問題3　情報基礎1

自然数 n に対して数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ または } n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下、C言語を用いてこの数列を計算することを考える。次の関数 f は、自然数の引数 n に対し、数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を再帰計算によって求める。

```
long f(int n) {
    if (n < 3)
        return 1;
    else
        return [    (a)    ];
}
```

(1) 空欄 (a) を埋めて、関数 f を完成させなさい。

上記の計算を高速化したい。次の関数 g は、途中の計算を、サイズが十分に大きい配列に格納して再利用する。

```
#define MAX_SIZE 2000
long g(int n) {
    long a[MAX_SIZE];
    a[1] = a[2] = 1;
    for (int i = 3; i <= n; ++i)
        [      (b)      ];
    return a[n];
}
```

(2) 空欄 (b) を代入文1つで埋めて、関数 g を完成させなさい。

(3) 関数 g の時間計算量を、n を用いた漸近的計算量 (オーダー) で表しなさい。また、関数 g がそのような時間計算量になる理由を述べなさい。

次ページに続く

さらなる高速化を考える。数列 $\{a_n\}$ の漸化式を行列を用いて表現すると

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

となる。このとき、行列 A のべき乗 A^n の計算を高速化することを考える。一般に、

- n が奇数のとき $A^n = A \cdot A^{n-1}$
- n が偶数のとき $A^n = (A^{\frac{n}{2}})^2$

という関係が成り立つ。これに基づいて、2×2 行列の掛け算を行う関数 mult を用い、数列の第 n 項を計算する関数 h を実装する。

```
void mult(long A[2][2], long B[2][2], long C[2][2]) {
    long c00 = A[0][0] * B[0][0] + A[0][1] * B[1][0];
    long c10 = A[1][0] * B[0][0] + A[1][1] * B[1][0];
    long c01 = A[0][0] * B[0][1] + A[0][1] * B[1][1];
    long c11 = A[1][0] * B[0][1] + A[1][1] * B[1][1];
    C[0][0] = c00; C[1][0] = c10; C[0][1] = c01; C[1][1] = c11;
}

long h(int n) {
    long X[2][2] = {{1, 1}, {1, 0}};
    long Y[2][2] = {{1, 0}, {0, 1}};
    while (n > 0) {
        if (n % 2 == 1) mult(   (c)   );
        mult(   (d)   );
        n /= 2;
    }
    return Y[1][0];
}
```

次ページに続く

(4) 空欄 (c) および (d) を埋めて、関数hを完成させなさい。

(5) 関数 h の時間計算量を、n を用いた漸近的計算量 (オーダー) で表しなさい。また、関数 h がそのような時間計算量になる理由を述べなさい。