

۱. اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3xyz \quad (\text{الف})$$

$$(x + y + z)^3 = (x + y - z)^3 + (x - y + z)^3 + (-x + y + z)^3 + 24xyz \quad (\text{ب})$$

$$(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \quad (\text{ج})$$

$$xyz(x + y + z)^3 - (xy + yz + zx)^3 = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) \quad (\text{د})$$

۲. اگر a, b, c اعدادی حقیقی باشند که

$$a + b + c = 1$$

ثابت کنید

$$(1 - 2a)^3 + (1 - 2b)^3 + (1 - 2c)^3 = 1 - 24abc$$

۳. فرض کنید x, y, z اعدادی حقیقی هستند که $x + y + z = 120$ مقدار

$$\frac{(x - 20)^3 + (y - 40)^3 + (z - 60)^3}{(x - 20)(y - 40)(z - 60)}$$

را در صورتی که مخرج کسر برابر با صفر نشود، به دست بیاورید.

۴. فرض کنید a, b, c عددهایی حقیقی هستند و

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 16 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 48 \end{cases}$$

مقدار abc را بیابید.

۵. فرض کنید a, b, c عددهایی حقیقی هستند و

$$\begin{cases} abc = 8 \\ a + b + c = 7 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 73 \end{cases}$$

مقدار $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ را بیابید.

۶. همه عددهای حقیقی مانند x و y را پیدا کنید که

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x - 2y)^3 + (2x + y)^3 + (y - 3x)^3 = 0 \end{cases}$$

۷. فرض کنید $a + b = c$ ، ثابت کنید

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2} = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \right)^2$$

۸. اگر x و y اعدادی صحیح باشند که

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 3^{\circ}xy = 2000$$

مقدار $x + y$ را به دست آورید.

۹. فرض کنید a, b, c عددهایی حقیقی هستند و

$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3 \\ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 2 \end{cases}$$

مقدار $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$ را بیابید.