# 2022年10月25日高中数学作业

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

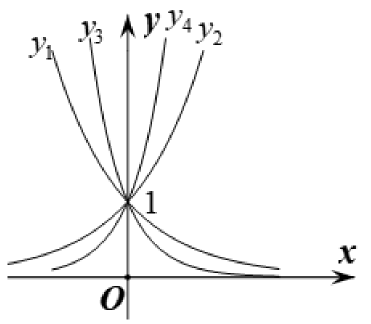
## 一、单选题

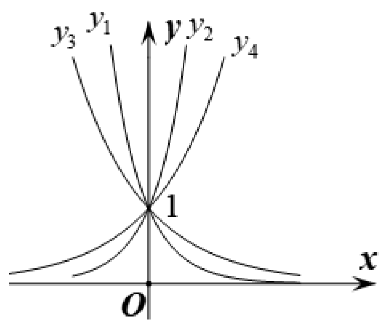
1．已知函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)$（　）

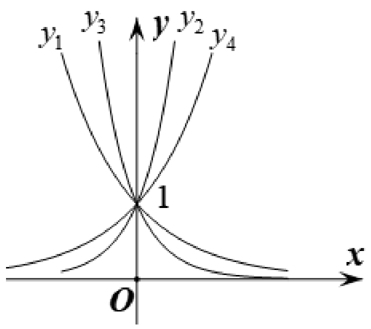
A．是偶函数，且在 **R** 是单调递增　　B．是奇函数，且在 **R** 是单调递增

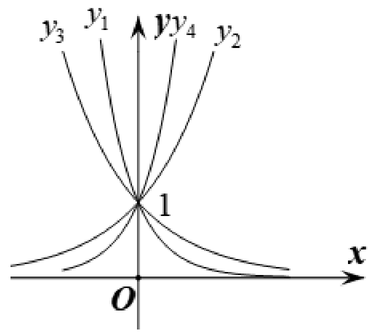
C．是偶函数，且在 **R** 是单调递减　　D．是奇函数，且在 **R** 是单调递减

2．已知 $y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，$y_2=3^x$，$y_3=10^{-x}$，$y_4=10^x$，则在同一平面直角坐标系内，它们的图象大致为（　）

A．


B．


C．


D．


3．设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则 $f(x)$（　）

A．是偶函数，且在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增　　B．是奇函数，且在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 单调递减

C．是偶函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递增　　D．是奇函数，且在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递减

## 二、填空题

4．方程 $2^x=-x^2+2$ 的实数解的个数为__________.

5．已知函数 $f\left(x\right)=2^{|x-a|}$（$a$ 为常数），若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上是增函数，则 $a$ 的取值范围是________.

## 三、解答题

6．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a\cdot g\left(x\right)+5^{x}}{a\cdot 25^{x}}$（$a$ 为常数，且 $a\neq 0$，$a\in \mathrm{R}$）．请在下面三个函数：①$g_{1}\left(x\right)=5x$；②$g_{2}\left(x\right)=5x^{2}$；③$g_{3}\left(x\right)=125^{x}$ 中，选择一个函数作为 $g\left(x\right)$，使得 $f\left(x\right)$ 具有奇偶性．

(1)请写出 $g\left(x\right)$ 表达式，并求 $a$ 的值；

(2)当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时，若对任意的 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，都有 $f\left(2x\right)\geq mf\left(x\right)$ 成立，求实数 $m$ 的取值范围．

**参考答案：**

1．B

【分析】根据奇函数的定义及指数函数的单调性判断可得；

【详解】解：$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$定义域为$\mathbf{R}$，且$f\left(-x\right)=3^{-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x-3^x=-f\left(x\right)$，

所以$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$为奇函数，

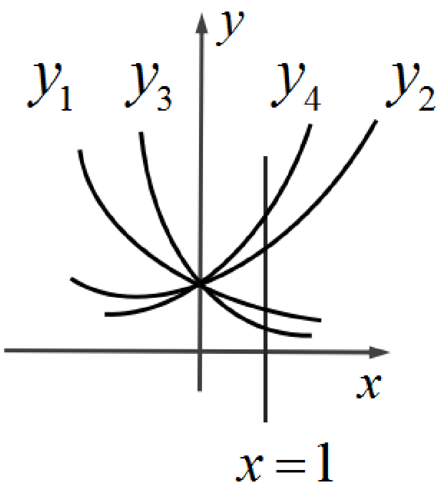
又$y=3^x$与$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$在定义域上单调递增，所以$f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$在$\mathbf{R}$上单调递增；

故选：B

2．A

【分析】根据指数函数的单调性及图像特征进行比较，即可判断.

【详解】$y_2=3^x$与$y_4=10^x$是增函数，$y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^x$与$y_3=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$是减函数，在第一象限内作直线$x=1$，




该直线与四条曲线交点的纵坐标的大小对应各底数的大小，易知：选 A.

故选：A

3．D

【分析】根据奇偶性的定义可判断出$f\left(x\right)$为奇函数，排除 AC；当$x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$时，利用函数单调性的性质可判断出$f\left(x\right)$单调递增，排除 B；当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$时，利用复合函数单调性可判断出$f\left(x\right)$单调递减，从而得到结果.

【详解】由 $f\left(x\right)=\ln\left|2x+1\right|-\ln\left|2x-1\right|$ 得 $f\left(x\right)$ 定义域为 $\left\{x\left|x\neq\pm\frac{1}{2}\right.\right\}$，关于坐标原点对称，

又 $f\left(-x\right)=\ln\left|1-2x\right|-\ln\left|-2x-1\right|=\ln\left|2x-1\right|-\ln\left|2x+1\right|=-f\left(x\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 为定义域上的奇函数，可排除 AC；

当 $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)=\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(1-2x\right)$，

$\because y=\ln\left(2x+1\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$y=\ln\left(1-2x\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，排除 B；

当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)=\ln\left(-2x-1\right)-\ln\left(1-2x\right)=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\ln\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)$，

$\because \mu=1+\frac{2}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$f\left(\mu\right)=\ln\mu$ 在定义域内单调递增，

根据复合函数单调性可知：$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，D 正确.

故选：D.

【点睛】本题考查函数奇偶性和单调性的判断;判断奇偶性的方法是在定义域关于原点对称的前提下，根据 $f\left(-x\right)$ 与 $f\left(x\right)$ 的关系得到结论；判断单调性的关键是能够根据自变量的范围化简函数，根据单调性的性质和复合函数"同增异减"性得到结论.

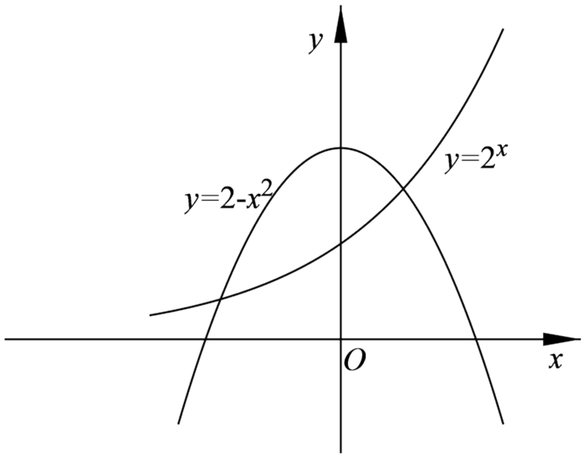
4．2

【解析】画出两个函数 $y=2^x$ 和 $y=-x^2+2$ 的图象，观察可得.

【详解】作出函数 $y=2^x$ 和 $y=-x^2+2$ 的图象，如图，它们有两个交点，

所以方程 $2^x=-x^2+2$ 的两个实数解.

故答案为：2.




【点睛】本题考查函数的零点个数问题，解题方法是转化为函数图象交点个数.

5．$\left(-\infty,1\right]$

【分析】首先根据题意得到$f\left(x\right)=2^{|x-a|}=\begin{cases}2^{x-a},x\geq a\\2^{a-x},x<a\end{cases}$，从而得到当$x⩾a$时，函数$f\left(x\right)$为增函数，再根据题意即可得到答案.

【详解】因为函数$f\left(x\right)=2^{|x-a|}=\begin{cases}2^{x-a},x\geq a\\2^{a-x},x<a\end{cases}$，

当$x⩾a$时，函数$f\left(x\right)$为增函数，

而已知函数$f\left(x\right)$在区间$\left[1,+\infty\right)$上是增函数，所以$a\leq 1$，即$a$的取值范围为$\left(-\infty,1\right]$.

故答案为：$\left(-\infty,1\right]$

6．(1)见解析

(2)$\left(-\infty,\dfrac{5\sqrt{5}+\sqrt{5}}{5}\right]$

【分析】（1）根据所选条件，结合奇函数和偶函数的定义可得出$a$的等式或表达式，可求得对应的实数$a$的值；

（2）由已知条件可得出$f\left(x\right)=5^x-5^{-x}$，由参变量分离法得出$m\leq 5^x+5^{-x}$，求出函数$y=5^x+5^{-x}$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最小值，由此可求得实数$m$的取值范围；

（1）

若选①：$g(x)=5x$，

则 $f(x)=\dfrac{5ax+5^x}{a\cdot 25^x}$，定义域为R，

若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=\dfrac{1}{a}\neq 0$，故函数不能是奇函数，

若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=\dfrac{-5ax+5^{-x}}{a\cdot 25^{-x}}=\dfrac{25^x\left(5^{-x}-5ax\right)}{a}=\dfrac{5^x-5ax\cdot 25^x}{a}$，

由 $f(-x)=f(x)$，可得 $\dfrac{5^x-5ax\cdot 25^x}{a}=\dfrac{5ax+5^x}{a\cdot 25^x}$，

化简可得 $a=\dfrac{125^x-5^x}{5x+5x\cdot 625^x}(x\neq 0)$，

则 $a$ 不为常数，即函数 $f(x)=\dfrac{5ax+5^x}{a\cdot 25^x}$ 不可能为偶函数，不合乎题意；

若选②，$g(x)=5x^2$，

则 $f(x)=\dfrac{a\cdot 5x^2+5^x}{a\cdot 25^x}$.

若函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=\dfrac{1}{a}\neq 0$，不合乎题意；

若函数 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=\dfrac{a5x^2+5^{-x}}{a\cdot 25^{-x}}=\dfrac{25^x\left(5ax^2+25^{-x}\right)}{a}=\dfrac{5^x+5ax^2\cdot 25^x}{a}$，

由 $f(-x)=f(x)$，可得 $\dfrac{5^x+5ax^2\cdot 25^x}{a}=\dfrac{a\cdot 5x^2+5^x}{a\cdot 25^x}$，

整理可得 $a=-\dfrac{125^x-5^x}{5x^2\left(625^x-1\right)}=-\dfrac{5^x\left(25^x-1\right)}{5x^2\left(25^{2x}-1\right)}=-\dfrac{5^x}{5x^2\left(1+25^x\right)}(x\neq 0)$，

则 $a$ 不为常数，不合乎题意.

选③，$g(x)=125^x$，

则 $f(x)=\dfrac{a\cdot 125^x+5^x}{a\cdot 25^x}=5^x+\dfrac{1}{a}\cdot 5^{-x}$，$f(-x)=5^{-x}+\dfrac{1}{a}\cdot 5^x$，

当 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=-f(-x)$，

即 $f(x)+f(-x)=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(5^x+5^{-x}\right)=0$，可得 $a=-1$；

当 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，

则 $f(x)-f(-x)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\left(5^x-5^{-x}\right)=0$，可得 $a=1$；

（2）

由（1）知，当$f(x)$为奇函数时，$a=-1$，$f\left(x\right)=5^{x}-5^{-x}$，

因为$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，

所以$5^{x}\in\left[\sqrt{5},25\right]$，

由于函数$y_1=5^{x}$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上为增函数，函数$y_2=5^{-x}$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$为减函数，

所以，函数$f\left(x\right)=5^{x}-5^{-x}$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上为增函数，

则$f\left(x\right)\in\left[\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}},25+\frac{1}{25}\right]$，

若对于任意的$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有$f\left(2x\right)\geq mf\left(x\right)$成立，

所以$m\leq\left\{\frac{f\left(2x\right)}{f\left(x\right)}\right\}_{\min}=\left\{\frac{5^{2x}-5^{-2x}}{5^{x}-5^{-x}}\right\}_{\min}=\left\{5^{x}+5^{-x}\right\}_{\min}$，

设$t=5^{x}\in\left[\sqrt{5},25\right]$，$\varphi\left(t\right)=t+\frac{1}{t}$，

任取$t_1$、$t_2\in\left[\sqrt{5},25\right]$，且$t_1<t_2$，即$\sqrt{5}\leq t_1<t_2\leq 25$，

则$\varphi\left(t_1\right)-\varphi\left(t_2\right)=\left(t_1+\frac{1}{t_1}\right)-\left(t_2+\frac{1}{t_2}\right)=\left(t_1-t_2\right)+\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)=\left(t_1-t_2\right)+\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}=\frac{\left(t_1-t_2\right)\left(t_1t_2-1\right)}{t_1t_2}$，

$\because\sqrt{5}\leq t_1<t_2\leq 25$，则$t_1-t_2<0$，$t_1t_2>5$，

可得$\varphi\left(t_1\right)-\varphi\left(t_2\right)<0$，即$\varphi\left(t_1\right)<\varphi\left(t_2\right)$，

所以，函数$\varphi\left(t\right)$在$\left[\sqrt{5},25\right]$上为增函数，

所以，$\varphi\left(t\right)_{\min}=\varphi\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$，即$m\leq\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{5}}{5}$.

所以$m$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{5}}{5}\right]$；