阿行的2022年10月24日高中数学作业

未命名

一、单选题

1．函数 $y=\left(a^2-4a+4\right)a^x$ 是指数函数，则有（　　）

A．$a=1$ 或 $a=3$　　B．$a=1$　　C．$a=3$　　D．$a>0$ 且 $a\neq1$

2．设 $a=3^{0.7}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

3．定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，且当 $x\geq0$ 时，

$f\left(x\right)=\begin{cases}2-2^{x+1}\left(0\leq x\leq2\right)\\-x^2+2x-6\left(x>2\right)\end{cases}$，若对任意的 $x\in\left[m-1,m\right]$，不等式 $f\left(2-x\right)\leq f\left(x+m\right)$ 恒成立，

则实数 m 的最大值是（　　）

A．2　　B．$\frac{2}{3}$　　C．-1　　D．-2

二、填空题

4．方程 $2^x=-x^2+2$ 的实数解的个数为__________.

5．若不等式 $3^{ax^2-2ax}>\frac{1}{3}$ 对一切实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题

6．函数 $f\left(x\right)$ 对任意的实数 m，n，有 $f\left(m+n\right)=f\left(m\right)+f\left(n\right)$，当 $x>0$ 时，有 $f\left(x\right)>0$.

（1）求证：$f\left(0\right)=0$.

（2）求证：$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上为增函数.

（3）若 $f\left(1\right)=1$，解不等式 $f\left(4^x-2^x\right)<2$.

参考答案：

1．C

【分析】根据已知条件列不等式，由此求得正确选项.

【详解】由已知得$\begin{cases} a^2-4a+4=1 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$，即$\begin{cases} a^2-4a+3=0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$，解得$a=3$.

故选：C

2．D

【分析】利用指数函数与对数函数的性质，即可得出a,b,c的大小关系.

【详解】因为$a=3^{0.7}>1$，

$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}=3^{0.8}>3^{0.7}=a$，

$c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，

所以$c<1<a<b$.

故选：D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法：

（1）利用指数函数的单调性：$y=a^x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（2）利用对数函数的单调性：$y=\log_a x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（3）借助于中间值，例如：0 或 1 等.

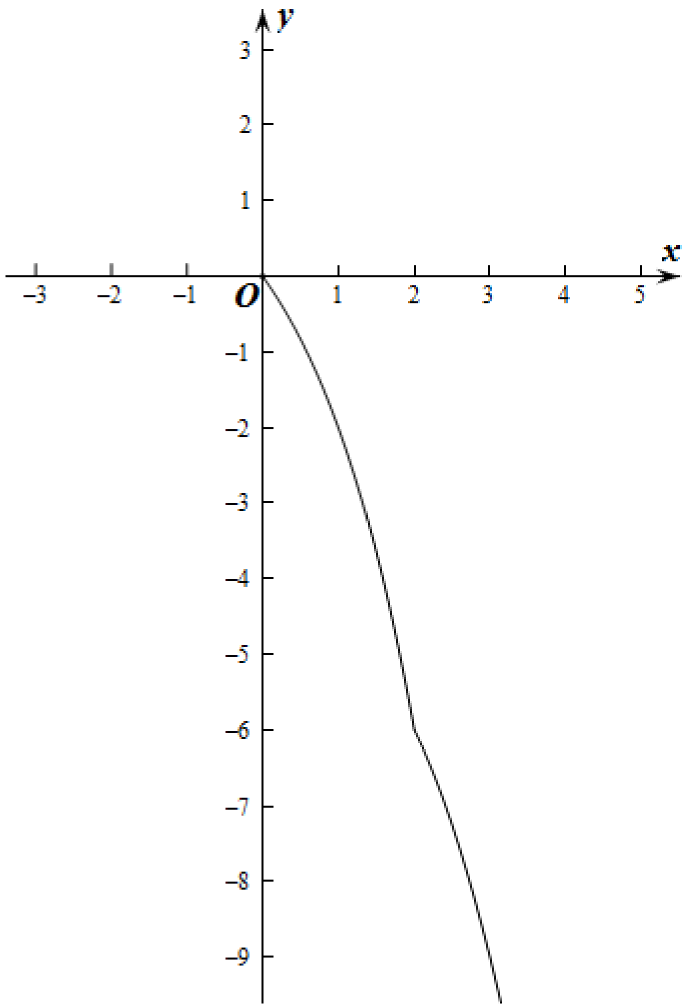
3．B

【分析】依题意可得$f(x)$为偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递减，根据奇偶性及单调性可得$|2-x|\geq|x+m|$对任意的$x\in[m-1,m]$恒成立，两边平方即可得到$(2m+4)x\leq 4-m^2$，再对$2m+4$分类讨论，分别求出参数m的取值范围，即可得解；

【详解】解：因为定义在R上的函数$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，当$x\geq 0$时，$f(x)=\begin{cases} 2-2^{x+1}(0\leq x\leq 2) \\ -x^2+2x-6(x>2) \end{cases}$，则当$0\leq x\leq 2$时$f(x)=2-2^{x+1}$函数在定义域上单调递减，

$f(2)=2-2^3=-6$，当 $x>2$ 时 $f(x)=-x^2+2x-6=-(x-1)^2-5$，函数在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

且当 $x=2$ 时 $f(2)=-6$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，当 $x\geq 0$ 时函数图象如下所示：



因为对任意的 $x\in[m-1,m]$，不等式 $f(2-x)\leq f(x+m)$ 恒成立，即 $f(|2-x|)\leq f(|x+m|)$ 恒成立，

即 $|2-x|\geq|x+m|$，平方可得 $(2m+4)x\leq 4-m^2$；

①当 $2m+4>0$，即 $m>-2$ 时，即 $x\leq\dfrac{4-m^2}{2m+4}=\dfrac{2-m}{2}$，对任意的 $x\in[m-1,m]$，所以

$m\leq\dfrac{2-m}{2}$，即 $m\leq\dfrac{2}{3}$，所以 $-2<m\leq\dfrac{2}{3}$；

②当 $2m+4=0$，即 $m=-2$ 时，显然符号题意；

③当 $2m+4<0$，即 $m<-2$ 时，即 $x\geq\dfrac{4-m^2}{2m+4}=\dfrac{2-m}{2}$，对任意的 $x\in[m-1,m]$，所以

$m-1\geq\dfrac{2-m}{2}$，即 $m\geq\dfrac{4}{3}$，与 $m<-2$ 矛盾；

综上所述，$-2\leq m\leq\dfrac{2}{3}$，即实数 m 的最大值为 $\dfrac{2}{3}$；

故选：B

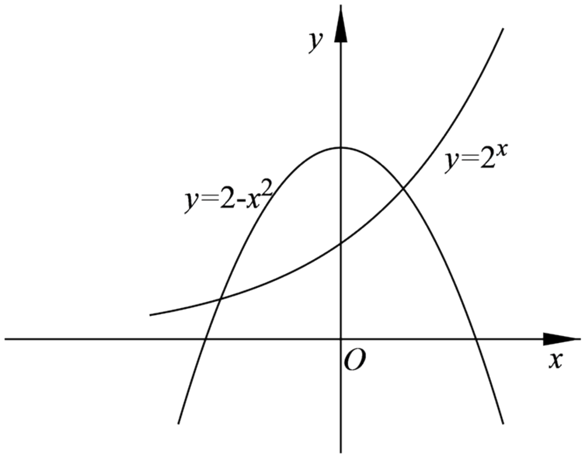
4．2

【解析】画出两个函数 $y=2^x$ 和 $y=-x^2+2$ 的图象，观察可得.

【详解】作出函数 $y=2^x$ 和 $y=-x^2+2$ 的图象，如图，它们有两个交点，

所以方程 $2^x=-x^2+2$ 的两个实数解.

故答案为：2.



【点睛】本题考查函数的零点个数问题，解题方法是转化为函数图象交点个数.

5．$[0,1)$

【分析】题目考察根据指数型函数的单调性解不等式的问题，将不等式左右两边变为底数相同的指数，根据单调性比较指数部分大小即可

【详解】原不等式可变形为 $3^{ax^2-2ax}>3^{-1}$，因为指数函数 $y=3^x$ 为增函数，

则有 $ax^2-2ax>-1$，

即 $ax^2-2ax+1>0$ 对一切实数 x 恒成立.

①当 $a=0$ 时，$1>0$，满足题意；

②当 $a\neq 0$ 时，若二次函数大于 0 恒成立，则需 $a>0$ 且 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$，

即 $a>0$ 且 $a^2-a<0$，解得 $0<a<1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $0\leq a<1$.

故答案为：$[0,1)$

6.（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）$\{x\mid x<1\}$

【分析】（1）令 $m=n=0$，代入等式，可求得 $f(0)=0$；

（2）令 $n=-m$，代入等式，结合 $f(0)=0$，可得到 $f(-m)=-f(m)$，从而可知 $y=f(x)$ 是奇函数，然后用定义法可证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

（3）原不等式可化为 $f\left(4^{x}-2^{x}\right)<f(2)$，结合函数 $f(x)$ 的单调性，可得出 $4^{x}-2^{x}<2$，解不等式即可.

【详解】（1）证明：令 $m=n=0$，则 $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，$\therefore f(0)=0$.

（2）证明：令 $n=-m$，则 $f(m-m)=f(m)+f(-m)$，

$\therefore f(0)=f(m)+f(-m)=0$，$\therefore f(-m)=-f(m)$，

$\therefore$对任意的 m，都有 $f(-m)=-f(m)$，即 $y=f(x)$ 是奇函数.

在 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，

$\therefore f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore$函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数.

（3）原不等式可化为 $f\left(4^{x}-2^{x}\right)<1+1=f(1)+f(1)=f(2)$，

由（2）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，可得 $4^{x}-2^{x}<2$，即 $\left(2^{x}-2\right)\left(2^{x}+1\right)<0$，

$\because 2^{x}+1>0$，$\therefore 2^{x}-2<0$，解得 $x<1$，

故原不等式的解集为 $\{x \mid x<1\}$.

【点睛】本题考查函数奇偶性、单调性，考查不等式的解法，考查学生的推理能力与计算求解能力，属于中档题.