Moyennabilité de $\mathbb{Z}$

Soit $E = l^\infty(\mathbb{N})$ ou $E = l^\infty(\mathbb{Z})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. Pour k dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on considère l'opérateur de translation $T_k : (a_n) \in E \longmapsto (a_{n+k})$. Dans le cas où $E = l^\infty(\mathbb{Z})$, on dit qu'une suite $(a_n) \in E$ est convergente si les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n$ existent, sont finies et sont égales. On écrira alors $\lim a_n$ pour l'une de ces limites.
Si $\lim a$ existe, alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, $\lim T_k(a)$ existe aussi et $\lim T_k(a) = \lim a$. Le résultat suivant montre l'existence d'une notion de limite généralisée avec la même propriété pour des suites quelconques dans E.

Théorème (Banach) : Il existe une forme linéaire $M : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

i) $M(a) \geqslant 0$ pour toute suite positive $a \in E$.

ii) $M(1) = 1$

iii) Pour tout $a \in E$ et tout k, on a $M(T_k(a)) = M(a)$ (invariance par translation)

De plus, M est continue et, pour toute suite $a \in E$ convergente, $M(a) = \lim a$.

On dit que M est une moyenne invariante.

☐ *Il suffit de traiter le cas où $E = l^\infty(\mathbb{Z})$. En effet, on peut plonger $l^\infty(\mathbb{N})$ comme sous-espace de $l^\infty(\mathbb{Z})$ par l'application $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \tilde{a} = (\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \geqslant 0 \\ a_{-n} & \text{si } n < 0 \end{cases}$. Le réel $\lim \tilde{a}$ existe si et seulement si $\lim a$ existe, auquel cas $\lim \tilde{a} = \lim a$.*

Pour $N \in \mathbb{N}$, on considère la forme linéaire $f_n : a \in E \longmapsto \dfrac{1}{2N+1}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n$. On note $p : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \limsup_N f_N(a) \end{cases}$' bien définie puisque la suite a est bornée. On note F l'ensemble des suites $a \in E$ telles que $\lim a$ existe. C'est un sous-espace vectoriel de E et $a \longmapsto \lim a$ est une forme linéaire sur F. On a $p(a+b) \leqslant p(a) + p(b)$ si $a, b \in E$. En effet, $p(a+b) = \limsup\limits_N f_N(a+b) = \limsup\limits_N (f_N(a) + f_N(b)) \leqslant \limsup\limits_N f_N(a) + \limsup f_N(b) = p(a) + p(b)$. De plus, pour $a \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a $p(ta) = tp(a)$. Aussi, $-p(-a) \leqslant p(a)$ puisque $0 = p(0) = p(a-a) \leqslant p(a) + p(-a)$. Pour tout $a \in F$, on a $p(a) = \lim a$.

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $p(a - T_k(a)) = p(T_k(a) - a) = 0$.

Notons $b = T_k(a) - a$, de sorte que $b_n = a_{n+k} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $N \in \mathbb{N}$, on a $f_N(b) = \dfrac{1}{2N+1}\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}(a_{n+k} - a_n)$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=N+1}^{N+k} a_n - \sum_{n=-N}^{-N+k-1} a_n\right) & \text{si } k \geqslant 0 \\ \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-N+k}^{-N-1} a_n - \sum_{n=N+k+1}^{N} a_n\right) & \text{si } k < 0 \end{array} \right\} \leqslant \frac{2|k|}{2N+1}\|a\|_\infty$$

d'où $p(b) \leqslant 0$. Le même raisonnement donne $p(-b) \leqslant 0$. Comme $-p(-b) \leqslant p(b)$, on a $0 \leqslant -p(-b) \leqslant p(b) \leqslant 0$ et donc $p(b) = p(-b) = 0$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire M sur E telle que $M(a) \leqslant p(a)$ pour tout $a \in E$ et $M(a) = \lim a$ pour tout $a \in F$. Les propriétés de l'énoncé sont satisfaites :

i) *Si $a \in E$ est positive, on a $f_N(a) \geqslant 0$ donc $M(-a) \leqslant p(-a) \leqslant 0$ et $M(a) \geqslant 0$.*

ii) $M(\mathbf{1}) = \lim \mathbf{1} = 1$

iii) *Pour* $a \in E$ *et* $k \in \mathbb{Z}$, *on a* $M(T_k(a)) = M(a)$. *En effet, posons* $b = T_k(a) - a$. *D'après ce qui précède, on a* $p(b) = p(-b) = 0$. *Comme* $M(b) \leqslant p(b)$, *on a* $M(b) \leqslant 0$. *De même,* $M(-b) \leqslant p(-b) = 0$ *donc* $M(b) = 0$.

De plus, M *est continue : soit* $a \in E$. *Comme* $\|a\|_\infty \mathbf{1} - a \geqslant 0$, *on a* $M(\|a\|_\infty \mathbf{1} - a) \geqslant 0$ *donc* $M(a) \leqslant \|a\|_\infty$. *De même* $\|a\|_\infty \mathbf{1} + a \geqslant 0$ *et donc* $-M(a) = M(-a) \leqslant \|a\|_\infty$. *D'où* $|M(a)| \leqslant \|a\|_\infty$.

□

Soit $q : \begin{cases} l^\infty(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \limsup a \end{cases}$. On a $q(a+b) \leqslant q(a) + q(b), q(ta) = tq(a), q(T_k(a)) = q(a)$ pour $a, b \in l^\infty(\mathbb{N})$, $t \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Dans la preuve précédente, on aurait aimé pouvoir prendre simplement q à la place de p. Mais q ne vérifie pas le fait essentiel que $p(T_k(a) - a) = 0$ (prendre $k = 1$ et $a = (1,0,1,0,1,0,\ldots)$). Dans la preuve, c'est ce fait qui permet d'établir l'invariance par translation de M, qui n'est pas garantie ici, même s'il y a invariance par translation de q.

Il n'existe pas de mesure de probabilité invariante par translation sur $\mathbb{Z}$. Une moyenne invariante M sur $l^\infty(\mathbb{Z})$ est un substitut d'une telle mesure. On dit que $\mathbb{Z}$ est moyennable. En général, on dit qu'un groupe G est moyennable lorsqu'il existe sur $l^\infty(G)$ une forme linéaire M avec les propriétés précédentes (pour $g \in G$, l'opérateur de translation $T_g : l^\infty(G) \longrightarrow l^\infty(G)$ est défini par $T_g(a)(s) = a(gs)$ pour $a \in l^\infty(G)$ et $s \in G$). Les moyennes invariantes ne sont pas explicites, leur existence résulte du théorème de Hahn-Banach et dépend donc de l'axiome du choix.

Prenons du recul sur la notion de moyenne : on va introduire une autre définition des groupes moyennables, qui permet de mieux comprendre pourquoi on parle de « moyenne ».

Définition : Soit X un ensemble. On appelle mesure toute application $\mu : \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ qui vérifie l'une des conditions suivantes :

(CA) : Si (A_i) est une suite infinie de parties de X deux à deux disjointes, $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

On dit alors que μ est complètement additive.

(SA) : Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de X deux à deux disjointes, $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

On dit alors que μ est simplement additive.

Les mesures sont plus généralement définies sur une tribu. Dans le cas des mesures considérées ici, définies sur $\mathscr{P}(X)$, on parle de mesure exhaustive.

Définition : Soit G un groupe opérant sur X. On dit que μ est une mesure invariante sous l'action de G (ou que G conserve la mesure μ) si, pour tous $A \in \mathscr{P}(X)$ et $g \in G$, on a $\mu(A) = \mu(gA)$.

Soit G un groupe. On notera $P^1(G)$ l'ensemble des mesures positives simplement additives, de masse 1, définies sur toutes les parties de G. Une mesure $m \in P^1(G)$ sera dite G-invariante si $m(g(A)) = m(A)$ pour tout $A \subset X$ et tout $g \in G$. On dira qu'un groupe est moyennable (à gauche) s'il existe $m \in P^1(G)$ qui est G-invariante. En pratique, relier les mesures aux formes linéaires permet d'exploiter des résultats puissants tels que le théorème de Hahn-Banach. D'où l'intérêt du résultat suivant :

Proposition (Dualité mesures-fonctionnelles) : On définit l'ensemble des moyennes sur X par $M^1(X) = \{\varphi \in l^\infty(G)^* : \varphi(1) = 1 \text{ et } (f \geqslant 0 \Longrightarrow \varphi(f) \geqslant 0)\}$.
L'application $\begin{cases} M^1(X) & \longrightarrow & P^1(X) \\ \varphi & \longmapsto & (m_\varphi : A \in \mathscr{P}(X) \longmapsto \varphi(\mathbf{1}_A)) \end{cases}$ est une bijection.

□ *On va construire la bijection réciproque. Si $m \in P^1(X)$, l'application $\mathbf{1}_A \longmapsto m(A)$ s'étend par linéarité sur l'ensemble des fonctions étagées. L'application linéaire obtenue est de norme 1, donc se prolonge de façon unique en une forme linéaire de norme 1 sur l'adhérence de l'espace des fonctions étagées sur X, qui est $l^\infty(X)$. La forme linéaire obtenues est un élément de $M^1(X)$.*

□

Revenons enfin sur l'inexistence d'une mesure de probabilité invariante par translation sur $\mathbb{Z}$:

Proposition : Sur $\mathbb{Z}$, il n'existe aucune mesure exhaustive qui soit invariante par translation, complètement additive, et pour laquelle $\mu(\mathbb{Z}) \in \mathbb{R}_+^*$.

□ *Supposons par l'absurde l'existence d'une telle mesure μ. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n\}) \neq 0$. Si l'on a : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \mu(\{n\}) = 0$, alors $\mu(\mathbb{Z}) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = 0$. Absurde : cela contredit le fait que $\mu(\mathbb{Z}) \in \mathbb{R}_+^*$. On peut donc considérer $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Posons $p = n_0 - n$. On a $\mu(\{n\}) = \mu(p + \{n\}) = \mu(\{n_0\})$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \mu(\{n\}) = \mu(\{n_0\})$. On peut alors écrire $\mu(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n_0\}) = +\infty$. Absurde : cela contredit le fait que $\mu(\mathbb{Z}) \in \mathbb{R}_+^*$.*

□