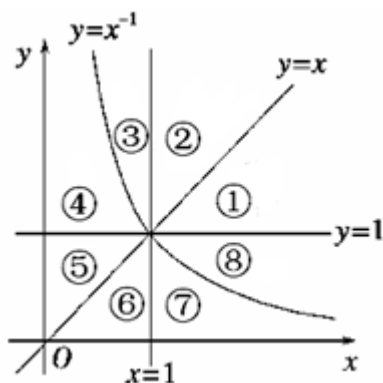


高中数学平行组卷 2022-10-21

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

- 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$, 则函数 $f(x)$ 为 ()
 A. 奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 B. 偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
 C. 非奇非偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
 D. 非奇非偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减
- 幂函数 $y = x^{-1}$ 及直线 $y = x, y = 1, x = 1$ 将平面直角坐标系的第一象限分成八个“卦限”:
 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ (如图所示), 那么幂函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象经过的“卦限”是



- ⑧, ③
- ⑦, ③
- ⑥, ①
- ⑤, ①

- 下列命题中, 正确的有 () 个

- ①对应: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 是映射, 也是函数;
- ②若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 2)$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $(0, \frac{1}{2})$;
- ③幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 与 $y = x^4$ 图像有且只有两个交点;
- ④当 $b > 0$ 时, 方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 恒有两个实根.

- 1
- 2
- 3
- 4

二、填空题

- 下列命题中所有正确的序号是_____.

- ①函数 $f(x) = a^{x-1} + 3 (a > 1)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数;

②函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1,3)$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,4)$ ；

③已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ ，且 $f(-2) = 8$ ，则 $f(2) = -8$ ；

④ $f(x) = \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{2}$ 为奇函数.

5. 已知 $f(x)$ 为幂函数，且满足 $\frac{f(8)}{f(2)} = 2$ ，若 $f(m-1) < 1$ ，则实数 m 的取值范围是 _____.

三、解答题

6. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ， $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$.

(1) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时，求 A 的非空真子集的个数；

(2) 当 $x \in \mathbf{R}$ 时，若 $A \cap B = \emptyset$ ，求实数 m 的取值范围.

参考答案:

1. C

【分析】根据已知求出 $a = \frac{1}{2}$ ，从而函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，由此得到函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

【详解】∵幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$,

$$\therefore 2^a = \sqrt{2}, \text{ 解得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

∴函数 $f(x)$ 是非奇非偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

故选 C.

【点睛】本题考查命题真假的判断，考查幂函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. D

【详解】根据幂函数的性质可知 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象经过的“卦限”是⑤①

3. C

【分析】对于①，由映射和函数的定义判断即可；

对于②，由抽象函数的定义求解即可；

对于③，结合幂函数的性质作出图象即可判断；

对于④，将问题转化为 $y = |2^x - 1|$ 与 $y = b$ 的图象交点个数的问題，作出图象即可判断.

【详解】解：对于①，对应： $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 是映射，也是函数；符合映射，

函数的定义，故①对；

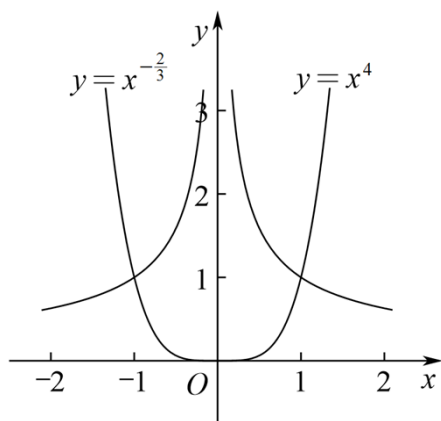
对于②，若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 2)$ ，则 $x-1 \in (0, 1), \therefore 2x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 故函数

$f(2x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，故②对

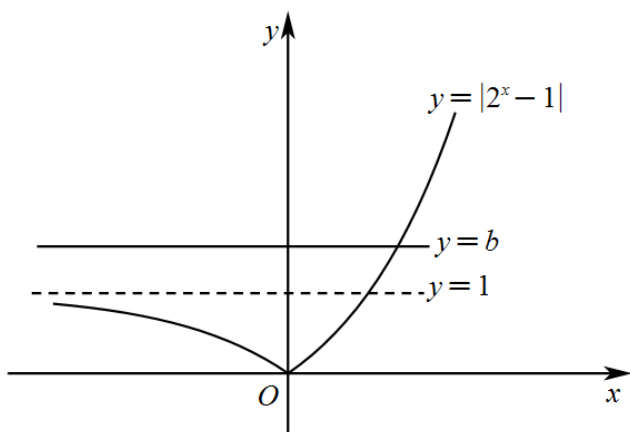
对于③，幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且图

像过 $(1, 1), (-1, 1)$ ， $y = x^4$ 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且图像过

$(1, 1), (-1, 1)$ 所以两个图像有且只有两个交点；故③对；



于④，当 $x > 1$ 时， $|2^x - 1|$ 单调递增，且函数值大于1，所以当 $b > 1$ 时，方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 只有一个实根.故④错；



故选：C

4. ①④

【解析】根据指数的运算性质 $a^0 = 1(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 恒成立，求出函数图象所过的定点，可判断

①；根据抽象函数的定义域的求法，可判断②；根据奇函数的图象和性质，求出 $f(2)$ ，可

判断③；根据奇函数的定义及判定方法，可判断④

【详解】解：当 $x = 1$ 时， $a^{x-1} = a^0 = 1(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 恒成立，故 $f(1) = 4$ 恒成立，故函数

$f(x) = a^{x-1} + 3(a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象一定过定点 $P(1, 4)$ ，故①正确；

函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 3)$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$ ，故②错误；

已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ ，且 $f(-2) = 8$ ，则 $f(2) = -24$ ，故③错误；

$f(x) = \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{2}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，

且 $f(-x) = \frac{1}{1-2^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{2^x-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-2^{-x}} = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 为奇函数，故④正确；

故答案为：①④

【点睛】本题以命题的真假判断为载体，考查了指数函数的图象和性质，函数的定义域，函数的奇偶性，是函数图象和性质的综合应用，难度不大，属于基础题.

5. $[1,2)$

【分析】由幂函数定义及 $\frac{f(8)}{f(2)} = 2$ ，即可求出幂函数的解析式 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，进而由函数在定义域上单调递增且 $f(m-1) < 1$ ，即可求 m 的范围

【详解】设 $f(x) = x^a$ ，则有 $\frac{f(8)}{f(2)} = \frac{8^a}{2^a} = 2^{2a} = 2$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ，且函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增

$$\because f(m-1) = (m-1)^{\frac{1}{2}} < 1$$

$$\therefore \begin{cases} m-1 < 1 \\ m-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m \in [1, 2)$$

故答案为： $[1,2)$

【点睛】本题考查了幂函数，由幂函数的定义及已知条件求出幂指数，进而得到解析式，再根据所得幂函数的单调性及已知不等关系求参数范围

6. (1) 254; (2) $m < 2$ 或 $m > 4$

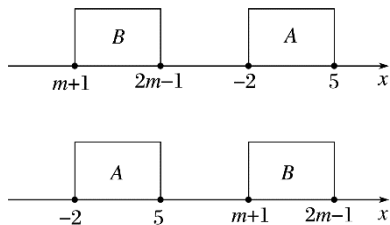
【分析】(1) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时，可得 A 中元素的个数，进而可得 A 的非空真子集的个数；

(2) 根据 $B \subseteq A$ ，可分 $B = \emptyset$ ，和 $B \neq \emptyset$ 两种情况讨论，即可得出实数 m 的取值范围.

【详解】(1) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时， $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ，共 8 个元素，所以 A 的非空真子集的个数为 $2^8 - 2 = 254$.

(2) 当 $B = \emptyset$ 时， $m+1 > 2m-1$ ，则 $m < 2$ ；

当 $B \neq \emptyset$ 时，根据题意作出如图所示的数轴，



$$\text{可得 } \begin{cases} 2m-1 \geq m+1, \\ 2m-1 < -2, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2m-1 \geq m+1, \\ m+1 > 5, \end{cases} \quad \text{解得 } m > 4.$$

综上所述，实数 m 的取值范围是 $m < 2$ 或 $m > 4$.

【点睛】考查子集，真子集的概念，描述法表示集合，注意不要漏了 $B=\varnothing$ 的情况.