

## 高中数学平行组卷 2022-10-21

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 下列幂函数中是偶函数的是 ( )

- A.  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$       B.  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$       C.  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$       D.  $f(x) = x^3$

2. 给定四个命题: ①当  $n = -1$  时,  $y = x^n$  是减函数; ②幂函数的图象都过  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  两点; ③幂函数的图象不可能出现在第四象限; ④幂函数  $y = x^n$  在第一象限为减函数, 则  $n < 0$ , 其中正确的命题为 ( )

- A. ①④      B. ②③      C. ②④      D. ③④

3. 下列命题中, 正确的有 ( ) 个

- ①对应:  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$  是映射, 也是函数;  
②若函数  $f(x-1)$  的定义域是  $(1,2)$ , 则函数  $f(2x)$  的定义域为  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ;  
③幂函数  $y = x^{-\frac{2}{3}}$  与  $y = x^4$  图像有且只有两个交点;  
④当  $b > 0$  时, 方程  $|2^x - 1| - b = 0$  恒有两个实根.

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

### 二、填空题

4. 下列命题中所有正确的序号是\_\_\_\_\_.

- ①函数  $f(x) = a^{x-1} + 3$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像一定过定点  $P(1,4)$ ;  
②函数  $f(x-1)$  的定义域是  $(1,3)$ , 则函数  $f(x)$  的定义域为  $(2,4)$ ;  
③已知  $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$ , 且  $f(-2) = 8$ , 则  $f(2) = -8$ ;  
④  $f(x) = \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{2}$  为奇函数.

5. 幂函数  $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$  ( $a, m \in \mathbb{N}$ ) 为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 则  $a+m =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知幂函数  $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m-1}$  是偶函数，且在  $(0, +\infty)$  上单调递增，函数

$$g(x) = 3^x - 2k.$$

(1) 求  $m$  的值；

(2) 当  $x \in [1, 2]$  时，记  $f(x)$ ， $g(x)$  的值域分别为集合  $A, B$ ，若  $A \cup B = B$ ，求实数  $k$  的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】利用幂函数的性质以及偶函数的定义即可求解.

【详解】对于 A,  $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ , 定义域  $\{x|x \geq 0\}$ , 此函数为非奇非偶函数, 故 A 不正确;

对于 B,  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ , 定义域为  $R$ , 且  $f(-x) = f(x)$ ,

故函数为偶函数, 故 B 正确;

对于 C,  $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ , 定义域  $\{x|x \geq 0\}$ , 此函数为非奇非偶函数, 故 C 不正确;

对于 D,  $f(x) = x^3$ , 定义域为  $R$ , 且  $f(-x) = -f(x)$ , 此函数为奇函数, 故 D 不正确;

故选: B

【点睛】本题考查了幂函数的性质, 考查了基本知识的掌握情况, 属于基础题.

2. D

【分析】根据幂函数的性质: 单调性、图象、特殊点, 以及指数与函数性质间的关系, 即可判断各项的正误.

【详解】①当  $n = -1$  时,  $y = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  都递减, 而在  $x \in R$  不单调, 错误;

②幂函数的图象都过  $(1, 1)$ , 但不一定过  $(0, 0)$ , 错误;

③幂函数的图象不可能出现在第四象限, 正确;

④幂函数  $y = x^n$  在第一象限为减函数则  $n < 0$ , 正确;

故选: D

3. C

【分析】对于①, 由映射和函数的定义判断即可;

对于②, 由抽象函数的定义求解即可;

对于③, 结合幂函数的性质作出图象即可判断;

对于④, 将问题转化为  $y = |2^x - 1|$  与  $y = b$  的图象交点个数的问題, 作出图象即可判断.

【详解】解: 对于①, 对应:  $A = R, B = R, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$  是映射, 也是函数; 符合映射, 函数的定义, 故①对;

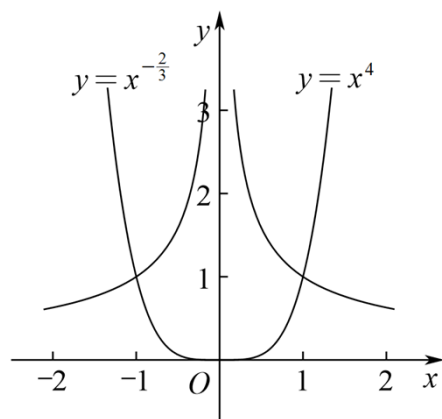
对于②, 若函数  $f(x-1)$  的定义域是  $(1, 2)$ , 则  $x-1 \in (0, 1), \therefore 2x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  故函数

$f(2x)$  的定义域为  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，故②对

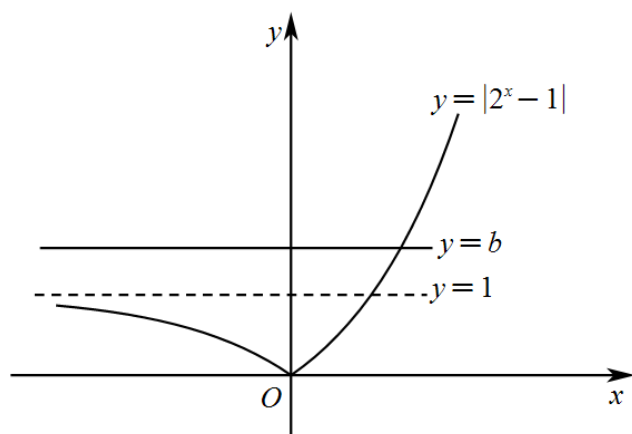
对于③，幂函数  $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$  为偶函数，在  $(-\infty, 0)$  上单调递增，在  $(0, +\infty)$  上单调递减且图

像过  $(1, 1), (-1, 1)$ ， $y = x^4$  为偶函数，在  $(-\infty, 0)$  上单调递减，在  $(0, +\infty)$  上单调递增且图像过

$(1, 1), (-1, 1)$  所以两个图像有且只有两个交点；故③对；



于④，当  $x > 1$  时， $|2^x - 1|$  单调递增，且函数值大于 1，所以当  $b > 1$  时，方程  $|2^x - 1| - b = 0$  只有一个实根.故④错；



故选：C

4. ①④

【详解】①令  $x-1=0$ , 可得  $x=1$ ， $f(x)=4$ ，所以函数  $f(x) = a^{x-1} + 3$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像一定过定点  $P(1, 4)$ ；

②函数  $f(x-1)$  的定义域是  $(1, 3)$ ，则函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, 2)$ ，故②不对；

③中， $f(-2) = 32 - 8a - 2b - 8 = 8$ ， $\therefore 8a + 2b = 16$ ，所以  $f(2) = 32 + 8a + 2b - 8 = 40$ .

故③不对.

$$\textcircled{4} f(-x) = \frac{1}{1-2^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{2^x-1} - \frac{1}{2} = \frac{2^x-1+1}{2^x-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-2^x} = -f(x), \text{ 所以函数为奇函数}$$

5. 3

【解析】由幂函数  $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$  ( $a, m \in N$ ) 为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是单调递减函数, 可得  $m^2-2m-3 < 0$ , 且  $m^2-2m-3$  为偶数,  $m \in Z$ , 且  $a-1=1$ . 解出即可.

【详解】 $\because$  幂函数  $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$  ( $a, m \in N$ ) 为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上是减函数,

$\therefore m^2-2m-3 < 0$ , 且  $m^2-2m-3$  为偶数,  $m \in N$ , 且  $a-1=1$ .

解得  $-1 < m < 3$ ,  $m = 0, 1, 2$ ,

且  $a=2$ ,

只有  $m=1$  时满足  $m^2-2m-3=-4$  为偶数.

$\therefore m=1$ .

$a+m=3$

故答案为: 3.

【点睛】本题考查幂函数的性质, 根据幂函数性质求参数值, 可根据幂函数性质列不等式和等式, 求解即可, 属于基础题.

$$6. (1) m=3; (2) \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

【分析】(1) 根据幂函数定义可构造方程求得  $m=-1$  或  $3$ , 代入验证可知  $m=-1$  不合题意, 从而得到结果;

(2) 根据两函数单调性可求得集合  $A, B$ , 由并集结果知  $A \subseteq B$ , 由此可得不等式组, 解不等式组求得结果.

【详解】(1)  $\because f(x)$  为幂函数  $\therefore m^2-2m-2=1$ , 解得:  $m=-1$  或  $m=3$

当  $m=-1$  时,  $f(x) = x^{-2}$ , 在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 不合题意;

当  $m=3$  时,  $f(x) = x^2$ , 为偶函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 符合题意

综上所述:  $m=3$

(2) 由 (1) 知:  $f(x) = x^2$

$\because$  当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x)$ ,  $g(x)$  单调递增  $\therefore A = [1, 4]$ ,  $B = [3-2k, 9-2k]$

$$\because A \cup B = B \quad \therefore A \subseteq B \quad \therefore \begin{cases} 3-2k \leq 1 \\ 9-2k \geq 4 \end{cases}, \text{解得: } 1 \leq k \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

**【点睛】** 本题考查根据幂函数的定义和性质求解参数值、函数值域的求解、根据集合的包含关系求解参数范围的问题. 关键是能够根据函数的单调性准确求得函数值域, 进而根据包含关系得到不等式组.