

# Introduction

Interactions entre topologie et théorie des groupes



Créé par DEGOIX Sacha – 17 novembre 2025

## Table des matières

<b>1 Motivation générale</b>	<b>2</b>
<b>2 Définitions essentielles et cadre de travail</b>	<b>2</b>
<b>3 Développements</b>	<b>2</b>
3.1 Décomposition polaire . . . . .	2
3.2 Théorème de Lie-Kolchin . . . . .	3
3.3 Sous-groupes fermés et discrets de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	3
3.4 Groupes moyennables . . . . .	4

## 1 Motivation générale

Nous allons nous intéresser dans ce document aux interactions entre topologie et théorie des groupes qui sont à l'origine de nombreux résultats en mathématiques modernes, essentiellement dans des espaces vectoriels de dimension finie. On connaît les groupes de rotations du plan ou de translation de  $\mathbb{R}^n$  et l'on connaît également les objets topologiques qui donnent un sens à la continuité et à la notion de limite.

Que se passe-t-il lorsqu'on met une topologie sur un groupe ?

La topologie, qui a l'air a priori souple, impose des contraintes très rigides sur la structure de groupe.

## 2 Définitions essentielles et cadre de travail

### Définition (Groupe topologique)

Un groupe topologique  $(G, \cdot)$  est un groupe muni d'une topologie qui rend continue les applications :

$$G^2 \rightarrow G, (x, y) \mapsto x \cdot y \quad \text{et} \quad G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

1. Le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}^{n^2}$
2.  $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$  muni de la topologie induite

### Définition

Soit  $G$  un groupe topologique. On dit que  $H$  est un sous-groupe discret de  $G$  lorsque tous ses points sont isolés i.e. pour tout  $h \in H$ , on dispose d'un voisinage ouvert  $U$  de  $h$  tel que  $U \cap H = \{h\}$

### Théorème (Fermeture des sous-groupes discrets d'un groupe topologique)

Soit  $H$  un sous-groupe discret d'un groupe topologique  $G$ , alors  $H$  est fermé.

### Théorème (Adhérence d'un sous-groupe)

Si  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\overline{G}$  est également un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ .

## 3 Développements

### 3.1 Décomposition polaire

#### Théorème (Décomposition polaire)

Toute matrice  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire sous la forme :

$$M = QS$$

où  $Q \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

De plus, l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (Q, S) & \mapsto QS \end{cases}$$

Toute matrice de  $GL_n(\mathbb{R})$  est la composée d'une symétrie/rotation qui préserve les longueurs et les angles et d'un étirement isotrope.

**Corollaire** (Maximalité de  $O_n(\mathbb{R})$ )

Tout sous-groupe compact de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui contient  $O_n(\mathbb{R})$  est  $O_n(\mathbb{R})$  lui-même.

**Corollaire** (Maximalité de  $SO_n(\mathbb{R})$  dans  $SL_n(\mathbb{R})$ )

Soit  $G$  un sous-groupe de  $SL_n(\mathbb{R})$  tel que  $SO_n(\mathbb{R}) \subseteq G$ , alors  $G = SO_n(\mathbb{R})$

## 3.2 Théorème de Lie-Kolchin

**Définition** (Groupe résoluble 1)

Soit  $G$  un groupe. On dit que  $G$  est résoluble s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $D^n(G) = \{e_G\}$

**Définition** (Groupe résolubles II)

Soit  $G$  un groupe.  $G$  est résoluble s'il existe une suite finie  $G_0, \dots, G_n$  de sous-groupes de  $G$  tels que :

$$\{e_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \dots \trianglelefteq G_n = G$$

et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le quotient  $G_{i+1}/G_i$  est abélien.

**Théorème** (Lie-Kolchin)

Soit  $K$  un corps algébriquement clos. Alors tout sous-groupe connexe résoluble  $G$  de  $GL_n(K)$  est trigonalisable (i.e il existe une base commune de trigonalisation de tous les éléments de  $G$ ).

## 3.3 Sous-groupes fermés et discrets de $\mathbb{R}^n$

**Théorème** (Sous-groupes de  $\mathbb{R}$ )

Les sous-groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  sont soit de la forme  $a\mathbb{Z}$  où  $a \in \mathbb{R}$  soit denses dans  $\mathbb{R}$

**Théorème** (Sous-groupes fermés de  $\mathbb{R}^n$ )

Soit  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $G$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si il existe  $F, S$  sous-espaces vectoriels supplémentaires et  $D$  sous-groupe discret de  $S$  tel que  $G = F \oplus D$

**Théorème** (Sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}^n$ )

Les sous-groupes de  $\mathbb{R}^n$  de rang  $r$  sont les  $a_1\mathbb{Z} \oplus a_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus a_r\mathbb{Z}$  où  $(a_1, \dots, a_r)$  est libre.

### 3.4 Groupes moyennables

**Théorème**

Sur  $\mathbb{Z}$ , il n'existe aucune mesure exhaustive  $\mu$  telle que :

1.  $\mu(\mathbb{Z}) \in \mathbb{R}_+^*$
2. invariante par translation
3. complètement additive