2022年10月23日高中数学作业

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知当 $x\in(1，+\infty)$时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象恒在直线 $y=x$ 的下方，则 α 的取值范围是（　）

A．$0<\alpha<1$　　B．$\alpha<0$　　C．$\alpha<1$　　D．$\alpha>1$

2．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{-x^{2}+5x+6}}{x+1}$ 的定义域（　）

A．$\left(-\infty,-1\right]\cup\left[6,+\infty\right)$　B．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left[6,+\infty\right)$　C．$\left(-1,6\right]$　D．$\left[2,3\right]$

3．设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$．若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geq-\dfrac{8}{9}$，则 m 的取值范围是

A．$\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$

C．$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　　D．$\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

二、填空题

4．已知具有性质：$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$ 的函数，我们称为满足“倒负”变换的函数，下列函数：

①$f\left(x\right)=x-\dfrac{1}{x}$；②$f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$；③$f\left(x\right)=\begin{cases}x,0<x<1\\0,x=1\\-\dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$，其中满足“倒负”变换的函数是______.

5．已知偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(-1)=0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}<0$ 的解集__________

三、解答题

6．已知 $A=\left\{x\,|\,2x^{2}-x-3\leq0\right\}$，

(1)求二次函数 $y=-x^{2}+3x+4$，$x\in A$ 的值域：

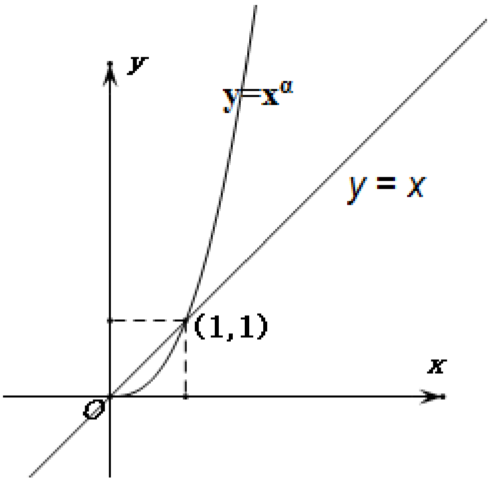
(2)当 $\forall x\in A$ 时，若二次函数 $y=x^{2}+\left(a-4\right)x+5-2a$ 的值恒大于 0，求 a 的取值范围．

参考答案：

1．C

【解析】根据幂函数图象的特点，数形结合即可容易求得结果.

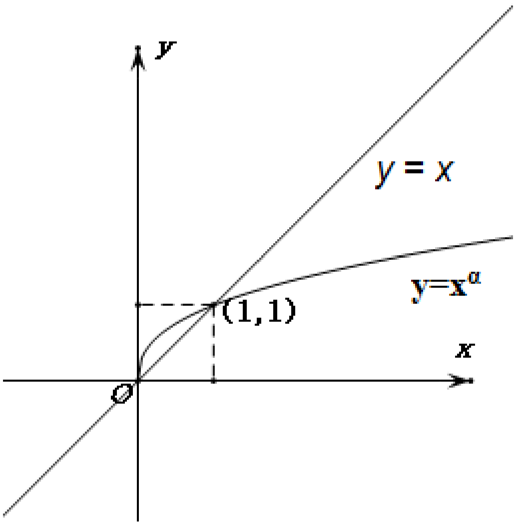
【详解】当$\alpha > 1$时，$y = x^{\alpha}$与$y = x$的图象如下所示：



显然不合题意，故舍去；

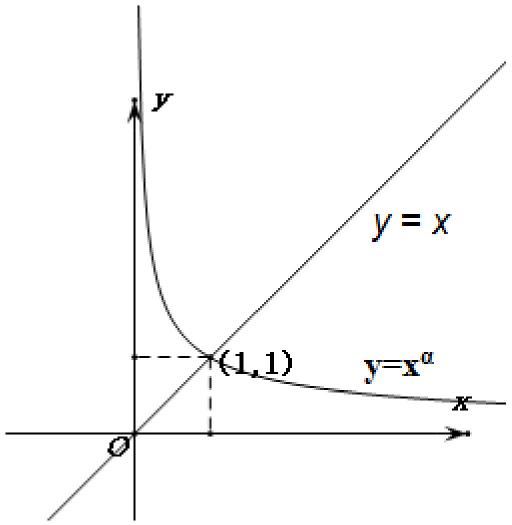
当$\alpha = 1$时，$y = x^{\alpha} = x$与$y = x$的图象重合，故舍去；

当$0 < \alpha < 1$时，$y = x^{\alpha}$与$y = x$的图象如下所示：



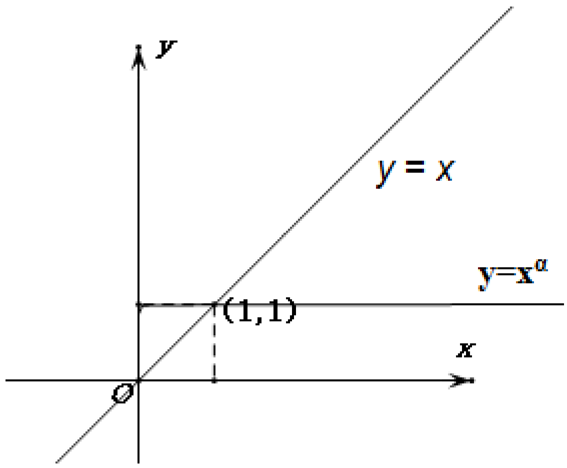
显然，此时满足题意.

当$\alpha < 0$时，$y = x^{\alpha}$与$y = x$的图象如下所示：



显然，此时满足题意.

当$\alpha=0$时，$y=x^{\alpha}=1\left(x\neq 0\right)$，$y=x^{\alpha}$与$y=x$的图象如下所示：



显然，此时满足题意.

综上所述：$\alpha<1$.

故选：C.

【点睛】本题考查幂函数图象的特征，属简单题.

2．C

【分析】解不等式组$\begin{cases}-x^2+5x+6\geq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$得出定义域.

【详解】$\begin{cases}-x^2+5x+6\geq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$，解得$-1<x\leqslant 6$

即函数$f\left(x\right)$的定义域$\left(-1,6\right]$

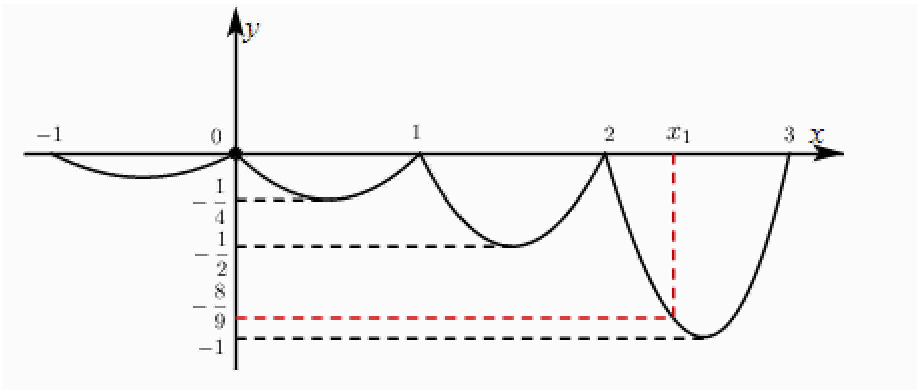
故选：C

3．B

【分析】本题为选择压轴题，考查函数平移伸缩，恒成立问题，需准确求出函数每一段解析式，分析出临界点位置，精准运算得到解决．

【详解】$\because x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)$，$f(x+1)=2f(x)$，$\therefore f(x)=2f(x-1)$，即$f(x)$右移 1 个单位，图像变为原来的 2 倍．

如图所示：当$2<x\leq 3$时，$f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$，令$4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$，整理得：$9x^2-45x+56=0$，$\therefore(3x-7)(3x-8)=0$，$\therefore x_1=\frac{7}{3},x_2=\frac{8}{3}$（舍），$\therefore$ $x\in(-\infty,m]$时，$f(x)\geq-\frac{8}{9}$成立，即$m\leq\frac{7}{3}$，$\therefore m\in\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$，故选 B．



【点睛】易错警示：图像解析式求解过程容易求反，画错示意图，画成向左侧扩大到 2 倍，导致题目出错，需加深对抽象函数表达式的理解，平时应加强这方面练习，提高抽象概括、数学建模能力．

4．①③

【分析】验证①②③中的函数是否满足$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，由此可得出结论．

【详解】对于①，$\because f\left(x\right)=x-\frac{1}{x}$，该函数的定义域为$\left\{x|x\neq 0\right\}$，

对任意的$x\in\left\{x|x\neq 0\right\}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-x=-f\left(x\right)$，满足条件；

对于②，$\because f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$，该函数的定义域为$\left\{x|x\neq 0\right\}$，

对任意的$x\in\left\{x|x\neq 0\right\}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x=f\left(x\right)$，不满足条件；

对于③，因为$f\left(x\right)=\begin{cases}x,0<x<1\\0,x=1\\-\frac{1}{x},x>1\end{cases}$，当$0<x<1$时，$\frac{1}{x}>1$，则$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x=-f\left(x\right)$，

当$x>1$时，$0<\frac{1}{x}<1$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-x=-f(x)$，

当$x=1$时，$f\left(\frac{1}{1}\right)=0=-f(1)$.

所以，对任意的$x>0$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

综上可知，满足“倒负”变换的函数是①③.

故答案为：①③.

5．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

【分析】分$x>0$和$x<0$两种情况讨论x的范围，根据函数的单调性可得到答案.

【详解】因为$f(x)$是偶函数，且$f(-1)=0$，所以$f(1)=f(-1)=0$，

又$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数，

①当$x>0$时，由$\frac{f(x)}{x}<0$得$f(x)<0$，又由于$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，且$f(1)=0$，所以$f(x)<f(1)$，得$x>1$；

②当$x<0$时，由$\frac{f(x)}{x}<0$得$f(x)>0$，又$f(-1)=0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数，所以$f(x)>f(-1)$，所以$-1<x<0$.

综上，原不等式的解集为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

【点睛】方法点睛：本题主要考查函数相关性质，利用函数性质解不等式，运用函数的奇偶性与单调性的关系是进行区间转换的一种有效手段.奇函数在对称区间上的单调性相同，且$f(-x)=-f(x)$.偶函数在对称区间上的单调性相反，且$f(x)=f(-x)=f(|x|)$..

6．(1)[0，$\frac{25}{4}$]

(2)$\{a\mid a<2\}$

【分析】（1）首先求解集合A，再求二次函数的值域；

（2）首先将不等式，参变分离得$a<\frac{-x^2+4x-5}{x-2}$，转化为求函数的最值，即可求解.

（1）

$2x^2-x-3\le0$等价于$(2x-3)\cdot(x+1)\le0$，.

解得$-1\le x\le\frac{3}{2}$

所以$A=\left\{x\mid -1\le x\le \dfrac{3}{2}\right\}$.

$\therefore$二次函数$y=-x^2+3x+4=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$，

函数在区间$\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$单调递增，所以当$x=\dfrac{3}{2}$时，$y$取最大值为$\dfrac{25}{4}$，

当$x=-1$时，y取最小值为0，

所以二次函数$y=-x^2+3x+4$．$x\in A$的值域是[0，$\dfrac{25}{4}$].

（2）

由（1）知$A=\left\{x\mid -1\le x\le \dfrac{3}{2}\right\}$

$\because x^2+(a-4)x+5-2a>0$恒成立.

即$x^2+ax-4x+5-2a>0$恒成立.

$\therefore (x-2)\cdot a>-x^2+4x-5$恒成立.　.

$\because -1\le x\le \dfrac{3}{2}$．$\therefore x-2<0$.

$\therefore a<\dfrac{-x^2+4x-5}{x-2}=\dfrac{x^2-4x+5}{2-x}=\dfrac{(2-x)^2+1}{2-x}=(2-x)+\dfrac{1}{2-x}$

$\because 2-x>0$，$\therefore (2-x)+\dfrac{1}{2-x}\ge 2\sqrt{(2-x)\left(\dfrac{1}{2-x}\right)}=2$..

当且仅当$2-x=\dfrac{1}{2-x}$且$-1\le x\le \dfrac{3}{2}$时，即$x=1$时，等号成立，.

$\therefore a<2$，故a的取值范围为$\{a\mid a<2\}$