Convexité et géométrie

I. Convexité et barycentres

Dans toute la suite $\vec{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1. Un espace affine est un $(\vec{E}, +)$-ensemble dont l'action de $\vec{E}$ est simplement transitive.

1. Convexité

Définition 2. Une partie A d'un espace vectoriel (resp. d'un espace affine) est dite convexe si, et seulement si $\forall (a, b) \in A^2, [a, b] \subset A$ où $[a, b] = \{a + \lambda\overrightarrow{ab}, \lambda \in [0, 1]\}$.

Exemple 3. Tout polygone convexe (dont les angles sont $\leq \pi$), toute intersection de convexes, tout image directe, réciproque de convexes par une application affine est convexe. Toute boule (pour une certaine norme) est convexe (inégalité triangulaire).

Exemple 4. Tout sous-espace vectoriel, affine est convexe. $S_n^+(\mathbb{R})$ est convexe, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ aussi.

Définition 5. L'enveloppe convexe d'une partie S est le plus petit convexe noté $\mathrm{Conv}(S)$ contenant S.

2. Barycentres

Proposition 6. *Soient $(A_1, \mu_1), \ldots, (A_n, \mu_n)$ des points massiques (i.e. $\mu_i \in \mathbb{R}$). Si $\sum_i \mu_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0},$$

appelé barycentre de $(A_1, \mu_1), \ldots, (A_n, \mu_n)$. On parle d'isobarycentre quand $\mu_1 = \cdots = \mu_n$ et de combinaison convexe quand $\mu_i \geq 0\ \forall i$. On a de plus, pour tout O,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OG}.$$

Proposition 7. *$\mathrm{Conv}(S)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de S.*

En dimension finie, on a mieux :

Théorème 8 (Théorème de Carathéodory)**.** *Supposons $\dim \vec{E} = n$. Soit $A \subset E$. Alors tout point M de $\mathrm{Conv}(A)$ s'écrit comme une combinaison convexe ≥ 0 de $n + 1$ points de A.*

Corollaire 9. *Dans un espace affine de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

Définition 10 (Point extrémal)**.** Un point extrémal d'un convexe A est un point a tel que $A \setminus \{a\}$ est encore convexe.

Développement 1 (Théorème de Krein-Milman)**.** *Tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

II. Fonctions convexes de E dans $\mathbb{R}$

Définition 11. Soit A une partie convexe de E.

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est dite convexe (resp. strictement convexe) lorsque pour tout A, B, $0 < \lambda < 1$, $f(A + \lambda\overrightarrow{AB}) \leq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$ (resp. strictement).

Lemme 12 (Pseudo-réduction simultanée)**.** *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ alors on peut trouver $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que*

$$I_n = PAP^\top \quad ; \quad \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \ni D = PBP^\top.$$

Proposition 13. *Le déterminant est strictement log-concave sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, i.e., si $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $0 < \lambda < 1$ alors*

$$\det\big((1 - \lambda)A + \lambda B\big) > (\det A)^{1-\lambda}(\det B)^{\lambda}.$$

Développement 2 (Ellipsoïde de John Loewner)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique ellipsoïde (i.e. partie de la forme $q^{-1}([0, 1])$ où q est une forme quadratique positive) de volume minimal, centrée en 0 contenant K.*

Développement 3 (Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$)**.** *Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors G est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Plus précisément G est un sous-groupe de $O(q)$ où q est une forme quadratique définie positive.*