因式分解专题——用卷

命题人：轻井泽

一、单选题（本大题共 3 小题，共 15.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知互不相等的正数a、b、c满足$a^2+c^2=2bc$，则下列不等式中可能成立的是 (   )

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查了不等式的性质，不等式比较大小，属于中档题．

先由题意a,b,c为互不相等的正数，$a^2+c^2=2bc$，对其进行因式分解，得出$a-c$与$b-c$同号，再利用特殊值法进行判断即可得结论．

【解答】

解：若$a>b>0$，则$a^2+c^2>b^2+c^2>2bc$，不符合条件，排除A，D；

又由$a^2-c^2=2c(b-c)$，故$a-c$与$b-c$同号，排除C；

且当$b>a>c$时，$a^2+c^2=2bc$有可能成立，

例如：取$a=3,b=5,c=1$即可判断．

故选 B．

2. 下列各式运算正确的是 (   )

A. $a^2+4a+5=(a+1)(a+5)$　　B. $2a^2+4ab+9b^2=(2a+3b)^2$

C. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　D. $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$

【答案】

C

【解析】

【分析】

本题考查整式的乘法与因式分解，属于基础题．

【解答】

解：对于A选项，右边$=a^2+6a+5\neq$左边，故A选项错误；

对于B选项，右边$=4a^2+12ab+9b^2\neq$左边，故B选项错误；

对于C选项，根据立方和公式可知C选项正确；

对于D选项，根据立方差公式可知，正确的运算是$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，故$D$选项错误.

故选C.

3. 不等式$-x^2-5x+6\leq 0$的解集为(　)

A. $\{x|x\geq 6或x\leq -1\}$　　B. $\{x|-1\leq x\leq 6\}$

C. $\{x|-6\leq x\leq 1\}$　　D. $\{x|x\leq -6或x\geq 1\}$

【答案】

D

【解析】

【分析】

本题考查了一元二次不等式的解法，是基础题.

原不等式可化为：$x^2+5x-6\geq 0$，即可求出原不等式的解集.

【解答】

解：原不等式可化为：$x^2+5x-6\geq 0$，

因式分解得：$(x-1)(x+6)\geq 0$，

即$\begin{cases}x-1\geq 0\\x+6\geq 0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1\leq 0\\x+6\leq 0\end{cases}$，

解得：$x\geq 1$或$x\leq -6$，

所以原不等式的解集为：$\{x|x\leq -6或x\geq 1\}$.

故选：D.

二、多选题（本大题共 1 小题，共 5.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

4. 下列等式中是恒等式的是（　）

A. $a+b=b+a$　　B. $(a+b)+c=a+(b+c)$

C. $(x+2y)^2=x^2+4y^2$　　D. $x^2-2y^2=(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)$

【答案】

ABD

【解析】

【分析】

本题考查整式的乘法与因式分解，考查等式的性质及应用，属于基础题.

对各个选项逐一判断即可.

【解答】

解：由等式的性质知A、B选项正确；

由$(x+2y)^2=x^2+4xy+4y^2$知C选项错误；

由平方差公式知D选项正确.

故选 ABD.

三、填空题（本大题共 7 小题，共 35.0 分）

5. 已知正实数m，n满足$m+n=mn-3$，则mn的最小值为_____；$m+n$的最小值为_____.

【答案】

9

6

【解析】

【分析】

本题考查利用基本不等式求最值，属中档题.

【解答】

解：第一空： 法一 配和积关系 $m+n=mn-3\geq 2\sqrt{mn}\Rightarrow mn-2\sqrt{mn}-3\geq 0\Rightarrow$

$(\sqrt{mn}+1)(\sqrt{mn}-3)\geq 0\Rightarrow \sqrt{mn}\geq 3\Rightarrow mn\geq 9$， 当且仅当$m=n=3$时取等号，故填9.

法二 因式分解找整体定值 $m+n=mn-3\Rightarrow(m-1)(n-1)=4$， $mn=(m-1+1)(n-1+1)=(m-1)(n-1)+m-1+n-1+1=5+m-1+n-1\geq 5+2\sqrt{(m-1)(n-1)}=9$， 当且仅当$m-1=n-1$，即$m=n=3$时取等号，故填9.

法三　消元+基本不等式 $m+n=mn-3 \Leftrightarrow m=\frac{n+3}{n-1}$，则$mn=\frac{n^2+3n}{n-1}=\frac{(n-1)^2+5(n-1)+4}{n-1}$

$=n-1+\frac{4}{n-1}+5 \geq 9$，　当且仅当$m-1=n-1$，即$m=n=3$取等号，故填9．

第二空：　法一　配和积关系 $m+n=mn-3 \Leftrightarrow m+n+3=mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \Leftrightarrow m+n \geq 6$，　当且仅当$m=n=3$时取等号

法二　因式分解找整体定值 $m+n=mn-3 \Rightarrow (m-1)(n-1)=4$，则$m-1+n-1 \geq 2\sqrt{(m-1)(n-1)}$

$=4 \Leftrightarrow m+n \geq 6$，　当且仅当$m=n=3$时取等号．

法三　消元 $m+n=mn-3 \Leftrightarrow m=\frac{n+3}{n-1}$，$m+n=\frac{n+3}{n-1}+n=\frac{n-1+4}{n-1}+n-1+1=\frac{4}{n-1}+n-1+2 \geq 6$，　当且仅当$m=n=3$时取等号．

6. 设函数$f(x)=\left|\frac{x-1}{x}\right|$，若$m<n$，且$f(m)=f(n)$，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=$_____．

【答案】

2

【解析】

【分析】

本题考查因式分解，绝对值的处理，平方差公式的应用，属于中档题．

由$f(m)=f(n)$等号两边平方，移项后利用平方差公式，即可得到$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$．

【解答】

解：依题意，$f(x)=|1-\frac{1}{x}|$，

由$f(m)=f(n)$得$|1-\frac{1}{m}|=|1-\frac{1}{n}|$，

所以$(1-\frac{1}{m})^2=(1-\frac{1}{n})^2$，即$[(1-\frac{1}{m})+(1-\frac{1}{n})][(1-\frac{1}{m})-(1-\frac{1}{n})]=0$，

所以$(2-\frac{1}{m}-\frac{1}{n})(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})=0$，

因为$m<n$，

所以$\frac{1}{n}-\frac{1}{m} \neq 0$，

所以$2-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=0$，即$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$．

故答案为2．

7. 不等式$6+11x>2x^2$的解集是_____．

【答案】

$\left(-\frac{1}{2},6\right)$

【解析】

【分析】

本题考查了一元二次不等式的解法，属于基础题．

通过因式分解，不等式$6+11x>2x^2$化为$(2x+1)(x-6)<0$，解得即可．

【解答】

解：不等式$6+11x>2x^2$化为$2x^2-11x-6<0$，

$(2x+1)(x-6)<0$，

解得：$-\frac{1}{2}<x<6$．

$\therefore$不等式$6+11x>2x^2$的解集为$\left(-\frac{1}{2},6\right)$，

故答案为$\left(-\frac{1}{2},6\right)$．

8. 不等式$2x^2-3x-2>0$的解集是_____．

【答案】

$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

【解析】

【分析】

本题考查了一元二次不等式的解法，属于基础题．

将左边因式分解，再利用一元二次不等式的解法求解可求．

【解答】

解：因式分解得：$(2x+1)(x-2)>0$，

$\therefore$不等式$2x^2-3x-2>0$的解集为$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$，

故答案为$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$.

9. 已知集合$M=\{m,-3\}$，$N=\{x|2x^2+7x+3<0,x\in Z\}$，如果$M\cap N\neq\varnothing$，则$m$的值为______.

【答案】

-2或-1

【解析】

【分析】

此题属于以不等式的整数解为平台，考查了交集及其运算，是高考中常考的基本题型.

求出集合N中不等式的解集，找出解集中的整数解，得到x的值，确定出集合N，由两集合的交集不为空集，即两集合有公共元素，即可求出m的值.

【解答】

解：由$2x^2+7x+3<0$，

因式分解得：$(2x+1)(x+3)<0$，

解得：$-3<x<-\frac{1}{2}$,

又$x\in Z$，$\therefore x=-2$，-1，

$\therefore N=\{-2,-1\}$,

$\because M\cap N\neq\varnothing$，$\therefore m=-1$或$m=-2$.

故答案为：-2或-1.

10. 设$x\in R$，使不等式$14-4x^2\geq x$成立的x的取值范围为______.

【答案】

$[-2,\frac{7}{4}]$

【解析】

【分析】

本题考查一元二次不等式的解法，属于基础题．

化简，利用因式分解法求不等式的解集．

【解答】

解：$14-4x^2 \geq x$可化为$4x^2+x-14 \leq 0$，

即$(x+2)(4x-7) \leq 0$，

故不等式的解集为$[-2,\frac{7}{4}]$，

故答案为：$[-2,\frac{7}{4}]$．

11. 不等式$x^2-3x-18 \leqslant 0$的解为______；不等式$\frac{3x+1}{2x-1}<2$的解为______．

【答案】

$$\{x|-3 \leq x \leq 6\}$$

$\{x|x>3或x<\frac{1}{2}\}$

【解析】

【分析】

本题考查了分式不等式求解和一元二次不等式的解法，属于基础题．

将一元二次不等式因式分解，求解即可；将分式不等式右边化为0，再对分式不等式求解即可．

【解答】

解：由$x^2-3x-18=(x+3)(x-6) \leqslant 0$，解得$-3 \leq x \leq 6$，

所以不等式$x^2-3x-18 \leq 0$的解为：$\{x|-3 \leq x \leq 6\}$；

由不等式$\frac{3x+1}{2x-1}<2$得$\frac{3x+1}{2x-1}-2=-\frac{x-3}{2x-1}<0$，

所以$(x-3)(2x-1)>0$，解得$x>3$或$x<\frac{1}{2}$，

所以不等式$\frac{3x+1}{2x-1}<2$的解为：$\{x|x>3或x<\frac{1}{2}\}$，

故答案为：$\{x|-3 \leq x \leq 6\}$；$\{x|x>3或x<\frac{1}{2}\}$．

四、解答题（本大题共 5 小题，共 60.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

12. (本小题12.0分)

比较下列两个代数式的大小，写出比较过程.

当$x>1$时，x^3与x^2-x+1.

【答案】

解：当$x>1$时，

$$x^3-(x^2-x+1)$$

$$=x^2(x-1)+(x-1)$$

$=(x-1)(x^2+1)>0$.

$\therefore$当$x>1$时，$x^3>x^2-x+1$.

【解析】本题考查了作差法比较代数式的大小、因式分解，属于基础题.

当$x>1$时，作差$x^3-(x^2-x+1)$，因式分解即可得出大小关系.

13. (本小题12.0分)

(1)解不等式：$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\geq 2$;

(2)已知$a,b\in R^+,a+b=2$，求证：$\frac{a^2}{2-a}+\frac{b^2}{2-b}\geq 2$

【答案】

解：(1)$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\geq 2$，$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}-2\geq 0$，

$\frac{3x-5-2(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3}\geq 0$，$\frac{-2x^2-x+1}{x^2+2x-3}\geq 0$，

$\frac{2x^2+x-1}{x^2+2x-3}\leq 0$，$\frac{(2x-1)(x+1)}{(x+3)(x-1)}\leq 0$，

$-3<x\leq -1$或$\frac{1}{2}\leq x<1$，

即$x\in(-3,-1]\cup[\frac{1}{2},1)$.

(2)$\because a+b=2$，$\therefore 2-a=b$，$2-b=a$，

$\therefore \frac{a^2}{2-a}+\frac{b^2}{2-b}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$，

$\because \frac{a^2}{b}+b\geq 2a$(当且仅当$a=b$时等号成立)，

$\frac{b^2}{a}+a\geq 2b$(当且仅当$a=b$时等号成立)，

$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+a+b\geq 2(a+b)$，$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq a+b=2$，

即$\frac{a^2}{2-a}+\frac{b^2}{2-b}\geq 2$(当且仅当$a=b$时等号成立).

【解析】本题主要考查解不等式、基本不等式，解答本题的关键是掌握相关知识，逐一分析解答即可.

(1)$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}\geq 2$，$\frac{3x-5}{x^2+2x-3}-2\geq 0$，通分并因式分解后，即可求出不等式的解集；

(2)由$a+b=2$化$\frac{a^2}{2-a}+\frac{b^2}{2-b}$为$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$，利用基本不等式即可证得.

14. (本小题12.0分)

已知关于x的不等式$ax^2+3x+2>0(a\in R)$.

(1)若$ax^2+3x+2>0$的解集为$\{x|b<x<1\}$，求实数a,b的值;

(2)当$a>0$时，求关于x的不等式$ax^2-3x+2>ax-1$的解集.

【答案】

解：(1)因为$ax^2+3x+2>0$的解集为$\{x|b<x<1\}$，

所以方程$ax^2+3x+2=0$的两个根为$b,1(b<1)$，

由根与系数关系得：$\begin{cases}b+1=-\frac{3}{a}\\ b\cdot 1=\frac{2}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=-\frac{2}{5}\end{cases}$

(2)因为$ax^2-3x+2>ax-1\Rightarrow ax^2-(a+3)x+3>0\Rightarrow(ax-3)(x-1)>0$，

所以当$a>0$时，方程$ax^2-3x+2=ax-1$的两个根分别为：$\frac{3}{a},1$.

当$a=3$时，则两根相等，故不等式的解集为$\{x|x\neq 1\}$;

当$a>3$时，则$\frac{3}{a}<1$，不等式的解集为$\{x|x<\frac{3}{a}$或$x>1\}$;

当$0<a<3$时，则$\frac{3}{a}>1$，不等式的解集为$\{x|x<1$或$x>\frac{3}{a}\}$.

综上所述：

当$a=3$时，不等式的解集为$\{x|x\neq 1\}$;

当$a>3$时，不等式的解集为$\{x|x<\frac{3}{a}$或$x>1\}$;

当$0<a<3$时，不等式的解集为$\{x|x<1$或$x>\frac{3}{a}\}$.

【解析】本题考查了一元二次不等式的解法，一元二次方程的根与系数的关系，分类讨论的数学思想.属于中档题.

(1)由已知得1与b是方程$ax^2+3x+2=0$的根，利用韦达定理，即可得解；

(2)因式分解得$(ax-3)(x-1)>0$，讨论1与$\frac{3}{a}$的大小，即可得解.

15. (本小题12.0分)

解关于x的不等式：$x^2-(a+2)x+2a>0$，$(a\in R)$.

【答案】

解：因为$x^2-(a+2)x+2a>0$，

所以$(x-a)(x-2)>0$.

①当$a=2$时，$(x-2)^2>0$，不等式的解集为$\{x|x\neq 2\}$.

②当$a>2$时，不等式的解集为$\{x|x<2$或$x>a\}$.

③当$a<2$时，不等式的解集为$\{x|x<a$或$x>2\}$.

综上所述，当$a>2$时，不等式的解集为$\{x|x<2$或$x>a\}$；

当$a=2$时，不等式的解集为$\{x|x\neq 2\}$；

当$a<2$时，不等式的解集为$\{x|x<a$或$x>2\}$.

【解析】本题主要考查了含参数的一元二次不等式的解法，注意分类时要不重不漏，同时考查了计算能力，属于中档题.

先把不等式变形进行因式分解，按参数a的范围讨论，解出不等式即可.

16. (本小题12.0分)

解下列不等式：

(Ⅰ)$(1-x)(x+2)>\ -4$

(Ⅱ)$x^2+\ (1-a)\ x-\ a\ <\ 0$ (a是常数)

【答案】

解：(Ⅰ)原不等式可化为$x^2+x-6<0$，

故$(x-2)(x+3)<0$

所以原不等式的解集为$\{x|-3<x<2\}$；

(Ⅱ)由$x^2 + (1-a)x - a < 0$可得$(x-a)(x+1) < 0$

当$a < -1$时，原不等式的解集为$(a,-1)$

当$a = -1$时，原不等式的解集为$\varnothing$

当$a > -1$时，原不等式的解集为$(-1,a)$

综上所述，当$a < -1$时，原不等式的解集为$(a,-1)$

当$a = -1$时，原不等式的解集为$\varnothing$

当$a > -1$时，原不等式的解集为$(-1,a)$

【解析】本题考查一元二次不等式的解法，考查分类讨论思想.

(Ⅰ)把分式方程转化为$(x-2)(x+3) < 0$，解得即可，

(Ⅱ)将所求不等式的左端因式分解后，对a分类讨论即可.