高中数学平行组卷 2022-10-20

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知幂函数$f(x)$的图象经过点$(4,2)$，则下列命题正确的是（　）

A．$f(x)$是偶函数　　B．$f(x)$在定义域上是单调递增函数

C．$f(x)$的值域为R　　D．$f(x)$在定义域内有最大值

2．给定四个命题：①当$n=-1$时，$y=x^n$是减函数；②幂函数的图象都过$(0,0)$，$(1,1)$两点；③幂函数的图象不可能出现在第四象限；④幂函数$y=x^n$在第一象限为减函数，则$n<0$，其中正确的命题为（　）

A．①④　　B．②③　　C．②④　　D．③④

3．下列命题中，正确的有（　）个

①对应：$A=\mathrm{R},B=\mathrm{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x^2+1}$是映射，也是函数；

②若函数$f(x-1)$的定义域是（1,2)，则函数$f(2x)$的定义域为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；

③幂函数$y=x^{-\frac{2}{3}}$与$y=x^4$图像有且只有两个交点；

④当$b>0$时，方程$\left|2^x-1\right|-b=0$恒有两个实根.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

4．已知函数$f\left(x\right)=x^2$，$g\left(x\right)=\dfrac{\ln|x|}{x}$，有下列四个命题：

①函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$是奇函数；

②函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$是定义域内的单调函数；

③当$x<0$时，方程$f\left(x\right)=g\left(x\right)$有一个实数根；

④当$x>0$时，不等式$f\left(x\right)>g\left(x\right)$恒成立，

其中正确命题的序号为__________.

5．给出下面四个条件：①$\begin{cases}0<a<1\\x<0\end{cases}$，②$\begin{cases}0<a<1\\x>0\end{cases}$，③$\begin{cases}a>1\\x<0\end{cases}$，④$\begin{cases}a>1\\x>0\end{cases}$，能使函数$y=\log_a x^{-2}$为单调减函数的是________.

三、解答题

6．幂函数 $f(x)=\left(m^2-m-5\right)x^m$ 是偶函数，

(1)求 m 的值，写出 $f(x)$ 解析式；

(2) $g(x)=f(x)+\ln(x+4)+\ln(4-x)$，

①判断 $g(x)$ 的奇偶性，并用定义证明；

②指出 $g(x)$ 的单调递减区间（无需证明），并解关于实数 t 的不等式 $g(t)<g(1-t)$．

参考答案：

1．B

【解析】先求出幂函数的解析式，再利用幂函数的性质即可判断.

【详解】设$f\left(x\right)=x^{\alpha}$，则$4^{\alpha}=2$，解得$\alpha=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，

$\because f\left(x\right)$的定义域为$\left[0,+\infty\right)$，故A错误；可得$f\left(x\right)$在定义域上是单调递增函数，故B正确；值域为$\left[0,+\infty\right)$，故C错误；故$f(x)$在定义域内没有最大值，故D错误.

故选：B.

2．D

【分析】根据幂函数的性质：单调性、图象、特殊点，以及指数与函数性质间的关系，即可判断各项的正误.

【详解】①当$n=-1$时，$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$都递减，而在$x\in\mathbf{R}$不单调，错误；

②幂函数的图象都过$\left(1,1\right)$，但不一定过$\left(0,0\right)$，错误；

③幂函数的图象不可能出现在第四象限，正确；

④幂函数$y=x^{n}$在第一象限为减函数则$n<0$，正确；

故选：D

3．C

【分析】对于①，由映射和函数的定义判断即可；

对于②，由抽象函数的定义求解即可；

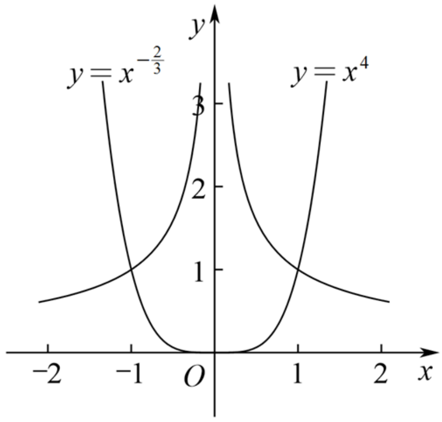
对于③，结合幂函数的性质作出图象即可判断；

对于④，将问题转化为$y=\left|2^{x}-1\right|$与$y=b$的图象交点个数的问题，作出图象即可判断.

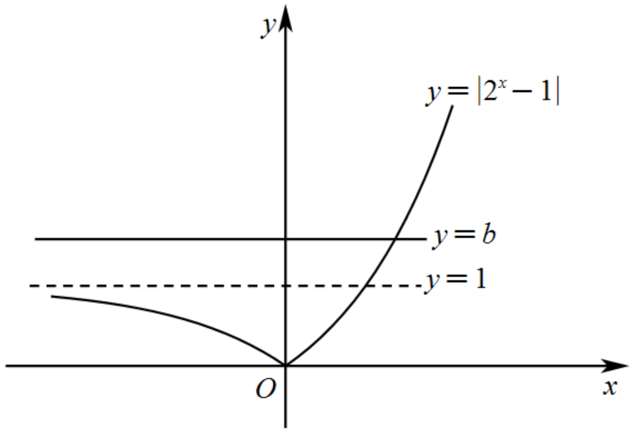
【详解】解：对于①，对应：$A=\mathrm{R},B=\mathrm{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x^{2}+1}$是映射，也是函数；符合映射，函数的定义，故①对；

对于②，若函数$f\left(x-1\right)$的定义域是（1,2），则$x-1\in\left(0,1\right),\therefore 2x\in\left(0,1\right)\Rightarrow x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 故函数$f\left(2x\right)$的定义域为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，故②对

对于③，幂函数$y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$为偶函数，在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减且图像过$(1,1),(-1,1)$，$y=x^4$为偶函数，在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增且图像过$(1,1),(-1,1)$所以两个图像有且只有两个交点；故③对；



于④，当$x>1$时，$\left|2^x-1\right|$单调递增，且函数值大于1，所以当$b>1$时，方程$\left|2^x-1\right|-b=0$只有一个实根.故④错；



故选：C

4．③④

【分析】利用反例可说明$h(x)$不是奇函数且不是定义域内的单调函数，利用导数可证明$f(x)=g(x)$有一个实数解，利用导数可证明$f(x)>g(x)$在$(0,+\infty)$上恒成立，从而可得正确命题的序号.

【详解】对于①②，$h(x)=x^2-\dfrac{\ln|x|}{x}$，$h(1)=1,h(-1)=1$，因$h(-1)\neq -h(1)$，

所以$h(x)$不是奇函数.而$h(1)=h(-1)$，故$h(x)$在定义域内不是单调函数，

故①②错误.

对于③，

方程$f\left(x\right)=g\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上是否有一个实数根等价于$x^3=\ln\left(-x\right)$是否有一个实数根，

也就是$s\left(x\right)=x^3-\ln\left(-x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$是否有一个零点.

因为$s'\left(x\right)=3x^2-\frac{1}{x}>0$（$x<0$），故$s\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上为单调增函数，

因为$s\left(-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e^3}+1>0$，$s\left(-e\right)=-e^3-1<0$，故$s\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$有一个零点.

所以方程$f\left(x\right)=g\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上有一个实数根，故③正确.

对于④，当$x>0$时，不等式$f\left(x\right)>g\left(x\right)$等价于$x^3>\ln x$，

令$u\left(x\right)=x^3-\ln x$，$x>0$，则$u'\left(x\right)=3x^2-\frac{1}{x}=\frac{3x^3-1}{x}$，

当$0<x<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$时，$u'\left(x\right)<0$，当$x>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$时，$u'\left(x\right)>0$，

故$u\left(x\right)$在$\left(0,3^{-\frac{1}{3}}\right)$上为减函数，在$\left(3^{-\frac{1}{3}},+\infty\right)$为增函数，

所以$u\left(x\right)_{\min}=u\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{\ln 3}{3}>0$，故$u\left(x\right)>0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，

所以$f\left(x\right)>g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，故④正确.

故答案为：③④.

【点睛】本题考查函数的奇偶性、单调性、方程的解以及不等式的恒成立，说明函数不具有奇偶性、单调性，应根据反例说明，方程的解或不等式的恒成立，可以通过构建新函数，利用导数研究其单调性、最值等，从而使问题得到解决.

5．①④

【分析】令$t=x^{-2}$，则$y=\log_a t$，根据对数函数与幂函数的单调性，以及复合函数的单调性，逐项判定，即可求解.

【详解】令$t=x^{-2}$，则$y=\log_a t$，

当$\begin{cases}0<a<1\\x<0\end{cases}$时，$t=x^{-2}$为增函数，$y=\log_a t$为减函数，

根据复合函数的单调性的判定方法，

可得函数 $y=\log_a x^{-2}$ 为减函数，所以①满足条件；

当 $\begin{cases}0<a<1\\x>0\end{cases}$ 时， $t=x^{-2}$ 为减函数， $y=\log_a t$ 为减函数，

根据复合函数的单调性的判定方法，

可得函数 $y=\log_a x^{-2}$ 为增函数，所以②不满足条件；

当 $\begin{cases}a>1\\x<0\end{cases}$ 时， $t=x^{-2}$ 为增函数， $y=\log_a t$ 为增函数，

根据复合函数的单调性的判定方法，

可得函数 $y=\log_a x^{-2}$ 为增函数，所以③不满足条件；

当 $\begin{cases}a>1\\x>0\end{cases}$ 时， $t=x^{-2}$ 为减函数， $y=\log_a t$ 为增函数，

根据复合函数的单调性的判定方法，

可得函数 $y=\log_a x^{-2}$ 为减函数，所以④满足条件.

故选：①④.

【点睛】本题主要考查了对数函数与幂函数的图象与性质的应用，其中解答中熟记对数函数和幂函数的单调性，以及复合函数的单调性的判定方法是解答的关键，着重考查了推理与论证能力.

6．(1) $m=-2$ ， $f(x)=x^{-2}$

(2)① $g(x)$ 是偶函数；证明见解析；②单调递减区间为 $(0,4)$ ；不等式的解集为 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,4)$

【分析】（1）根据幂函数的定义及奇偶性直接判断参数值；

（2）①根据奇偶性的定义直接证明即可；②根据复合函数的单调性判断函数的单调区间，并根据单调性解不等式.

(1)

由 $f(x)$ 是幂函数可得 $m^2-m-5=1$ ，解得 $m=-2$ 或 3，

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $m=-2$ ， $f(x)=x^{-2}$ ；

(2)

①$g(x)$是偶函数

因为$g(x)=x^{-2}+\ln(x+4)+\ln(4-x)$，$x$满足$\begin{cases}x\neq 0\\x+4>0\\4-x>0\end{cases}$

解得$g(x)$定义域为$(-4,0)\cup(0,4)$，

$g(x)=x^{-2}+\ln\left(16-x^2\right)$，

$g(-x)=(-x)^{-2}+\ln\left(16-(-x)^2\right)=x^{-2}+\ln\left(16-(-x)^2\right)=x^{-2}+\ln\left(16-x^2\right)=g\left(x\right)$，

所以$g(x)$是偶函数

②单调递减区间为$(0,4)$，

因为$g(x)$为偶函数，$g\left(t\right)<g\left(1-t\right)$可化为$g\left(|t|\right)<g\left(|1-t|\right)$，

由$g\left(x\right)$在$\left(0,4\right)$单调递减可得$|t|>|1-t|$，

又由$g(x)$定义域为$(-4,0)\cup(0,4)$

可得$\begin{cases}0<|t|<4\\0<|1-t|<4\\|t|>|1-t|\end{cases}$

解得$\frac{1}{2}<t<4$，且$t\neq 1$

所以不等式的解集为$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,4)$.