高中数学平行组卷 2022-10-20

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．下面是有关幂函数 $f(x)=x^{-3}$ 的四种说法，其中错误的叙述是

A． $f(x)$ 的定义域和值域相等　　B． $f(x)$ 的图象关于原点中心对称

C． $f(x)$ 在定义域上是减函数　　D． $f(x)$ 是奇函数

2．设 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 是两个不同幂函数，集合 $M=\left\{\left(x,y\right)\middle|f\left(x\right)=g\left(x\right)\right\}$，则集合 M 中元素个数为（　　）

A．1 或 2 或 0　　B．1 或 2 或 3　　C．1 或 2 或 3 或 4　　D．0 或 1 或 2 或 3

3．下列命题中，正确的有（　　）个

①对应： $A=\mathrm{R},B=\mathrm{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 是映射，也是函数；

②若函数 $f(x-1)$ 的定义域是（1,2），则函数 $f\left(2x\right)$ 的定义域为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；

③幂函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 与 $y=x^4$ 图像有且只有两个交点；

④当 $b>0$ 时，方程 $\left|2^x-1\right|-b=0$ 恒有两个实根.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

4．已知函数 $f(x)=x\,|\,x\,|+3x$,若 $f(a)+f\left(a^2-2\right)<0$,则实数 a 的取值范围为_____.

5．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{-x^2-2x+3}$ 的单调递减区间为__________.

三、解答题

6．已知幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{-m^2-2m+3}$（其中 $-2<m<2$， $m\in\mathbf{Z}$）满足：

①在区间 $\left(-\infty,0\right)$ 上为减函数；

②对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(-x\right)-f\left(x\right)=0$.

求幂函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，并求当 $x\in\left[0,4\right]$ 时， $f\left(x\right)$ 的值域.

参考答案：

1．C

【分析】根据幂函数的单调性，定义域，值域，对称，奇偶性，依次判断每个选项得到答案.

【详解】$f(x)=x^{-3}$，函数的定义域和值域均为$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，A 正确；

$f(x)=x^{-3}$，$f(-x)=\left(-x\right)^{-3}=-x^{-3}=-f\left(x\right)$，函数为奇函数，故 BD 正确；

$f(x)$在$\left(-\infty,0\right)$和$\left(0,+\infty\right)$是减函数，但在$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$不是减函数，C 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了幂函数的定义域，对称，奇偶性，单调性，意在考查学生对于幂函数性质的综合应用.

2．B

【分析】考虑不同幂函数构成的方程，解方程后可得图像的交点及交点的个数，从而得到正确的选项.

【详解】取$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}},g\left(x\right)=x^{3}$，由$x^{\frac{1}{3}}=x^{3}$可得$x=0$或$x=1$或$x=-1$，

故$M=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^{\frac{1}{3}}=x^{3}\right\}=\left\{\left(0,0\right),\left(1,1\right),\left(-1,-1\right)\right\}$；

取$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}},g\left(x\right)=x^{3}$，由$x^{\frac{1}{2}}=x^{3}$可得$x=0$或$x=1$，

故$M=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^{\frac{1}{2}}=x^{3}\right\}=\left\{\left(0,0\right),\left(1,1\right)\right\}$，

取$f\left(x\right)=x^{-2},g\left(x\right)=x^{3}$，由$x^{-2}=x^{3}$可得$x=1$，

故$M=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^{-2}=x^{3}\right\}=\left\{\left(1,1\right)\right\}$，

注意，任意幂函数的图像必过$\left(1,1\right)$点，故$\left(1,1\right)\in M$，任意两个幂函数的图像不可能有 4 个交点，故M中元素个数为 1 或 2 或 3，

故选 B.

【点睛】本题考查幂函数的图像和性质，解答本题的关键是熟悉三类幂函数（即幂指数小于 0、大于等于 0 小于 1 及大于等于 1）在第一象限内的图像和性质，此类问题属于中档题.

3．C

【分析】对于①，由映射和函数的定义判断即可；

对于②，由抽象函数的定义求解即可；

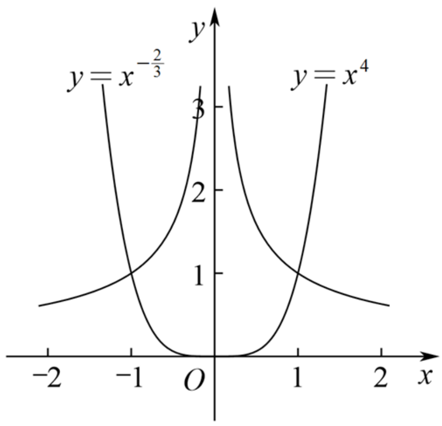
对于③，结合幂函数的性质作出图象即可判断；

对于④，将问题转化为$y=\left|2^x-1\right|$与$y=b$的图象交点个数的问题，作出图象即可判断.

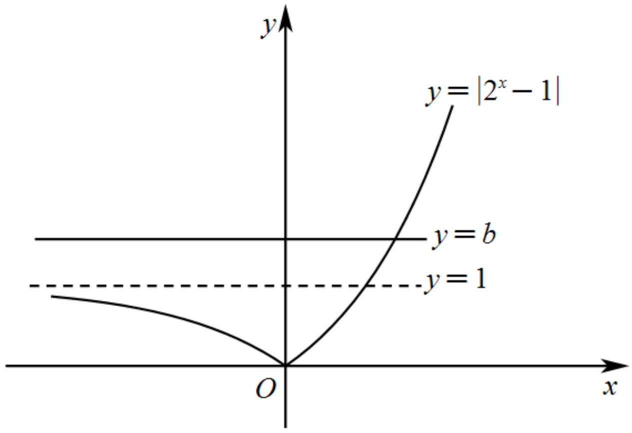
【详解】解：对于①，对应：$A=\mathrm{R},B=\mathrm{R},f:x\to y=\dfrac{1}{x^2+1}$是映射，也是函数；符合映射，函数的定义，故①对；

对于②，若函数$f\left(x-1\right)$的定义域是（1,2），则$x-1\in\left(0,1\right),\therefore 2x\in\left(0,1\right)\Rightarrow x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 故函数$f\left(2x\right)$的定义域为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，故②对

对于③，幂函数$y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$为偶函数，在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减且图像过$\left(1,1\right),\left(-1,1\right)$ ，$y=x^4$为偶函数，在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增且图像过$\left(1,1\right),\left(-1,1\right)$ 所以两个图像有且只有两个交点；故③对；



于④，当$x>1$时，$\left|2^x-1\right|$单调递增，且函数值大于 1，所以当$b>1$时，方程$\left|2^x-1\right|-b=0$只有一个实根.故④错；



故选：C

4．$(-2,1)$

【解析】首先判断函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，然后判断出 $f\left(x\right)$ 的单调性，由此化简不等式 $f(a)+f\left(a^2-2\right)<0$，求得实数 a 的取值范围.

【详解】$f(-x)=-x|-x|-3x=-x|x|-3x=-f(x)$,即函数 $f(x)$为奇函数,

当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2+3x$ 在$(0,+\infty)$上为增函数,

故函数 $f(x)$在 **R** 上为增函数,

$\therefore f(a)+f(a^2-2)<0$ 等价于 $a<2-a^2$,解得$-2<a<1$.

故答案为:$(-2,1)$.

【点睛】本小题主要考查根据函数的单调性和奇偶性解不等式，考查化归与转化的数学思想方法，属于基础题.

5．$\left[-1,1\right]$

【分析】首先求出函数 $f(x)$ 的定义域，令 $t=-x^2-2x+3$，分别求出 $t=-x^2-2x+3$ 和 $y=\sqrt{t}$ 的单调区间，再利用符合函数单调性的性质即可求出 $f(x)$ 的单调减区间.

【详解】由 $-x^2-2x+3\geq 0$，解得 $-3\leq x\leq 1$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为$\left[-3,1\right]$，

令 $t=-x^2-2x+3$，

$y=\sqrt{t}$ 在$[0,+\infty)$ 单调递增，

因为函数 $t=-x^2-2x+3$ 在$\left[-3,-1\right]$ 单调递增，在$\left[-1,1\right]$ 单调递减，

由复合函数的单调性知：$f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 在$[-1,1]$单调递减.

故答案为：$[-1,1]$

6．$f\left(x\right)=x^4$，值域为$[0,256]$

【解析】根据条件分析$m=-1$，0，1，依次检验①②，即可得解.

【详解】解：$\because -2<m<2$，$m\in\mathbf{Z}$，$\therefore m=-1$，0，1.

$\because$对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(-x\right)-f\left(x\right)=0$，即$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，$\therefore f\left(x\right)$是偶函数.

当$m=-1$时，$f\left(x\right)=x^4$，满足条件①②；

当$m=1$时，$f\left(x\right)=x^0$，不满足条件①；

当$m=0$时，$f\left(x\right)=x^3$，条件①②都不满足，故同时满足条件①②的幂函数$f\left(x\right)$的解析式为$f\left(x\right)=x^4$，且在区间$[0,4]$上是增函数，$\therefore$当$x\in[0,4]$时，函数$f\left(x\right)$的值域为$[0,256]$.

【点睛】此题考查根据幂函数的概念结合单调性和奇偶性求函数解析式，根据函数解析式求函数值域.