盈的2022年10月24日高中数学作业

未命名

一、单选题

1．已知$a=\sqrt{2}$，$b=2^{0.8}$，$c=4^{0.2}$，则a,b,c的大小关系为（　　）

A．$c<b<a$　　　B．$c<a<b$　　　C．$b<a<c$　　　D．$b<c<a$

2．已知函数$f(x)=a^{x-2}+1(a>0,a\neq 1)$恒过定点$M(m,n)$，则函数$g(x)=n-m^x$不经过（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限　　　C．第三象限　　　D．第四象限

3．函数$f(x)=\begin{cases}a^x,(x<0)\\(a-2)x+3a,(x\geq 0)\end{cases}$，满足对任意$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，则$a$的取值范围是（　　）

A．$a\in(0,1)$　　　B．$a\in\left[\frac{1}{3},1\right)$　　　C．$a\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$　　　D．$a\in\left[\frac{1}{3},2\right)$

二、填空题

4．求值$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$________.

5．若函数$f(x)=\left|a^{x-1}-1\right|$（$a>0$，且$a\neq 1$）在区间$\left(a,\dfrac{3(2a-1)}{2}\right)$上单调递减，则实数$a$的取值范围是______.

三、解答题

6．已知函数$f(x)=a^x-k\cdot a^{-x}$（$a>1$，a为常数）是定义在R上的奇函数.

(1)求函数$f(x)$;

(2)用单调性定义证明函数$f(x)$是R上的增函数;

(3)若函数$f(x)$满足$f(2-3x)+f(x^2)>0$，求实数x的取值范围.

7．已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1)判断并证明$f(x)$在其定义域上的单调性；

(2)若$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x+2)<0$对任意$x\geq 1$恒成立，求实数$k$的取值范围.

参考答案：

1．B

【分析】将 a、b、c 化为 2^x 形式，由 $y=2^x$ 的单调性判断 a,b,c 大小关系.

【详解】$a=\sqrt{2}=2^{0.5}$，$c=4^{0.2}=2^{0.4}$，

$\because y=2^x$ 递增，且 $0.4<0.5<0.8$，

$\therefore 2^{0.4}<2^{0.5}<2^{0.8}$，即 $c<a<b$.

故选：B.

2．C

【解析】利用指数函数的性质求出 m，n，得出 $g(x)$ 的解析式，从而得出结论.

【详解】$\because f(x)=a^{x-2}+1(a>0,a\neq 1)$ 恒过定点 $(2,2)$，

$\therefore m=n=2$，

$\therefore g(x)=2-2^x$，

$\therefore g(x)$ 为减函数，且过点 $(0,1)$，

$\therefore g(x)$ 的函数图象不经过第三象限.

故选：C.

3．C

【分析】根据条件可知 $f(x)$ 在 R 上单调递减，从而得出 $\begin{cases}0<a<1\\ a-2<0\\ 3a\leqslant 1\end{cases}$，解出 a 的范围即可.

【详解】解：$\because f(x)$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，

$\therefore f(x)$ 在 R 上是减函数，

因为 $f(x)=\begin{cases}a^x,(x<0)\\ (a-2)x+3a,(x\geq 0)\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}0<a<1\\ a-2<0\\ (a-2)\times 0+3a\leqslant a^0\end{cases}$，解得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$.

故选：C.

4．4

【分析】直接利用根式的运算性质化简

【详解】$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$.

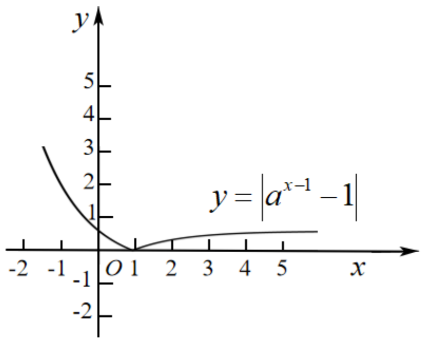
故答案为：4

5．$\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{6}\right]$

【分析】利用指数函数的图象变换，分类讨论，根据单调性建立不等式求解即可.

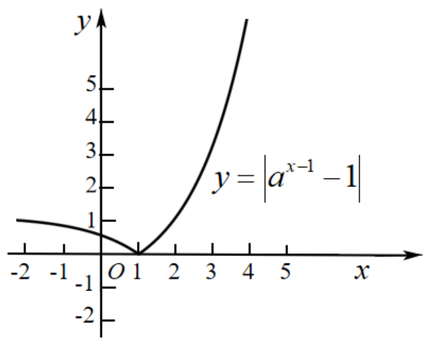
【详解】函数 $y=a^{x-1}-1$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象是将函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象向右平移 1 个单位，再向下平移 1 个单位得到的，

故函数 $f(x)=\left|a^{x-1}-1\right|$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象恒过点 $(1,0)$．当 $0<a<1$ 时，结合函数 $f(x)$ 的图象：



若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a,\dfrac{3(2a-1)}{2}\right)$ 上单调递减，则 $\begin{cases}0<a<1\\ a<\dfrac{3(2a-1)}{2}\\ \dfrac{3(2a-1)}{2}\leq1\end{cases}$，解得 $\dfrac{3}{4}<a\leq\dfrac{5}{6}$.

当 $a>1$ 时，结合函数 $f(x)$ 的图象：



若$f\left(x\right)$在区间$\left(a,\frac{3\left(2a-1\right)}{2}\right)$上单调递减，则$\begin{cases} a>1 \\ a<\frac{3\left(2a-1\right)}{2} \\ \frac{3\left(2a-1\right)}{2}\le 1 \end{cases}$，无实数解.

综上，实数a的取值范围为$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$.

解法二：

若$1<a<x<\frac{3\left(2a-1\right)}{2}$，则$a^{x-1}-1>0$，所以$f\left(x\right)=\left|a^{x-1}-1\right|$在区间$\left(a,\frac{3\left(2a-1\right)}{2}\right)$上单调递增，不符合题意；

当$0<a<1$时，函数$y=a^{x-1}$在区间$\left(a,\frac{3\left(2a-1\right)}{2}\right)$上单调递减，要使函数$f(x)=\left|a^{x-1}-1\right|$在区间$\left(a,\frac{3\left(2a-1\right)}{2}\right)$上单调递减，

则$a^{x-1}-1>0$在区间$\left(a,\frac{3\left(2a-1\right)}{2}\right)$上恒成立，

所以$\begin{cases} 0<a<1 \\ a<\frac{3\left(2a-1\right)}{2} \\ \frac{3\left(2a-1\right)}{2}\le 1 \end{cases}$，解得$\frac{3}{4}<a\le\frac{5}{6}$. 故实数$a$的取值范围是$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$.

故答案为：$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$.

6．(1) $f\left(x\right)=a^{x}-a^{-x}$

(2)证明见解析；

(3) $\left(-\infty,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【分析】（1）根据奇函数的性质得到$f\left(0\right)=0$，即可求出参数k的值，即可得到解析式，再代入检验即可；

（2）根据函数单调性的定义进行证明.

（3）利用函数奇偶性和单调性的性质 进行转化求解即可.

(1)

解：因为函数 $f\left(x\right)=a^{x}-k\cdot a^{-x}$（$a>1$，$a$ 为常数）是定义在 R 上的奇函数，所以 $f\left(0\right)=0$，

即 $f\left(0\right)=a^{0}-k\cdot a^{0}=0$，解得 $k=1$，所以 $f\left(x\right)=a^{x}-a^{-x}$，则

$f\left(-x\right)=a^{-x}-a^{x}=-\left(a^{x}-a^{-x}\right)=-f\left(x\right)$ 满足条件，故 $k=1$，所以 $f\left(x\right)=a^{x}-a^{-x}$

(2)

证明：设 $\forall x_1,x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=a^{x_1}-a^{-x_1}-\left(a^{x_2}-a^{-x_2}\right)$

$=a^{x_1}-a^{x_2}+\dfrac{1}{a^{x_2}}-\dfrac{1}{a^{x_1}}$

$=a^{x_1}-a^{x_2}+\dfrac{a^{x_1}-a^{x_2}}{a^{x_1}a^{x_2}}=(a^{x_1}-a^{x_2})(1+\dfrac{1}{a^{x_1}a^{x_2}})$，

$\because x_1<x_2$，$a>1$

$0<a^{x_1}<a^{x_2}$，$a^{x_1}-a^{x_2}<0$，

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 R 上为增函数.

(3)

解：由 $f\left(2-3x\right)+f\left(x^{2}\right)>0$ 得 $f\left(x^{2}\right)>-f\left(2-3x\right)=f\left(3x-2\right)$，

$\because f(x)$ 在 R 上为增函数，

$\therefore x^{2}>3x-2$，即 $x^{2}-3x+2>0$，

得 $\left(x-1\right)\left(x-2\right)>0$，

解得 $x>2$ 或 $x<1$，

即实数 x 的取值范围是 $\left(-\infty,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

7．(1) $f\left(x\right)$ 在 **R** 上单调递增；证明见解析

(2) $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$

【分析】（1）设 $x_2>x_1$，可整理得到 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\dfrac{2\left(2^{x_2}-2^{x_1}\right)}{\left(2^{x_2}+1\right)\left(2^{x_1}+1\right)}>0$，由此可得结论；

（2）利用奇偶性定义可证得 $f\left(x\right)$ 为奇函数，结合单调性可将恒成立的不等式化为

$k<g\left(x\right)=3^{x}-\frac{2}{3^{x}}-1$，由$g\left(x\right)$单调性可求得$g\left(x\right)\geq\frac{4}{3}$，由此可得$k$的取值范围.

（1）

$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，证明如下：

设$x_{2}>x_{1}$，

$\therefore f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right)=\frac{2^{x_{2}}-1}{2^{x_{2}}+1}-\frac{2^{x_{1}}-1}{2^{x_{1}}+1}=\frac{\left(2^{x_{2}}-1\right)\left(2^{x_{1}}+1\right)-\left(2^{x_{2}}+1\right)\left(2^{x_{1}}-1\right)}{\left(2^{x_{2}}+1\right)\left(2^{x_{1}}+1\right)}=\frac{2\left(2^{x_{2}}-2^{x_{1}}\right)}{\left(2^{x_{2}}+1\right)\left(2^{x_{1}}+1\right)}$；

$\because x_{2}>x_{1}$，$\therefore 2^{x_{2}}-2^{x_{1}}>0$，又$2^{x_{2}}+1>0$，$2^{x_{1}}+1>0$，$\therefore f\left(x_{2}\right)-f\left(x_{1}\right)>0$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

（2）

$\because f\left(-x\right)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^{x}}{1+2^{x}}=-f\left(x\right)$，$\therefore f\left(x\right)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，

由$f\left(k\cdot 3^{x}\right)+f\left(3^{x}-9^{x}+2\right)<0$得：$f\left(k\cdot 3^{x}\right)<-f\left(3^{x}-9^{x}+2\right)=f\left(9^{x}-3^{x}-2\right)$，

由（1）知：$f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递增，$\therefore k\cdot 3^{x}<9^{x}-3^{x}-2$在$\left[1,+\infty\right)$上恒成立；

当$x\geq 1$时，$3^{x}\geq 3$，$\therefore k<3^{x}-\frac{2}{3^{x}}-1$在$\left[1,+\infty\right)$上恒成立；

令$g\left(x\right)=3^{x}-\frac{2}{3^{x}}-1$，

$\because y=3^{x}$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递增，$y=\frac{2}{3^{x}}$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore g\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递增，$\therefore g\left(x\right)\geq g\left(1\right)=3-\frac{2}{3}-1=\frac{4}{3}$，$\therefore k<\frac{4}{3}$，

即实数k的取值范围为$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$.