2022年10月25日高中数学作业

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

一、单选题

1．已知$a=\log_2 0.2,b=2^{0.2},c=0.2^{0.3}$，则

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

2．下列函数中是增函数的为（　）

A．$f\left(x\right)=-x$　　B．$f\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　　C．$f\left(x\right)=x^2$　　D．$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$

3．已知$f\left(x\right)=ax^2+bx$是定义在$\left[a-1,2a\right]$上的偶函数，那么$y=f\left(a^n+b\right)$的最大值是（　）

A．1　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\sqrt[3]{3}$　　D．$\dfrac{4}{27}$

二、填空题

4．函数$f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-a}+\dfrac{1}{2}\right)$定义域为（-∞，1）∪（1，+∞），则满足不等式$ax\geq f$（$a$）的实数$x$的集合为______．

5．写出一个同时具有下列性质①②③的函数$f(x)=$________．

①定义域为R；②值域为$(-\infty,1)$；③对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1\neq x_2$，均有$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$．

三、解答题

6．已知函数$f(x)=-\dfrac{2^x}{2^x+1}$．

（1）用定义证明函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数;

（2）若$x\in[1,2]$，求函数$f(x)$的值域;

参考答案：

1．B

【分析】运用中间量0比较a，c，运用中间量1比较b，c

【详解】$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0,\ b=2^{0.2}>2^0=1,\ 0<0.2^{0.3}<0.2^0=1,$则$0<c<1, a<c<b$．故选B．

【点睛】本题考查指数和对数大小的比较，渗透了直观想象和数学运算素养．采取中间变量法，利用转化与化归思想解题．

2．D

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于A，$f\left(x\right)=-x$为R上的减函数，不合题意，舍.

对于B，$f\left(x\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$为$R$上的减函数，不合题意，舍.

对于C，$f\left(x\right)=x^2$在$\left(-\infty,0\right)$为减函数，不合题意，舍.

对于D，$f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$为$R$上的增函数，符合题意，

故选：D.

3．D

【分析】根据题意，由函数奇偶性的定义分析a、b的值，即可得$y=f(a^n+b)$的解析式，由复合函数单调性的判断方法分析$y=f(a^n+b)$的单调性，据此分析可得答案.

【详解】解：根据题意，$f\left(x\right)=ax^2+bx$是定义在$[a-1，2a]$上的偶函数，则有

$(a-1)+2a=3a-1=0$，则$a=\frac{1}{3}$，

同时$f(-x)=f(x)$，即$ax^2+bx=a(-x)^2+b(-x)$，则有$bx=0$，必有$b=0$，

则$f(x)=\frac{1}{3}x^2$，其定义域为$[-\frac{2}{3}，\frac{2}{3}]$，

则$y=f(a^n+b)=f[(\frac{1}{3})^n]$，设$t=(\frac{1}{3})^n$，若$-\frac{2}{3}\leqslant(\frac{1}{3})^n\leqslant\frac{2}{3}$，则有$n\geqslant-\log_3\frac{2}{3}>0$，

在区间$[-\log_3\frac{2}{3}，+\infty)$上，$t>0$且为减函数，

$f(x)=\frac{1}{3}x^2$在区间$(0，\frac{2}{3}]$上为增函数，

则$y=f[(\frac{1}{3})^n]$在$[-\log_3\frac{2}{3}，+\infty)$上为减函数，其最大值为$f(\frac{2}{3})=\frac{4}{27}$，

故选：D.

4．$\{x|x\geq 1\}$

【分析】由题意可得 $a=2$，$f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-2}+\frac{1}{2}\right)$，$f(a)=f(2)=2$，由 $ax\geq f(a)$，结合指数函数单调性可求 x

【详解】解：由函数 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-a}+\frac{1}{2}\right)$ 定义域为（-∞，1）∪（1，+∞），可知 $a=2$

$\therefore f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-2}+\frac{1}{2}\right)$，$f(a)=f(2)=2$

由 $ax\geq f(a)$ 可得，$2x\geq 2$

$\therefore x\geq 1$

故答案为：$\{x|x\geq 1\}$

5．$f(x)=1-\frac{1}{2^x}$（答案不唯一）

【分析】直接按要求写出一个函数即可.

【详解】$f(x)=1-\frac{1}{2^x}$，定义域为 R；$\frac{1}{2^x}>0$，$f(x)=1-\frac{1}{2^x}<1$，值域为 $(-\infty,1)$；

是增函数，满足对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，均有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

故答案为：$f(x)=1-\frac{1}{2^x}$（答案不唯一）.

6.（1）证明见解析；（2）$[-\frac{4}{5},-\frac{2}{3}]$.

【分析】(1）取任意 $x_1>x_2$，根据函数解析式判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号即可证明结论.

（2）令 $t=2^x=[2,4]$，可得 $g(t)=\frac{1}{t+1}-1$，由其单调性即可求 $f(x)$ 的值域.

【详解】(1）取任意 $x_1>x_2$，则有

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_2}}{2^{x_2}+1}-\frac{2^{x_1}}{2^{x_1}+1}=\frac{2^{x_1+x_2}+2^{x_2}-2^{x_1+x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，

又 $2^{x_2}-2^{x_1}<0,(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数.

（2）$x\in[1,2]$，则 $t=2^x=[2,4]$，

$\therefore g(t)=-\dfrac{t}{t+1}=\dfrac{1}{t+1}-1$，易知 $g(t)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，

又 $g(2)=-\dfrac{2}{3}$，$g(4)=-\dfrac{4}{5}$，故 $g(t)\in[-\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{3}]$，即 $f(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{3}]$.