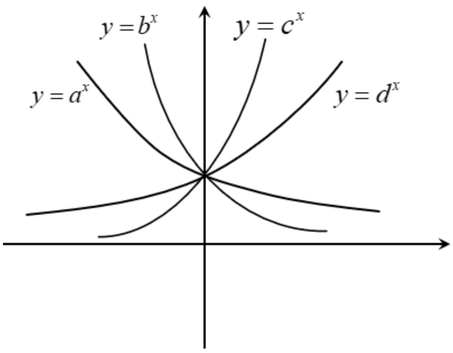
2022 年 10 月 23 日高中数学作业

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知函数 $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 、 $y=d^x$ 的大致图象如下图所示，则下列不等式一定成立的是（　）



A． $b+d>a+c$　　B． $b+d<a+c$　　C． $a+d>b+c$　　D． $a+d<b+c$

2．函数 $y=2^x-2^{-x}$（　）

A．是 **R** 上的减函数

B．是 **R** 上的增函数

C．在 $\left(-\infty,0\right)$ 上是减函数，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数

D．无法判断其单调性

3．与命题“函数 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的定义域为 **R** ”等价的命题不是（　）

A．不等式 $ax^2+bx+c\geq 0$ 对任意实数恒成立

B．不存在 $x_0\in\mathbf{R}$ ，使 $ax_0^2+bx_0+c<0$

C．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值域是 $\left[0,+\infty\right)$ 的子集

D．函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值大于 0

二、填空题

4．求值 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$________.

5. 已知定义域为 **R** 的函数 $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$ 则关于 t 的不等式 $f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$ 的解集为________.

三、解答题

6．设x，y，z均为正数，且$3^x=4^y=6^z$．

（1）试求x，y，z之间的关系.

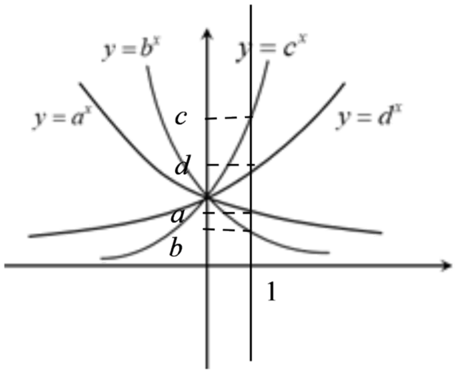
（2）求使$2x=py$成立，且与p最近的正整数（即求与p的差的绝对值最小的整数）.

（3）比较$3x$，$4y$，$6z$的大小.

参考答案：

1．B

【分析】如图，作出直线$x=1$,得到$c>d>1>a>b$，即得解.



【详解】

如图，作出直线$x=1$,得到$c>d>1>a>b$，

所以$b+d<a+c$.

故选：B

2．B

【分析】利用指数函数的单调性结合单调性的性质可得出结论.

【详解】因为指数函数$f\left(x\right)=2^x$为$\mathbf{R}$上的增函数，指数函数$g\left(x\right)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$为$\mathbf{R}$上的减函数，

故函数$y=2^x-2^{-x}$是$\mathbf{R}$上的增函数.

故选：B.

3．D

【分析】利用等价命题的定义进行分析判断即可.

【详解】因为函数的定义域为$\mathbf{R}$，

$\Leftrightarrow$不等式$ax^2+bx+c\geq 0$对任意实数恒成立；

$\Leftrightarrow$不存在$x_0\in\mathbf{R}$，使$ax_0^2+bx_0+c<0$；

$\Leftrightarrow$函数$y=ax^2+bx+c$的值域是$\left[0,+\infty\right)$的子集；

$\Leftrightarrow$函数$y=ax^2+bx+c$的最小值大于等于0；

故选：D.

4．4

【分析】直接利用根式的运算性质化简

【详解】$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$.

故答案为：4

5．$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

【分析】先判断出$f\left(x\right)$是奇函数且在$\mathbf{R}$上为减函数，利用单调性解不等式.

【详解】函数$f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$的定义域为**R.**

因为$f\left(-x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{2^x}{2^x+1}$，所以

$f\left(-x\right)+f\left(x\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}+1}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}\right)=-1+1=0$，所以$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

即$f\left(x\right)$是奇函数.

因为$y=2^x$为增函数，所以$y=\frac{1}{2^x+1}$为减函数，所以$f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$在$\mathbf{R}$上为减函数.

所以$f\left(t^2-2t\right)+f\left(2t^2-1\right)<0$可化为$f\left(t^2-2t\right)<-f\left(2t^2-1\right)=f\left(1-2t^2\right)$.

所以$t^2-2t>1-2t^2$，解得：$t>1$或$t<-\frac{1}{3}$.

故答案为：$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

6．（1）$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$；（2）3；（3）$3x<4y<6z$.

【分析】设$3^x=4^y=6^z=t$，将指数式换成对数式可得$x=\frac{1}{\log_t 3}$，$y=\frac{1}{\log_t 4}$，$z=\frac{1}{\log_t 6}$.

（1）通过对数运算可得x，y，z之间的关系；

（2）由题意得$p=\frac{2x}{y}=\log_3 16$，证明$p-2>3-p$，即可得答案；

（3）利用作差法结合对数运算，即可得答案；

【详解】设$3^x=4^y=6^z=t$，由x，y，z均为正数知$t>1$.

故取以t为底的对数，可得$x\log_t 3=y\log_t 4=z\log_t 6=1$.

$\therefore x=\frac{1}{\log_t 3}$，$y=\frac{1}{\log_t 4}$，$z=\frac{1}{\log_t 6}$.

（1）$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\log_t 6-\log_t 3=\log_t 2=\frac{1}{2}\log_t 4=\frac{1}{2y}$，

$\therefore x$，y，z之间的关系为$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}$.

（2）$p=\frac{2x}{y}=\frac{2}{\log_t 3}\cdot\log_t 4=2\cdot\log_3 4=\log_3 16$.

由$9<16<27$，得$\log_3 9<\log_3 16<\log_3 27$，从而$2<p<3$.

而$p-2=\log_3 16-\log_3 9=\log_3\frac{16}{9}$，$3-p=\log_3 27-\log_3 16=\log_3\frac{27}{16}$.

由$\frac{16}{9}\div\frac{27}{16}=\frac{256}{243}>1$知$\frac{16}{9}>\frac{27}{16}$，

$\therefore p-2=\log_3\frac{16}{9}>\log_3\frac{27}{16}=3-p$.

从而所求正整数为3.

（3）$\because 3x-4y=3\log_3 t-4\log_4 t=\frac{3\lg t}{\lg 3}-\frac{4\lg t}{\lg 4}$

$=\left(\frac{3\lg 4-4\lg 3}{\lg 3\cdot\lg 4}\right)\lg t=\frac{\lg t}{\lg 3\cdot\lg 4}\left(\lg 4^3-\lg 3^4\right)$.

而$\lg t>0$，$\lg 3>0$，$\lg 4>0$，$\lg 4^3<\lg 3^4$，$\therefore 3x<4y$.

又$\because 4y-6z=2\left(2\log_4 t-3\log_6 t\right)=2\left(\frac{2\lg t}{\lg 4}-\frac{3\lg t}{\lg 6}\right)=\frac{2\lg t(2\lg 6-3\lg 4)}{\lg 4\cdot\lg 6}=\frac{2\lg t\left(\lg 6^2-\lg 4^3\right)}{\lg 4\cdot\lg 6}$，

而$\lg t>0$，$\lg 4>0$，$\lg 6>0$，$\lg 6^2<\lg 4^3$，$\therefore 4y<6z$.

故有$3x<4y<6z$.

【点睛】本题考查指数式与对数式的互化、对数运算，考查转化与化归思想，考查逻辑推理能力、运算求解能力.