配凑专题

范围：2~3 章节；命题人：陆

一、单选题（本大题共 11 小题，共 55.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 若$x>1$，当$x+\frac{1}{x-1}$取最小值时，x的值为(　)

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. $\sqrt{2}$

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题主要考查配凑法来解决基本不等式求的最值问题，属于简单题.

首先根据题意得到$x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1$，再利用基本不等式中当且仅当$a=b$时等号成立的条件，即可得到答案.

【解答】

解：因为$x>1$，所以$x-1>0$

所以$x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$.

当且仅当$x-1=\frac{1}{x-1}$时，

即$x=2$或$x=0$(舍去)时取等号.

故选：B

2. 若$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+x}$，则$f(x)$等于　(　)

A. $\frac{1}{1+x}(x\neq -1)$　　　B. $\frac{1+x}{x}(x\neq 0)$

C. $\frac{x}{1+x}(x\neq 0\text{ 且 }x\neq -1)$　　　D. $1+x(x\neq -1)$

【答案】

C

【解析】

【分析】

本题考查利用配凑法求函数的解析式，属于基础题.

利用配凑法得$f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，再整体换元可求函数的解析式.

【解答】

解：$\because f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1+x}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，

$\therefore f(t)=\frac{t}{1+t}(t\neq 0\ 且 t\neq -1)$，

$\therefore f(x)=\frac{x}{1+x}(x\neq 0\ 且 x\neq -1)$.

故选 C.

3. 若$f(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x^2}$，则有(　)

A. $f(x)=x^2+1$　　B. $f(x)=x^2+x$

C. $f(x)=x^2+x(x\neq 0)$　　D. $f(x)=x^2+1(x\neq 0)$

【答案】

C

【解析】

【分析】

本题考查函数解析式的求法，考查逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

把$\frac{1}{x}$当作整体，配凑即可得解.

【解答】

解：$f(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x^2}=\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2$，且$x\neq 0$，

所以$f(x)=x+x^2(x\neq 0)$.

故选：C.

4. 若对于任意$x>1$，$\frac{x^2+3}{x-1}\geq a$恒成立，则a的最大值是(　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查了利用基本不等式解决恒成立问题，属基础题．

利用配凑法求最值即可得解．

【解答】

解：$x > 1$时，

$$\frac{x^2+3}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)+4}{x-1}$$
$$=x+1+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}+2$$

$\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+2=4+2=6$，

当且仅当$x-1=\frac{4}{x-1}$，即$x=3$时取等，

故$a\leq 6$，即a的最大值为6，

故选B．

5. 已知实数$x>0$，$y>0$，$x+xy=32$，则$x+2y$的最小值为(　)

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是对基本不等式的应用条件的配凑．

由已知可得，$x(y+1)=32$，然后结合基本不等式求最值中积定和最小可求$x+2y$的最小值．

【解答】

解：由已知可得，$x(y+1)=32(x>0,y>0)$，

$\therefore x+2y=x+2(y+1)-2\geq 2\sqrt{2x(y+1)}-2=14$，

当且仅当$x=2(y+1)=8$，即$x=8$，$y=3$时取到最小值．

故选：B．

6. 已知$a>0$，$b>0$，且$2a+b=ab-1$，则$a+2b$的最小值为 (　)

A. $5+2\sqrt{6}$　　B. $8\sqrt{2}$　　C. $4+2\sqrt{6}$　　D. 9

【答案】

A

【解析】

【分析】

本题考查了利用基本不等式求最值问题的应用，属于中档题.

本题利用方程的观点消元即可，用b表示$a+2b$，通过配凑然后利用基本不等式即可求得其取值范围。

【解答】

解：由$2a+b=ab-1$得$a(b-2)=b+1$，

若$b=2$，则$a(b-2)=b+1$不成立，

故$b\neq 2$，

$\therefore a=\frac{b+1}{b-2}=1+\frac{3}{b-2}>0$，

解得$b>2$或$b<-1$(舍去)，

$\therefore \frac{3}{b-2}>0$，

$\therefore a+2b=1+\frac{3}{b-2}+2(b-2)+4\geq 5+2\sqrt{\frac{3}{b-2}\cdot 2(b-2)}=5+2\sqrt{6}$.

当且仅当$\frac{3}{b-2}=2(b-2)$，

即$b=2+\frac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立，

此时$a=1+\sqrt{6}$，

$\therefore a+2b\geq 5+2\sqrt{6}$，

即$a+2b$的最小值为$5+2\sqrt{6}$.

故选：A.

7. 已知正数x、y满足$x+y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}$的最小值为．(　)

A. 2　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{14}{3}$　　D. 5

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查利用基本不等式求最值，对代数式进行合理配凑是解决本题的关键，属于中档题.

由$x+y=1$得$x+(1+y)=2$，再将代数式$x+(1+y)$与$\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}$相乘，利用基本不等式可求出$\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}$的最小值.

【解答】

解：$\because x+y=1$，$\therefore x+(1+y)=2$，

$$\therefore 2\times\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}\right)=[x+(1+y)](\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y})$$

$=\frac{4x}{1+y}+\frac{1+y}{x}+5\geq 2\sqrt{\frac{4x}{1+y}\cdot\frac{1+y}{x}}+5=9$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}\geq\frac{9}{2}$，当且仅当$\begin{cases}\frac{4x}{1+y}=\frac{1+y}{x}\\ x+y=1\end{cases}$，即当$\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$时，等号成立，

因此$\frac{1}{x}+\frac{4}{1+y}$的最小值为$\frac{9}{2}$.

故选：B.

8. 已知$x>-2$，则$x+\frac{4}{x+2}$的最小值为(　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】

A

【解析】

【分析】

本题考查了基本不等式在求最值中的应用，属于基础题.

利用配凑法，再结合基本不等式求最值即可.

【解答】

解：$\because x>-2$，$\therefore x+2>0$，

$\therefore x+\frac{4}{x+2}=x+2+\frac{4}{x+2}-2\geq 2\sqrt{4}-2=2$，

当且仅当$x+2=\frac{4}{x+2}$，即$x=0$时取等号，

$\therefore x+\frac{4}{x+2}$的最小值为$2$.

故选A.

9. 已知两正实数a，b满足$a+b=3$，则$\frac{2a+4}{a+1}+\frac{b+4}{b+2}$的最小值为( )

A. 7　　B. $\frac{13}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{11}{3}$

【答案】

B

【解析】

【分析】

先进行分离，然后结合乘1法配凑基本不等式应用条件，结合基本不等式即可求解.

本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是应用条件的配凑，属于中档题.

【解答】

解：两正实数a，b满足$a+b=3$，

则$\frac{2a+4}{a+1}+\frac{b+4}{b+2}=2+\frac{2}{a+1}+1+\frac{2}{b+2}=3+\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+2}=3+\frac{1}{6}(\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+2})(a+1+b+2)=3+\frac{1}{6}[4+\frac{2(b+2)}{a+1}+\frac{2(a+1)}{b+2}]\geq 3+\frac{1}{6}[4+2\sqrt{\frac{2(b+2)}{a+1}\cdot\frac{2(a+1)}{b+2}}]=\frac{13}{3}$,

当且仅当$\frac{2(b+2)}{a+1}=\frac{2(a+1)}{b+2}$且$a+b=3$即$b=1$，$a=2$时取等号，

此时$\frac{2a+4}{a+1}+\frac{b+4}{b+2}$取最小值$\frac{13}{3}$.

故选B.

10. 设正数m，n，$u=\frac{m+n}{2}$，$v^2=m^2+n^2+mn$，则$(\frac{u}{v})^2$的最大值是( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】

B

【解析】

【分析】

法一：先对已知式子进行变形，然后进行换元令$t=\frac{m}{n}$，代入后结合基本不等式即可求解；

法二：把u，v代入后，分子分母同时除以mn，然后结合基本不等式可求．

本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是应用条件的配凑．

【解答】

解：$(\frac{u}{v})^2=\frac{(\frac{m+n}{2})^2}{m^2+n^2+mn}=\frac{1}{4}\frac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2+mn}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{mn}{m^2+n^2+mn}$，

法一：令$t=\frac{m}{n}$，则原式$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{\frac{m}{n}}{(\frac{m}{n})^2+\frac{m}{n}+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{t}{t^2+t+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{t+\frac{1}{t}+1}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$；

当且仅当$t=\frac{1}{t}$，即$t=1$，$m=n$时取等号，此时取得最大值$\frac{1}{3}$；

法二：原式$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+1}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$，

当且仅当$\frac{m}{n}=\frac{n}{m}$，即$m=n$时取等号，此时取得最大值$\frac{1}{3}$．

故选：B．

11. 已知$a>1$，$b>1$且$a+b=3$，则的$\frac{a}{a-1}+\frac{4b}{b-1}$最小值为（　）

A. 14　　B. 15　　C. 13　　D. 12

【答案】

A

【解析】

【分析】

本题考查基本不等式求最值，考查配凑思想，为中档题．

【解答】

解：$\frac{a}{a-1}+\frac{4b}{b-1}=\frac{a-1+1}{a-1}+\frac{4b-4+4}{b-1}=5+\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}$，由$a+b=3$可得：$a-1+b-1=1$， 故$5+\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}\right)\times(a-1+b-1)+5=\left(5+\frac{b-1}{a-1}+\frac{4(a-1)}{b-1}\right)+5$．由基本不等式可得$\left(5+\frac{b-1}{a-1}+\frac{4(a-1)}{b-1}\right)+5\geq(5+4)+5=14$，故$\frac{a}{a-1}+\frac{4b}{b-1}\geq14$，故选$A$．

二、多选题（本大题共 1 小题，共 5.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

12. 下列命题中，正确的有(　)

A. 函数$y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$与函数$y=\sqrt{x^2-1}$表示同一函数

B. 已知函数$f(2x+1)=4x-6$，若$f(a)=10$，则$a=9$

C. 若函数$f(\sqrt{x}-1)=x-3\sqrt{x}$，则$f(x)=x^2-x-2(x\geq-1)$

D. 若函数$f(x)$的定义域为[0,2]，则函数$f(2x)$的定义域为[0,4]

【答案】

BC

【解析】

【分析】

本题考查同一函数的概念，函数求值，函数解析式以及抽象函数定义域，属于基础题.

分别求两个函数的定义域即可判断A; 由函数解析式可得若$f(a)=10$, 则$\begin{cases}2x+1=a\\4x-6=10\end{cases}$即可判断$B$;

利用配凑法可求解函数$f(x)$解析式，即可判断C；结合抽象函数定义域即可判断D.

【解答】

解：A:$y=f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$的定义域是$\{x|\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}\}=\{x|x\geqslant 1\}$,

$y=g(x)=\sqrt{x^2-1}$的定义域是$\{x|x^2-1\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 1$，或$x\leqslant -1\}$,

两函数的定义域不同，故不是同一函数，A 错误;

B:函数$f(2x+1)=4x-6$，若$f(a)=10$，则$\begin{cases}2x+1=a\\4x-6=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\a=9\end{cases}$，故 B 正确；

C:若函数$f\left(\sqrt{x}-1\right)=x-3\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}-1)-2$，则$f(x)=x^2-x-2(x\geq-1)$，故 C 正确；

D：若函数$f(x)$的定义域为[0,2]，则函数$f(2x)$中，$0\leqslant 2x\leqslant 2\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant 1$，即函数$f(2x)$的定义域为[0,1]，故 D 错误.

故选 BC.

三、填空题（本大题共 7 小题，共 35.0 分）

13. 利用配凑法求解析式：已知函数$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$，则$f(x)=$______.

【答案】

x^3-3x，$(x\leqslant -2$或$x\geqslant 2)$

【解析】

【分析】

本题考查函数解析式的求法，属于拔高题.

由于$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$,所以得到$f(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$,注意自变量的范围.

【解答】

解：$\because f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$

$$=(x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-3]$$

又由对勾函数单调性得：$x+\frac{1}{x}\leqslant -2$(当且仅当$x=-1$时取等号)或$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$(当且仅当$x=1$时取等号)，

$\therefore f(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$，$(x\leqslant -2$或$x\geqslant 2)$，

即函数$f(x)$的解析式是$f(x)=x^3-3x$，$(x\leqslant -2$或$x\geqslant 2)$.

故答案为：x^3-3x，$(x\leqslant -2$或$x\geqslant 2)$.

14. (1)函数$f(x)=\frac{1}{2-x}+\sqrt{9-x^2}$的定义域为________.

(2)计算：$8^{\frac{2}{3}}+(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}-(\sqrt{2}-1)^0=$______.

(3)已知$f(x-2)=x^2-4x$，那么$f(x)=$________.

(4)已知$y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，其图象关于原点对称，且$f(1-a)+f(1-2a)<0$，则a的取值范围是________.

【答案】

(1)$\{x|-3\leq x\leq 3且x\neq 2\}$;

(2)$\frac{51}{8}$;

(3)$f(x)=x^2-4$；

(4)$(0,\frac{2}{3})$

【解析】

(1)【分析】

本题考查了求函数的定义域问题，考查二次根式的性质，是一道基础题．根据二次根式的性质以及分母不为0求出函数的定义域即可．

【解答】

解：由题意得：$\begin{cases}2-x\neq 0\\9-x^2\geq 0\end{cases}$，

解得：$-3\leq x\leq 3$且$x\neq 2$，

故函数的定义域是$\{x|-3\leq x\leq 3$且$\neq 2\}$，

故答案为$\{x|-3\leq x\leq 3$且$\neq 2\}$．

(2)【分析】

本题考查了有理指数幂的化简求值，考查了对数的运算性质，是基础题．直接由分数指数幂的性质计算即可；

【解答】

解：$8^{\frac{2}{3}}+(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}}-(\sqrt{2}-1)^0=4+\frac{9}{8}-1=\frac{51}{8}$.

故答案为$\frac{51}{8}$.

(3)【分析】

本题考查学生的整体思想和换元意识，考查学生对复合函数的理解能力，做好这类问题的关键可以观察出表达式右端是自变量整体的何种表达式或者利用换元法转化解决，考查学生的运算整理能力．利用求函数解析式的观察配凑法求解该问题是解决本题的关键，只需将已知的复合函数表达式的右端凑成关于$x-2$的表达式，再用x替换$x-2$即得所求的结果．

【解答】

解：由于$f(x-2)=x^2-4x=(x^2-4x+4)-4=(x-2)^2-4$，

从而$f(x)=x^2-4$．

故选故答案为$f(x)=x^2-4$．

(4)【分析】

本题考查了函数的奇偶性与单调性，属于中档题．由于$y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上，其图象关于原点对称，可得函数$f(x)$是奇函数．再利用单调性即可得出．

【解答】

解：$\because y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上，其图象关于原点对称，

$\therefore$函数$f(x)$是奇函数．

$\because f(1-a)+f(1-2a)<0$，

$\therefore f(1-a)<-f(1-2a)=f(2a-1)$，

又$y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数，

$\therefore 1>1-a>2a-1>-1$，

解得$0<a<\frac{2}{3}$.

$\therefore a$的取值范围是$0<a<\frac{2}{3}$.

故答案是$(0,\frac{2}{3})$.

15. 若实数x、y满足$3x^2-2xy-y^2=1$，则$\frac{x+y}{5x^2+2xy+y^2}$的最大值为 ______.

【答案】

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】

由$3x^2-2xy-y^2=(3x+y)(x-y)=1$得$5x^2+2xy+y^2=\frac{1}{2}[(3x+y)^2+(x-y)^2]=1+\frac{1}{2}[3x+y-(x-y)]^2=1+2(x+y)^2$，然后代入后结合基本不等式可求．

本题主要考查了基本不等式在最值求解中的应用，解题的关键是应用条件的配凑．

【解答】

解：实数x、y满足$3x^2-2xy-y^2=(3x+y)(x-y)=1$，

$\therefore 5x^2+2xy+y^2=\frac{1}{2}[(3x+y)^2+(x-y)^2]=\frac{1}{2}[3x+y-(x-y)]^2+1=2(x+y)^2+1$，

若$\frac{x+y}{5x^2+2xy+y^2}$存在最大值，则$x+y>0$，

$\therefore \frac{x+y}{5x^2+2xy+y^2}=\frac{x+y}{2(x+y)^2+1}=\frac{1}{2(x+y)+\frac{1}{x+y}}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当$2(x+y)=\frac{1}{x+y}$时取等号，

即当$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，

此时$\frac{x+y}{5x^2+2xy+y^2}$的最大值$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. 已知$a>0$，$b>0$，且$ab=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+2b}$的最小值为______.

【答案】

4

【解析】

【分析】

本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是应用条件的配凑.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+2b}=\frac{a+2b}{2ab}+\frac{8}{a+2b}=\frac{a+2b}{2}+\frac{8}{a+2b}$，然后结合基本不等式即可求解.

【解答】

解：因为$a>0$，$b>0$，且$ab=1$，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+2b}=\frac{a+2b}{2ab}+\frac{8}{a+2b}=\frac{a+2b}{2}+\frac{8}{a+2b}\ge 2\sqrt{\frac{a+2b}{2}\cdot\frac{8}{a+2b}}=4$，

当且仅当$\frac{a+2b}{2}=\frac{8}{a+2b}$即$a+2b=4$且$ab=1$时取等号.

故答案为：4

17. 已知$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则$f(x)=$______.

【答案】

x^2+2

【解析】

【分析】

由$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$即可得解．

本题考查了函数解析式的求解及常用方法，本题采用了配凑法．根据已知条件灵活选择方法是解决该类题目的关键．

【解答】

解：$\because f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2$，

设$x-\frac{1}{x}=t$，则$f(t)=t^2+2$，

$\therefore f(x)=x^2+2$．

故答案为x^2+2．

18. 已知$f(x+\frac{2}{x})=x^2+\frac{4}{x^2}$，则$f(3)=$______

【答案】

5

【解析】

【分析】

本题考查函数值的求法．

先利用配凑法对$f(x+\frac{2}{x})=x^2+\frac{4}{x^2}$进行变形，从而可求出$f(3)$的值．

【解答】

解：因为$f(x+\frac{2}{x})=x^2+\frac{4}{x^2}=(x+\frac{2}{x})^2-4$，

所以$f(3)=3^2-4=5$，

故答案为：5

19. (1)已知$a>3$，则$\frac{4}{a-3}+a$的最小值是________，此时$a=$________．

(2)已知p：$|x-a|<4$，q：$-x^2+5x-6>0$，且q是p的充分而不必要条件，则a的取值范围为_______．

(3)已知集合$A=\{x|-1\le x\le 1\}$，$B=\{x|-1\le x\le a\}$，且$(A\cup B)\subseteq(A\cap B)$，则实数$a=$_____．

(4)对于实数a、b、c，有下列命题①若$a > b$，则$ac < bc$；②若$ac^2 > bc^2$，则$a > b$；③若$a < b < 0$，则$a^2 > ab > b^2$；④若$c > a > b > 0$，则$\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$；⑤若$a > b$，$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$，则$a > 0$，$b < 0$.其中正确的是______.

【答案】

(1)7，5；

(2)$[-1,6]$；

(3)1；

(4)②，③，④，⑤.

【解析】

(1)【分析】

本题考查基本不等式的性质以及应用，注意配凑基本不等式的形式.

根据题意，分析可得$y = \frac{4}{a-3} + a = \frac{4}{a-3} + a - 3 + 3$，由基本不等式的性质分析可得答案.

【解答】

解：根据题意，$y = \frac{4}{a-3} + a = \frac{4}{a-3} + a - 3 + 3$，

又由$a > 3$，则$a - 3 > 0$，

则$y = \frac{4}{a-3} + a = \frac{4}{a-3} + a - 3 + 3 \geq 2\sqrt{4} + 3 = 7$；

当且仅当$a - 3 = 2$即$a = 5$时等号成立，

则$y = \frac{4}{a-3} + a$的最小值为7.

故答案为7，5.

(2)【分析】

本题考查了不等式的解法、充要条件的判定，考查了推理能力与计算能力，属于中档题，分别解出p，q的x的范围，利用q是p的充分不必要条件，即可得出.

【解答】

解：p：$|x - a| < 4$，解得$a - 4 < x < a + 4$，

q：$-x^2 + 5x - 6 > 0$，解得$2 < x < 3$.

因为q是p的充分而不必要条件，

$\therefore \begin{cases} a-4 \le 2 \\ 3 \le a+4 \end{cases}$，解得$-1 \le a \le 6$，等号不同时成立.

所以a的取值范围为$[-1,6]$，

故答案为$[-1,6]$.

(3)【分析】

本题考查集合的交集和并集运算，属于基础题.

根据$(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$，可得$(A \cup B) = (A \cap B)$，进而得到$A = B$即可求解实数$a$的值.

【解答】

解：因为集合$A = \{x|-1 \le x \le 1\}, B = \{x|-1 \le x \le a\}$，且$(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$，

所以$(A \cup B) = (A \cap B)$，

所以$A = B$，

所以$a = 1$，

故答案为1.

(4)【分析】

本题考查的知识点是不等关系与不等式，其中熟练掌握不等式的基本性质，是解答本题的关键，

本题①中，易认为$c < 0$，而错认为是真命题，而得到答案②③④⑤.

根据不等式的性质2和性质3，我们分别判断题目中的五个命题的真假性，即可得到答案.

【解答】

解：当$c = 0$时，若$a > b$，则$ac = bc$，故①为假命题；

若$ac^2 > bc^2$，则$c \ne 0, c^2 \ge 0$故$a > b$故②为真命题；

若$a < b < 0$，则$a^2 > ab$且$ab > b^2$，即$a^2 > ab > b^2$，故③为真命题；

若$c > a > b > 0$，则$\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$则$\frac{c-a}{a} < \frac{c-b}{b}$，则$\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$，故④为真命题；

若$a > b$，$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$，即$\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$，故$a \cdot b < 0$，则$a > 0, b < 0$，故⑤为真命题；

故答案为②③④⑤.

四、解答题（本大题共 9 小题，共 108.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

20. (本小题12.0分)

设函数$f(x)$满足$f(x+1)=\frac{x^2+2x+a+1}{x+1}(a>0)$.

(1)求函数$f(x)$的解析式;

(2)当$a=1$时，记函数$g(x)=\begin{cases}f(x),x>0\\f(-x),x<0\end{cases}$，求函数$g(x)$在区间$[-2,-\frac{1}{3}]$上的值域.

【答案】

解：(1)法一：设$x+1=t(t\neq 0)$，则$x=t-1$，

$\therefore f(t)=\frac{(t-1)^2+2(t-1)+a+1}{t}=\frac{t^2+a}{t}$,

$\therefore f(x)=\frac{x^2+a}{x}$，$(x\neq 0)$;

法二：$\because f(x+1)=\frac{(x+1)^2+a}{x+1}$,

$\therefore f(x)=\frac{x^2+a}{x}$，$(x\neq 0)$;

(2)可得$g(-x)=\begin{cases}f(-x),-x>0\\f(x),-x<0\end{cases}=\begin{cases}f(-x),x<0\\f(x),x>0\end{cases}$,

$\therefore g(x)$为偶函数,

$\therefore y=g(x)$的图像关于y轴对称.

又当$a=1$时，当$x\in[\frac{1}{3},2]$时，$g(x)=x+\frac{1}{x}$,

设$\frac{1}{3}\leq x_1<x_2\leq 2$,

则$g(x_1)-g(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$$=(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\cdot\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)$$

$=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-1)$.

当$\frac{1}{3}\leq x_1<x_2<1$，$x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2-1<0$,

$\therefore \frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-1)>0$,

$\therefore g(x_1)-g(x_2)>0\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$,

$\therefore g(x)$在$[\frac{1}{3},1]$单调递减,

同理可得$g(x)$在$[1,2]$单调递增,

$\therefore g(x)_{min}=g(1)=2$,

又$g(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}<g(\frac{1}{3})=\frac{10}{3}$,

$g(x)_{max} = g(\frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$，

则当$a = 1$时，函数$g(x)$在$x \in [\frac{1}{3}, 2]$上的值域为$[2, \frac{10}{3}]$，

$\therefore$当$a = 1$时，函数$g(x)$在区间$[-2, -\frac{1}{3}]$上的值域为$[2, \frac{10}{3}]$.

【解析】本题考查了求具体函数的解析式，用定义法证明函数的奇偶性和单调性，考查了分析问题和解决问题能力，属中档题.

(1)根据题意，利用换元法或者利用配凑法求解；

(2)根据题意判断出函数$g(x)$的奇偶性，再利用定义法判断函数$g(x)$在区间$[\frac{1}{3}, 2]$的单调性，求出最值，即可求出函数$g(x)$在区间$[-2, -\frac{1}{3}]$上的值域.

21. (本小题12.0分)

设$a > b > c$，且$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{m}{a-c}$恒成立，求$m$的取值范围.

【答案】

解：由$a > b > c$，知$a - b > 0$，$b - c > 0$，$a - c > 0$.

因此，原不等式等价于$\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} \geq m$.

要使原不等式恒成立，只需$\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c}$的最小值不小于$m$即可.

因为$\frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} = \frac{(a-b)+(b-c)}{a-b} + \frac{(a-b)+(b-c)}{b-c}$

$= 2 + \frac{b-c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b-c}{a-b} \times \frac{a-b}{b-c}} = 4$，

当且仅当$\frac{b-c}{a-b} = \frac{a-b}{b-c}$，即$2b = a + c$时，等号成立.

所以$m \leqslant 4$.

【解析】本题考查利用基本不等式解决恒成立问题，属中档题.

分离参数m，再进行配凑，利用基本不等式求最值即可得解.

22. (本小题12.0分)

已知$x > 0$，$y > 0$，且$2x^2 + y^2 = 3$.

(1)求xy的最大值；

(2)求$x\sqrt{1+y^2}$的最大值．

【答案】

解：(1) $\because 2x^2+y^2=3\geq 2\sqrt{2}xy$，

$\therefore xy\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当$2x^2=y^2$时，即$x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=\frac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立．

$\therefore xy$的最大值是$\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

(2)法一：$\because x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{\frac{2x^2(1+y^2)}{2}}\leq\frac{2x^2+1+y^2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

当且仅当$2x^2=1+y^2$即$x=1$，$y=1$时，等号成立．

$\therefore x\sqrt{1+y^2}$的最大值是$\sqrt{2}$，

法二：$x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{x^2(4-2x^2)}=\sqrt{\frac{2x^2(4-2x^2)}{2}}\leq\sqrt{2}$.

当且仅当$x=y=1$时等号成立．

【解析】本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是应用条件的配凑，属于中档题．

(1)由已知结合基本不等式可求xy的范围，

(2)法一：由$x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{\frac{2x^2(1+y^2)}{2}}\leq\frac{2x^2+1+y^2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，可求解；

法二：$x\sqrt{1+y^2}=\sqrt{x^2(1+y^2)}=\sqrt{x^2(4-2x^2)}\leq\sqrt{2}$.

23. (本小题12.0分)

求下列函数的解析式：

(1)已知$f(\sqrt{x}+2)=x+4\sqrt{x}$，求函数$f(x)$的解析式；

(2)已知函数$y=f(x)$为二次函数，$f(0)=4$，且关于x的不等式$f(x)-2<0$解集为$\{x|1<x<2\}$，求函数$f(x)$的解析式．

【答案】

解：(1)换元法：令$t=\sqrt{x}+2\geq 2$，则$x=(t-2)^2$，

$f(t)=t^2-4(t\geq 2)$，$\therefore f(x)=x^2-4(x\geq 2)$；

凑配法：$f\left(\sqrt{x}+2\right)=x+4\sqrt{x}=\left(\sqrt{x}+2\right)^2-4$，

$$\because \sqrt{x}+2 \geqslant 2, \therefore f(x)=x^2-4(x \geqslant 2);$$

(2)设函数$f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$.

由题意$f(0)=c=4$，

$f(x)-2<0$，即$ax^2+bx+2<0$，

$\therefore 1$和2是方程$ax^2+bx+2=0$的两个根，

$\therefore 1+2=-\frac{b}{a}$，$1\times 2=\frac{2}{a}$，$a=1$，$b=-3$，

$\therefore f(x)=x^2-3x+4$.

【解析】本题考查求具体函数的解析式，属于中档题.

(1)有两种解题思路，①换元法：令$t=\sqrt{x}+2$，再求解即可；②配凑法：配凑出关于$\sqrt{x}+2$的关系式即可求解.

(2)根据$f(x)$是二次函数，设出函数$f(x)$的函数解析式，即$f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$，再根据题目所给条件分别求出a，b，c的值即得函数解析式.

24. (本小题12.0分)

根据下列条件，求$f(x)$的解析式.

(1)已知$f(x)$满足$f(x+1)=x^2+4x+1$；

(2)已知$f(x)$是一次函数，且满足$3f(x+1)-f(x)=2x+9$；

(3)已知$f(x)$满足$2f(\frac{1}{x})+f(x)=x(x \neq 0)$.

【答案】

解：(1) $\because f(x+1)=x^2+4x+1=(x+1)^2+2(x+1)-2$，

$\therefore f(x)=x^2+2x-2$；

(2)由题意可设$f(x)=kx+b(k \neq 0)$，

$\because 3f(x+1)-f(x)=2x+9$，

$\therefore 3(kx+k+b)-(kx+b)=2x+9$，即$2kx+3k+2b=2x+9$；

$\therefore \begin{cases} 2k=2 \\ 3k+2b=9 \end{cases}$，解得$\begin{cases} k=1 \\ b=3 \end{cases}$，

$\therefore f(x)=x+3$；

(3)由$2f(\frac{1}{x})+f(x)=x(x \neq 0)$①，

用$\frac{1}{x}$代替x得到，$2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}$②，

联立①②可得，$f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}(x\neq 0)$．

【解析】本题考查了几种求函数解析式的应用问题，解题时应根据函数的特征，选出适当的方法进行求解，属于基础题．

(1)利用配凑法即可求解；

(2)由题意可设$f(x)=kx+b(k\neq 0)$，然后结合待定系数法可求；

(3)联立方程组可求．

25. (本小题12.0分)

求下列函数的解析式：

(1)已知函数$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求$f(x)$；

(2)已知函数$f(x)$是二次函数，且$f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x+2$，求$f(x)$．

【答案】

解：(1)法一：换元法

设$t=\sqrt{x}+1$，则$x=(t-1)^2(t\geq 1)$．

$\therefore f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-2t+1+2t-2=t^2-1$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geq 1)$．

法二：配凑法

$\because x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}+1-1=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

$\therefore f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1(\sqrt{x}+1\geq 1)$，

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geq 1)$．

(2)设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$．

$\because f(0)=1$，$\therefore c=1$．

又$\because f(x+1)-f(x)=2x+2$，

$\therefore a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x+2$，

整理，得$2ax+(a+b)=2x+2$．

由恒等式的性质知，上式中对应项的系数相等，

$\therefore \begin{cases}2a=2,\\a+b=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^2+x+1$.

【解析】本题考查函数解析式的求法，属于中档题.

(1)利用换元法或者配凑法可以得到解析式；

(2)设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，结合已知条件利用待定系数法，建立关于a，b，c的方程组，解之即可.

26. (本小题12.0分)

已知$a>b>0$，求证：$\sqrt{a+1}-\sqrt{a+2}>\sqrt{b+1}-\sqrt{b+2}$.

【答案】

证明：$\because a>b$，

$\therefore 2a+b>a+2b$，

$\therefore ab+2a+b+2>ab+a+2b+2$，

即$(a+1)(b+2)>(a+2)(b+1)$，

$$\therefore \sqrt{(a+1)(b+2)}>\sqrt{(a+2)(b+1)}$$

$\therefore a+b+3+2\sqrt{(a+1)(b+2)}>a+b+3+2\sqrt{(a+2)(b+1)}$，

即$\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}\right)^2>\left(\sqrt{a+2}+\sqrt{b+1}\right)^2$

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}>\sqrt{a+2}+\sqrt{b+1}$，

$\therefore \sqrt{a+1}-\sqrt{a+2}>\sqrt{b+1}-\sqrt{b+2}$.

【解析】本题考查不等式的证明，考查综合法，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

根据已知条件，结合要证明的不等式，将$a>b>0$一步步配凑变形即可得到要证明的不等式.

27. (本小题12.0分)

(1)已知偶函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，求满足$f(2x-1)<f(\frac{1}{3})$的x的取值范围；

(2)若$-4<x<1$，求$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$的最大值.

【答案】

解：(1)因为偶函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，

所以由$f(2x-1)<f(\frac{1}{3})$得$f(|2x-1|)<f(\frac{1}{3})$，

$\therefore |2x-1|<\frac{1}{3}$，即$-\frac{1}{3}<2x-1<\frac{1}{3}$，

解得$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$，即解集为$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$；

(2)解：$\because -4<x<1$，

$\therefore 1-x>0$，

$$\therefore \frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)$$

$=-\frac{1}{2}\left[(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]\leqslant -\frac{1}{2}\times 2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}}=-1$，

当且仅当$1-x=\frac{1}{1-x}$，即$x=0$时取等号，

所以$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$最大值为-1．

【解析】(1)

本题考查不等式的求解，函数的奇偶性，函数的单调性，属于基础题．

由$f(x)$为偶函数可得$f(|2x-1|)<f(\frac{1}{3})$，又由$f(x)$区间$[0,+\infty)$上单调递增可得$|2x-1|<\frac{1}{3}$，解不等式即可；

(2)

本题考查了利用基本不等式求最值，属于基础题．

利用配凑法可得$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)$，又由条件可得$1-x>0$，故可转化为$-\frac{1}{2}\left[(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]$，利用基本不等式即可求出最大值．

28. (本小题12.0分)

已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$．

(1)若函数满足$f(x+1)-f(x)=2x+2$，且$f(0)=1$.求$f(x)$的解析式；

(2)若对任意$x\in R$，不等式$f(x)\geq 2ax+b$恒成立，求$\frac{b^2}{4(a^2+c^2)}$的最大值．

【答案】

解：(1) $\because f(x)=ax^2+bx+c$，且$f(0)=1$，$\therefore c=1$；

又$f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2ax+a+b=2x+2$，

$\therefore 2a=2$，$a+b=2$，解得$a=b=1$，

$\therefore f(x)=x^2+x+1$；

(2) $\because f(x)\geq 2ax+b \Leftrightarrow ax^2+(b-2a)x+c-b\geq 0$恒成立，

$\therefore \begin{cases} a>0 \\ \triangle=(b-2a)^2-4a(c-b)\leq 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} a>0 \\ b^2+4a^2-4ac\leq 0 \end{cases}$，

$\therefore 0\leq b^2\leq 4a(c-a)$，①

$\therefore \frac{b^2}{4(a^2+c^2)}\leq \frac{4a(c-a)}{4(a^2+c^2)}=\frac{\frac{c}{a}-1}{1+(\frac{c}{a})^2}$，令$t=\frac{c}{a}-1$，则由①知$t\geq 0$，

$\therefore \frac{b^2}{4(a^2+c^2)}\leq \frac{t}{1+(t+1)^2}=\frac{t}{t^2+2t+2}$，

令$g(t)=\frac{t}{t^2+2t+2}(t\geq 0)$，

当$t=0$时，$g(0)=0$；

当$t>0$时，$g(t)=\frac{1}{t+\frac{2}{t}+2}\leq \frac{1}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$(当且仅当$t=\frac{2}{t}$，即$t=\sqrt{2}$时取等号)，

$\therefore \frac{b^2}{4(a^2+c^2)}$的最大值为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

【解析】本题考查函数恒成立问题，考查二次函数解析式的确定及应用，考查转化与化归思想及运算求解能力，属于中档题．

(1)利用$f(x+1)-f(x)=2x+2$，且$f(0)=1$，求出a，b，c的值，可得$f(x)$的解析式；

(2)对任意$x\in R$，不等式$f(x)\geq 2ax+b$恒成立$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b^2+4a^2-4ac\leq 0 \end{cases}$，即$0\leq b^2\leq 4a(c-a)$，

于是$\frac{b^2}{4(a^2+c^2)}\leq \frac{\frac{c}{a}-1}{1+(\frac{c}{a})^2}$，令$t=\frac{c}{a}-1$，利用基本不等式可求其最大值．