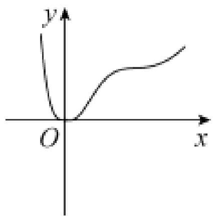
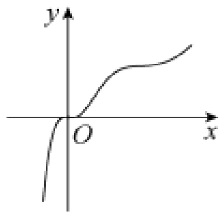
2022年10月25日高中数学作业

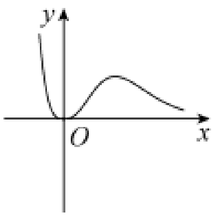
学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

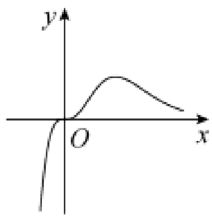
一、单选题

1．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^{3}}{3^{x}+1}$ 的图象大致是（　）

A．

B．

C．

D．

2．已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-2,2\right]$，则函数 $g(x)=f\left(2x\right)+\sqrt{1-2^{x}}$ 的定义域为（　）

A．$\left[0,1\right]$　　B．$\left[-1,0\right]$　　C．$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$　　D．$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

3．若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x},x<1\\ a+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x},x\geq 1\end{cases}$ 的值域为 $\left(a,+\infty\right)$，则 a 的取值范围为（　）

A．$\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$　　C．$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　D．$\left(\dfrac{1}{4},1\right]$

二、填空题

4．函数 $y=a^{1-x}\left(a>0,a\neq 1\right)$ 的图象恒过定点A，若点A在直线 $mx+ny-1=0\left(mn>0\right)$ 上，则 $\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为________.

5．已知函数 $f(x)=ax^{-3}+2$ 的图像恒过定点 A，则 A 的坐标为__________.

三、解答题

6．已知函数 $f(x)=a^{x}$，$g(x)=a^{2x}+m$，其中 $m>0$，$a>0$且$a\neq 1$．当 $x\in\left[-1,1\right]$时，$y=f(x)$ 的最大值与最小值之和为 $\dfrac{5}{2}$．

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）若$a>1$，记函数$h(x)=g(x)-2mf(x)$，求当$x\in\left[0,1\right]$时$h(x)$的最小值$H(m)$；

参考答案：

1．D

【分析】根据函数的函数值与函数的单调性进行判断即可.

【详解】由题知当$x<0$时，函数$f\left(x\right)<0$，排除A，C，

又由$f\left(3\right)=\dfrac{27}{28}$，$f\left(4\right)=\dfrac{32}{41}$，$f\left(3\right)>f\left(4\right)$，排除B.

故选：D.

【点睛】本题主要考查函数的图像问题，解决此类问题，基本就是排除法进行解题，往往就是函数的特殊值，奇偶性，单调性，周期性等等进行判断即可.

2．B

【分析】列出使函数$g(x)$有意义的不等式组，解不等式组可得结果.

【详解】要使$g(x)$有意义，则$\begin{cases}-2\le 2x\le 2\\1-2^x\ge 0\end{cases}$，解得$-1\leqslant x\leqslant 0$，所以函数$g(x)$的定义域为$\left[-1,0\right]$.

故选：B.

3．B

【分析】分段求解指数函数的值域，结合已知条件，即可容易求得参数范围.

【详解】当$x<1$时，$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

当$x\ge 1$时，$f\left(x\right)=a+\left(\dfrac{1}{4}\right)^x\in\left(a,a+\dfrac{1}{4}\right]$

$\because$函数$f\left(x\right)$的值域为$\left(a,+\infty\right)$

$\therefore\begin{cases}a+\dfrac{1}{4}\ge\dfrac{1}{2}\\a\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$，即$a\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$

故选：B

【点睛】本题考查由分段函数的值域求参数范围，涉及指数函数值域的求解，属综合基础题.

4．$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

【分析】求出定点A的坐标，可得出$m+n=1$，将代数式$\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{n}$与$m+n$相乘，展开后利用

基本不等式可求得$\frac{1}{2m}+\frac{1}{n}$的最小值.

【详解】当$x=1$时，$y=a^0=1$，所以，定点A的坐标为$(1,1)$，

由已知可得$m+n=1$，因为$mn>0$，则$m>0$且$n>0$，

所以，$\frac{1}{2m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)=\frac{3}{2}+\frac{n}{2m}+\frac{m}{n}\geq\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{n}{2m}\cdot\frac{m}{n}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

当且仅当$n=\sqrt{2}m$时，等号成立，因此，$\frac{1}{2m}+\frac{1}{n}$的最小值为$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

5．(3，3)

【分析】利用指数函数的性质 a^0＝1，令 x－3＝0，即得解

【详解】由 a^0＝1 知，当 x－3＝0，即 x＝3 时，f（3）＝3，

即图像必过定点(3，3).

故答案为：(3，3)

6．（Ⅰ）$a=2$或$\frac{1}{2}$（Ⅱ）$H(m)=\begin{cases}-m+1,(0<m<1)\\-m^2+m,(1\leq m\leq 2)\\-3m+4,\ (m>2)\end{cases}$

【分析】(I）根据指数函数的单调性，最值在区间端点取得，根据最大值和最小值的和列方程，解方程求得a的值.（II）化简$h(x)$，利用换元法转化为二次函数的形式.根据对称轴进行分类讨论，厚此求得最小值$H(m)$的表达式.

【详解】（Ⅰ）$\because f(x)$在$[-1,1]$上为单调函数，

$\because f(x)$的最大值与最小值之和为$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$，

$\therefore a=2$或$\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）$h(x)=2^{2x}+m-2m\cdot 2^x$即$h(x)=\left(2^x\right)^2-2m\cdot 2^x+m$

令$t=2^x$，$\because x\in[0,1]$时，$\therefore t\in[1,2]$，

$h(x)=t^2-2mt+m$，对称轴为$t=m$

当$0<m<1$时，$H(m)=h(1)=-m+1$；

当$1 \leq m \leq 2$时，$H\left(m\right)=h\left(m\right)=-m^2+m$；

当$m>2$时，$H\left(m\right)=h\left(2\right)=-3m+4$.

综上所述，$H\left(m\right)=\begin{cases}-m+1,(0<m<1)\\-m^2+m,\left(1\leq m\leq 2\right)\\-3m+4,\ (m>2)\end{cases}$

【点睛】本小题主要考查指数函数的单调性，考查分类讨论二次函数的最值，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.