Introduction

Interactions entre topologie et théorie des groupes

Créé par DEGOIX Sacha – 16 novembre 2025

Table des matières

1 Motivation générale **2**

2 Définitions essentielles et cadre de travail **2**

3 Développements **2**

3.1 Décomposition polaire 2

3.2 Théorème de Lie-Kolchin 3

3.3 Sous-groupes fermés et discrets de $\mathbb{R}^n$ 3

3.4 Groupes moyennables 4

1 Motivation générale

Nous allons nous intéresser dans ce document aux interactions entre topoologie et théorie des groupes qui sont à l'origine de nombreux résultats en mathématiques modernes, essentiellement dans des espaces vectoriels de dimension finie. On connaît les groupes de rotations du plan ou de translation de $\mathbb{R}^n$ et l'on connaît également les objets topologiques qui donnent un sens à la continuité et à la notion de limite.

Que se passe-t-il lorsqu'on met une topologie sur un groupe ?

La topologie, qui a l'air a priori souple, impose des contraintes très rigides sur la structure de groupe.

2 Définitions essentielles et cadre de travail

Définition (Groupe topologique)
Un groupe topologique $(G, \cdot)$ est un groupe muni d'une topologie qui rend continue les applications :

$$G^2 \to G, (x, y) \mapsto x \cdot y \quad \text{et} \quad G \to G, x \mapsto x^{-1}$$

1. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n^2}$
2. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite

Définition
Soit G un groupe topologique. On dit que H est un sous-groupe discret de G lorsque tous ses points sont isolés i.e. pour tout $h \in H$, on dispose d'un voisinnage ouvert U de G tel que $U \cap H = \{h\}$

Théorème (Fermeture des sous-groupes discrets d'un groupe topologique)
Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique G, alors H est fermé.

Théorème (Adhérence d'un sous-groupe)
Si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{G}$ est également un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

3 Développements

3.1 Décomposition polaire

Théorème (Décomposition polaire)
Toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme :

$$M = QS$$

où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus, l'application suivante est un homéomorphisme :

$$\begin{cases} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (Q, S) & \mapsto & QS \end{cases}$$

Toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est la composée d'une symétrie/rotation qui préserve les longueurs et les angles et d'un étirement isotrope.

Corollaire (Maximalité de $O_n(\mathbb{R})$)
Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.

Corollaire (Maximalité de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$)
Soit K un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subseteq K$, alors $K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

3.2 Théorème de Lie-Kolchin

Définition (Groupe résoluble 1)
Soit G un groupe. On dit que G est résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(G) = \{e_G\}$

Définition (Groupe résolubles II)
Soit G un groupe. G est résoluble s'il existe une suite finie $G_0, \ldots, G_n$ de sous-groupes de G tels que :

$$\{e_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \ldots \trianglelefteq G_n = G$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le quotient G_{i+1}/G_i est abélien.

Théorème (Lie-Kolchin)
Soit K un corps algébriquement clos. Alors tout sous-groupe connexe résoluble G de $\mathrm{GL}_n(K)$ est trigonalisable (i.e il existe une base commune de trigonalisation de tous les éléments de G).

3.3 Sous-groupes fermés et discrets de $\mathbb{R}^n$

Théorème (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)
Les sous-groupes de ($\mathbb{R}$,+) sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}$ soit denses dans $\mathbb{R}$

Théorème (Sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$)
Soit $G \subseteq \mathbb{R}^n$. G est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe F, S sous-espaces vectoriels supplémentaires et D sous-groupe discret de S tel que $G = F \oplus D$

Théorème (Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$)
Les sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ de rang r sont les $a_1\mathbb{Z} \oplus a_2\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus a_r\mathbb{Z}$ où $(a_1, \ldots, a_r)$ est libre.

3.4 Groupes moyennables

Théorème
Sur $\mathbb{Z}$, il n'existe aucune mesure exhaustive μ telle que :

1. $\mu(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R}_+^*$
2. invariante par translation
3. complètement additive