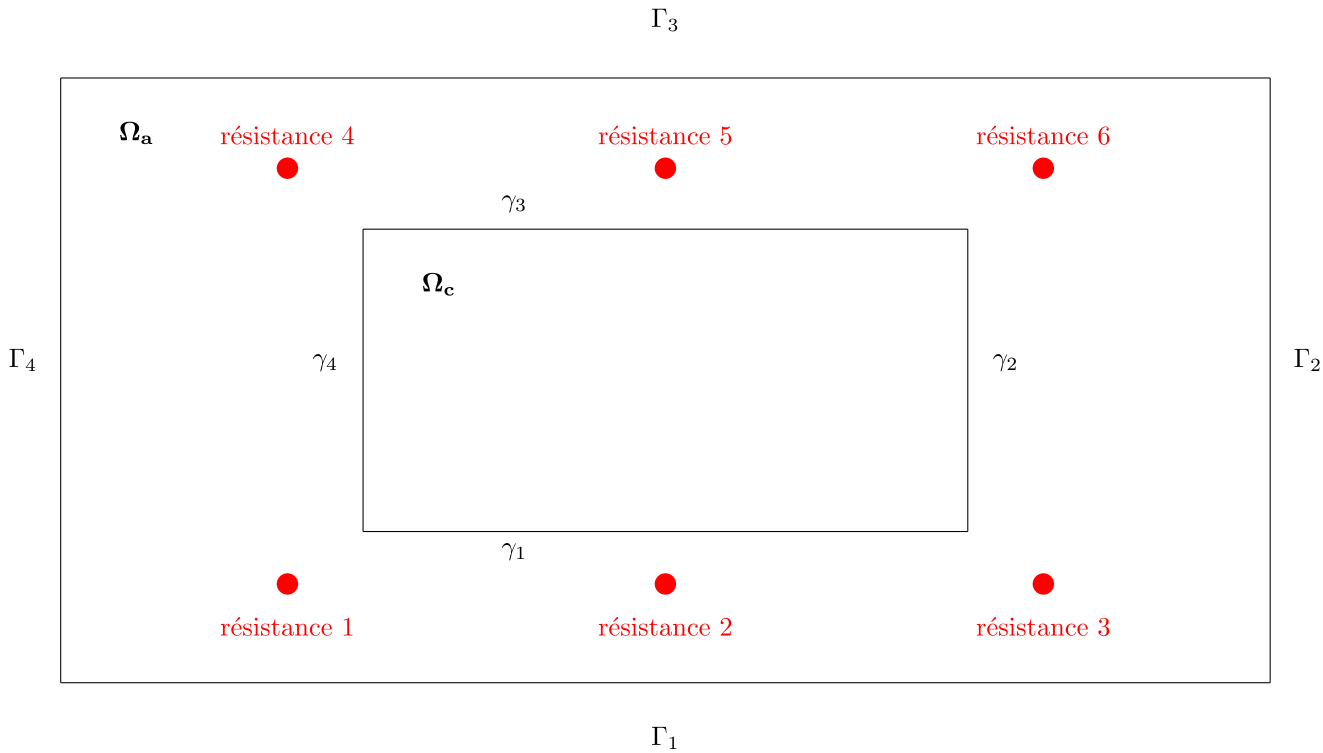

Figure 1: *Représentation 2D du four*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x},t) - \operatorname{div}(\kappa \nabla T)(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0, \\ T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3, \\ \kappa \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ T(\mathbf{x},0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où κ désigne la conductivité thermique, qui est égale à κ_a dans l'air Ω_a et κ_c dans la piéce à chauffer Ω_c, et f représente la source surfacique de chaleur produite par les différentes résistances.
On dispose de N_r résistances $r_1, \cdots, r_{N_r}$ (Dans notre cas $N_r = 6$: Voir Figure (1)) placées aux points de coordonnés $(x_{r_i}, y_{r_i}), i = 1, \cdots, N_r$. Chaque résistance r_i est modélisée par un terme source f_i qui représente une densité surfacique de température.

En décompose notre problème (1) en deux sous problèmes: un problèmes stationnaire qui vérifie:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\kappa \nabla T) = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1, \\ T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3, \\ \kappa \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases} \tag{2}$$

et un problème transitoire qui vérifie:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \mathrm{div}\,(\kappa \nabla T)(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0, \\ T = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \kappa \dfrac{\partial T}{\partial n} = 0, \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ T(\mathbf{x}, 0) = T_0 - T_{st}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où T_{st} est la solution du problème stationnaire (2).

1. Soit T_{st} la solution du problème (2) et T_{tr} la solution du problème (3). Montrer que $T(\mathbf{x}, t) = T_{st}(\mathbf{x}) + T_{tr}(\mathbf{x}, t)$ est solution du problème (1).

2. Supposons que $f \equiv 0$. Trouver une solution exacte des problèmes (2) et (3) en absence de la pièce à cuir Ω_c dans le four (c-à-d $\kappa = \kappa_a$ dans Ω).

1.2 Problème stationnaire

1. Soit T^0_{st} la solution du problème (2) pour $f = 0$ et T^r_{st} la solution du problème (2) avec $T_b = T_h = 0$ (condition de Dirichlet homogène). Montrer que $T_{st}(\mathbf{x}) = T^0_{st}(\mathbf{x}) + T^r_{st}(\mathbf{x})$ est solution du problème (2).

2. Montrer que si $T_b = T_h = 0$, la température T solution de (2) varie linéairement en fonction de f.

Afin de résoudre numériquement (2) et vu la propriété de linéarité du problème on procède de la façon suivante:

- On résout un problème thermique (2) sans terme source (f est identiquement nulle, mais avec les conditions de Dirichlet non homogènes $T = T_b$ sur Γ_1 et $T = T_h$ sur Γ_3). La solution de ce premier problème sera notée T^0_{st}.
- On résout ensuite, pour $1 \le i \le N_r$, le problème (2) avec une seule résistance unitée r_i en prenant $f_i = 1$ au voisinage du point de coordonnées (x_{r_i}, y_{r_i}) (position de la résistance) et 0 ailleurs et avec des conditions de Dirichlet homogènes ($T = 0$, sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$). On notera par T^i_{st} la solution obtenue.

Ainsi, la solution T_{st} de problème (2), obtenue avec les températures T_b et T_h imposées sur Γ_1 et Γ_3, et pour N_r résistances d'amplitudes $r_i, 1 \le i \le N_r$, est $T_{st} = T^0_{st} + \sum_{i=1}^{N_r} r_i \, T^i_{st}$.

1.2.1 Résolution par différences finies

En utilisant la condition de continuité de flux à travers le bord de cuisson le problème (2) s'écrit sous cette forme:

$$\begin{cases}
-\kappa_a \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) - \kappa_a \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_a \\
-\kappa_c \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) - \kappa_c \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega_c \\
\kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_1^-} = \kappa_c \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_1^+}, \ \kappa_c \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_3^-} = \kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_3^+} \\
\kappa_c \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_2^-} = \kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_2^+}, \ \kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_4^-} = \kappa_c \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\gamma_4^+} \\
\kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\Gamma_2^-} = 0; \ \kappa_a \dfrac{\partial T}{\partial n} \,|_{\Gamma_4^+} = 0, \\
T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1, \ T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3.
\end{cases} \tag{4}$$

Discrétisation:

Pour discrétiser le domaine Ω on choisit deux entiers n_x et n_y et on pose

$$x_i = i\, h_x, \ 0 \le i \le 4n_x, \quad y_j = j\, h_y, \ 0 \le j \le 4n_y,$$

avec $h_x = \dfrac{L_x}{4n_x}$ et $h_y = \dfrac{L_y}{4n_y}$ sont les deux pas de maillage du rectangle (voir figure (2)).

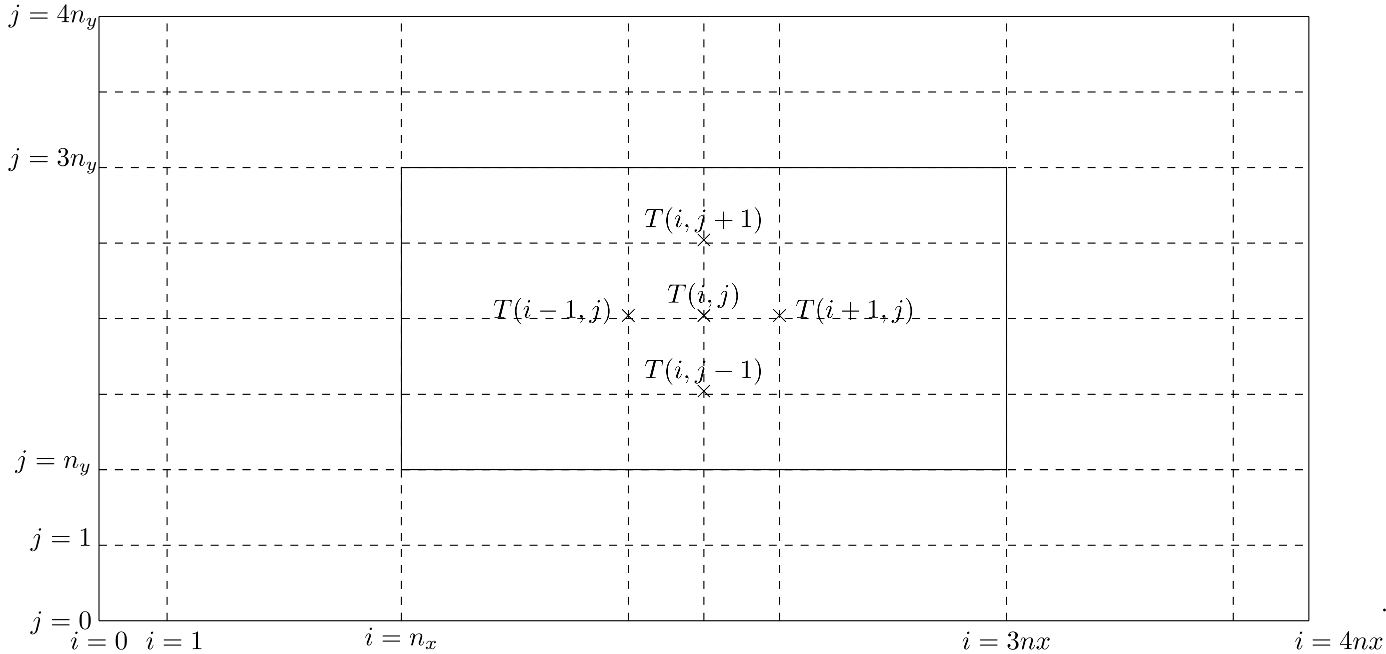

Figure 2: *Maillage de rectangle*

Ainsi on définit une partition régulière de Ω conforme aux bord $\partial\Omega_c$ de cuisson.

On notera par $T_{i,j}$ une approximation de $T(x_i, y_j)$: valeur de la solution exacte T au point de discrétisation (x_i, y_j), pour $0 \leq i \leq 4n_x$ et $1 \leq j \leq 4n_y - 1$. Par la méthode de différences finis, on approche les dérivées seconde $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j)$ et $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j)$ par:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{T(x_{i+1}, y_j) - 2T(x_i, y_j) + T(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{T(x_i, y_{j+1}) - 2T(x_i, y_j) + T(x_i, y_{j-1})}{h_y^2},$$

et les dérivées normales $\dfrac{\partial T}{\partial n} \mid_{\gamma_i^+}$, $1 \leq i \leq 4$ (resp. $\dfrac{\partial T}{\partial n} \mid_{\gamma_i^-}, 1 \leq i \leq 4$) par des schémas d'Euler avant (resp. arrière).

Calcul de T_{st}^0:

On commence par résoudre le problème thermique stationnaire (4) avec un terme source nul ($f \equiv 0$) on utilisant ce schéma numérique:

$$
\begin{cases}
-\kappa_a \dfrac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_a \\
-\kappa_c \dfrac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_x^2} - \kappa_c \dfrac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_c \\
-\dfrac{\kappa_c\, T_{n_x+1,j} - (\kappa_a + \kappa_c)\, T_{n_x,j} + \kappa_a T_{n_x-1,j}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{n_x,j+1} - 2T_{n_x,j} + T_{n_x,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{n_x}, y_j) \in \gamma_4 \\
-\dfrac{\kappa_a\, T_{3n_x+1,j} - (\kappa_a + \kappa_c)\, T_{3n_x,j} + \kappa_c T_{3n_x-1,j}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{3n_x,j+1} - 2T_{3n_x,j} + T_{3n_x,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{3n_x}, y_j) \in \gamma_2 \\
-\kappa_a \dfrac{T_{i+1,n_y} - 2T_{i,n_y} + T_{i-1,n_y}}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_c\, T_{i,n_y+1} - (\kappa_a + \kappa_c)\, T_{i,n_y} + \kappa_a T_{i,n_y-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{n_y}) \in \gamma_1 \\
-\kappa_a \dfrac{T_{i+1,3n_y} - 2T_{i,3n_y} + T_{i-1,3n_y}}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_a\, T_{i,3n_y+1} - (\kappa_a + \kappa_c)\, T_{i,3n_y} + \kappa_c T_{i,3n_y-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{3n_y}) \in \gamma_3 \\
-\kappa_a \dfrac{T_{1,j} - T_{0,j}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{0,j+1} - 2T_{0,j} + T_{0,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_0, y_j) \in \Gamma_4 \\
-\kappa_a \dfrac{-T_{4n_x,j} + T_{4n_x-1,j}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{4n_x,j+1} - 2T_{4n_x,j} + T_{4n_x,j-1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{4n_x}, y_j) \in \Gamma_2 \\
T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1,\ T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3.
\end{cases}
\tag{5}
$$

1. Soit $\mathbf{T_{app}} = \left(\mathbf{T}_1, \cdots, \mathbf{T}_{4\,n_y-1}\right)^T$ et $\mathbf{T}_j = \left(T_{0,j}, \cdots, T_{4\,n_x,j}\right)^T$, $1 \le j \le 4\,n_y - 1$. Écrire le schéma numérique ci-dessus sous la forme matricielle suivante:

$$A\,\mathbf{T_{app}} = F,$$

où A une matrice que l'on précisera et F un vecteur que l'on précisera.

2. Écrire un script Python pour résoudre numériquement le problème (4) par le schéma numérique (5).

Calcul de $T_{st}^i, 1 \le i \le N_r$:

On suppose qu'une résistance unité placée en (x_{r_i}, y_{r_i}) est équivalente à une densité surfacique $f_i(x,y) = \exp(-\dfrac{(x - x_{r_i})^2 + (y - y_{r_i})^2}{2(0.05)^2})$.

1. Modifier le schéma numérique (5) pour résoudre le problème (4) avec une condition de Dirichlet homogène ($T_b = 0$ et $T_h = 0$) et une source unitaire f_1 placée en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2\,L_x, 0.2L_y)$.
2. Dans le même script de l'exercice précédent calculer la solution T^1_{st} pour $r_1 = 1$.
3. Calculer la température pour $r_1 = 100$ et vérifier la linéairité du problème.
4. Tracer la température T du four pour une seule résistance ($N_r = 1$) d'amplitude $r_1 = 100$ placée en (x_{r_1}, y_{r_1}) et avec les conditions aux bord $T_b = 100$ et $T_h = 50$.
5. Tracer dans deux figures séparées, la température T du four, avec les mêmes conditions aux bord, pour quatre résistances $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 100$ placées en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_2} = (0.8\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_3} = (0.8\,L_x, 0.8L_y)$ et $\mathbf{x}_{r_4} = (0.2\,L_x, 0.8L_y)$
6. Tracer dans deux figures séparées la température T du four avec les mêmes conditions aux bord, pour six résistances $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r5 = r6 = 100$ placées en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_2} = (0.5\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_3} = (0.8\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_4} = (0.8\,L_x, 0.8L_y)$, $\mathbf{x}_{r_5} = (0.5\,L_x, 0.8L_y)$ et $\mathbf{x}_{r_6} = (0.2\,L_x, 0.8L_y)$.

1.3 Étude du problème transitoire

Maintenant on va s'intéresser au problème transitoire 3. Nous cherchons une solution approcher de ce problème par deux schémas numériques: Un schéma explicite et un schéma implicite.

Pour n_x, n_y et M trois entiers positifs non nul, soient $N_x = 4n_x + 1, N_y = 4n_y - 1$, $h_x = \dfrac{L_x}{N_x - 1}$ et $h_y = \dfrac{L_y}{N_y + 1}$ les deux pas de discrétisation suivant les directions x et y, et Δt est le pas de discrétisation en temps avec $\Delta t = T_{max}/M$. On pose

$$x_i = i\,h_x,\ 0 \leq i \leq 4n_x, \quad y_j = j\,h_y,\ 0 \leq j \leq 4n_y, \quad t^m = m\,\Delta t \quad 0 \leq m \leq M.$$

Ainsi on définit une partition régulière de Ω conforme aux bord $\partial\Omega_c$ de cuisson. On cherche alors, pour chaque triplet (i, j, m) une approximation $T^m_{i,j} \simeq T(x_i, y_j, t^m)$ de la solution exacte aux noeuds de coordonnés (x_i, y_j, t^m) du domaine spatio-temporel en remplaçant les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^m)$ et $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^m)$ par leur valeurs approchées

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^m) \simeq \frac{T^m_{i+1,j} - 2T^m_{i,j} + T^m_{i-1,j}}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^m) \simeq \frac{T^m_{i,j+1} - 2T^m_{i,j} + T^m_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Pour les dérivées premières, on utilise soit des schéma d'Euler avant, soit des schéma d'Euler arrière

1.3.1 Schéma explicite

Soit $\mathbf{T}_j^m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{0,j}^m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{4n_x,j}^m \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq 4n_y - 1$ et $\mathbf{T}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{4n_y-1}^m \end{pmatrix}$. On a $\mathbf{T}^0 = T_0 - T_{st}$, supposons que $\mathbf{T}^n$ est connu pour $0 \leq n \leq m$, on cherche alors une approximation $\mathbf{T}^{m+1}$ de la solution exacte qui satisfait le système discret suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,j}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i-1,j}^m}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{i,j+1}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_a \\ \dfrac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m}{\Delta t} - \kappa_c \dfrac{T_{i+1,j}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i-1,j}^m}{h_x^2} - \kappa_c \dfrac{T_{i,j+1}^m - 2T_{i,j}^m + T_{i,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_c \\ \dfrac{T_{n_x,j}^{m+1} - T_{n_x,j}^m}{\Delta t} - \dfrac{\kappa_c T_{n_x+1,j}^m - (\kappa_a + \kappa_c) T_{n_x,j}^m + \kappa_a T_{n_x-1,j}^m}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{n_x,j+1}^m - 2T_{n_x,j}^m + T_{n_x,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{n_x}, y_j) \in \gamma_4 \\ \dfrac{T_{3n_x,j}^{m+1} - T_{3n_x,j}^m}{\Delta t} - \dfrac{\kappa_a T_{3n_x+1,j}^m - (\kappa_a + \kappa_c) T_{3n_x,j}^m + \kappa_c T_{3n_x-1,j}^m}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{3n_x,j+1}^m - 2T_{3n_x,j}^m + T_{3n_x,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{3n_x}, y_j) \in \gamma_2 \\ \dfrac{T_{i,n_y}^{m+1} - T_{i,n_y}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,n_y}^m - 2T_{i,n_y}^m + T_{i-1,n_y}^m}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_c T_{i,n_y+1}^m - (\kappa_a + \kappa_c) T_{i,n_y}^m + \kappa_a T_{i,n_y-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{n_y}) \in \gamma_1 \\ \dfrac{T_{i,3n_y}^{m+1} - T_{i,3n_y}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,3n_y}^m - 2T_{i,3n_y}^m + T_{i-1,3n_y}^m}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_a T_{i,3n_y+1}^m - (\kappa_a + \kappa_c) T_{i,3n_y}^m + \kappa_c T_{i,3n_y-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{3n_y}) \in \gamma_3 \\ \dfrac{T_{0,j}^{m+1} - T_{0,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{1,j}^m - T_{0,j}^m}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{0,j+1}^m - 2T_{0,j} + T_{0,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_0, y_j) \in \Gamma_4 \\ \dfrac{T_{4n_x,j}^{m+1} - T_{4n_x,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{-T_{4n_x,j}^m + T_{4n_x-1,j}^m}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{4n_x,j+1}^m - 2T_{4n_x,j}^m + T_{4n_x,j-1}^m}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{4n_x}, y_j) \in \Gamma_2 \\ T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1, \; T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{cases} \tag{6}$$

1. Justifier le choix de ce schéma numérique.
2. Étudier la stabilité, la consistance et la convergence de ce schéma.
3. Écrire le schéma numérique ci-dessus sous la forme condensée suivant:

$$T^{m+1} = B\, T^m, \forall m \geq 0$$

   où B une matrice (qui s'écrit en fonction de la matrice A du schéma stationnaire (5)) que l'on précisera.

4. Écrire un script Python pour résoudre numériquement le problème transitoire (3) par le schéma numérique (6).
5. Pour h fixer dessiner l'évolution de la solution approchée en fonction du temps. Que remarquer vous ?

1.3.2 Schéma implicite

Soit $\mathbf{T}_j^m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{0,j}^m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{4n_x,j}^m \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq 4n_y - 1$ et $\mathbf{T}^m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^m \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{4n_y-1}^m \end{pmatrix}$. On a $\mathbf{T}^0 = T_0 - T_{st}$, supposons que $\mathbf{T}^n$ est connu pour $0 \leq n \leq m$, on cherche alors une approximation $\mathbf{T}^{m+1}$ de la solution exacte qui satisfait le système discret suivant:

$$\begin{cases}
\dfrac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,j}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{i,j+1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_a \\
\dfrac{T_{i,j}^{m+1} - T_{i,j}^m}{\Delta t} - \kappa_c \dfrac{T_{i+1,j}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_c \dfrac{T_{i,j+1}^{m+1} - 2T_{i,j}^{m+1} + T_{i,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_j) \in \Omega_c \\
\dfrac{T_{n_x,j}^{m+1} - T_{n_x,j}^m}{\Delta t} - \dfrac{\kappa_c T_{n_x+1,j}^{m+1} - (\kappa_a + \kappa_c) T_{n_x,j}^{m+1} + \kappa_a T_{n_x-1,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{n_x,j+1}^{m+1} - 2T_{n_x,j}^{m+1} + T_{n_x,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{n_x}, y_j) \in \gamma_4 \\
\dfrac{T_{3n_x,j}^{m+1} - T_{3n_x,j}^m}{\Delta t} - \dfrac{\kappa_a T_{3n_x+1,j}^{m+1} - (\kappa_a + \kappa_c) T_{3n_x,j}^{m+1} + \kappa_c T_{3n_x-1,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{3n_x,j+1}^{m+1} - 2T_{3n_x,j}^{m+1} + T_{3n_x,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{3n_x}, y_j) \in \gamma_2 \\
\dfrac{T_{i,n_y}^{m+1} - T_{i,n_y}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,n_y}^{m+1} - 2T_{i,n_y}^{m+1} + T_{i-1,n_y}^{m+1}}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_c T_{i,n_y+1}^{m+1} - (\kappa_a + \kappa_c) T_{i,n_y}^{m+1} + \kappa_a T_{i,n_y-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{n_y}) \in \gamma_1 \\
\dfrac{T_{i,3n_y}^{m+1} - T_{i,3n_y}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{i+1,3n_y}^{m+1} - 2T_{i,3n_y}^{m+1} + T_{i-1,3n_y}^{m+1}}{h_x^2} - \dfrac{\kappa_a T_{i,3n_y+1}^{m+1} - (\kappa_a + \kappa_c) T_{i,3n_y}^{m+1} + \kappa_c T_{i,3n_y-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_i, y_{3n_y}) \in \gamma_3 \\
\dfrac{T_{0,j}^{m+1} - T_{0,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{T_{1,j}^{m+1} - T_{0,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{0,j+1}^{m+1} - 2T_{0,j}^{m+1} + T_{0,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_0, y_j) \in \Gamma_4 \\
\dfrac{T_{4n_x,j}^{m+1} - T_{4n_x,j}^m}{\Delta t} - \kappa_a \dfrac{-T_{4n_x,j}^{m+1} + T_{4n_x-1,j}^{m+1}}{h_x^2} - \kappa_a \dfrac{T_{4n_x,j+1}^{m+1} - 2T_{4n_x,j}^{m+1} + T_{4n_x,j-1}^{m+1}}{h_y^2} = 0, \quad \text{si } (x_{4n_x}, y_j) \in \Gamma_2 \\
T = T_b, \quad \text{sur } \Gamma_1, \; T = T_h, \quad \text{sur } \Gamma_3.
\end{cases} \tag{7}$$

1. Justifier le choix de ce schéma numérique.
2. Étudier la stabilité, la consistance et la convergence de ce schéma.
3. Écrire le schéma numérique ci-dessus sous la forme condensée suivant:

$$B\, T^{m+1} = T^m, \forall m \geq 0$$

   où B une matrice (qui s'écrit en fonction de la matrice A du schéma stationnaire (5)) que l'on précisera.

4. Écrire un script Python pour résoudre numériquement le problème transitoire (3) par le schéma numérique (7).

5. Pour h fixer dessiner l'évolution de la solution approchée en fonction du temps. Que remarquer vous ?

2 Étude numérique du problème inverse

Dans cette seconde partie, on suppose que l'on cherche à chauffer le cuisson à une température idéale de cuisson T^c. Pour cela, on va déterminer les valeurs des résistances $r_1, r_2, ..., r_{N_r}$ qui permettent d'obtenir une température aussi proche que possible de T^c. On rappelle que, par application du principe de linéarité, la température T peut être écrite sous la forme:

$$T = T^0_{st} + \sum_{r=1}^{N_r} r_i \, T^i_{st}.$$

où r_i est la valeur de la résistance palcée au point d'abscisse (x_{r_i}, y_{r_i}), T^i_{st} est la température solution de (2) pour f_i une source unitaire en x_{r_i} et avec conditions de Dirichlet homogènes. Une température la plus proche possible de T^c dans l'objet à cuire Ω_c est celle qui minimise la fonction

$$r \in \mathbb{R}^{N_r} \mapsto J(r) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_c} \left(T^0_{st}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} r_i \, T^i_{st}(\mathbf{x}) - T^c\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{Lx}{4}}^{\frac{3Lx}{4}} \int_{\frac{Ly}{4}}^{\frac{3Ly}{4}} \left(T^0_{st}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_r} r_i \, T^i_{st}(\mathbf{x}) - T^c\right)^2.$$

La fonction quadratique objectif J est telle que

$$J(r) = \frac{1}{2}(\tilde{A}r, r) - (\tilde{b}, r) + c,$$

avec la matrice $\tilde{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{N_r}(\mathbb{R})$, le vecteur $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{N_r}$ et le réel c sont donnés par

$$a_{ij} = \int_{\Omega_c} T^i_{st}(\mathbf{x}) T^j_{st}(\mathbf{x}), \quad b_i = \int_{\Omega_c} (T^0_{st}(\mathbf{x}) - T^c) T^i_{st}(\mathbf{x}) \text{ et } c = \frac{1}{2}\int_{\Omega_c} (T^0_{st}(\mathbf{x}) - T^c)^2.$$

1. Vérifier que la matrice $\tilde{A}$ est symétrique définie positive.
2. Utiliser la formule de rectangle à gauche composée pour calculer les coefficients a_{ij} et b_i en fonction des valeurs approcher de $T^m, m = 1, ..., Nr$ aux points de discrétisation de notre domaine Ω. On rappelle que la formule de rectangle à gauche simple est $\displaystyle\int_a^b f \simeq f(a)(b-a)$ et que la formule de rectangle composée sur l'intervalle $[a, b]$ consiste à appliquer la formule simlpe à une partition de cet intervalle.

Comme la matrice $\tilde{A}$ est symétrique définie positive, alors $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{N_r} \end{pmatrix}$ est mimimimum de J sur $\mathbb{R}^{N_r}$ si et seulement si r est solution de système $\tilde{A}r = \tilde{b}$.

En pratique on prend $T^c = 250$. Connaissant T^0_{st}, on suit les étapes suivantes:

- On fixe le nombre N_r et la position de chaque résistance.
- On calcule numériquement les températures $T^i_{st}, i = 1, ..., N_r$.
- On calcule la matrice $\tilde{A}$ et le second membre $\tilde{b}$.

- On résout le système $\tilde{A}r = \tilde{b}$ pour obtenir $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{N_r} \end{pmatrix}$ optimal.

1. Dans un fichier script, pour $N_r = 1$ et en plaçant la seule résistance en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2L_x, 0.2L_y)$ calculer r_1 qui donne une température T la plus proche possible de T^c. Calculer e_1, la variation de la température entre la température optimale et la température cible; $e_1 = \displaystyle\int_{\Omega_c} (T - T^c)^2$.
2. Tracer la solution obtenue.
3. Refaire le même travail pour quatre résistances placées en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_2} = (0.8\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_3} = (0.8\,L_x, 0.8L_y)$ et $\mathbf{x}_{r_4} = (0.2\,L_x, 0.8L_y)$ puis pour 6 résistances placées en $\mathbf{x}_{r_1} = (0.2\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_2} = (0.5\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_3} = (0.8\,L_x, 0.2L_y)$, $\mathbf{x}_{r_4} = (0.8\,L_x, 0.8L_y)$, $\mathbf{x}_{r_5} = (0.5\,L_x, 0.8L_y)$ et $\mathbf{x}_{r_6} = (0.2\,L_x, 0.8L_y)$.
4. Conclure.