

問題 1 数学 1

実数 a, b が $a > b > 0$ を満たすものとする. $a_0 = a, b_0 = b$ とし, 2つの漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

によって数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を定義する.

- (1) 次の不等式がすべての n で成り立つことを示しなさい.

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

- (2) (1) から $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに有界な単調数列であり, 実数の連続性から $\{a_n\}$ には下限 α が, $\{b_n\}$ には上限 β が存在する. 以下の設問に答えなさい.

(2-1) $a_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty), b_n \rightarrow \beta (n \rightarrow \infty)$ となることを示しなさい.

(2-2) $\alpha = \beta$ が成り立つことを示しなさい.