1 Rotierende Dreiecke

1. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $a := \overline{AB}$ und $b := \overline{AC}$.
   a) Welche Körper entstehen, wenn wir das Dreieck ABC um a bzw. b rotieren lassen?
   b) Geben Sie eine Vermutung ab, wie sich die beiden Volumina zueinander verhalten.
   c) Stellen Sie nun durch allgemeine Rechnung einen Zusammenhang zwischen den Rotationsvolumina V_{AB} (Rotationsachse AB) und V_{AC} (Rotationsachse AC) dar.
   (Hinweis: Nutzen sie ein Gleichungssystem; Gesucht ist eine Proportionalität)
   d) Von nun an gilt: $V = 30\pi$
      i. Wie viele Wertepaare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es, so dass gilt $V = 30\pi$.
      ii. Stellen Sie $b(a)$ (Länge b in Abhängigkeit von Länge a) dar.
      iii. Zeichnen Sie $b(a)$ für $0 < a \leq 10cm$ in ein Koordinatensystem.

2 Lösungsvorschlag

1. Gegeben sei ein Rechteck mit Kantenlängen a und b.
   a) Kegel
   b) Sei dem Schüler überlassen
   c) Die allgemeine Formel zur Berechnung des Volumens eines Kegels lautet:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \tag{1}$$

Wir wissen, dass die beiden Kegel die Radien a und b haben.

$$V_{AB} = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \pi \cdot a \tag{2}$$

$$V_{AC} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot b \tag{3}$$

Nun gilt es das Gleichungssystem nach a und b zu lösen:

Wir formen (2) nach a um:

$$a = \frac{V_{AB} \cdot 3}{b^2 \cdot \pi} \tag{4}$$

und setzen a in (3) ein:

$$V_{AC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{V_{AB} \cdot 3}{b^2 \cdot \pi} \right)^2 \cdot \pi \cdot b \tag{5}$$

Wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} V_{AC} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{V_{AB}^2 \cdot 9}{b^4 \cdot \pi^2} \cdot \pi \cdot b \\ V_{AC} &= \frac{V_{AB}^2 \cdot 3}{b^3 \cdot \pi} \\ V_{AC} &= \frac{3}{b^3 \cdot \pi} \cdot V_{AB}^2 \\ V_{AC} &\sim V_{AB}^2 \end{aligned}$$

   d) Von nun an gilt: $V = 30\pi$
      i. Unendlich Viele
      ii. Wir nutzen (3) um die Abhängigkeit darzustellen:

$$\begin{aligned} 30\pi &= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \pi \cdot b \\ 90 &= a^2 \cdot b \\ b &= \frac{90}{a^2} \\ b(a) &= \frac{90}{a^2} \end{aligned}$$

iii. Zeichnung: