令和5年度
試験名：学群編入学試験【情報学群　情報科学類・情報メディア創成学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題1 （数学1）	出題意図 数の基本性質と数列の極限に関する知識と理解を問う．

解答例

(1) $a > b > 0$ から，

$$b_1 = \sqrt{ab} > 0, \quad a_1 - b_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0.$$

$a_n > b_n > 0$ とすると

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 > 0$$

となる．よって，数学的帰納法からすべての n に対して次の不等式が成り立つ：

$$a_{n+1} > b_{n+1} > 0. \tag{A}$$

(A) と $a_0 > b_0 > 0$ により，

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{b_n b_n} = b_n. \tag{B}$$

(A) と (B) から以下が得られる：

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

(2)

(2-1) $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ とならなければ，任意の自然数 N に対し，ある $n \geq N$ で

$$a_n - \alpha \geq \epsilon, \quad \text{すなわち } \alpha + \epsilon \leq a_n \tag{C}$$

となる $\epsilon > 0$ が存在する．ところが

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_N > \cdots > a_n$$

なので，(C) はすべての n に対して成り立つ．このことは α よりも大きな下界が $\{a_n\}$ に存在することを意味し，α が下限であることに矛盾する．同様に，$b_n \to \beta\ (n \to \infty)$ とならなければ，$\{b_n\}$ に β よりも小さな上界が存在することになって矛盾が生じる．

(2-2) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

の両辺で $n \to \infty$ とすれば $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ が成り立ち，これより $\alpha = \beta$ が得られる．