1. Gegeben Seien Punkt $B(0,4)$ und Parabel $p(x) := (x-5)^2 + s$.

   a) Tangente durch den Punkt $B \Rightarrow B \in G_q$

   Punkt-Steigungs-Gleichung:

$$\begin{aligned} q_{1/2}(x) &= m_{1/2} \cdot (x - x_0) + y_0 && (1)\\ q_{1/2}(x) &= m_{1/2} \cdot (x - 0) + 4 && (2)\\ q_{1/2}(x) &= m_{1/2} \cdot x + 4 && (3)\\ & && (4) \end{aligned}$$

   $q_{1/2}$ mit p Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} q_{1/2}(x) &= p(x) && (5)\\ m_{1/2} \cdot x + 4 &= (x-5)^2 + s && (6)\\ m_{1/2} \cdot x + 4 &= (x^2 - 10x + 25) + s && (7)\\ 0 &= x^2 - 10x - m_{1/2} \cdot x + 21 + s && (8)\\ 0 &= x^2 + (-10 - m_{1/2})x + 21 + s && (9) \end{aligned}$$

   Anwendung der Mitternachtsformel für $x_{1/2}$: $a = 1$; $b = (-10 - m_{1/2})$; $c = 21 + s$

$$\begin{aligned} D_x &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c && (10)\\ D_x &= (-10 - m_{1/2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (21 + s) && (11)\\ D_x &= (m_{1/2}^2 + 20m_{1/2} + 100) - 84 - 4s && (12)\\ D_x &= m_{1/2}^2 + 20m_{1/2} + 16 - 4s && (13) \end{aligned}$$

   Da eine Tangente gesucht ist dürfen nur Berührpunkte vorhanden sein $\Rightarrow D_x = 0$:

$$\begin{aligned} D_x &= 0 && (14)\\ 0 &= m_{1/2}^2 + 20m_{1/2} + 16 - 4s && (15) \end{aligned}$$

   Anwendung der Mitternachtsformel für $m_{1/2}$ $a = 1$; $b = 20$; $c = 16 - 4s$

$$\begin{aligned} D_m &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c && (16)\\ D_m &= 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16 - 4s) && (17)\\ D_m &= 336 + 16s && (18) \end{aligned}$$

   Einsetzen in Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} m_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} && (19)\\ m_{1/2} &= \frac{-20 \pm \sqrt{336 + 16s}}{2} && (20)\\ m_{1/2} &= \frac{-20 \pm \sqrt{16 \cdot (21 + s)}}{2} && (21)\\ m_{1/2} &= \frac{-20 \pm 4 \cdot \sqrt{21 + s}}{2} && (22)\\ m_{1/2} &= -10 \pm 2 \cdot \sqrt{21 + s} && (23) \end{aligned}$$

   Die beiden Steigungen werden nun in $q(x)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} q_{1/2}(x) &= m_{1/2} \cdot x + 4 && (24)\\ q_{1/2}(x) &= (-10 \pm 2 \cdot \sqrt{21 + s})x + 4 && (25)\\ & && (26) \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen lauten:

$$q_1(x) = (-10 + 2 \cdot \sqrt{21 + s}) \cdot x + 4 = 2 \cdot (\sqrt{21 + s} - 5) \cdot x + 4 \tag{27}$$

und

$$q_2(x) = (-10 - 2 \cdot \sqrt{21 + s}) \cdot x + 4 = -2 \cdot (\sqrt{21 + s} + 5) \cdot x + 4 \tag{28}$$

b) Es gilt B in $p(x)$ ein zu setzen:

$$p(0) = 4 \tag{29}$$
$$4 = (0-5)^2 + s \tag{30}$$
$$4 = 25 + s \tag{31}$$
$$-21 = s \tag{32}$$

c) Im Folgenden Sei $s := -2$.

d) Siehe GGB

e) Naiver Ansatz: $p(x) = q_1(x)$ und $p(x) = q_2(x)$.

f) Der erste Teil der Rechnung ist bereits in Aufgabe 1a beschrieben. Die Rechung wird nun nach (18) weitergeführt:

Zunächst das gegebene s einsetzen:

$$m_{1/2} = -10 \pm 2 \cdot \sqrt{21 + s} \tag{33}$$
$$m_{1/2} = -10 \pm 2 \cdot \sqrt{21 - 2} \tag{34}$$
$$m_{1/2} = -10 \pm 2 \cdot \sqrt{19} \tag{35}$$
$$m_1 = -10 + 2 \cdot \sqrt{19} \tag{36}$$
$$m_2 = -10 - 2 \cdot \sqrt{19} \tag{37}$$

Die nun explizite Belegung von m und s kann in (9) eingesetzt werden.

Zunächst m_1 (Also Berührpunkt g und q_1)

$$0 = x^2 + (-10 - m_1) \cdot x + 21 + s \tag{38}$$
$$0 = x^2 + (-10 - (-10 + 2 \cdot \sqrt{19})) \cdot x + 21 - 2 \tag{39}$$
$$0 = x^2 + (-2 \cdot \sqrt{19}) \cdot x + 19 \tag{40}$$

Trivialerweise gilt $D = 0$, da wir m so Bestimmt haben.

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a} \tag{41}$$
$$x = \frac{-(-2 \cdot \sqrt{19})}{2} \tag{42}$$
$$x = \sqrt{19} \tag{43}$$

Analoge Berechnung für m_2 (Berührpunkt g und q_2):

$$0 = x^2 + (-10 - m_2) \cdot x + 21 + s \tag{44}$$
$$0 = x^2 + (-10 - (-10 - 2 \cdot \sqrt{19})) \cdot x + 21 - 2 \tag{45}$$
$$0 = x^2 + (2 \cdot \sqrt{19}) \cdot x + 19 \tag{46}$$

$$x = \frac{-b}{2 \cdot a} \quad (47)$$
$$x = \frac{-(2 \cdot \sqrt{19})}{2} \quad (48)$$
$$x = -\sqrt{19} \quad (49)$$

g) Zwei geraden stehen Senkrecht aufeinander wenn gilt: $m_a \cdot m_b = -1$.

Senkrechte auf q_1:

$$h(x) = m \cdot x + t \quad (50)$$

Laut (36) gilt $m_1 = -10 + 2 \cdot \sqrt{19}$. Wir definieren nun $m_a := m_1$

$$m_a \cdot m_b = -1 \quad (51)$$
$$m_b = -\frac{1}{m_a} \quad (52)$$
$$m_b = -\frac{1}{-10 + 2 \cdot \sqrt{19}} \quad (53)$$

Nun setzen wir (53) in (50) ein:

$$h(x) = m_b \cdot x + t \quad (54)$$
$$h(x) = \left(-\frac{1}{-10 + 2 \cdot \sqrt{19}}\right) \cdot x + t \quad (55)$$

Rechenweg analog für zweite Senkrechte.

h) Der Punkt $N(0,t)$ Liegt auf G_p wenn gilt:

$$p(0) = t \quad (56)$$

Wir berechnen also:

$$t = (0 - 5)^2 - 2 \quad (57)$$
$$t = 23 \quad (58)$$