Projeções, Reflexões e Autocoisas

Matheus do Ó Santos Tiburcio

18 de outubro de 2024

1 Projeções ortogonais

Projeções ortogonais são transformações lineares que levam todos os vetores para algum espaço. Esse espaço pode ser uma reta, um plano ou qualquer outro objeto linear. Então, antes de tudo, precisamos definir em quê estamos projetando os vetores. Toda a discussão aqui será focada em projeções ortogonais sobre retas em $\mathbb{R}^2$.

1.1 Visão geométrica

Imagine uma reta r e vetores v e w quaisquer em $\mathbb{R}^2$.

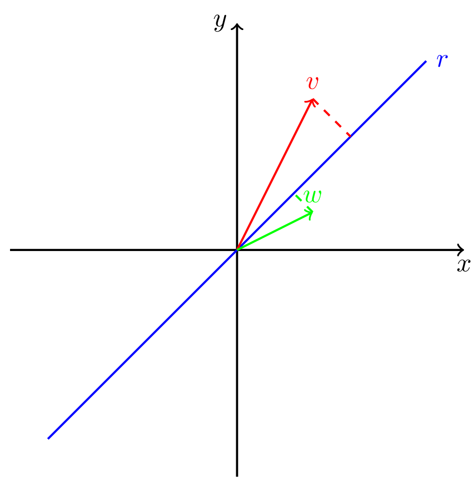

Figura 1: Gráfico com a reta $y = x$ e dois vetores v e w fora da reta. Note que as linhas tracejadas fazem exatamente 90 graus com a reta r. A projeção ortogonal dos vetores na reta r será exatamente os vetores resultantes de "achatarmos"v e w seguindo essa reta tracejada.

A projeção ortogonal P na reta r será uma transformação linear que leva todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ exatamente para cima da reta r. Em especial, por ser uma projeção **ortogonal**, projeta os vetores fazendo um ângulo de 90 graus com a reta r (linhas tracejadas na Figura 1). Um modo intuitivo de enxergar isso acontecendo é imaginar que os vetores serão "achatados"seguindo a linha tracejada da Figura 1. A Figura 2 mostra os vetores v e w após sofrerem essa transformação.

A pergunta seguinte é: Como encontrar a matriz dessa transformação P? Ocorre que essa pergunta tem mais de uma resposta e a ideia é mostrar algumas. O importante é que independente do modo que usaremos para encontrá-la, teremos sempre a mesma matriz final.

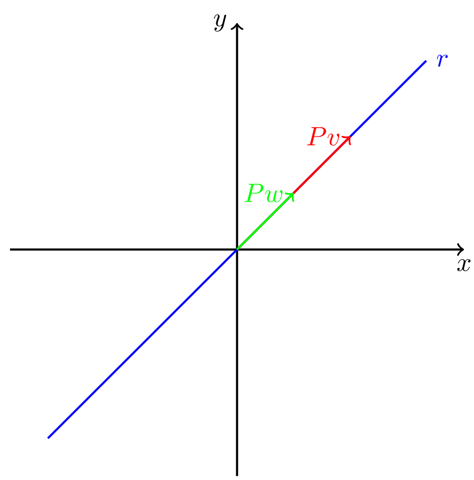

Figura 2: Gráfico mostrando os vetores v e w após serem ortogonalmente projetados na reta r.

1.2 Encontrando P por rotações e projeções mais fáceis

Uma forma simples de encontrarmos P é levarmos a reta r em que queremos projetar os vetores para uma reta mais fácil de projetar, que já saibamos a matriz P que projeta nela. Como todo vetor pode ser descrito como uma combinação linear dos canônicos, conseguimos determinar as matrizes de projeção no eixo x e y apenas observando para onde eles são levados. Se

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

então pode ser descrito como combinação linear de e_1 e e_2 como

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando P

$$\begin{aligned}
& Pv \\
= \quad & \{ \text{ expandir } v \text{ como combinação de } e_1 \text{ e } e_2 \ \} \\
& P\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
= \quad & \{ \text{ distributividade de transformações lineares } \} \\
& Pa \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + Pb \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= \quad & \{ \text{ propriedade de que } Acx = cAx,\ c \text{ número e } x \text{ vetor } \} \\
& aP \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + bP \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
= \quad & \{ \text{ propriedade que } Ae_1 = a_1 \text{ e } Ae_2 = a_2,\ a_i \text{ coluna } i \text{ de } A \ \} \\
& ap_1 + bp_2 \\
= \quad & \{ \text{ forma matricial } \} \\
& \begin{bmatrix} | & | \\ p_1 & p_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

No primeiro gráfico da Figura 3 podemos ver que se projetarmos e_1 na reta r ele ficará no mesmo lugar e se projetarmos e_2 na reta r ele será levado ao vetor nulo. Então a matriz de projeção no eixo x será

$$P_x = \begin{bmatrix} | & | \\ P_x e_1 & P_x e_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Com o mesmo raciocínio, no segundo gráfico e_1 será levado ao vetor nulo e e_2 permanecerá no lugar. Então a projeção no eixo y será

$$P_y = \begin{bmatrix} | & | \\ P_y e_1 & P_y e_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Agora para achar a projeção P em qualquer reta podemos rotacionar a reta até um dos eixos, projetar lá e rotacionar de volta posteriormente.

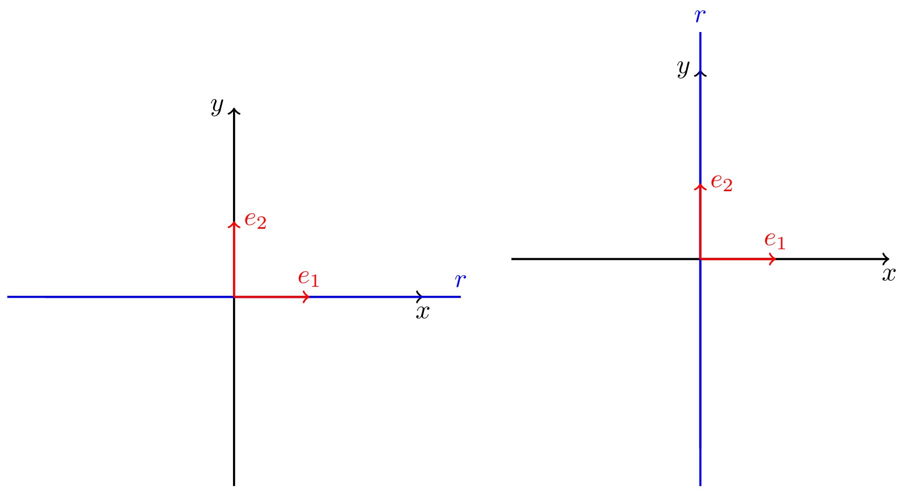

Figura 3: O primeiro gráfico representa a reta que passa em cima do eixo x e o segundo no eixo y. Repare que em cada uma delas um dos canônicos está contido na reta e o outro é ortogonal à reta.

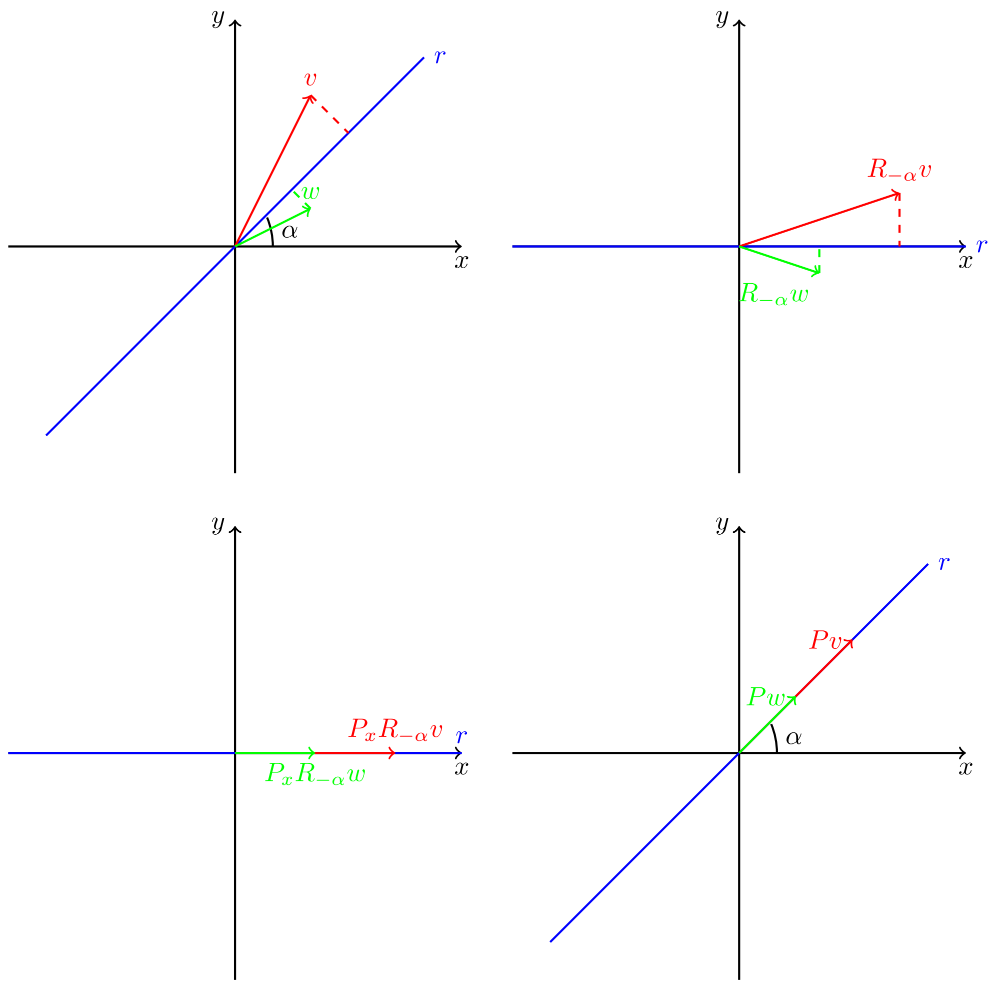

Figura 4: Transformação de projeção ortogonal vista em transformações mais simples. Da esquerda para a direita, de cima para baixo: Primeiro temos o cenário original; em seguida rotacionamos a reta r para o eixo x, $R_{-\alpha}$; aplicamos a projeção no eixo x, P_x; e rotacionamos de volta para onde a r estava originalmente.

Como visto na Figura 4, rotacionamos a reta r no sentido horário por um ângulo α, projetamos no eixo x e rotacionamos α no sentido anti-horário. Já sabemos as matrizes de todas essas transformações! A matriz R_α de rotação no sentido anti-horário por um ângulo α é

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{3}$$

A rotação no sentido horário, $R_{-\alpha}$, será exatamente a sua transposta (verifique que $R_\alpha^T R_\alpha = R_\alpha R_\alpha^T = I$)

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} cos(-\alpha) & -sen(-\alpha) \\ sen(-\alpha) & cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} = R_\alpha^T \tag{4}$$

Então basta encontrar $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha)$. Para encontrá-los podemos tomar um vetor qualquer na reta e traçar uma linha tracejada até o eixo x como mostra a Figura 5. Desse modo, vamos ter que $cos(\alpha) = \frac{a}{\|v\|}$ e $sen(\alpha) = \frac{b}{\|v\|}$. Note que a é exatamente a coordenada x do vetor v e b é exatamente a coordenada y do vetor v.

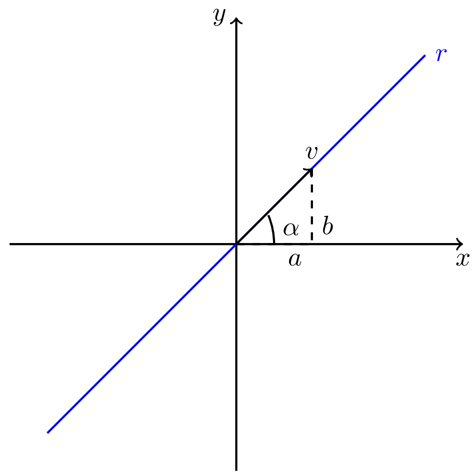

Figura 5: Gráfico da reta r. Os lados $\|v\|$, a e b formam um triângulo retângulo. Mesmo que não saibamos α, conseguimos calcular $cos(\alpha)$ e $sen(\alpha)$ cujos valores serão $cos(\alpha) = \frac{a}{\|v\|}$ e $sen(\alpha) = \frac{b}{\|v\|}$.

Tomando v como o vetor $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$, os valores de cosseno e seno ficam iguais a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \frac{a}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sen(\alpha) &= \frac{b}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{5}$$

Então R_α será

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

A projeção no eixo x já calculamos e a rotação no sentido horário é somente a transposta de R_α. Juntando as três transformações temos exatamente a matriz P de projeção.

$$\begin{aligned} P &= R_\alpha P_x R_\alpha^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Conseguimos generalizar essa ideia e conseguir uma fórmula fechada para a projeção ortogonal em qualquer reta r. Se queremos uma matriz de projeção ortogonal P em uma reta r que faça um ângulo de α com o eixo x, podemos aproveitar a ideia que desenvolvemos. Pegue um vetor $v = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^t$ qualquer contido na reta e temos que P será

$$\begin{aligned} P &= R_\alpha P_x R_\alpha^T \\ &= \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos(\alpha)cos(\alpha) & cos(\alpha)sen(\alpha) \\ sen(\alpha)cos(\alpha) & sen(\alpha)sen(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{\|v\|}\frac{a}{\|v\|} & \frac{a}{\|v\|}\frac{b}{\|v\|} \\ \frac{b}{\|v\|}\frac{a}{\|v\|} & \frac{b}{\|v\|}\frac{b}{\|v\|} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a^2}{\|v\|^2} & \frac{ab}{\|v\|^2} \\ \frac{ab}{\|v\|^2} & \frac{b^2}{\|v\|^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

1.3 Encontrando P vendo para onde os vetores canônicos vão

Como discutimos na seção anterior, saber para onde os canônicos vão é o suficiente para definir P aplicada a qualquer vetor. A ideia desse método é definir diretamente para onde os canônicos vão sem decompor P em três transformações mais simples. Antes é importante discutir como projetamos um único vetor em uma reta.

Uma reta pode ser completamente descrita por um vetor que chamamos de **vetor diretor** da reta. O vetor diretor pode ser qualquer vetor que esteja contido na reta. Por exemplo, na reta r temos o vetor $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ contido nela, pois satisfaz $y = x$.

Como todos os métodos para achar P irão encontrar a mesma matriz, repare que na subseção anterior todas as entradas de P são divididas por $\|v\|^2$. Para não se preocupar com essa divisão vamos escolher um vetor diretor u com norma $= 1$, conseguimos obter isso normalizando $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$. Feito isso, teremos $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t$. Analisando a Figura 6 conseguimos ver que qualquer vetor contido na reta r será múltiplo de u. Podemos dizer que o vetor u **gera** a reta r.

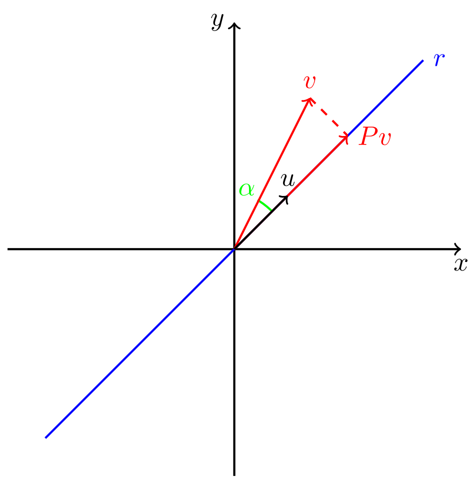

Figura 6: Gráfico com a reta $y = x$ e um vetor v fora da reta. u é o vetor diretor da reta com norma 1. Repare que todos os vetores na reta r são múltiplos de u.

Ainda pela Figura 6 podemos ver que v, Pv e a linha tracejada formam um triângulo retângulo. Usando trigonometria podemos concluir que o comprimento de Pv, $\|Pv\|$, é exatamente o cosseno do ângulo α entre v e u. Então

$$\begin{aligned} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} &= cos(u,v) \\ \|Pv\| &= cos(u,v)\|v\| \end{aligned} \tag{9}$$

Como o produto interno entre dois vetores a e b é definido como

$$a^Tb = b^Ta = cos(a,b)\|a\|\|b\| \tag{10}$$

e u tem norma 1, podemos adicionar $\|u\|$ sem mudar o resultado da equação de $\|Pv\|$

$$\|Pv\| = cos(u,v)\|v\| \overset{\|u\|=1}{=} cos(u,v)\|v\|\|u\| = v^Tu \tag{11}$$

É importante ver que Pv é múltiplo de u. Na verdade é o resultado de pegarmos u e esticarmos ele até ter o comprimento $\|Pv\|$, isto é, multiplicar u por $\|Pv\|$.

$$Pv = \|Pv\|u = (v^Tu)u \tag{12}$$

Então se queremos projetar um vetor v em uma reta r, podemos usar um vetor diretor u de norma 1 da reta r e calcular $(v^Tu)u$.

Para encontrar P agora basta saber para onde os canônicos e_1 e e_2 vão. O resultado de Pe_1 será a primeira coluna de P e o resultado de Pe_2 a segunda.

$$\begin{aligned} Pe_1 = (e_1^Tu)u &= \left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \\ Pe_2 = (e_2^Tu)u &= \left(\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Portanto

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ Pe_1 & Pe_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{14}$$

Para encontrar a fórmula fechada por esse método precisamos fazer algumas manipulações algébricas. Dado um vetor v qualquer e um vetor diretor u com norma $= 1$ da reta em que queremos projetar, a projeção P será

$$\begin{aligned} & (v^Tu)u \\ = \quad & \{\ v^Tu = u^Tv\ \} \\ & (u^Tv)u \\ = \quad & \{\ \text{comutatividade de } u^Tv \text{ por ser um número}\ \} \\ & u(u^Tv) \\ = \quad & \{\ \text{associatividade}\ \} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (uu^T)v \\
= & \quad \{ \ P = uu^T \ \} \\
& Pv
\end{aligned}
$$

No caso de um outro vetor da reta w que não tem norma $= 1$ ser utilizado, deve ser normalizado antes de aplicarmos a fórmula $(uu^T)v$

$$
\begin{aligned}
& (\tfrac{w}{\|w\|} \tfrac{w}{\|w\|}^T)v \\
= & \quad \{ \text{ simplificação } \} \\
& \tfrac{(ww^T)}{\|w\|^2} v \\
= & \quad \{ \ P = \tfrac{(ww^T)}{\|w\|^2} \ \} \\
& Pv
\end{aligned}
$$

Repare que $u_{2\times1}u^T_{1\times2}$ resulta, de fato, em uma matriz 2×2. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para $\frac{(ww^T)}{\|w\|^2}$. Então se $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos que

$$
\begin{aligned}
& uu^T \\
= & \quad \{ \ u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \ \} \\
& \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ Produto } \} \\
& \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exatamente a mesma fórmula do método por rotações. A parcela com a norma de u ao quadrado não aparece porque assumimos $\|u\| = 1$. Se $\|u\|$ não for 1, podemos normalizar o vetor para que seja. Para demonstração veja o caso de w.

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\|w\|^2}(ww^T) \\
= & \quad \{ \ w = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \ \} \\
& \tfrac{1}{\|w\|^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \} \\
& \tfrac{1}{\|w\|^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \} \\
& \begin{bmatrix} \frac{a^2}{\|w\|^2} & \frac{ab}{\|w\|^2} \\ \frac{ab}{\|w\|^2} & \frac{b^2}{\|w\|^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

1.4 Encontrando P por diagonalização

Uma outra forma de encontrar a projeção ortogonal P sobre uma reta r é analisando seus autovalores e autovetores. Diagonalizar uma matriz A significa obter uma matriz V cujas colunas são os autovetores de A e uma matriz diagonal D cuja diagonal principal contem os autovalores de A. Com ambas as matrizes em mãos reescrevemos $A = VDV^{-1}$. A demonstração parte de multiplicarmos A pela direita por V.

$$
\begin{aligned}
& AV \\
= \quad & \{ \text{ expansão de } V \text{ em suas colunas } \} \\
& A \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \\
= \quad & \{ \text{ distribuir } A \text{ para as colunas de } V \ \} \\
& \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \\
= \quad & \{ \ Ax = \lambda x \ \} \\
& \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \\
= \quad & \{ \text{ Fatoração em } VD \ \} \\
& \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sabendo que $AV = VD$, basta isolar A multiplicando por V^{-1} de ambos os lados pela direita.

$$AVV^{-1} = VDV^{-1} = A \tag{15}$$

A ideia é achar V e D da projeção que desejamos. Mas uma questão natural de se surgir é: Quais são os autovetores de uma projeção? E mais uma, quais seus autovalores? Ocorre que essas perguntas não são tão difíceis de se responder.

Autovetores de uma dada matriz A são vetores que, aplicada A, somente sofrem um esticamento e/ou troca de sentido. A restrição de o vetor não ser o vetor nulo também é feita. Analisando a Figura 7 vemos que a reta r faz exatamente 90° com a reta s. Devido a esse fato teremos algo bem semelhante a o que ocorreu no método das rotações com as projeções no eixo x e y. Se aplicarmos P no vetor v_1, que está contido na reta, teremos novamente v_1 como resultado.

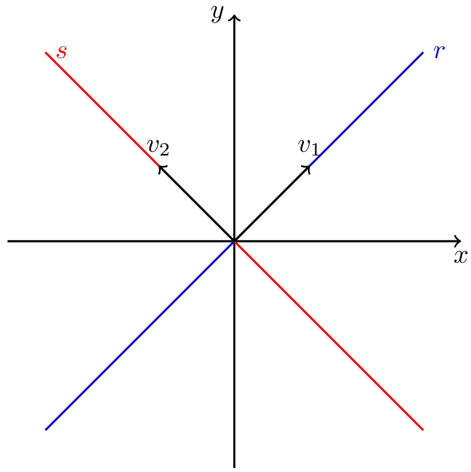

Figura 7: Gráfico com as retas $y = x$ e $y = -x$ junto de seus vetores diretores v_1 e v_2, respectivamente. Repare que as retas fazem um ângulo de 90° entre si.

No caso de v_2 temos que Pv_2 resulta no vetor nulo. Portanto temos dois casos

$$\begin{aligned} Pv_1 &= 1v_1 \\ Pv_2 &= 0v_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Utilizando a definição de autovalores e autovetores, $Ax = \lambda x$, podemos concluir que 1 e 0 são autovalores de P e seus autovetores associados são v_1 e v_2, respectivamente. E, de fato, esses são os únicos autovetores de P, visto que quaisquer outros vetores serão combinações lineares destes. Com essa informação conseguimos construir V e D e definir completamente P. v_1 pode ser qualquer vetor da reta r, tomemos $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ como valor de v_1. Em um raciocínio análogo, tomemos $\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}^T$ como valor de v_2. O cálculo da P segue

$$\begin{aligned}
& P \\
= & \quad \{ \text{ diagonalização de } P \ \} \\
& VDV^{-1} \\
= & \quad \{ \text{ expansão de } V \text{ e } D \ \} \\
& \begin{bmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \\
= & \quad \{ \text{ inversa de } V \ \} \\
& \begin{bmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \} \\
& \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Podemos encontrar uma fórmula fechada para este método também. Se queremos uma projeção P em uma reta r, podemos pegar um vetor v_1 contido na reta como vetor diretor que, por estar na reta, será um autovetor com autovalor 1. Para encontrar um vetor perpendicular a v_1 podemos rotacionar v_1 em 90° ou -90°. Fazendo o primeiro caso, pela fórmula da rotação temos

$$
R_{90} = \begin{bmatrix} cos(90) & -sen(90) \\ sen(90) & cos(90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}
$$

$v_2 = R_{90}v_1$ será autovetor de P com autovalor 0. Sendo assim, se $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, então

$$
v_2 = R_{90}v_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}
$$

Por simplicidade vamos assumir que $\|v_1\| = 1$. Caso não seja, basta normalizá-lo. Segue que P será

$$
\begin{aligned}
& P \\
= & \quad \{ \text{ diagonalização de } P \text{ } \} \\
& VDV^{-1} \\
= & \quad \{ \text{ expansão de } V \text{ e } D \text{ } \} \\
& \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \\
= & \quad \{ \text{ inversa de } V \text{ igual a } V^T \text{ } \} \\
& \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \} \\
& \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\
= & \quad \{ \text{ álgebra } \} \\
& \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Se não assumissemos $\|v_1\| = 1$, $V^{-1} = V^T$ seria falso e teríamos que, de fato, calcular a inversa de V, mas o resultado final seria a mesma fórmula. Além disso, esse truque de normalização não funciona com qualquer matriz, mas sempre funciona com projeções e reflexões. Um ponto final interessante de se comentar é que, no exemplo que fizemos, se normalizássemos v_1 obteríamos $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^t$ e a matriz V assumiria a forma

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Exatamente a rotação que obtivemos no método de rotações e projeções mais fáceis! E isso sempre ocorre com projeções. Se seu vetor v_1 tiver norma 1, as matrizes V e V^{-1} serão exatamente as rotações que encontraríamos pelo método de rotações e projeções no eixo.

2 Exercícios

1. Para cada um dos itens determine a matriz de projeção P na reta pedida e de reflexão E usando a reta pedida como espelho. Se possível, esboce as transformações geometricamente.

   (a) Na reta $y = x$

   (b) Na reta $y = 2x$

   (c) Na reta gerada pelo vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

   (d) Na reta $y = -x$

   (e) Na reta $2y = \frac{x}{5}$

   (f) Na reta gerada pelo vetor $\begin{bmatrix} -5120 \\ 250 \end{bmatrix}$

   (g) Na reta gerada pelo vetor $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

   (h) Na reta gerada pelo vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

   (i) Na reta $35y = 25x$

   (j) Na reta $-y = 5x$

2. Para cada um dos itens encontre os autovalores e autovetores da matriz.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} -0.25 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 \end{bmatrix}$ (dica: Qual o determinante dessa matriz?)

   (c) $\begin{bmatrix} -19 & 8 \\ -48 & 21 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

3. Dada uma matriz $A_{2\times 2}$ com autovetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ associados aos autovalores 1 e 3, respectivamente, qual a cara de A?

4. Invente uma matriz $A_{2\times 2}$ que tenha como autovetores os vetores $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

5. Invente uma matriz $A_{2\times 2}$ que tenha como autovalores os valores -200 e 5.