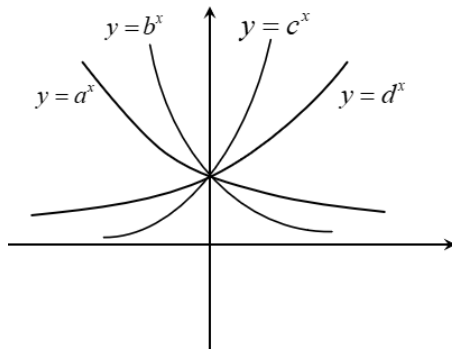


# 小满 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 已知函数  $y=a^x$ 、 $y=b^x$ 、 $y=c^x$ 、 $y=d^x$  的大致图象如下图所示，则下列不等式一定成立的是 ( )



- A.  $b+d > a+c$       B.  $b+d < a+c$       C.  $a+d > b+c$       D.  $a+d < b+c$

2. 下列式子的互化正确的是 ( )

- A.  $6\sqrt{y^2} = y^{\frac{1}{3}} (y < 0)$       B.  $x^{-\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{x} (x \neq 0)$   
C.  $x^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^5} (x > 0)$       D.  $-\sqrt{x} = (-x)^{\frac{1}{2}} (x > 0)$

3. 若  $0 < a < b < 1$ ,  $x=a^b$ ,  $y=b^a$ ,  $z=b^b$ , 则  $x$ ,  $y$ ,  $z$  的大小关系为 ( )

- A.  $x < z < y$       B.  $y < x < z$       C.  $y < z < x$       D.  $z < y < x$

## 二、填空题

4. 化简  $(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(1-a)^2} + \sqrt[3]{(1-a)^3} =$ \_\_\_\_\_.

5. 已知  $f(x)$  是奇函数, 且当  $x < 0$  时,  $f(x) = -e^{ax}$ . 若  $f(\ln 2) = 8$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 求下列函数的定义域、值域.

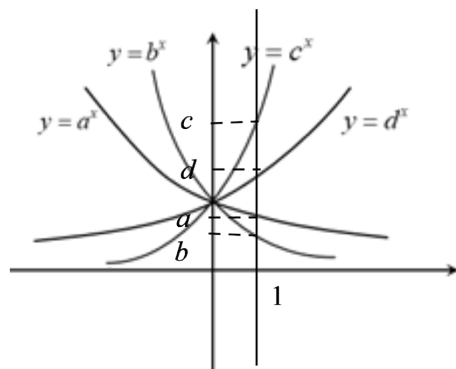
(1)  $y = \frac{3^x}{1+3^x}$ ;      (2)  $y = 4x - 2x + 1$ .



参考答案:

1. B

【分析】如图,作出直线  $x=1$ ,得到  $c > d > 1 > a > b$ , 即得解.



【详解】

如图,作出直线  $x=1$ ,得到  $c > d > 1 > a > b$ ,

所以  $b+d < a+c$ .

故选: B

2. C

【解析】根据根式与分数指数幂的互化可逐项分析.

【详解】根据分数指数幂的运算可知,

$$\sqrt[6]{y^2} = |y|^{\frac{1}{3}} = -y^{\frac{1}{3}} (y < 0), \quad x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} (x \neq 0), \quad x^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^5} (x > 0), \quad -\sqrt{x} = -(x)^{\frac{1}{2}} (x > 0),$$

故选: C

3. A

【分析】根据指数函数  $y=b^x$  以及幂函数  $y=x^b$  的单调性比较出  $x, y, z$  之间的大小关系.

【详解】因为  $y=b^x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $b^a > b^b$ , 即  $y > z$ ,

又因为  $y=x^b$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $a^b < b^b$ , 即  $x < z$ ,

所以  $x < z < y$ ,

故选: A.

【点睛】本题考查根据指数函数、幂函数的单调性比较数值大小, 难度一般. 注意幂函数

$y=x^\alpha$  当  $\alpha > 0$  时在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

4.  $a-1$

【分析】根据根式的性质即可求解.

【详解】由 $(\sqrt{a-1})^2$ 知 $a-1 \geq 0$ ,  $a \geq 1$ .

故原式 $=a-1+|1-a|+1-a=a-1$ .

故答案为:  $a-1$

5. -3

【分析】当 $x > 0$ 时 $-x < 0$ ,  $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$ 代入条件即可得解.

【详解】因为 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时 $-x < 0$ ,  $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$ .

又因为 $\ln 2 \in (0, 1)$ ,  $f(\ln 2) = 8$ ,

所以 $e^{-a \ln 2} = 8$ , 两边取以 $e$ 为底的对数得 $-a \ln 2 = 3 \ln 2$ , 所以 $-a = 3$ , 即 $a = -3$ .

【点睛】本题主要考查函数奇偶性, 对数的计算. 渗透了数学运算、直观想象素养. 使用转化思想得出答案.

6. (1) 定义域为 $R$ ; 值域为 $(0, 1)$ ; (2) 定义域为 $R$ ; 值域为 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ .

【分析】(1) 降次后根据 $3^x > 0$ , 即可求出函数的值域.

(2) 函数为指数函数与一元二次函数的复合函数, 根据复合函数的值域求法即可求出答案.

【详解】(1)  $\because$ 对一切 $x \in R$ ,  $3x \neq -1$ ;

$\therefore$ 函数的定义域为 $R$ ;

$$\because y = \frac{1+3^x-1}{1+3^x} = 1 - \frac{1}{1+3^x};$$

又 $\because 3x > 0$ ,  $1+3x > 1$ ;

$$\therefore 0 < \frac{1}{1+3^x} < 1, \therefore -1 < -\frac{1}{1+3^x} < 0;$$

$$\therefore 0 < 1 - \frac{1}{1+3^x} < 1, \therefore \text{值域为}(0, 1).$$

(2) 函数的定义域为 $R$ ;

$$y = (2x)^2 - 2x + 1 = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4};$$

$$\because 2x > 0, \therefore 2x = \frac{1}{2}, \text{即 } x = -1 \text{ 时, } y \text{ 取最小值 } \frac{3}{4};$$

同时 $y$ 可以取一切大于 $\frac{3}{4}$ 的实数;

$$\therefore \text{值域为}\left[\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

【点睛】本题考查函数的值域, 属于基础题. 复合函数的值域求法: 先求内层函数的值域,

再根据内层函数的取值范围找外层函数取值范围.

# 潇潇的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 已知  $m^{10} = 2$ , 则  $m =$  ( )

- A.  $\sqrt{2^{10}}$       B.  $\pm\sqrt{2^{10}}$       C.  $\sqrt[10]{2}$       D.  $\pm\sqrt[10]{2}$

2. 下列函数中是增函数的为 ( )

- A.  $f(x) = -x$       B.  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$       C.  $f(x) = x^2$       D.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. 偶函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  中心对称, 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = \frac{1}{3^{x-1}} - 1$ , 则

$f(2019) + f(2020) + f(2021) =$  ( )

- A. 0      B. 2      C. 4      D. 6

4. 函数  $y = (a^2 - 4a + 4)a^x$  是指数函数, 则有 ( )

- A.  $a = 1$  或  $a = 3$       B.  $a = 1$       C.  $a = 3$       D.  $a > 0$  且  $a \neq 1$

## 二、填空题

5. 已知  $10^m = 2, 10^n = 3$ , 则  $10^{\frac{3m-2n}{2}} =$  \_\_\_\_\_.

6. 计算:  $16^{\frac{3}{4}} - 8 \times \left(\frac{64}{49}\right)^{\frac{1}{2}} - 8 \times \left(\frac{8}{7}\right)^{-1} =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

7. 计算下列各式:

(1)  $\left(2\frac{3}{5}\right)^0 + 2^{-2} \times \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5}.$

(2)  $\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} + 0.1^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3\pi^0 + \frac{37}{48}.$

(3)  $(0.064)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{7}{8}\right)^0 + [(-2)^3]^{\frac{4}{3}} + 16^{-0.75} + |-0.01|^{\frac{1}{2}}.$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}.$

(1) 判断并证明函数  $f(x)$  的奇偶性;

(2) 判断并证明  $f(x)$  在其定义域上的单调性.

参考答案:

1. D

【分析】根据指数幂的运算以及根式的含义，直接可求得答案.

【详解】因为  $m^{10} = 2$ ，故  $m = \pm \sqrt[10]{2}$ ，

故选：D

2. D

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于 A， $f(x) = -x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 B， $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 C， $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  为减函数，不合题意，舍.

对于 D， $f(x) = \sqrt[3]{x}$  为  $R$  上的增函数，符合题意，

故选：D.

3. B

【分析】偶函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  对称，则  $f(x)$  是周期为 4 的函数，计算出  $f(0)$ 、 $f(1)$ ，

再利用周期可得  $f(2019) + f(2020) + f(2021)$  .

【详解】偶函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  对称，则  $f(-x) = f(x)$ ， $f(2-x) = -f(x) = -f(-x)$ ，

令  $-x = t$ ，则  $f(2+t) = -f(t)$ ，

故  $f(4+t) = -f(2+t) = f(t)$ ，

$f(x)$  是周期为 4 的函数，

$$f(0) = \frac{1}{3^{0-1}} - 1 = 2, \quad f(1) = \frac{1}{3^{1-1}} - 1 = 0,$$

又  $\because f(2020) = f(0) = 2$ ，

$f(2021) = f(1) = 0$ ，

$f(2019) = f(3) = f(-1) = f(1) = 0$ ，

$\therefore f(2019) + f(2020) + f(2021) = 2$  .



故选：B.

4. C

【分析】根据已知条件列不等式，由此求得正确选项.

【详解】由已知得  $\begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ ，解得  $a = 3$ .

故选：C

5.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】先求得  $10^{3m-2n}$ ，然后求得  $10^{\frac{3m-2n}{2}}$ .

【详解】依题意  $10^{3m-2n} = \frac{10^{3m}}{10^{2n}} = \frac{(10^m)^3}{(10^n)^2} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$ ,

所以  $10^{\frac{3m-2n}{2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

故答案为：  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. -6

【分析】结合指数幂的运算性质，计算即可.

【详解】由题意， $16^{\frac{3}{4}} - 8 \times \left(\frac{64}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 8 \times \left(\frac{8}{7}\right)^{-1} = (2^4)^{\frac{3}{4}} - 8 \times \left[\left(\frac{8}{7}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - 8 \times \frac{7}{8} =$

$2^3 - 8 \times \left(\frac{8}{7}\right)^{-1} - 7 = 8 - 8 \times \frac{7}{8} - 7 = 8 - 7 - 7 = -6$ .

故答案为：-6.

7. (1)  $\frac{16}{15}$ ; (2) 100; (3)  $\frac{143}{80}$ .

【分析】(1) 利用指数的运算性质即可求解.

(2) 利用指数的运算性质即可求解.

(3) 利用指数的运算性质即可求解.

【详解】(1) 原式  $= 1 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{16}{15}$ .

(2) 原式  $= \left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{0.1^2} + \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3 + \frac{37}{48}$

$$= \frac{5}{3} + 100 + \frac{9}{16} - 3 + \frac{37}{48} = 100.$$

$$(3) \text{ 原式} = 0.4^{-1} - 1 + (-2)^{-4} + 2^{-3} + 0.1$$

$$= \frac{10}{4} - 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{143}{80}.$$

【点睛】本题考查了指数的运算性质，需熟记指数的运算性质，属于基础题.

8. (1) 详见解答； (2) 详见解答.

【分析】(1) 求出  $f(-x)$  判断与  $f(x)$  的关系，即可得出结论；

(2) 将  $f(x)$  分离常数，任取  $x_1 < x_2$ ，用作差法比较  $f(x_1), f(x_2)$  大小，即可得出结论.

【详解】(1)  $f(x)$  的定义域为实数集  $R$ ，

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x),$$

所以  $f(x)$  是奇函数；

$$(2) f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}, \text{ 设 } x_1 < x_2,$$

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{2}{2^{x_1} + 1} + \frac{2}{2^{x_2} + 1} = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1) \cdot (2^{x_2} + 1)},$$

$$\because x_1 < x_2, 0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}, 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, f(x_1) < f(x_2),$$

所以  $f(x)$  在实数集  $R$  上增函数.

【点睛】本题考查函数奇偶性和单调性的证明，意在考查逻辑推理能力，属于基础题.

# 阿行的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 函数  $y = (a^2 - 4a + 4)a^x$  是指数函数, 则有 ( )

- A.  $a = 1$  或  $a = 3$       B.  $a = 1$       C.  $a = 3$       D.  $a > 0$  且  $a \neq 1$

2. 设  $a = 3^{0.7}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ,  $c = \log_{0.7} 0.8$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $b < c < a$       D.  $c < a < b$

3. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = f(x)$ , 且当  $x \geq 0$  时,

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2^{x+1} & (0 \leq x \leq 2) \\ -x^2 + 2x - 6 & (x > 2) \end{cases}, \text{ 若对任意的 } x \in [m-1, m], \text{ 不等式 } f(2-x) \leq f(x+m) \text{ 恒成立,}$$

则实数  $m$  的最大值是 ( )

- A. 2      B.  $\frac{2}{3}$       C. -1      D. -2

## 二、填空题

4. 方程  $2^x = -x^2 + 2$  的实数解的个数为\_\_\_\_\_.

5. 若不等式  $3^{ax^2-2ax} > \frac{1}{3}$  对一切实数  $x$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 函数  $f(x)$  对任意的实数  $m, n$ , 有  $f(m+n) = f(m) + f(n)$ , 当  $x > 0$  时, 有  $f(x) > 0$ .

(1) 求证:  $f(0) = 0$ .

(2) 求证:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数.

(3) 若  $f(1) = 1$ , 解不等式  $f(4^x - 2^x) < 2$ .



参考答案:

1. C

【分析】根据已知条件列不等式，由此求得正确选项.

【详解】由已知得  $\begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  , 即  $\begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  , 解得  $a = 3$  .

故选: C

2. D

【分析】利用指数函数与对数函数的性质，即可得出  $a, b, c$  的大小关系.

【详解】因为  $a = 3^{0.7} > 1$  ,

$$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a ,$$

$$c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1 ,$$

所以  $c < 1 < a < b$  .

故选: D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法:

- (1) 利用指数函数的单调性:  $y = a^x$  , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;
- (2) 利用对数函数的单调性:  $y = \log_a x$  , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;
- (3) 借助于中间值, 例如: 0 或 1 等.

3. B

【分析】依题意可得  $f(x)$  为偶函数，且在  $[0, +\infty)$  上单调递减，根据奇偶性及单调性可得

$|2-x| \geq |x+m|$  对任意的  $x \in [m-1, m]$  恒成立，两边平方即可得到  $(2m+4)x \leq 4-m^2$ ，再对

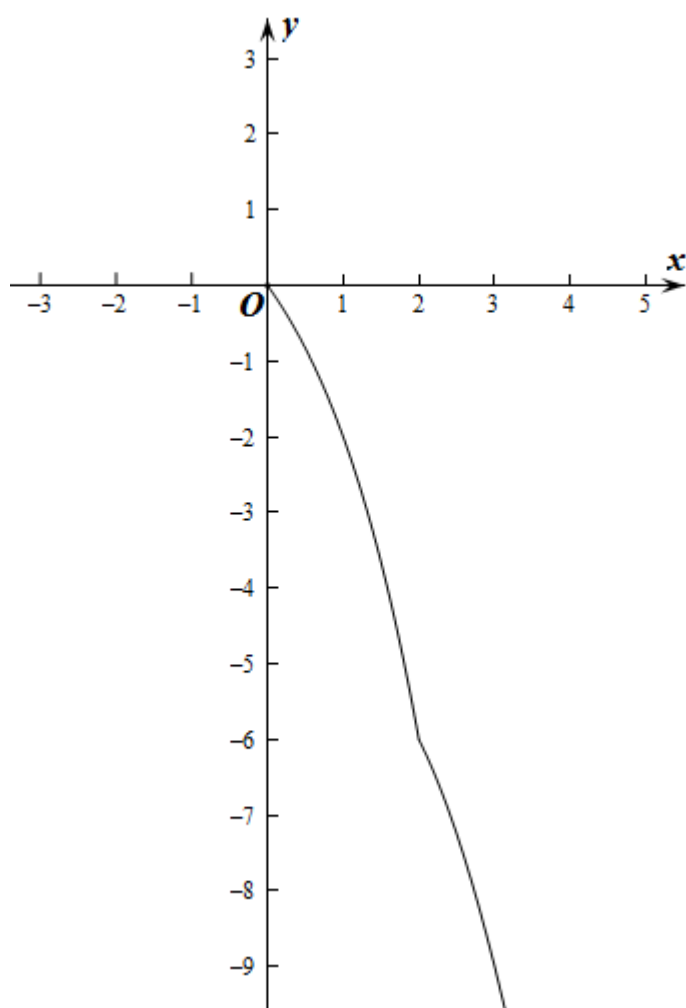
$2m+4$  分类讨论，分别求出参数  $m$  的取值范围，即可得解;

【详解】解 因为定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = f(x)$ ，所以  $f(x)$  为偶函数，当  $x \geq 0$

时，  $f(x) = \begin{cases} 2-2^{x+1} & (0 \leq x \leq 2) \\ -x^2 + 2x - 6 & (x > 2) \end{cases}$ ，则当  $0 \leq x \leq 2$  时  $f(x) = 2-2^{x+1}$  函数在定义域上单调递减，

$f(2) = 2 - 2^3 = -6$ ，当  $x > 2$  时  $f(x) = -x^2 + 2x - 6 = -(x-1)^2 - 5$ ，函数在  $(2, +\infty)$  上单调递减，

且当  $x = 2$  时  $f(2) = -6$ ，所以函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减，当  $x \geq 0$  时函数图象如下所示



因为对任意的  $x \in [m-1, m]$ ，不等式  $f(2-x) \leq f(x+m)$  恒成立，即  $f(|2-x|) \leq f(|x+m|)$  恒成立，

即  $|2-x| \geq |x+m|$ ，平方可得  $(2m+4)x \leq 4-m^2$ ；

①当  $2m+4 > 0$ ，即  $m > -2$  时，即  $x \leq \frac{4-m^2}{2m+4} = \frac{2-m}{2}$ ，对任意的  $x \in [m-1, m]$ ，所以

$m \leq \frac{2-m}{2}$ ，即  $m \leq \frac{2}{3}$ ，所以  $-2 < m \leq \frac{2}{3}$ ；

②当  $2m+4 = 0$ ，即  $m = -2$  时，显然符号题意；

③当  $2m+4 < 0$ ，即  $m < -2$  时，即  $x \geq \frac{4-m^2}{2m+4} = \frac{2-m}{2}$ ，对任意的  $x \in [m-1, m]$ ，所以

$m-1 \geq \frac{2-m}{2}$ ，即  $m \geq \frac{4}{3}$ ，与  $m < -2$  矛盾；

综上所述， $-2 \leq m \leq \frac{2}{3}$ ，即实数  $m$  的最大值为  $\frac{2}{3}$ ；

故选：B

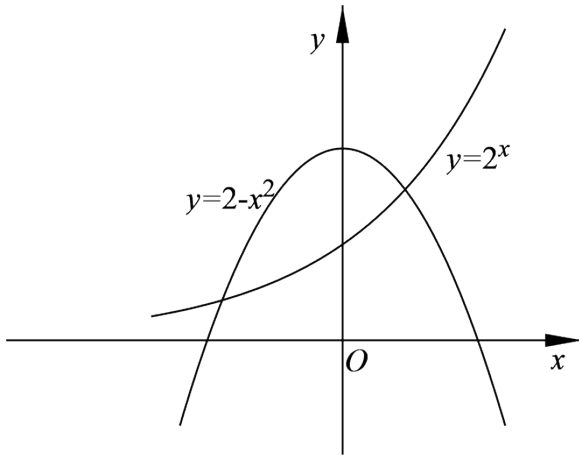
4. 2

【解析】画出两个函数  $y=2^x$  和  $y=-x^2+2$  的图象，观察可得.

【详解】作出函数  $y=2^x$  和  $y=-x^2+2$  的图象，如图，它们有两个交点，

所以方程  $2^x = -x^2 + 2$  的两个实数解.

故答案为：2.



【点睛】本题考查函数的零点个数问题，解题方法是转化为函数图象交点个数.

5.  $[0,1)$

【分析】题目考察根据指数型函数的单调性解不等式的问题，将不等式左右两边变为底数相同的指数，根据单调性比较指数部分大小即可

【详解】原不等式可变形为  $3^{ax^2-2ax} > 3^{-1}$ ，因为指数函数  $y=3^x$  为增函数，

则有  $ax^2 - 2ax > -1$ ，

即  $ax^2 - 2ax + 1 > 0$  对一切实数  $x$  恒成立.

①当  $a=0$  时， $1 > 0$ ，满足题意；

②当  $a \neq 0$  时，若二次函数大于 0 恒成立，则需  $a > 0$  且  $\Delta = (-2a)^2 - 4a < 0$ ，

即  $a > 0$  且  $a^2 - a < 0$ ，解得  $0 < a < 1$ .

综上，实数  $a$  的取值范围是  $0 \leq a < 1$ .

故答案为：  $[0,1)$

6. (1) 证明见解析； (2) 证明见解析； (3)  $\{x | x < 1\}$

【分析】(1) 令  $m=n=0$ ，代入等式，可求得  $f(0)=0$ ；

(2) 令  $n=-m$ ，代入等式，结合  $f(0)=0$ ，可得到  $f(-m)=-f(m)$ ，从而可知  $y=f(x)$  是奇函数，然后用定义法可证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数；

(3) 原不等式可化为  $f(4^x - 2^x) < f(2)$ ，结合函数  $f(x)$  的单调性，可得出  $4^x - 2^x < 2$ ，解不等式即可.

【详解】(1) 证明：令  $m=n=0$ ，则  $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ ， $\therefore f(0)=0$ .

(2) 证明：令  $n=-m$ ，则  $f(m-m)=f(m)+f(-m)$ ，

$\therefore f(0)=f(m)+f(-m)=0$ ， $\therefore f(-m)=-f(m)$ ，

$\therefore$  对任意的  $m$ ，都有  $f(-m)=-f(m)$ ，即  $y=f(x)$  是奇函数.

在  $(-\infty, +\infty)$  上任取  $x_1, x_2$ ，且  $x_1 < x_2$ ，则  $x_2 - x_1 > 0$ ，

$\therefore f(x_2 - x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f(x_2) - f(x_1) > 0$ ，即  $f(x_1) < f(x_2)$ ，

$\therefore$  函数  $y=f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数.

(3) 原不等式可化为  $f(4^x - 2^x) < 1+1 = f(1)+f(1) = f(2)$ ，

由 (2) 知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数，可得  $4^x - 2^x < 2$ ，即  $(2^x - 2)(2^x + 1) < 0$ ，

$\because 2^x + 1 > 0$ ， $\therefore 2^x - 2 < 0$ ，解得  $x < 1$ ，

故原不等式的解集为  $\{x | x < 1\}$ .

【点睛】本题考查函数奇偶性、单调性，考查不等式的解法，考查学生的推理能力与计算求解能力，属于中档题.



# 盈的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 已知  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2^{0.8}$ ,  $c = 4^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $c < b < a$       B.  $c < a < b$       C.  $b < a < c$       D.  $b < c < a$

2. 已知函数  $f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, a \neq 1)$  恒过定点  $M(m, n)$ , 则函数  $g(x) = n - m^x$  不经过 ( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

3. 函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & (x < 0) \\ (a-2)x + 3a, & (x \geq 0) \end{cases}$ , 满足对任意  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  成立,

则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a \in (0, 1)$       B.  $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$       C.  $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$       D.  $a \in \left[\frac{1}{3}, 2\right)$

## 二、填空题

4. 求值  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 若函数  $f(x) = |a^{x-1} - 1|$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递减, 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = a^x - k \cdot a^{-x}$  ( $a > 1$ ,  $a$  为常数) 是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数.

(1) 求函数  $f(x)$ ;

(2) 用单调性定义证明函数  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的增函数;

(3) 若函数  $f(x)$  满足  $f(2-3x) + f(x^2) > 0$ , 求实数  $x$  的取值范围.

7. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ .

(1) 判断并证明  $f(x)$  在其定义域上的单调性;

(2) 若  $f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x + 2) < 0$  对任意  $x \geq 1$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.



参考答案:

1. B

【分析】将  $a, b, c$  化为  $2^x$  形式, 由  $y=2^x$  的单调性判断  $a, b, c$  大小关系.

【详解】 $a=\sqrt{2}=2^{0.5}$ ,  $c=4^{0.2}=2^{0.4}$ ,

$\because y=2^x$  递增, 且  $0.4 < 0.5 < 0.8$ ,

$\therefore 2^{0.4} < 2^{0.5} < 2^{0.8}$ , 即  $c < a < b$ .

故选: B.

2. C

【解析】利用指数函数的性质求出  $m, n$ , 得出  $g(x)$  的解析式, 从而得出结论.

【详解】 $\because f(x)=a^{x-2}+1(a>0, a\neq 1)$  恒过定点  $(2, 2)$ ,

$\therefore m=n=2$ ,

$\therefore g(x)=2-2^x$ ,

$\therefore g(x)$  为减函数, 且过点  $(0, 1)$ ,

$\therefore g(x)$  的函数图象不经过第三象限.

故选: C.

3. C

【分析】根据条件可知  $f(x)$  在  $R$  上单调递减, 从而得出  $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a-2 < 0 \\ 3a \leq 1 \end{cases}$ , 解出  $a$  的范围即可.

【详解】解:  $\because f(x)$  满足对任意  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$  成立,

$\therefore f(x)$  在  $R$  上是减函数,

因为  $f(x)=\begin{cases} a^x, & (x < 0) \\ (a-2)x+3a, & (x \geq 0) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a-2 < 0 \\ (a-2) \times 0 + 3a \leq a^0 \end{cases}$ , 解得  $0 < a \leq \frac{1}{3}$ ,

$\therefore a$  的取值范围是  $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ .

故选: C.

4. 4

【分析】直接利用根式的运算性质化简

【详解】 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4.$

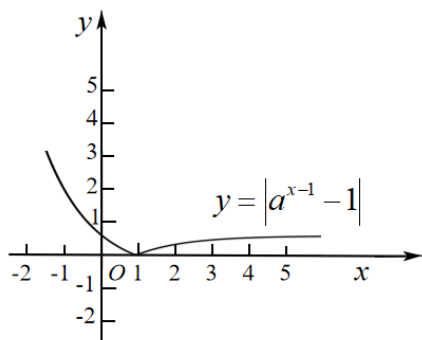
故答案为：4

5.  $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right]$

【分析】利用指数函数的图象变换，分类讨论，根据单调性建立不等式求解即可.

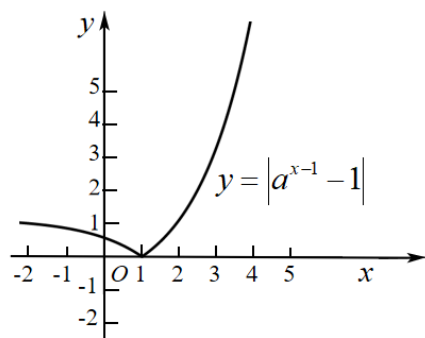
【详解】函数  $y=a^{x-1}-1$  ( $a>0$ ，且  $a\neq 1$ ) 的图象是将函数  $y=a^x$  ( $a>0$ ，且  $a\neq 1$ ) 的图象向右平移 1 个单位，再向下平移 1 个单位得到的，

故函数  $f(x)=|a^{x-1}-1|$  ( $a>0$ ，且  $a\neq 1$ ) 的图象恒过点  $(1,0)$ . 当  $0<a<1$  时，结合函数  $f(x)$  的图象：



若函数  $f(x)$  在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递减，则  $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < \frac{3(2a-1)}{2}, \text{ 解得 } \frac{3}{4} < a \leq \frac{5}{6}. \\ \frac{3(2a-1)}{2} \leq 1 \end{cases}$

当  $a>1$  时，结合函数  $f(x)$  的图象：



若  $f(x)$  在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递减, 则  $\begin{cases} a > 1 \\ a < \frac{3(2a-1)}{2} \\ \frac{3(2a-1)}{2} \leq 1 \end{cases}$ , 无实数解.

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right]$ .

解法二:

若  $1 < a < x < \frac{3(2a-1)}{2}$ , 则  $a^{x-1} - 1 > 0$ , 所以  $f(x) = |a^{x-1} - 1|$  在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递增,

不符合题意;

当  $0 < a < 1$  时, 函数  $y = a^{x-1}$  在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递减, 要使函数  $f(x) = |a^{x-1} - 1|$  在区间

$\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上单调递减,

则  $a^{x-1} - 1 > 0$  在区间  $\left(a, \frac{3(2a-1)}{2}\right)$  上恒成立,

所以  $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a < \frac{3(2a-1)}{2} \\ \frac{3(2a-1)}{2} \leq 1 \end{cases}$ , 解得  $\frac{3}{4} < a \leq \frac{5}{6}$ . 故实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right]$ .

故答案为:  $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right]$ .

6. (1)  $f(x) = a^x - a^{-x}$

(2) 证明见解析;

(3)  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

【分析】(1) 根据奇函数的性质得到  $f(0) = 0$ , 即可求出参数  $k$  的值, 即可得到解析式, 再代入检验即可;

(2) 根据函数单调性的定义进行证明.

(3) 利用函数奇偶性和单调性的性质 进行转化求解即可.

(1)

解：因为函数  $f(x) = a^x - k \cdot a^{-x}$  ( $a > 1$ ,  $a$  为常数) 是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，所以  $f(0) = 0$ ,

即  $f(0) = a^0 - k \cdot a^0 = 0$ , 解得  $k = 1$ , 所以  $f(x) = a^x - a^{-x}$ , 则

$f(-x) = a^{-x} - a^x = -(a^x - a^{-x}) = -f(x)$  满足条件, 故  $k = 1$ , 所以  $f(x) = a^x - a^{-x}$

(2)

证明：设  $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) - f(x_2) = a^{x_1} - a^{-x_1} - (a^{x_2} - a^{-x_2})$

$$= a^{x_1} - a^{x_2} + \frac{1}{a^{x_2}} - \frac{1}{a^{x_1}}$$

$$= a^{x_1} - a^{x_2} + \frac{a^{x_1} - a^{x_2}}{a^{x_1} a^{x_2}} = (a^{x_1} - a^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{a^{x_1} a^{x_2}}\right),$$

$\because x_1 < x_2, a > 1$

$$0 < a^{x_1} < a^{x_2}, a^{x_1} - a^{x_2} < 0,$$

则  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ,

即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 即  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数.

(3)

解：由  $f(2-3x) + f(x^2) > 0$  得  $f(x^2) > -f(2-3x) = f(3x-2)$ ,

$\because f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数,

$$\therefore x^2 > 3x - 2, \text{ 即 } x^2 - 3x + 2 > 0,$$

$$\text{得 } (x-1)(x-2) > 0,$$

解得  $x > 2$  或  $x < 1$ ,

即实数  $x$  的取值范围是  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ .

7. (1)  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增; 证明见解析

$$(2) \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$$

【分析】(1) 设  $x_2 > x_1$ , 可整理得到  $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)} > 0$ , 由此可得结论;

(2) 利用奇偶性定义可证得  $f(x)$  为奇函数, 结合单调性可将恒成立的不等式化为

$k < g(x) = 3^x - \frac{2}{3^x} - 1$ , 由  $g(x)$  单调性可求得  $g(x) \geq \frac{4}{3}$ , 由此可得  $k$  的取值范围.

(1)

$f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 证明如下:

设  $x_2 > x_1$ ,

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) = \frac{2^{x_2} - 1}{2^{x_2} + 1} - \frac{2^{x_1} - 1}{2^{x_1} + 1} = \frac{(2^{x_2} - 1)(2^{x_1} + 1) - (2^{x_2} + 1)(2^{x_1} - 1)}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)} = \frac{2(2^{x_2} - 2^{x_1})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)};$$

$$\because x_2 > x_1, \therefore 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0, \text{ 又 } 2^{x_2} + 1 > 0, 2^{x_1} + 1 > 0, \therefore f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

$\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

(2)

$$\because f(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x} = -f(x), \therefore f(x) \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数},$$

$$\text{由 } f(k \cdot 3^x) + f(3^x - 9^x + 2) < 0 \text{ 得: } f(k \cdot 3^x) < -f(3^x - 9^x + 2) = f(9^x - 3^x - 2),$$

由 (1) 知:  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,  $\therefore k \cdot 3^x < 9^x - 3^x - 2$  在  $[1, +\infty)$  上恒成立;

当  $x \geq 1$  时,  $3^x \geq 3$ ,  $\therefore k < 3^x - \frac{2}{3^x} - 1$  在  $[1, +\infty)$  上恒成立;

$$\text{令 } g(x) = 3^x - \frac{2}{3^x} - 1,$$

$$\because y = 3^x \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, } y = \frac{2}{3^x} \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递减},$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore g(x) \geq g(1) = 3 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3}, \therefore k < \frac{4}{3},$$

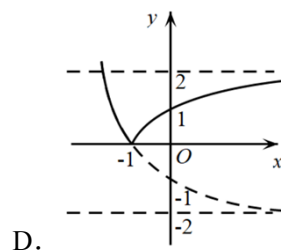
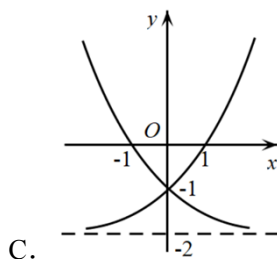
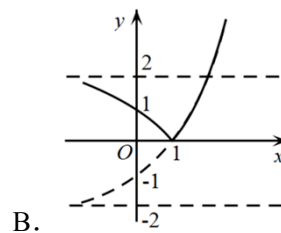
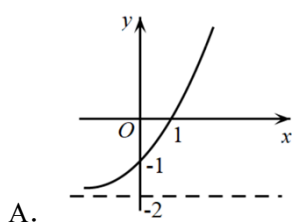
即实数  $k$  的取值范围为  $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ .

# 婧怡的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

- 已知函数  $f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, a \neq 1)$  恒过定点  $M(m, n)$ ，则函数  $g(x) = n - m^x$  不经过 ( )  
 A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- 已知正整数指数函数  $f(x) = (a-2)a^x$ ，则  $f(2) =$  ( )  
 A. 2      B. 3      C. 9      D. 16
- 若  $a > b$ ，则  
 A.  $\ln(a-b) > 0$       B.  $3a < 3b$   
 C.  $a^3 - b^3 > 0$       D.  $|a| > |b|$
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x < 0 \\ (a-2)x + 3a, & x \geq 0 \end{cases}$ ，满足对任意  $x_1 \neq x_2$ ，都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  成立，则  $a$  的取值范围是 ( )  
 A.  $a \in (0, 1)$       B.  $a \in [\frac{3}{4}, 1)$       C.  $a \in (0, \frac{1}{3}]$       D.  $a \in [\frac{3}{4}, 2)$
- 如图所示，函数  $y = |2^x - 2|$  的图像是 ( )



## 二、填空题

- 求值  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} =$  \_\_\_\_\_.
- 已知  $f(x)$  是奇函数，且当  $x < 0$  时， $f(x) = -e^{ax}$ . 若  $f(\ln 2) = 8$ ，则  $a =$  \_\_\_\_\_.



8. 已知函数  $f(x) = x + \frac{mx}{e^x - 1}$  是偶函数, 则  $m =$  \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

9. 已知函数  $f(x) = -\frac{2^x}{2^x + 1}$ .

(1) 用定义证明函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为减函数;

(2) 若  $x \in [1, 2]$ , 求函数  $f(x)$  的值域;

参考答案:

1. C

【解析】利用指数函数的性质求出  $m$ ,  $n$ , 得出  $g(x)$  的解析式, 从而得出结论.

【详解】 $\because f(x) = a^{x-2} + 1 (a > 0, a \neq 1)$  恒过定点  $(2, 2)$ ,

$\therefore m = n = 2$ ,

$\therefore g(x) = 2 - 2^x$ ,

$\therefore g(x)$  为减函数, 且过点  $(0, 1)$ ,

$\therefore g(x)$  的函数图象不经过第三象限.

故选: C.

2. C

【分析】由函数是指数函数可求出  $a = 3$ , 即可求出  $f(2)$ .

【详解】因为函数  $f(x) = (a-2)a^x$  是指数函数, 所以  $a-2=1$ , 则  $a=3$ , 所以  $f(x) = 3^x$ ,  $x \in N^+$ ,

所以  $f(2) = 3^2 = 9$ .

故选: C.

【点睛】本题考查指数函数概念的理解, 属于基础题.

3. C

【分析】本题也可用直接法, 因为  $a > b$ , 所以  $a-b > 0$ , 当  $a-b=1$  时,  $\ln(a-b)=0$ , 知 A 错, 因为  $y=3^x$  是增函数, 所以  $3^a > 3^b$ , 故 B 错. 因为幂函数  $y=x^3$  是增函数,  $a > b$ , 所以  $a^3 > b^3$ , 知 C 正确; 取  $a=1, b=-2$ , 满足  $a > b$ ,  $1=|a| < |b|=2$ , 知 D 错.

【详解】取  $a=2, b=1$ , 满足  $a > b$ ,  $\ln(a-b)=0$ , 知 A 错, 排除 A; 因为  $9=3^a > 3^b=3$ , 知 B 错, 排除 B; 取  $a=1, b=-2$ , 满足  $a > b$ ,  $1=|a| < |b|=2$ , 知 D 错, 排除 D, 因为幂函数  $y=x^3$  是增函数,  $a > b$ , 所以  $a^3 > b^3$ , 故选 C.

【点睛】本题主要考查对数函数性质、指数函数性质、幂函数性质及绝对值意义, 渗透了逻辑推理和运算能力素养, 利用特殊值排除即可判断.

4. C

【分析】根据条件知  $f(x)$  在  $R$  上单调递减, 从而得出 
$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a-2 < 0 \\ 3a \leq 1 \end{cases}$$
, 求  $a$  的范围即可.

【详解】 $\because f(x)$  满足对任意  $x_1 \neq x_2$ , 都有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$  成立,

$\therefore f(x)$  在  $R$  上是减函数,

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a-2 < 0 \\ (a-2) \times 0 + 3a \leq a^0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < a \leq \frac{1}{3},$$

$\therefore a$  的取值范围是  $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ .

故选: C.

5. B

【分析】将原函数变形为分段函数, 根据  $x=1$  及  $x \neq 1$  时的函数值即可得解.

$$\text{【详解】} \because y = |2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1 \\ 2 - 2^x, & x < 1 \end{cases},$$

$\therefore x=1$  时,  $y=0$ ,  $x \neq 1$  时,  $y > 0$ .

故选: B.

6. 4

【分析】直接利用根式的运算性质化简

$$\text{【详解】} \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3} + 2-\sqrt{3} = 4.$$

故答案为: 4

7. -3

【分析】当  $x > 0$  时  $-x < 0$ ,  $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$  代入条件即可得解.

【详解】因为  $f(x)$  是奇函数, 且当  $x > 0$  时  $-x < 0$ ,  $f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$ .

又因为  $\ln 2 \in (0, 1)$ ,  $f(\ln 2) = 8$ ,

所以  $e^{-a \ln 2} = 8$ , 两边取以  $e$  为底的对数得  $-a \ln 2 = 3 \ln 2$ , 所以  $-a = 3$ , 即  $a = -3$ .

【点睛】本题主要考查函数奇偶性, 对数的计算. 渗透了数学运算、直观想象素养. 使用转化思想得出答案.

8. 2

【分析】求出  $f(x)$  定义域, 根据  $f(x)$  是偶函数, 可取定义域内任意  $x$ , 根据  $f(-x) = f(x)$  即可求得  $m$  的值.

【详解】由  $e^x - 1 \neq 0$  得  $f(x) = x + \frac{mx}{e^x - 1}$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ ,

则  $\because f(x) = x + \frac{mx}{e^x - 1}$  是偶函数, 故  $f(-1) = f(1)$ ,

即  $-1 + \frac{-m}{e^{-1} - 1} = 1 + \frac{m}{e - 1}$ , 解得  $m = 2$ .

此时  $f(x) = x + \frac{2x}{e^x - 1} = \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}$ , 而  $f(-x) = \frac{-x(e^{-x} + 1)}{e^{-x} - 1} = f(x)$ ,

故  $f(x)$  确为偶函数, 故  $m = 2$ .

故答案为: 2.

9. (1) 证明见解析; (2)  $[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ .

【分析】(1) 取任意  $x_1 > x_2$ , 根据函数解析式判断  $f(x_1) - f(x_2)$  的符号即可证明结论.

(2) 令  $t = 2^x = [2, 4]$ , 可得  $g(t) = \frac{1}{t+1} - 1$ , 由其单调性即可求  $f(x)$  的值域.

【详解】(1) 取任意  $x_1 > x_2$ , 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2^{x_2}}{2^{x_2} + 1} - \frac{2^{x_1}}{2^{x_1} + 1} = \frac{2^{x_1+x_2} + 2^{x_2} - 2^{x_1+x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)},$$

又  $2^{x_2} - 2^{x_1} < 0, (2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1) > 0$ ,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ .

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为减函数.

(2)  $x \in [1, 2]$ , 则  $t = 2^x = [2, 4]$ ,

$\therefore g(t) = -\frac{t}{t+1} = \frac{1}{t+1} - 1$ , 易知  $g(t)$  在  $[2, 4]$  上单调递减,

又  $g(2) = -\frac{2}{3}$ ,  $g(4) = -\frac{4}{5}$ , 故  $g(t) \in [-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ , 即  $f(x)$  的值域为  $[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ .

左左的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x}+1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f(a) < f(3a-1)$  的解集为 ( )

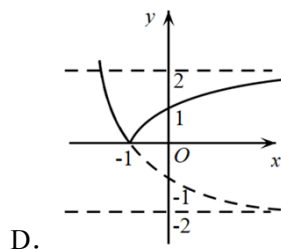
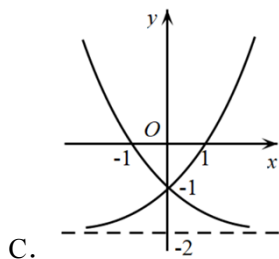
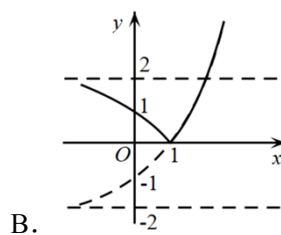
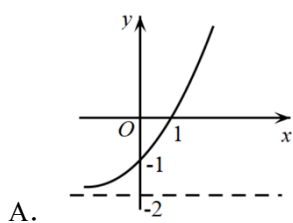
A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

C.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

2. 如图所示, 函数  $y = |2^x - 2|$  的图像是 ( )



3. 函数  $y = 2^x - 2^{-x}$  ( )

- A. 是  $\mathbf{R}$  上的减函数
- B. 是  $\mathbf{R}$  上的增函数
- C. 在  $(-\infty, 0)$  上是减函数, 在  $(0, +\infty)$  上是增函数
- D. 无法判断其单调性

4. 设  $a=3^{0.7}$ ,  $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ,  $c=\log_{0.7} 0.8$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $b < c < a$       D.  $c < a < b$

## 二、填空题

5. 函数  $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 3$  在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  的值域为\_\_\_\_\_.

6. 函数  $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} + 2$ , 若有  $f(a) + f(a-2) > 4$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

7. 函数  $f(x)$  对任意的实数  $m, n$ , 有  $f(m+n) = f(m) + f(n)$ , 当  $x > 0$  时, 有  $f(x) > 0$ .

(1) 求证:  $f(0) = 0$ .

(2) 求证:  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数.

(3) 若  $f(1) = 1$ , 解不等式  $f(4^x - 2^x) < 2$ .

参考答案:

1. C

【分析】由函数解析式判断函数的单调性,根据单调性将函数不等式转化为自变量的不等式,解得即可;

【详解】解: 因为  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ,

当  $x < 0$  时  $f(x) = -3x+3$  函数单调递减, 且  $f(x) > -3 \times 0 + 3 = 3$ ,

当  $x \geq 0$  时  $f(x) = e^{-x} + 1$  函数单调递减, 且  $f(0) = e^0 + 1 = 2 < 3$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调递减,

所以不等式  $f(a) < f(3a-1)$  等价于  $a > 3a-1$ , 解得  $a < \frac{1}{2}$ .

即不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ;

故选: C

2. B

【分析】将原函数变形为分段函数, 根据  $x=1$  及  $x \neq 1$  时的函数值即可得解.

【详解】 $\because y = |2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1 \\ 2 - 2^x, & x < 1 \end{cases}$ ,

$\therefore x=1$  时,  $y=0$ ,  $x \neq 1$  时,  $y > 0$ .

故选: B.

3. B

【分析】利用指数函数的单调性结合单调性的性质可得出结论.

【详解】因为指数函数  $f(x) = 2^x$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数, 指数函数  $g(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数,

故函数  $y = 2^x - 2^{-x}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数.

故选: B.

4. D

【分析】利用指数函数与对数函数的性质, 即可得出  $a, b, c$  的大小关系.

【详解】因为  $a = 3^{0.7} > 1$ ,

$$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a,$$

$$c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1,$$

所以  $c < 1 < a < b$ .

故选: D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题, 在解题的过程中, 注意应用指数函数和对数函数的单调性, 确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系, 常用方法:

- (1) 利用指数函数的单调性:  $y = a^x$ , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;
- (2) 利用对数函数的单调性:  $y = \log_a x$ , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;
- (3) 借助于中间值, 例如: 0 或 1 等.

5.  $[2, 3)$

【分析】令  $2^x = t$ , 结合二次函数的性质即可得出答案.

$$\text{【详解】解: } f(x) = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 3 = (2^x - 1)^2 + 2,$$

设  $2^x = t$ ,

当  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  时,  $0 < t \leq \sqrt{2}$ , 所以  $2 \leq (t-1)^2 + 2 < 3$ ,

所以  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  的值域为  $[2, 3)$ .

故答案为:  $[2, 3)$ .

6.  $(1, +\infty)$

【分析】构造函数  $F(x) = f(x) - 2$ , 则  $f(a) + f(a-2) > 4$  等价于  $F(a) + F(a-2) > 0$ , 分析  $F(x)$  奇偶性和单调性即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】设 } F(x) &= f(x) - 2, \text{ 则 } F(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}, \text{ 易知 } F(x) \text{ 是奇函数, } F(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \\ &= \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{3^{2x} + 1} \text{ 在 } R \text{ 上是增函数,} \end{aligned}$$

由  $f(a) + f(a-2) > 4$  得  $F(a) + F(a-2) > 0$ ,

于是可得  $F(a) > F(2-a)$ , 即  $a > 2-a$ , 解得  $a > 1$ .

答案:  $(1, +\infty)$



7. (1) 证明见解析; (2) 证明见解析; (3)  $\{x|x < 1\}$

【分析】(1) 令  $m=n=0$ , 代入等式, 可求得  $f(0)=0$ ;

(2) 令  $n=-m$ , 代入等式, 结合  $f(0)=0$ , 可得到  $f(-m)=-f(m)$ , 从而可知  $y=f(x)$  是奇函数, 然后用定义法可证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数;

(3) 原不等式可化为  $f(4^x - 2^x) < f(2)$ , 结合函数  $f(x)$  的单调性, 可得出  $4^x - 2^x < 2$ , 解不等式即可.

【详解】(1) 证明: 令  $m=n=0$ , 则  $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ ,  $\therefore f(0)=0$ .

(2) 证明: 令  $n=-m$ , 则  $f(m-m)=f(m)+f(-m)$ ,

$$\therefore f(0)=f(m)+f(-m)=0, \therefore f(-m)=-f(m),$$

$\therefore$  对任意的  $m$ , 都有  $f(-m)=-f(m)$ , 即  $y=f(x)$  是奇函数.

在  $(-\infty, +\infty)$  上任取  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_2 - x_1 > 0$ ,

$$\therefore f(x_2 - x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore$  函数  $y=f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数.

$$(3) \text{ 原不等式可化为 } f(4^x - 2^x) < 1+1 = f(1)+f(1) = f(2),$$

由 (2) 知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数, 可得  $4^x - 2^x < 2$ , 即  $(2^x - 2)(2^x + 1) < 0$ ,

$$\because 2^x + 1 > 0, \therefore 2^x - 2 < 0, \text{ 解得 } x < 1,$$

故原不等式的解集为  $\{x|x < 1\}$ .

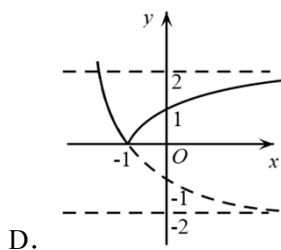
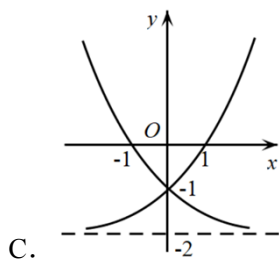
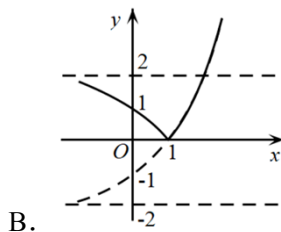
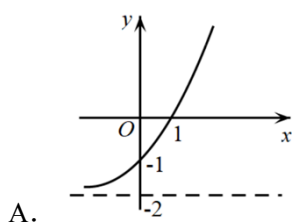
【点睛】本题考查函数奇偶性、单调性, 考查不等式的解法, 考查学生的推理能力与计算求解能力, 属于中档题.

# 小何的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 如图所示, 函数  $y = |2^x - 2|$  的图像是 ( )



2. 设  $a = 3^{0.7}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ,  $c = \log_{0.7} 0.8$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $b < c < a$       D.  $c < a < b$

3. 函数  $f(x) = \frac{4^x + 2^{x+1} + 5}{2^x + 1}$  的值域为 ( )

- A.  $[5, +\infty)$       B.  $[4, +\infty)$       C.  $(5, +\infty)$       D.  $(4, +\infty)$

4. 若实数  $x, y$  满足  $2022^x + 2023^{-y} < 2022^y + 2023^{-x}$ , 则 ( )

- A.  $\frac{x}{y} > 1$       B.  $\frac{x}{y} < 1$   
C.  $x - y < 0$       D.  $x - y > 0$

## 二、填空题

5. 函数  $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 3$  在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  的值域为\_\_\_\_\_.

6. 函数  $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} + 2$ , 若有  $f(a) + f(a-2) > 4$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

7. 已知函数  $f(x) = a \cdot 2^x - 2^{1-x}$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数.

(1)求实数  $a$  的值;

(2)求不等式  $f(f(x)-2) > 3$  的解集;

(3)若关于  $x$  的不等式  $f(x) > \frac{k}{2^{x-1}} + 2$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】将原函数变形为分段函数, 根据  $x=1$  及  $x \neq 1$  时的函数值即可得解.

$$\text{【详解】} \because y = |2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1 \\ 2 - 2^x, & x < 1 \end{cases},$$

$\therefore x=1$  时,  $y=0$ ,  $x \neq 1$  时,  $y > 0$ .

故选: B.

2. D

【分析】利用指数函数与对数函数的性质, 即可得出  $a, b, c$  的大小关系.

【详解】因为  $a = 3^{0.7} > 1$ ,

$$b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8} = 3^{0.8} > 3^{0.7} = a,$$

$$c = \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1,$$

所以  $c < 1 < a < b$ .

故选: D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题, 在解题的过程中, 注意应用指数函数和对数函数的单调性, 确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系, 常用方法:

(1) 利用指数函数的单调性:  $y = a^x$ , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;

(2) 利用对数函数的单调性:  $y = \log_a x$ , 当  $a > 1$  时, 函数递增; 当  $0 < a < 1$  时, 函数递减;

(3) 借助于中间值, 例如: 0 或 1 等.

3. B

【分析】把  $2^x + 1$  作为一个整体, 求出其范围, 再利用基本不等式求解.

$$\text{【详解】由已知 } f(x) = \frac{(2^x + 1)^2 + 4}{2^x + 1} = (2^x + 1) + \frac{4}{2^x + 1} \geq 2\sqrt{(2^x + 1) \times \frac{4}{2^x + 1}} = 4,$$

当且仅当  $2^x + 1 = \frac{4}{2^x + 1}$ , 即  $x = 0$  时等号成立,

所以  $f(x)$  的值域是  $[4, +\infty)$ .

故选: B.

4. C

【分析】由指数函数的性质可知  $f(x) = 2022^x - 2023^{-x}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数；根据题意可知

$2022^x - 2023^{-x} < 2022^y - 2023^{-y}$ ，即  $f(x) < f(y)$ ，再根据函数的单调性，可得  $x < y$ ，由此即可得到结果.

【详解】令  $f(x) = 2022^x - 2023^{-x}$ ，由于  $y = 2022^x$ ， $y = -2023^{-x}$  均为  $\mathbf{R}$  上的增函数，所以

$f(x) = 2022^x - 2023^{-x}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数.

因为  $2022^x + 2023^{-y} < 2022^y + 2023^{-x}$ ，所以  $2022^x - 2023^{-x} < 2022^y - 2023^{-y}$ ，即

$f(x) < f(y)$ ，所以  $x < y$ ，所以  $x - y < 0$ .

故选：C.

5.  $[2, 3)$

【分析】令  $2^x = t$ ，结合二次函数的性质即可得出答案.

【详解】解：  $f(x) = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 3 = (2^x - 1)^2 + 2$ ，

设  $2^x = t$ ，

当  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  时， $0 < t \leq \sqrt{2}$ ，所以  $2 \leq (t-1)^2 + 2 < 3$ ，

所以  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  的值域为  $[2, 3)$ .

故答案为：  $[2, 3)$  .

6.  $(1, +\infty)$

【分析】构造函数  $F(x) = f(x) - 2$ ，则  $f(a) + f(a-2) > 4$  等价于  $F(a) + F(a-2) > 0$ ，分析  $F(x)$  奇偶性和单调性即可求解.

【详解】设  $F(x) = f(x) - 2$ ，则  $F(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ ，易知  $F(x)$  是奇函数， $F(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{3^{2x} + 1}$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数，

由  $f(a) + f(a-2) > 4$  得  $F(a) + F(a-2) > 0$ ，

于是可得  $F(a) > F(2-a)$ ，即  $a > 2-a$ ，解得  $a > 1$ .

答案：  $(1, +\infty)$

7. (1)  $a = 2$

(2)  $(1, +\infty)$

$$(3) \left( -\infty, -\frac{5}{4} \right)$$

【分析】(1) 根据奇函数满足  $f(-x) + f(x) = 0$ ，即可求解 (2) 根据  $f(x)$  的单调性，即可根据函数值的大小确定自变量的大小，即可转化求解，(3) 将恒成立问题转化为最值问题，即可利用二次函数的性质求最值进行求解.

(1)

因为  $f(x) = a \cdot 2^x - 2^{1-x}$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，所以  $f(-x) + f(x) = 0$ ,

$$\text{即 } a \cdot 2^{-x} - 2^{1+x} + a \cdot 2^x - 2^{1-x} = 0, \text{ 即 } (a-2) \left( 2^x + \frac{1}{2^x} \right) = 0,$$

因为  $2^x + \frac{1}{2^x} > 0$ ，所以  $a-2 = 0$ ，所以  $a = 2$  (经检验， $a = 2$  符合题意)

(2)

由 (1) 得  $f(x) = 2^{1+x} - 2^{1-x}$ ,

因为  $y = 2^{1+x}$  与  $y = -2^{1-x}$  在  $\mathbf{R}$  上均为增函数，所以  $f(x) = 2^{1+x} - 2^{1-x}$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数，

又  $f(1) = 3$ ，所以  $f(f(x) - 2) > f(1)$ ，

所以  $f(x) - 2 > 1$ ，即  $f(x) > 3 = f(1)$ ，

所以  $x > 1$ ，所以不等式  $f[f(x) - 2] > 3$  的解集是  $(1, +\infty)$ .

(3)

因为关于  $x$  的不等式  $f(x) > \frac{k}{2^{x-1}} + 2$  恒成立，即  $2^{1+x} - 2^{1-x} > \frac{k}{2^{x-1}} + 2$  恒成立，

所以  $k < 2^{2x} - 2^x - 1$  恒成立，所以  $k < (2^{2x} - 2^x - 1)_{\min}$ ，

$$\text{因为 } 2^{2x} - 2^x - 1 = \left( 2^x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4},$$

所以当  $2^x = \frac{1}{2}$ ，即  $x = -1$  时， $2^{2x} - 2^x - 1$  取得最小值  $-\frac{5}{4}$ .

所以  $k < -\frac{5}{4}$ ，即实数  $k$  的取值范围是  $\left( -\infty, -\frac{5}{4} \right)$

# 佳承的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

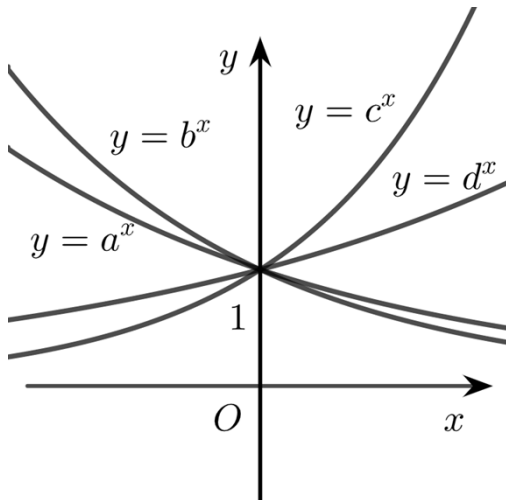
## 一、单选题

1. 已知  $0 < a < 1, b < -1$ , 则函数  $y = a^x + b$  的图像必定不经过 ( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 函数①  $y = a^x$ ; ②  $y = b^x$ ; ③  $y = c^x$ ; ④  $y = d^x$  的图象如图所示,  $a, b, c, d$  分别

是下列四个数:  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  中的一个, 则  $a, b, c, d$  的值分别是 ( )



- A.  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$       B.  $\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$       D.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \sqrt{3}$

3. 若  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ , 则 ( )

- A.  $\ln(y-x+1) > 0$       B.  $\ln(y-x+1) < 0$       C.  $\ln|x-y| > 0$       D.  $\ln|x-y| < 0$

## 二、填空题

4. 已知  $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}, b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}}, c = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

5. 化简:  $\left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ .

(1) 若  $f(x) = 2$ , 求  $2^x$  的值;

(2) 若  $2'f(2t) + mf(t) \geq 0$ ，对于任意  $t \in [1, 2]$  恒成立，求实数  $m$  的取值范围.



参考答案:

1. A

【解析】根据指数函数的图象结合图象的平移可得正确的选项.

【详解】因为  $0 < a < 1$ , 故  $y = a^x$  的图象经过第一象限和第二象限,

且当  $x$  越来越大时, 图象与  $x$  轴无限接近.

因为  $b < -1$ , 故  $y = a^x$  的图象向下平移超过一个单位, 故  $y = a^x + b$  的图象不过第一象限.

故选: A.

2. C

【分析】根据指数函数的性质, 结合函数图象判断底数的大小关系.

【详解】由题图, 直线  $x=1$  与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为  $c, d, a, b$ , 而

$$\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

故选: C.

3. A

【分析】将不等式变为  $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ , 根据  $f(t) = 2^t - 3^{-t}$  的单调性知  $x < y$ , 以此去判断各个选项中真数与1的大小关系, 进而得到结果.

【详解】由  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$  得:  $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ ,

$$\text{令 } f(t) = 2^t - 3^{-t},$$

$\because y = 2^x$  为  $R$  上的增函数,  $y = 3^{-x}$  为  $R$  上的减函数,  $\therefore f(t)$  为  $R$  上的增函数,

$$\therefore x < y,$$

$\because y - x > 0$ ,  $\therefore y - x + 1 > 1$ ,  $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$ , 则 A 正确, B 错误;

$\because |x - y|$  与1的大小不确定, 故 CD 无法确定.

故选: A.

【点睛】本题考查对数式的大小的判断问题, 解题关键是能够通过构造函数的方式, 利用函数的单调性得到  $x, y$  的大小关系, 考查了转化与化归的数学思想.

4.  $c < b < a$  或  $a > b > c$

【分析】利用指数函数的单调性比较大小即可

【详解】因为  $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数，且  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < 0$ ，

所以  $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{3}{5}\right)^0$ ，所以  $a > b > 1$ ，

因为  $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数，且  $-\frac{3}{4} < 0$ ，

所以  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ，所以  $c < 1$ ，

所以  $c < b < a$

故答案为：  $c < b < a$  或  $a > b > c$

5.  $2 - \frac{1}{2^{63}}$

【分析】分析式子可以发现，若在结尾乘以一个  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ ，则可以从后到前逐步使用平方差公式进行计算，为保证恒等计算，在原式末尾乘以  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 2$  即可.

【详解】原式  $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^{32}}\right) \times 2$   
 $= \left(1 - \frac{1}{2^{64}}\right) \times 2$   
 $= 2 - \frac{1}{2^{63}}$

故答案为：  $2 - \frac{1}{2^{63}}$ .

6. (1)  $\sqrt{2} + 1$ ; (2)  $m \geq -5$ .

【分析】(1) 当  $x < 0$  时， $f(x) = 0 \neq 2$ ，舍去；

当  $x \geq 0$  时， $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2$ ，即  $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ ， $2^x > 0$ 。基础即可得出。

(2) 当  $t \in [1, 2]$  时,  $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ , 即  $2^t(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}}) + m(2^t - \frac{1}{2^t}) \geq 0$ , 即  $m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1)$ . 化

简解出即可得出.

【详解】解: (1) 当  $x < 0$  时,  $f(x) = 0 \neq 2$ , 舍去;

当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2$ , 即  $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ ,  $2^x > 0$ .

解得  $2^x = 1 + \sqrt{2}$ ,

(2) 当  $t \in [1, 2]$  时,  $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ , 即  $2^t(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}}) + m(2^t - \frac{1}{2^t}) \geq 0$ ,

即  $m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1)$ .

因为  $2^{2t} - 1 > 0$ , 所以  $m \geq -(2^{2t} + 1)$ .

由  $t \in [1, 2]$ , 所以  $-(2^{2t} + 1) \in [-17, -5]$ .

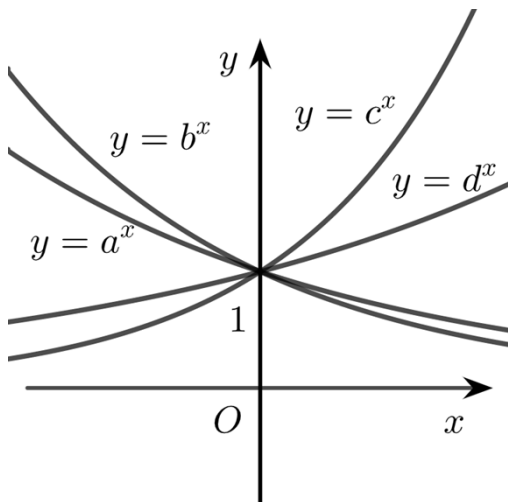
故  $m$  的取值范围是  $[-5, +\infty)$ .

# 珠的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

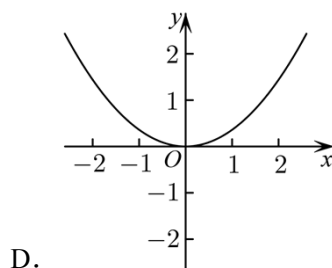
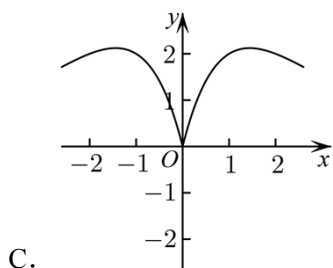
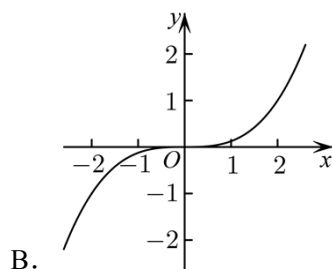
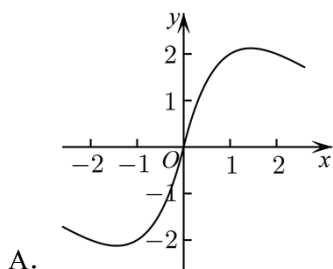
## 一、单选题

1. 函数① $y=a^x$ ；② $y=b^x$ ；③ $y=c^x$ ；④ $y=d^x$ 的图象如图所示， $a, b, c, d$  分别是下列四个数： $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  中的一个，则  $a, b, c, d$  的值分别是（ ）



- A.  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$       B.  $\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$       D.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \sqrt{3}$

2. 函数  $f(x)=|x| \cdot 2^{2-|x|}$  在区间  $[-2, 2]$  上的图象可能是（ ）



3. 下列函数中是增函数的为（ ）

- A.  $f(x)=-x$       B.  $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$       C.  $f(x)=x^2$       D.  $f(x)=\sqrt[3]{x}$

## 二、填空题

4. 已知函数  $f(x) = 2^{|x-a|}$  ( $a$  为常数), 若  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x)$  是指数函数, 且  $f(2) = 9$ , 则  $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = a^{x-2}$  ( $a > 0, a \neq 1, x \geq 0$ ) 的图像经过点  $(3, 0.5)$ ,

(1) 求  $a$  值;

(2) 求函数  $f(x) = a^{x-2}$  ( $x \geq 0$ ) 的值域;

参考答案:

1. C

【分析】根据指数函数的性质，结合函数图象判断底数的大小关系.

【详解】由题图，直线  $x=1$  与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为  $c, d, a, b$ ，而

$$\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

故选：C.

2. C

【分析】首先判断函数的奇偶性，再根据特殊值判断即可；

【详解】解： $\because f(-x) = |x| \cdot 2^{2-|x|} = f(x)$ ， $\therefore f(x)$  是偶函数，函数图象关于  $y$  轴对称，排除

A, B 选项；

$\because f(1) = 2 = f(2)$ ， $\therefore f(x)$  在  $[0, 2]$  上不单调，排除 D 选项.

故选：C

3. D

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于 A， $f(x) = -x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 B， $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 C， $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  为减函数，不合题意，舍.

对于 D， $f(x) = \sqrt[3]{x}$  为  $R$  上的增函数，符合题意，

故选：D.

4.  $(-\infty, 1]$

【分析】首先根据题意得到  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ ，从而得到当  $x \geq a$  时，函数  $f(x)$  为增

函数，再根据题意即可得到答案.

【详解】因为函数  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ ，

当  $x \geq a$  时，函数  $f(x)$  为增函数，

而已知函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数, 所以  $a \leq 1$ , 即  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ .

故答案为:  $(-\infty, 1]$

5.  $\sqrt{3}$

【分析】依题意设  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 根据  $f(2) = 9$  即可求出  $a$  的值, 从而求出函数解析, 再代入计算可得.

【详解】解: 由题意, 设  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ),

因为  $f(2) = 9$ , 所以  $a^2 = 9$ , 又  $a > 0$ , 所以  $a = 3$ ,

所以  $f(x) = 3^x$ , 所以  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$ .

故答案为:  $\sqrt{3}$

6. (1)  $a = \frac{1}{2}$ ; (2)  $(0, 4]$ .

【分析】(1) 函数  $f(x)$  的图像经过点  $(3, 0.5)$ , 得到  $a^{3-2} = 0.5$ , 即可求解;

(2) 由 (1) 得到  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} (x \geq 0)$ , 根据函数的单调性, 得到  $f(x)_{\max} = 4$ , 进而求得函数的值域.

【详解】(1) 由函数  $f(x) = a^{x-2} (a > 0, a \neq 1)$  的图像经过点  $(3, 0.5)$ , 可得  $a^{3-2} = 0.5$ , 解得

$$a = \frac{1}{2}.$$

(2) 由 (1) 可知  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} (x \geq 0)$ ,

因为  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $x = 0$  时有最大值,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4,$$

因为  $f(x) > 0$ , 所以函数  $f(x)$  的值域为  $(0, 4]$ .

# 阿雪的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = 4 + a^{x+1}$  的图象经过定点  $P$ ，则点  $P$  的坐标是 ( )  
A.  $(-1, 5)$                   B.  $(-1, 4)$                   C.  $(0, 4)$                   D.  $(4, 0)$
2. 已知  $a = \sqrt{2}$ ， $b = 2^{0.8}$ ， $c = 4^{0.2}$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
A.  $c < b < a$                   B.  $c < a < b$                   C.  $b < a < c$                   D.  $b < c < a$
3. 若  $2^x = 8^{y+1}$ ，且  $9^y = 3^{x-9}$ ，则  $x+y$  的值是 ( )  
A. 18                          B. 24                          C. 21                          D. 27

## 二、填空题

4. 函数  $f(x) = ax^{+1} + 1$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象恒过定点\_\_\_\_\_.
5. 指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图像经过点  $(2, 9)$ ，则该指数函数的表达式为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 解方程  $4^x - 2^x - 2 = 0$ .





参考答案:

1. A

【分析】令  $x+1=0$ ，即可求出定点坐标；

【详解】当  $x+1=0$ ，即  $x=-1$  时， $a^{x+1}=a^0=1$ ，为常数，

此时  $f(x)=4+1=5$ ，即点  $P$  的坐标为  $(-1, 5)$ .

故选：A.

【点睛】本题考查指数型函数过定点，考查运算求解能力，属于基础题.

2. B

【分析】将  $a, b, c$  化为  $2^x$  形式，由  $y=2^x$  的单调性判断  $a, b, c$  大小关系.

【详解】 $a=\sqrt{2}=2^{0.5}$ ， $c=4^{0.2}=2^{0.4}$ ，

$\because y=2^x$  递增，且  $0.4 < 0.5 < 0.8$ ，

$\therefore 2^{0.4} < 2^{0.5} < 2^{0.8}$ ，即  $c < a < b$ .

故选：B.

3. D

【分析】根据  $2^x=8^{y+1}$ 、 $9^y=3^{x-9}$  得到关于  $x, y$  的两个方程，解出  $x, y$  的值即可得到答案.

【详解】解： $\because 2^x=8^{y+1}$ ， $\therefore$  有  $2^x=2^{3y+3}$ ， $\therefore x=3y+3$ ；

又  $9^y=3^{x-9}$ ， $\therefore 3^{2y}=3^{x-9}$ ， $\therefore 2y=x-9$ ；

联立方程，解得  $\begin{cases} x=21 \\ y=6 \end{cases}$ ， $\therefore x+y=27$ ，

故选：C.

4.  $(-1, 2)$

【解析】由解析式可直接得出.

【详解】由解析式可得当  $x=-1$  时， $f(-1)=a^0+1=2$ ，

$\therefore f(x)$  恒过定点  $(-1, 2)$ .

故答案为： $(-1, 2)$ .

5.  $y=3^x$

【分析】根据指数函数  $y=a^x$  图象过点  $(2, 9)$ ，代入解得  $a$  的值.

【详解】解：指数函数  $y=a^x (a>0$  且  $a\neq 1)$  的图象经过点  $(2, 9)$ ，

所以  $9 = a^2$ ，解得  $a = 3$ ，

所以该指数函数的表达式为  $y = 3^x$ ．

故答案为：  $y = 3^x$ ．

6.  $x = 1$

【解析】将方程变形为  $(2^x - 2)(2^x + 1) = 0$ ，求出正数  $2^x$  的值，由此可解出  $x$  的值．

【详解】方程  $4^x - 2^x - 2 = 0$  可化为  $(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$ ，即  $(2^x - 2)(2^x + 1) = 0$ ，

$\because 2^x > 0$ ， $\therefore 2^x = 2$ ，解得  $x = 1$ ，因此，方程  $4^x - 2^x - 2 = 0$  的解为  $x = 1$ ．

【点睛】本题考查指数方程的求解，将方程化为二次方程求解是解题的关键，同时也要注意指数幂的符号，考查计算能力，属于基础题．

# 代表的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

## 一、单选题

1. 若函数  $f(x) = \pi^x - \pi^{-x} + 2021x$ ，则不等式  $f(x+1) + f(2x-4) \geq 0$  的解集为 ( )

A.  $[1, +\infty)$

B.  $(-\infty, 1]$

C.  $(0, 1]$

D.  $[-1, 1]$

2. 对任意实数  $a < 1$  且  $a \neq 0$  关于  $x$  的函数  $y = (1-a)^x + 4$  图象必过定点 ( )

A.  $(0, 4)$

B.  $(0, 1)$

C.  $(0, 5)$

D.  $(1, 5)$

3. 若函数  $y = (m^2 - m - 1) \cdot m^x$  是指数函数，则  $m$  等于 ( )

A. -1 或 2

B. -1

C. 2

D.  $\frac{1}{2}$

## 二、填空题

4. 函数  $f(x) = ax^{+1} + 1$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象恒过定点\_\_\_\_\_.

5. 已知实数  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，不论  $a$  取何值，函数  $y = a^{x-4} + 2$  的图像恒过一个定点，这个定点的坐标为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 证明：当  $a > 1$ ， $s < 0$  时， $0 < a^s < 1$  恒成立.



参考答案:

1. A

【分析】判断出函数的奇偶性和单调性，再利用其性质解不等式即可

【详解】 $f(x)$  的定义域为  $R$ ,

$$\text{因为 } f(-x) = \pi^{-x} - \pi^x - 2021x = -(\pi^x - \pi^{-x} + 2021x) = -f(x),$$

所以  $f(x)$  是奇函数,

所以不等式  $f(x+1) + f(2x-4) \geq 0$  可化为  $f(x+1) \geq f(4-2x)$ ,

因为  $y = \pi^x, y = -\pi^{-x}, y = 2021x$  在  $R$  上均为增函数,

所以  $f(x)$  在  $R$  上为增函数,

所以  $x+1 \geq 4-2x$ , 解得  $x \geq 1$ ,

故选: A.

2. C

【分析】根据指数函数过定点  $(0, 1)$  可求解.

【详解】 $\because a < 1$  且  $a \neq 0$ ,  $\therefore 1-a > 0$  且  $1-a \neq 1$ , 故函数  $y = (1-a)^x$  是指数函数, 过定点  $(0, 1)$ , 则  $y = (1-a)^x + 4$  过定点  $(0, 5)$ .

故选: C.

3. C

【分析】根据题意可得出关于实数  $m$  的等式与不等式, 即可解得实数  $m$  的值.

【详解】由题意可得 
$$\begin{cases} m^2 - m - 1 = 1 \\ m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}, \text{ 解得 } m = 2.$$

故选: C.

4.  $(-1, 2)$

【解析】由解析式可直接得出.

【详解】由解析式可得当  $x = -1$  时,  $f(-1) = a^0 + 1 = 2$ ,

$\therefore f(x)$  恒过定点  $(-1, 2)$ .

故答案为:  $(-1, 2)$ .

5.  $(4,3)$

【分析】根据指数函数过定点问题求解.

【详解】令  $x-4=0$ ,

得  $x=4$ , 此时  $y=3$ ,

所以函数  $y=a^{x-4}+2$  的图像恒过的定点坐标为  $(4,3)$ ,

故答案为:  $(4,3)$

6. 证明见解析

【分析】根据指数函数的单调性证明即可.

【详解】当  $a>1$  时,  $y=a^x$  单调递增,

由  $s<0$  得  $a^s < a^0 = 1$ ,

又因为  $a^s > 0$

所以  $0 < a^s < 1$  恒成立

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

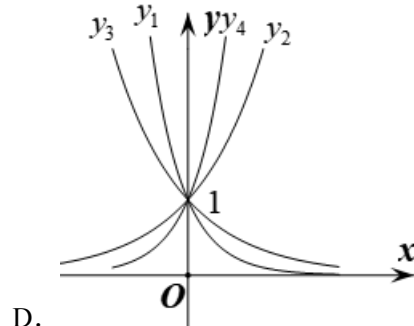
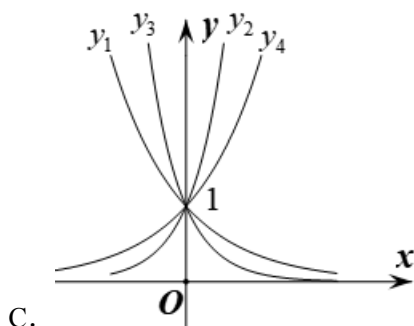
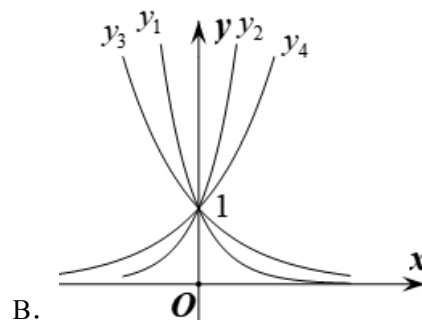
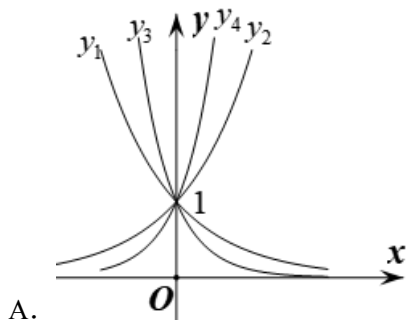
学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增  
B. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增  
C. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减  
D. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减

2. 已知  $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,  $y_2 = 3^x$ ,  $y_3 = 10^{-x}$ ,  $y_4 = 10^x$ , 则在同一平面直角坐标系内, 它们的图象大致为 ( )



3. 设函数  $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  单调递增  
B. 是奇函数, 且在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  单调递减  
C. 是偶函数, 且在  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  单调递增  
D. 是奇函数, 且在  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  单调递减

### 二、填空题

4. 方程  $2^x = -x^2 + 2$  的实数解的个数为\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = 2^{|x-a|}$  ( $a$  为常数), 若  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = \frac{a \cdot g(x) + 5^x}{a \cdot 25^x}$  ( $a$  为常数, 且  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ). 请在下面三个函数:

①  $g_1(x) = 5x$ ; ②  $g_2(x) = 5x^2$ ; ③  $g_3(x) = 125^x$  中, 选择一个函数作为  $g(x)$ , 使得  $f(x)$

具有奇偶性.

(1) 请写出  $g(x)$  表达式, 并求  $a$  的值;

(2) 当  $f(x)$  为奇函数时, 若对任意的  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ , 都有  $f(2x) \geq mf(x)$  成立, 求实数  $m$  的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】根据奇函数的定义及指数函数的单调性判断可得;

【详解】解:  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = 3^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x = -f(x)$ ,

所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  为奇函数,

又  $y = 3^x$  与  $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$  在定义域上单调递增, 所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

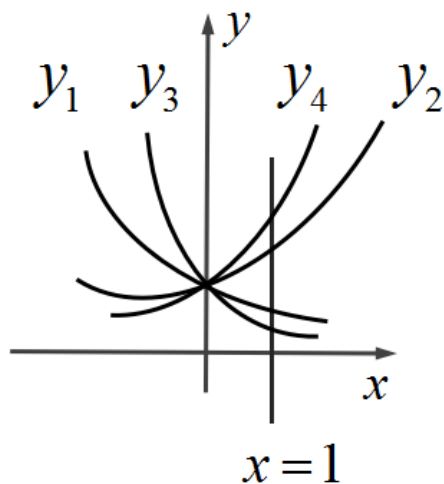
故选: B

2. A

【分析】根据指数函数的单调性及图像特征进行比较, 即可判断.

【详解】 $y_2 = 3^x$  与  $y_4 = 10^x$  是增函数,  $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  与  $y_3 = 10^{-x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$  是减函数, 在第一象限内

作直线  $x = 1$ ,



该直线与四条曲线交点的纵坐标的大小对应各底数的大小, 易知: 选 A.

故选: A

3. D

【分析】根据奇偶性的定义可判断出  $f(x)$  为奇函数, 排除 AC; 当  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  时, 利用函数单调性的性质可判断出  $f(x)$  单调递增, 排除 B; 当  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  时, 利用复合函数单调性可判断出  $f(x)$  单调递减, 从而得到结果.

【详解】由  $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$  得  $f(x)$  定义域为  $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$ ，关于坐标原点对称，

$$\text{又 } f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x),$$

$\therefore f(x)$  为定义域上的奇函数，可排除 AC；

$$\text{当 } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 时, } f(x) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x),$$

$$\because y = \ln(2x+1) \text{ 在 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递增, } y = \ln(1-2x) \text{ 在 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递增, 排除 B;}$$

$$\text{当 } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{ 时, } f(x) = \ln(-2x-1) - \ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right),$$

$$\because \mu = 1 + \frac{2}{2x-1} \text{ 在 } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减, } f(\mu) = \ln \mu \text{ 在定义域内单调递增,}$$

根据复合函数单调性可知： $f(x)$  在  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  上单调递减，D 正确.

故选：D.

【点睛】本题考查函数奇偶性和单调性的判断；判断奇偶性的方法是在定义域关于原点对称的前提下，根据  $f(-x)$  与  $f(x)$  的关系得到结论；判断单调性的关键是能够根据自变量的范围化简函数，根据单调性的性质和复合函数“同增异减”性得到结论.

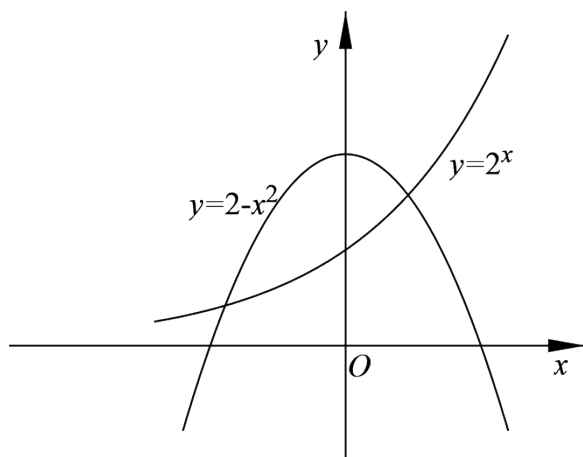
4. 2

【解析】画出两个函数  $y = 2^x$  和  $y = -x^2 + 2$  的图象，观察可得.

【详解】作出函数  $y = 2^x$  和  $y = -x^2 + 2$  的图象，如图，它们有两个交点，

所以方程  $2^x = -x^2 + 2$  的两个实数解.

故答案为：2.



【点睛】本题考查函数的零点个数问题，解题方法是转化为函数图象交点个数.

5.  $(-\infty, 1]$

【分析】首先根据题意得到  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ ，从而得到当  $x \geq a$  时，函数  $f(x)$  为增函数，再根据题意即可得到答案.

【详解】因为函数  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ ，

当  $x \geq a$  时，函数  $f(x)$  为增函数，

而已知函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数，所以  $a \leq 1$ ，即  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ .

故答案为：  $(-\infty, 1]$

6. (1)见解析

$$(2) \left( -\infty, \frac{5\sqrt{5} + \sqrt{5}}{5} \right]$$

【分析】(1) 根据所选条件，结合奇函数和偶函数的定义可得出  $a$  的等式或表达式，可求得对应的实数  $a$  的值；

(2) 由已知条件可得出  $f(x) = 5^x - 5^{-x}$ ，由参变量分离法得出  $m \leq 5^x + 5^{-x}$ ，求出函数

$y = 5^x + 5^{-x}$  在区间  $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right]$  上的最小值，由此可求得实数  $m$  的取值范围；

(1)

若选①:  $g(x) = 5x$ ,

则  $f(x) = \frac{5ax + 5^x}{a \cdot 25^x}$ , 定义域为  $\mathbb{R}$ ,

若函数  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0) = \frac{1}{a} \neq 0$ , 故函数不能是奇函数,

若函数  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x) = \frac{-5ax + 5^{-x}}{a \cdot 25^{-x}} = \frac{25^x(5^{-x} - 5ax)}{a} = \frac{5^x - 5ax \cdot 25^x}{a}$ ,

由  $f(-x) = f(x)$ , 可得  $\frac{5^x - 5ax \cdot 25^x}{a} = \frac{5ax + 5^x}{a \cdot 25^x}$ ,

化简可得  $a = \frac{125^x - 5^x}{5x + 5x \cdot 625^x} (x \neq 0)$ ,

则  $a$  不为常数, 即函数  $f(x) = \frac{5ax + 5^x}{a \cdot 25^x}$  不可能为偶函数, 不合乎题意;

若选②,  $g(x) = 5x^2$ ,

则  $f(x) = \frac{a \cdot 5x^2 + 5^x}{a \cdot 25^x}$ .

若函数  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0) = \frac{1}{a} \neq 0$ , 不合乎题意;

若函数  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x) = \frac{a5x^2 + 5^{-x}}{a \cdot 25^{-x}} = \frac{25^x(5ax^2 + 25^{-x})}{a} = \frac{5^x + 5ax^2 \cdot 25^x}{a}$ ,

由  $f(-x) = f(x)$ , 可得  $\frac{5^x + 5ax^2 \cdot 25^x}{a} = \frac{a \cdot 5x^2 + 5^x}{a \cdot 25^x}$ ,

整理可得  $a = -\frac{125^x - 5^x}{5x^2(625^x - 1)} = -\frac{5^x(25^x - 1)}{5x^2(25^{2x} - 1)} = -\frac{5^x}{5x^2(1 + 25^x)} (x \neq 0)$ ,

则  $a$  不为常数, 不合乎题意.

选③,  $g(x) = 125^x$ ,

则  $f(x) = \frac{a \cdot 125^x + 5^x}{a \cdot 25^x} = 5^x + \frac{1}{a} \cdot 5^{-x}$ ,  $f(-x) = 5^{-x} + \frac{1}{a} \cdot 5^x$ ,

当  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(x) = -f(-x)$ ,

即  $f(x) + f(-x) = \left(1 + \frac{1}{a}\right)(5^x + 5^{-x}) = 0$ , 可得  $a = -1$ ;

当  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(x) = f(-x)$ ,

则  $f(x) - f(-x) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)(5^x - 5^{-x}) = 0$ , 可得  $a = 1$ ;

(2)

由 (1) 知, 当  $f(x)$  为奇函数时,  $a = -1$ ,  $f(x) = 5^x - 5^{-x}$ ,

因为  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ,

所以  $5^x \in [\sqrt{5}, 25]$ ,

由于函数  $y_1 = 5^x$  在  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上为增函数, 函数  $y_2 = 5^{-x}$  在  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  为减函数,

所以, 函数  $f(x) = 5^x - 5^{-x}$  在  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上为增函数,

则  $f(x) \in \left[\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}, 25 + \frac{1}{25}\right]$ ,

若对于任意的  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ , 都有  $f(2x) \geq mf(x)$  成立,

所以  $m \leq \left\{ \frac{f(2x)}{f(x)} \right\}_{\min} = \left\{ \frac{5^{2x} - 5^{-2x}}{5^x - 5^{-x}} \right\}_{\min} = \{5^x + 5^{-x}\}_{\min}$ ,

设  $t = 5^x \in [\sqrt{5}, 25]$ ,  $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}$ ,

任取  $t_1, t_2 \in [\sqrt{5}, 25]$ , 且  $t_1 < t_2$ , 即  $\sqrt{5} \leq t_1 < t_2 \leq 25$ ,

则  $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = \left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) - \left(t_2 + \frac{1}{t_2}\right) = (t_1 - t_2) + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = (t_1 - t_2) + \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 t_2 - 1)}{t_1 t_2}$ ,

$\because \sqrt{5} \leq t_1 < t_2 \leq 25$ , 则  $t_1 - t_2 < 0$ ,  $t_1 t_2 > 5$ ,

可得  $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) < 0$ , 即  $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ ,

所以, 函数  $\varphi(t)$  在  $[\sqrt{5}, 25]$  上为增函数,

所以,  $\varphi(t)_{\min} = \varphi(\sqrt{5}) = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ , 即  $m \leq \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + \sqrt{5}}{5}$ .

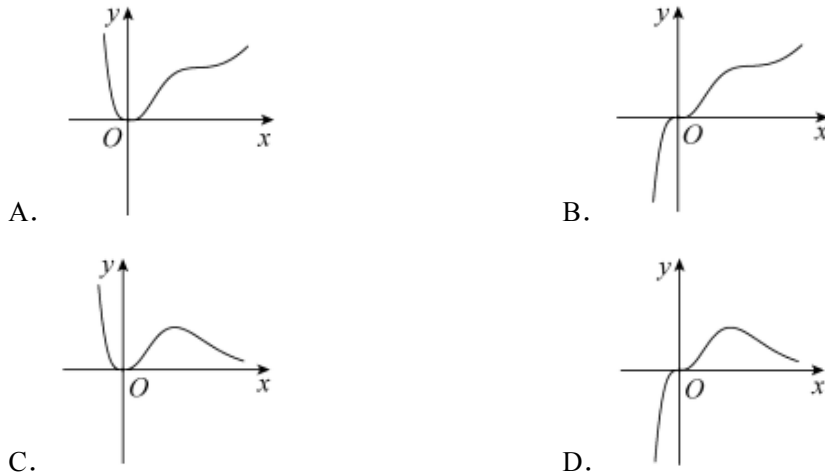
所以  $m$  的取值范围是  $\left(-\infty, \frac{5\sqrt{5} + \sqrt{5}}{5}\right]$ ;

# 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

## 一、单选题

1. 函数  $f(x) = \frac{x^3}{3^x + 1}$  的图象大致是 ( )



2. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $[-2, 2]$ , 则函数  $g(x) = f(2x) + \sqrt{1-2^x}$  的定义域为 ( )

- A.  $[0, 1]$                       B.  $[-1, 0]$                       C.  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$                       D.  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

3. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 1 \\ a + \left(\frac{1}{4}\right)^x, & x \geq 1 \end{cases}$  的值域为  $(a, +\infty)$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$                       B.  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$                       C.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$                       D.  $\left(\frac{1}{4}, 1\right]$

## 二、填空题

4. 函数  $y = a^{1-x}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线  $mx + ny - 1 = 0$  ( $mn > 0$ ) 上, 则  $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = ax^{-3} + 2$  的图像恒过定点 A, 则 A 的坐标为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = a^x$ ,  $g(x) = a^{2x} + m$ , 其中  $m > 0$ ,  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . 当  $x \in [-1, 1]$  时,  $y = f(x)$  的最大值与最小值之和为  $\frac{5}{2}$ .

( I ) 求  $a$  的值;

( II ) 若  $a > 1$ , 记函数  $h(x) = g(x) - 2mf(x)$ , 求当  $x \in [0, 1]$  时  $h(x)$  的最小值  $H(m)$ ;



参考答案:

1. D

【分析】根据函数的函数值与函数的单调性进行判断即可.

【详解】由题知当  $x < 0$  时, 函数  $f(x) < 0$ , 排除 A, C,

又由  $f(3) = \frac{27}{28}$ ,  $f(4) = \frac{32}{41}$ ,  $f(3) > f(4)$ , 排除 B.

故选: D.

【点睛】本题主要考查函数的图像问题, 解决此类问题, 基本就是排除法进行解题, 往往就是函数的特殊值, 奇偶性, 单调性, 周期性等等进行判断即可.

2. B

【分析】列出使函数  $g(x)$  有意义的不等式组, 解不等式组可得结果.

【详解】要使  $g(x)$  有意义, 则  $\begin{cases} -2 \leq 2x \leq 2 \\ 1 - 2^x \geq 0 \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq x \leq 0$ , 所以函数  $g(x)$  的定义域为

$[-1, 0]$ .

故选: B.

3. B

【分析】分段求解指数函数的值域, 结合已知条件, 即可容易求得参数范围.

【详解】当  $x < 1$  时,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = a + \left(\frac{1}{4}\right)^x \in \left(a, a + \frac{1}{4}\right]$

$\therefore$  函数  $f(x)$  的值域为  $(a, +\infty)$

$$\therefore \begin{cases} a + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \\ a \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 即 } a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

故选: B

【点睛】本题考查由分段函数的值域求参数范围, 涉及指数函数值域的求解, 属综合基础题.

4.  $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

【分析】求出定点 A 的坐标, 可得出  $m+n=1$ , 将代数式  $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n}$  与  $m+n$  相乘, 展开后利用

基本不等式可求得  $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n}$  的最小值.

【详解】当  $x=1$  时,  $y=a^0=1$ , 所以, 定点 A 的坐标为  $(1,1)$ ,

由已知可得  $m+n=1$ , 因为  $mn>0$ , 则  $m>0$  且  $n>0$ ,

$$\text{所以, } \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} = \left( \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} \right) (m+n) = \frac{3}{2} + \frac{n}{2m} + \frac{m}{n} \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{n}{2m} \cdot \frac{m}{n}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当  $n=\sqrt{2}m$  时, 等号成立, 因此,  $\frac{1}{2m} + \frac{1}{n}$  的最小值为  $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ .

故答案为:  $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ .

5.  $(3, 3)$

【分析】利用指数函数的性质  $a^0=1$ , 令  $x-3=0$ , 即得解

【详解】由  $a^0=1$  知, 当  $x-3=0$ , 即  $x=3$  时,  $f(3)=3$ ,

即图像必过定点  $(3, 3)$ .

故答案为:  $(3, 3)$

$$6. \text{ (I) } a=2 \text{ 或 } \frac{1}{2} \quad \text{(II) } H(m) = \begin{cases} -m+1, (0 < m < 1) \\ -m^2+m, (1 \leq m \leq 2) \\ -3m+4, (m > 2) \end{cases}$$

【分析】(I) 根据指数函数的单调性, 最值在区间端点取得, 根据最大值和最小值的和列方程, 解方程求得  $a$  的值. (II) 化简  $h(x)$ , 利用换元法转化为二次函数的形式. 根据对称轴进行分类讨论, 从而求得最小值  $H(m)$  的表达式.

【详解】(I)  $\because f(x)$  在  $[-1, 1]$  上为单调函数,

$$\therefore f(x) \text{ 的最大值与最小值之和为 } a+a^{-1}=\frac{5}{2},$$

$$\therefore a=2 \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

$$\text{(II) } h(x)=2^{2x}+m-2m \cdot 2^x \text{ 即 } h(x)=(2^x)^2-2m \cdot 2^x+m$$

$$\text{令 } t=2^x, \because x \in [0, 1] \text{ 时, } \therefore t \in [1, 2],$$

$$h(x)=t^2-2mt+m, \text{ 对称轴为 } t=m$$

$$\text{当 } 0 < m < 1 \text{ 时, } H(m)=h(1)=-m+1;$$

当  $1 \leq m \leq 2$  时,  $H(m) = h(m) = -m^2 + m$ ;

当  $m > 2$  时,  $H(m) = h(2) = -3m + 4$ .

综上所述, 
$$H(m) = \begin{cases} -m+1, & (0 < m < 1) \\ -m^2+m, & (1 \leq m \leq 2) \\ -3m+4, & (m > 2) \end{cases}$$

**【点睛】**本小题主要考查指数函数的单调性, 考查分类讨论二次函数的最值, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增      B. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增  
C. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减      D. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x}+1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f(a) < f(3a-1)$  的解集为 ( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$       B.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$   
C.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

3. 设  $a \log_3 4 = 2$ , 则  $4^{-a} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{16}$       B.  $\frac{1}{9}$       C.  $\frac{1}{8}$       D.  $\frac{1}{6}$

### 二、填空题

4. 函数  $y = (0.5^x - 8)^{\frac{1}{2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  是偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 指数函数  $y = f(x)$  图像经过点  $(3, 8)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 解不等式  $f(x^2 - x) \leq f(x + 3)$ .



参考答案:

1. B

【分析】根据奇函数的定义及指数函数的单调性判断可得;

【详解】解:  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = 3^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x = -f(x)$ ,

所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  为奇函数,

又  $y = 3^x$  与  $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$  在定义域上单调递增, 所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

故选: B

2. C

【分析】由函数解析式判断函数的单调性, 根据单调性将函数不等式转化为自变量的不等式, 解得即可;

【详解】解: 因为  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x}+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ,

当  $x < 0$  时  $f(x) = -3x+3$  函数单调递减, 且  $f(x) > -3 \times 0 + 3 = 3$ ,

当  $x \geq 0$  时  $f(x) = e^{-x} + 1$  函数单调递减, 且  $f(0) = e^0 + 1 = 2 < 3$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调递减,

所以不等式  $f(a) < f(3a-1)$  等价于  $a > 3a-1$ , 解得  $a < \frac{1}{2}$ .

即不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ;

故选: C

3. B

【分析】根据已知等式, 利用指数对数运算性质即可得解

【详解】由  $a \log_3 4 = 2$  可得  $\log_3 4^a = 2$ , 所以  $4^a = 9$ ,

所以有  $4^{-a} = \frac{1}{9}$ ,

故选: B.

【点睛】本题考查的是有关指对式的运算的问题, 涉及到的知识点有对数的运算法则, 指数的运算法则, 属于基础题目.

4.  $(-\infty, -3)$

【分析】将函数转化为根式形式，根据根式复合型函数定义域范围求解，转化为指数函数不等式  $2^{-x} > 2^3$ ，根据其单调性进一步求解.

【详解】因为  $y = (0.5^x - 8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0.5^x - 8}}$ ，所以  $0.5^x - 8 > 0$ ，则  $2^{-x} > 2^3$ ，

即  $-x > 3$ ，解得  $x < -3$ ，

故函数  $y = (0.5^x - 8)^{-\frac{1}{2}}$  的定义域为  $(-\infty, -3)$ .

故答案为： $(-\infty, -3)$ .

5. -1

【分析】利用偶函数的定义直接求解.

【详解】函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  的定义域为  $\mathbb{R}$ .

因为函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  是偶函数，所以  $f(x) = f(-x)$ ，即  $ae^{-x} - e^x + a = ae^x - e^{-x} + a$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立，

亦即  $(a+1)e^{-x} = (a+1)e^x$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立，

所以  $a = -1$ .

故答案为：-1

6. (1)  $f(x) = 2^x$

(2)  $[-1, 3]$

【分析】(1) 设  $f(x) = a^x$ ，( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，将点 (3,8) 代入计算可得；

(2) 根据函数单调性即可求出不等式的解集.

(1)

解：  $\because$  指数函数的图象经过点 (3,8)，设  $f(x) = a^x$ ，( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，

$\therefore a^3 = 8$ ，

解得  $a = 2$ ，

$\therefore f(x) = 2^x$ ；

(2)

解：由于函数  $f(x)=2^x$  为  $R$  上增函数，且  $f(x^2-x)\leq f(x+3)$ ，

$$\therefore x^2-x\leq x+3,$$

解得  $-1\leq x\leq 3$ ，

则不等式的解集为  $[-1,3]$ ．



# 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

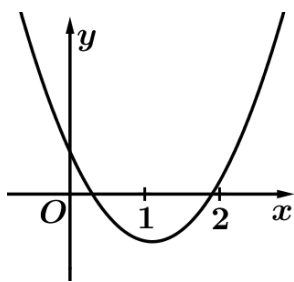
未命名

## 一、单选题

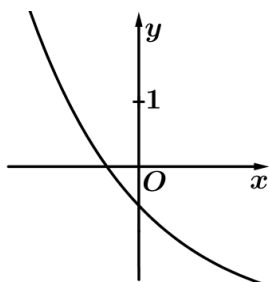
1. 下列函数中是增函数的为 ( )

- A.  $f(x) = -x$       B.  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$       C.  $f(x) = x^2$       D.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

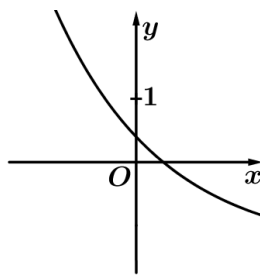
2. 已知函数  $f(x) = (x-a)(x-b)$  (其中  $a > b$ ) 的图象如图所示, 则函数  $g(x) = a^x + b - 2$  的图像是 ( )



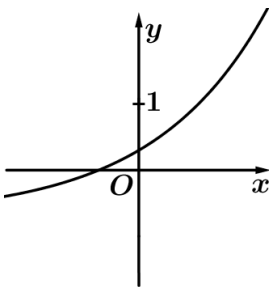
A.



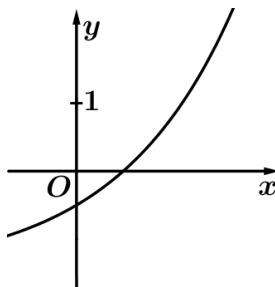
B.



C.



D.



## 二、填空题

3. 已知函数  $f(x) = \sqrt{2^x - a}$  的定义域为  $[2, +\infty)$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

4. 已知函数  $f(x) = 2^{|x-a|}$  ( $a$  为常数), 若  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

5. 函数  $y = (0.5^x - 8)^{-\frac{1}{2}}$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数,  $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$  是奇函数.

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 若对任意的  $t \in \mathbf{R}$ , 不等式  $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

参考答案:

1. D

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于 A,  $f(x) = -x$  为  $R$  上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 B,  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  为  $R$  上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 C,  $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  为减函数, 不合题意, 舍.

对于 D,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  为  $R$  上的增函数, 符合题意,

故选: D.

2. D

【分析】由二次函数图象可得  $0 < b < 1, 1 < a < 2$ , 然后利用排除法结合指数函数的性质分析判断即可

【详解】由函数  $f(x) = (x-a)(x-b)$  (其中  $a > b$ ) 的图象可得  $0 < b < 1, 1 < a < 2$ ,

所以  $g(0) = a^0 + b - 2 = b - 1 < 0$ , 所以排除 BC,

因为  $1 < a < 2$ , 所以  $g(x) = a^x + b - 2$  为增函数, 所以排除 A,

故选: D

3. 4

【分析】由已知可得不等式  $2^x - a \geq 0$  的解集为  $[2, +\infty)$ , 可知  $x = 2$  为方程  $2^x - a = 0$  的根, 即可求得实数  $a$  的值.

【详解】由题意可知, 不等式  $2^x - a \geq 0$  的解集为  $[2, +\infty)$ , 则  $2^2 - a = 0$ , 解得  $a = 4$ ,

当  $a = 4$  时, 由  $2^x - 4 \geq 0$ , 可得  $2^x \geq 4 = 2^2$ , 解得  $x \geq 2$ , 合乎题意.

故答案为: 4.

4.  $(-\infty, 1]$

【分析】首先根据题意得到  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ , 从而得到当  $x \geq a$  时, 函数  $f(x)$  为增

函数, 再根据题意即可得到答案.

【详解】因为函数  $f(x) = 2^{|x-a|} = \begin{cases} 2^{x-a}, & x \geq a \\ 2^{a-x}, & x < a \end{cases}$ ,

当  $x \geq a$  时, 函数  $f(x)$  为增函数,

而已知函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数, 所以  $a \leq 1$ , 即  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ .

故答案为:  $(-\infty, 1]$

5.  $(-\infty, -3)$

【分析】将函数转化为根式形式, 根据根式复合型函数定义域范围求解, 转化为指数函数不等式  $2^{-x} > 2^3$ , 根据其单调性进一步求解.

【详解】因为  $y = (0.5^x - 8)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0.5^x - 8}}$ , 所以  $0.5^x - 8 > 0$ , 则  $2^{-x} > 2^3$ ,

即  $-x > 3$ , 解得  $x < -3$ ,

故函数  $y = (0.5^x - 8)^{\frac{1}{2}}$  的定义域为  $(-\infty, -3)$ .

故答案为:  $(-\infty, -3)$ .

6. (1)  $a = 2$ ,  $b = 1$ ; (2)  $k < -\frac{1}{3}$ .

【解析】(1) 根据  $f(0) = 0$ , 可得  $b = 1$ , 再由  $f(1) = -f(-1)$  即可求解.

(2) 判断  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数, 结合函数为奇函数可得  $t^2 - 2t > -2t^2 + k$ , 从而可得对一切  $t \in \mathbf{R}$  有  $3t^2 - 2t - k > 0$ , 由  $\Delta < 0$  即可求解.

【详解】(1) 因为  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,

所以  $f(0) = 0$ , 即  $\frac{-1+b}{2+a} = 0$ , 解得  $b = 1$ .

从而有  $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + a}$ .

又由  $f(1) = -f(-1)$ , 知  $\frac{-2+1}{4+a} = -\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$ , 解得  $a = 2$ .

经检验, 当  $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + 2}$  时,  $f(-x) = -f(x)$ , 满足题意.

(2) 由 (1) 知  $f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + 2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^x + 1}$ ,

由上式易知  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上为减函数,

又因为  $f(x)$  是奇函数，从而不等式  $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$

等价于  $f(t^2 - 2t) < -f(2t^2 - k) = f(-2t^2 + k)$ .

因为  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数，由上式推得  $t^2 - 2t > -2t^2 + k$ .

即对一切  $t \in \mathbf{R}$  有  $3t^2 - 2t - k > 0$ ,

从而  $\Delta = 4 + 12k < 0$ , 解得  $k < -\frac{1}{3}$ .

# 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

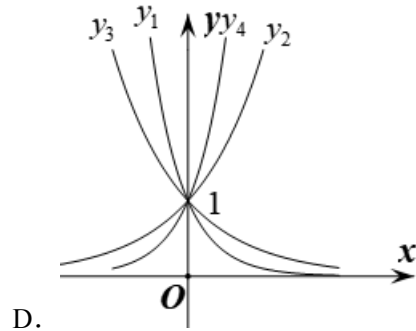
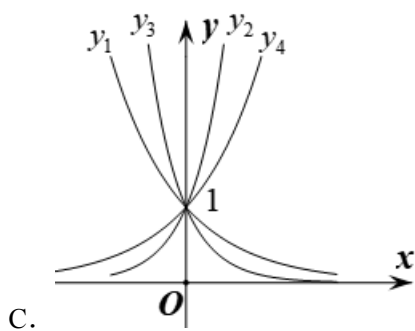
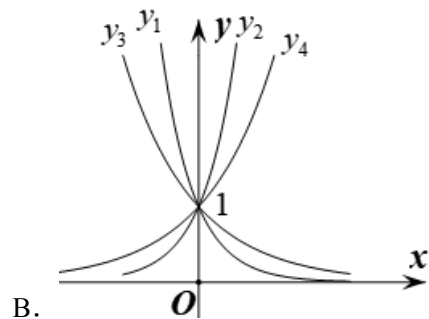
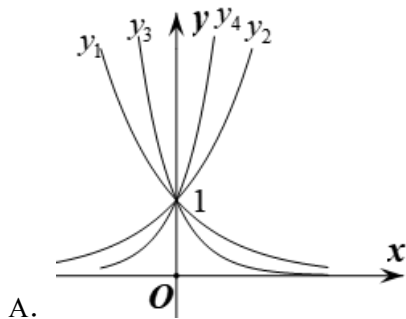
学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 函数  $f(x) = \frac{1}{3^x + 1}$  的值域是 ( )

- A.  $(-\infty, 1)$   
B.  $(0, 1)$   
C.  $(1, +\infty)$   
D.  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

2. 已知  $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,  $y_2 = 3^x$ ,  $y_3 = 10^{-x}$ ,  $y_4 = 10^x$ , 则在同一平面直角坐标系内, 它们的图象大致为 ( )



3. 已知函数  $f(x) = 2^x - x - 1$ , 则不等式  $f(x) > 0$  的解集是 ( ).

- A.  $(-1, 1)$   
B.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$   
C.  $(0, 1)$   
D.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

## 二、填空题

4. 方程  $2^x + 3x = k$  的解在  $(1, 2)$  内, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ |x-1|, & x > 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f(x) \leq 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = a^{x-1} + 2$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 图像经过点  $(2, 4)$ ,

(1) 求  $a$  的值

(2) 求函数  $f(x)$  的值域

参考答案:

1. B

【分析】根据 $3^x$ 的范围,利用不等式法,即可求得函数值域.

【详解】 $\because 3x+1>1, \therefore 0<\frac{1}{3^x+1}<1,$

$\therefore$ 函数的值域为 $(0, 1)$ .

故选: B.

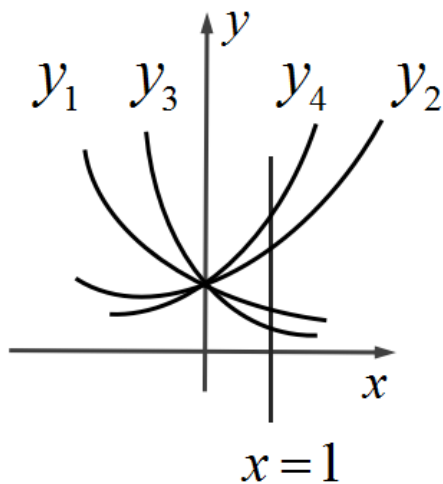
【点睛】本题考查利用不等式法求指数型复合函数值域的求解,属基础题.

2. A

【分析】根据指数函数的单调性及图像特征进行比较,即可判断.

【详解】 $y_2=3^x$ 与 $y_4=10^x$ 是增函数,  $y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 与 $y_3=10^{-x}=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 是减函数,在第一象限内

作直线 $x=1$ ,



该直线与四条曲线交点的纵坐标的大小对应各底数的大小,易知:选 A.

故选: A

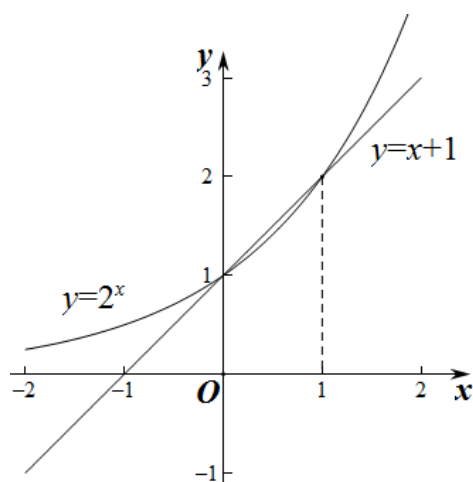
3. D

【分析】作出函数 $y=2^x$ 和 $y=x+1$ 的图象,观察图象可得结果.

【详解】因为 $f(x)=2^x-x-1$ ,所以 $f(x)>0$ 等价于 $2^x>x+1$ ,

在同一直角坐标系中作出 $y=2^x$ 和 $y=x+1$ 的图象如图:





两函数图象的交点坐标为 $(0,1), (1,2)$ ,

不等式 $2^x > x+1$ 的解为 $x < 0$ 或 $x > 1$ .

所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集为： $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

故选：D.

【点睛】本题考查了图象法解不等式，属于基础题.

4.  $(5,10)$

【分析】先令 $y = 2^x + 3x, x \in (1,2)$ ，按照单调性求出函数的值域，写出 $k$ 的取值范围即可.

【详解】令 $y = 2^x + 3x, x \in (1,2)$ ，显然该函数为增函数， $2^1 + 3 \times 1 = 5, 2^2 + 3 \times 2 = 10$ ，值域为

$(5,10)$ ，故 $5 < k < 10$ .

故答案为： $(5,10)$ .

5.  $(-\infty, 2]$

【分析】根据给定条件，分段解不等式，再求并集作答.

【详解】当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = e^x \leq 1$ ，解得 $x \leq 0$ ，于是得： $x \leq 0$ ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = |x-1| \leq 1$ ，解得 $0 \leq x \leq 2$ ，于是得 $0 < x \leq 2$ ，

所以 $f(x) \leq 1$ 的解集为 $(-\infty, 2]$ .

故答案为： $(-\infty, 2]$

6. (1)  $a = 2$ ； (2)  $(2, +\infty)$

【分析】(1) 将点代入函数 $f(x)$ 即可求出 $a$ 的取值；

(2) 利用指数函数的性质可得到函数  $f(x)$  的单调性, 再结合指数函数的值域即可求出函数  $f(x)$  的值域.

【详解】(1) 因为函数  $f(x) = a^{x-1} + 2$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 图像经过点  $(2, 4)$ ,  
所以  $a + 2 = 4$   
 $\therefore a = 2$

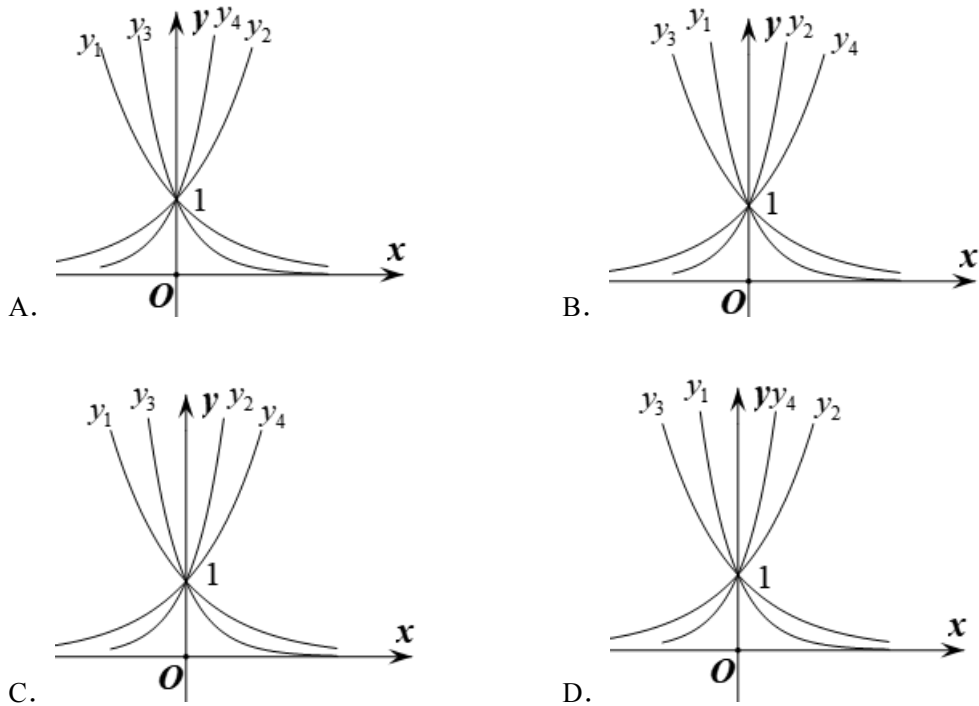
(2) 由 (1) 可知,  $f(x) = 2^{x-1} + 2$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增,  
 $\therefore 2^{x-1} > 0$ ,  
 $\therefore f(x)$  的值域为  $(2, +\infty)$ .

# 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

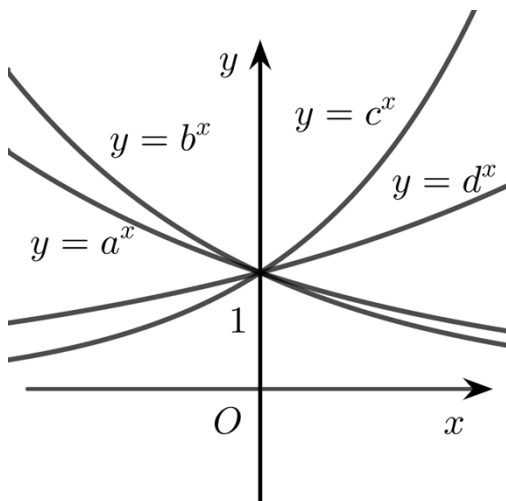
学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

## 一、单选题

1. 已知  $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,  $y_2 = 3^x$ ,  $y_3 = 10^{-x}$ ,  $y_4 = 10^x$ , 则在同一平面直角坐标系内, 它们的图象大致为 ( )



2. 函数①  $y = a^x$ ; ②  $y = b^x$ ; ③  $y = c^x$ ; ④  $y = d^x$  的图象如图所示,  $a, b, c, d$  分别是下列四个数:  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  中的一个, 则  $a, b, c, d$  的值分别是 ( )



A.  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

B.  $\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4},$

D.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \sqrt{3},$

3. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足:  $f(2+x)=f(2-x)$ , 当  $x \geq 2$  时,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 2 \\ \lg(x-2), & x > 2 \end{cases}, \text{ 则不等式 } f(x) > 0 \text{ 的解集为 ( )}$$

A.  $(-\infty, 1)$

B.  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

C.  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

D.  $(3, +\infty)$

## 二、填空题

4. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3^x + 1} + a$  为奇函数, 则方程  $f(x) = \frac{1}{4}$  的解是  $x =$ \_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = a^{x+1} - 2 (a > 0, a \neq 1)$ , 的图象不经过第四象限, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = 4^x + 4^{-x} + m(2^x - 2^{-x})$ .

(1) 若  $m = 2\sqrt{2}$ , 求  $f(x)$  的值域;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最小值为 1, 求  $m$  的值.

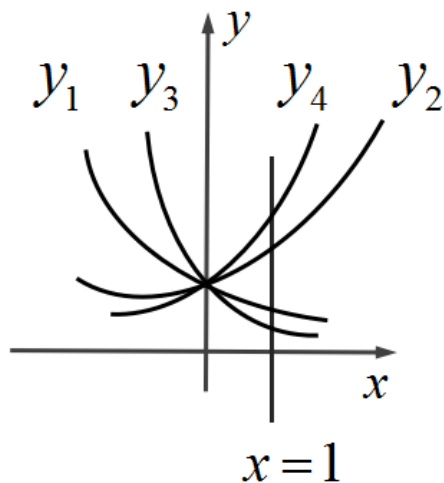
参考答案:

1. A

【分析】根据指数函数的单调性及图像特征进行比较,即可判断.

【详解】 $y_2 = 3^x$ 与 $y_4 = 10^x$ 是增函数,  $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 与 $y_3 = 10^{-x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 是减函数,在第一象限内

作直线 $x=1$ ,



该直线与四条曲线交点的纵坐标的大小对应各底数的大小,易知:选A.

故选:A

2. C

【分析】根据指数函数的性质,结合函数图象判断底数的大小关系.

【详解】由题图,直线 $x=1$ 与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为 $c, d, a, b$ ,而

$$\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

故选:C.

3. C

【分析】先考虑当 $x \geq 2$ 时不等式的解集,再根据图象的对称性可得 $x \leq 2$ 时不等式的解集,从而得到正确的选项.

【详解】当 $x \geq 2$ 时, $f(x) > 0$ 的解为 $\begin{cases} x=2 \\ 0 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 2 \\ \lg(x-2) > 0 \end{cases}$ ,解得 $x > 3$ ,

因为 $f(2+x) = f(2-x)$ ,故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,

故当 $x \leq 2$ 时, $f(x) > 0$ 的解为 $x < 1$ ,

所以 $f(x) > 0$ 的解集为: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

故选：C.

【点睛】本题考查函数图象的对称性、分段函数构成的不等式的解，后者一般有两类处理方法：（1）根据范围分类讨论；（2）画出分段函数的图象，数形结合解决与分段函数有关的不等式或方程等，本题属于中档题.

4. -1

【分析】根据奇函数满足  $f(0)=0$  可得  $a$ ，再求解  $f(x)=\frac{1}{4}$  即可

【详解】因为函数  $f(x)=\frac{1}{3^x+1}+a$  为奇函数，故  $f(0)=\frac{1}{3^0+1}+a=0$ ，解得  $a=-\frac{1}{2}$ ，故

$f(x)=\frac{1}{4}$  即  $\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ，故  $3(3^x+1)=4$ ，解得  $x=-1$

故答案为：-1

5.  $[2, +\infty)$ .

【解析】根据  $0 < a < 1$  和  $a > 1$  两种情况讨论，令  $f(x) \geq 0$ ，得出不等式，即可求解.

【详解】当  $0 < a < 1$  时，令  $f(x) \geq 0$ ，可得  $a - 2 \geq 0$ ，此时不等式的解集为空集，（舍去）；

当  $a > 1$  时，令  $f(x) \geq 0$ ，可得  $a - 2 \geq 0$ ，即  $a \geq 2$ ，即实数  $a$  的取值范围  $[2, +\infty)$ ，

综上可得，实数  $a$  的取值范围  $[2, +\infty)$ .

故答案为：  $[2, +\infty)$ .

6. (1)  $[0, +\infty)$

(2)-2

【分析】（1）换元法令  $t = 2^x - 2^{-x}, t \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = t^2 + 2 + 2\sqrt{2}t$ ，即可求解；

（2）换元法分类讨论考虑函数  $g(t) = t^2 + mt + 2, t \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$  的最小值情况即可得解.

（1）

$$m = 2\sqrt{2}, \quad f(x) = 4^x + 4^{-x} + 2\sqrt{2}(2^x - 2^{-x}),$$

$$\text{令 } t = 2^x - 2^{-x}, t \in \mathbb{R}, \quad t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2,$$

$$\text{则 } f(x) = t^2 + 2 + 2\sqrt{2}t = (t + \sqrt{2})^2 \in [0, +\infty),$$

所以  $f(x)$  的值域  $[0, +\infty)$ ；

（2）

$$\text{令 } t = 2^x - 2^{-x}, x \in [0, 1], t \in \left[0, \frac{3}{2}\right], \quad t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2,$$

$$\text{则 } f(x) = t^2 + 2 + mt,$$

$$\text{考虑函数 } g(t) = t^2 + mt + 2, t \in \left[0, \frac{3}{2}\right],$$

$$\text{当 } -\frac{m}{2} \leq 0 \text{ 时, } g(t) = t^2 + mt + 2, t \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \text{ 单调递增, 最小值 } g(0) = 2 \text{ 不合题意, 舍去;}$$

$$\text{当 } -\frac{m}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ 时, } g(t) = t^2 + mt + 2, t \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \text{ 单调递减, 最小值 } g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3m}{2} + 2 = 1, \text{ 解得}$$

$$m = -\frac{13}{6}, \text{ 不合题意, 舍去;}$$

$$\text{当 } 0 < -\frac{m}{2} < \frac{3}{2} \text{ 时, } g(t) = t^2 + mt + 2, t \in \left[0, -\frac{m}{2}\right] \text{ 单调递减, } \left[-\frac{m}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ 单调递增, 所以最小值}$$

$$g\left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 2 = 1, \quad m^2 = 4,$$

$$\text{所以 } m = -2$$

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知  $a = \log_2 0.2, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$ , 则

- A.  $a < b < c$       B.  $a < c < b$       C.  $c < a < b$       D.  $b < c < a$

2. 下列函数中是增函数的为 ( )

- A.  $f(x) = -x$       B.  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$       C.  $f(x) = x^2$       D.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

3. 已知  $f(x) = ax^2 + bx$  是定义在  $[a-1, 2a]$  上的偶函数, 那么  $y = f(a^n + b)$  的最大值是

( )

- A. 1      B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\sqrt[3]{3}$       D.  $\frac{4}{27}$

### 二、填空题

4. 函数  $f(x) = x\left(\frac{1}{2^x - a} + \frac{1}{2}\right)$  定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 则满足不等式  $ax \geq f(a)$  的实数  $x$  的集合为\_\_\_\_\_.

5. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

①定义域为  $R$ ; ②值域为  $(-\infty, 1)$ ; ③对任意  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $x_1 \neq x_2$ , 均有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = -\frac{2^x}{2^x + 1}$ .

(1) 用定义证明函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为减函数;

(2) 若  $x \in [1, 2]$ , 求函数  $f(x)$  的值域;





参考答案:

1. B

【分析】运用中间量0比较 $a, c$ ，运用中间量1比较 $b, c$

【详解】 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$ ,  $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$ ,  $0 < 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$ , 则  $0 < c < 1, a < c < b$ . 故选

B.

【点睛】本题考查指数和对数大小的比较，渗透了直观想象和数学运算素养. 采取中间变量法，利用转化与化归思想解题.

2. D

【分析】根据基本初等函数的性质逐项判断后可得正确的选项.

【详解】对于 A,  $f(x) = -x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 B,  $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$  为  $R$  上的减函数，不合题意，舍.

对于 C,  $f(x) = x^2$  在  $(-\infty, 0)$  为减函数，不合题意，舍.

对于 D,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  为  $R$  上的增函数，符合题意，

故选: D.

3. D

【分析】根据题意，由函数奇偶性的定义分析 $a, b$ 的值，即可得 $y = f(a^n + b)$ 的解析式，由复合函数单调性的判断方法分析 $y = f(a^n + b)$ 的单调性，据此分析可得答案.

【详解】解: 根据题意,  $f(x) = ax^2 + bx$  是定义在  $[a-1, 2a]$  上的偶函数, 则有

$$(a-1) + 2a = 3a - 1 = 0, \text{ 则 } a = \frac{1}{3},$$

同时  $f(-x) = f(x)$ , 即  $ax^2 + bx = a(-x)^2 + b(-x)$ , 则有  $bx = 0$ , 必有  $b = 0$ ,

则  $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ , 其定义域为  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ,

则  $y = f(a^n + b) = f\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ , 设  $t = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , 若  $-\frac{2}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{2}{3}$ , 则有  $n \geq -\log_3 \frac{2}{3} > 0$ ,

在区间  $[-\log_3 \frac{2}{3}, +\infty)$  上,  $t > 0$  且为减函数,

$f(x) = \frac{1}{3}x^2$  在区间  $(0, \frac{2}{3}]$  上为增函数,

则  $y = f\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$  在  $[-\log_3 \frac{2}{3}, +\infty)$  上为减函数, 其最大值为  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ ,

故选:  $D$ .

4.  $\{x|x \geq 1\}$

【分析】由题意可得  $a=2$ ,  $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-2}+\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(a)=f(2)=2$ , 由  $ax \geq f(a)$ , 结合指数函数单调性可求  $x$

【详解】解: 由函数  $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-a}+\frac{1}{2}\right)$  定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 可知  $a=2$

$$\therefore f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-2}+\frac{1}{2}\right), \quad f(a)=f(2)=2$$

由  $ax \geq f(a)$  可得,  $2x \geq 2$

$$\therefore x \geq 1$$

故答案为:  $\{x|x \geq 1\}$

5.  $f(x)=1-\frac{1}{2^x}$  (答案不唯一)

【分析】直接按要求写出一个函数即可.

【详解】 $f(x)=1-\frac{1}{2^x}$ , 定义域为  $R$ ;  $\frac{1}{2^x} > 0$ ,  $f(x)=1-\frac{1}{2^x} < 1$ , 值域为  $(-\infty, 1)$ ;

是增函数, 满足对任意  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $x_1 \neq x_2$ , 均有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ .

故答案为:  $f(x)=1-\frac{1}{2^x}$  (答案不唯一).

6. (1) 证明见解析; (2)  $[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ .

【分析】(1) 取任意  $x_1 > x_2$ , 根据函数解析式判断  $f(x_1)-f(x_2)$  的符号即可证明结论.

(2) 令  $t=2^x=[2, 4]$ , 可得  $g(t)=\frac{1}{t+1}-1$ , 由其单调性即可求  $f(x)$  的值域.

【详解】(1) 取任意  $x_1 > x_2$ , 则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_2}}{2^{x_2}+1}-\frac{2^{x_1}}{2^{x_1}+1}=\frac{2^{x_1+x_2}+2^{x_2}-2^{x_1+x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)},$$

$$\text{又 } 2^{x_2}-2^{x_1} < 0, (2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1) > 0,$$

$$\therefore f(x_1)-f(x_2) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2).$$

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为减函数.

(2)  $x \in [1, 2]$ , 则  $t=2^x=[2, 4]$ ,

$\therefore g(t) = -\frac{t}{t+1} = \frac{1}{t+1} - 1$ , 易知  $g(t)$  在  $[2, 4]$  上单调递减,

又  $g(2) = -\frac{2}{3}$ ,  $g(4) = -\frac{4}{5}$ , 故  $g(t) \in [-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ , 即  $f(x)$  的值域为  $[-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}]$ .

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

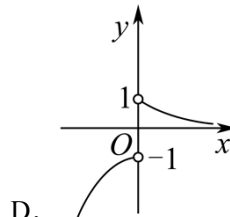
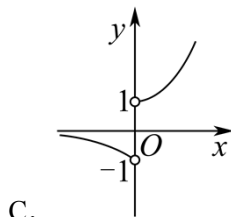
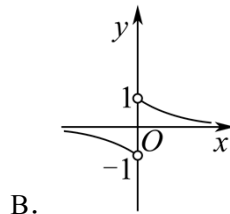
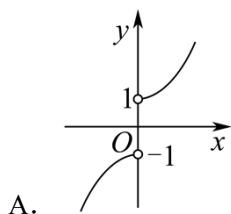
1. 下列函数中为指数函数的是 ( )

- A.  $y = 2 \cdot 3^x$       B.  $y = -3^x$       C.  $y = 3^{-x}$       D.  $y = 1^x$

2. 已知函数  $f(x) = 4 + a^{x+1}$  的图象经过定点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是 ( )

- A.  $(-1, 5)$       B.  $(-1, 4)$       C.  $(0, 4)$       D.  $(4, 0)$

3. 函数  $y = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$  的图像大致形状是 ( )



### 二、填空题

4. 不等式  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

5. 若  $3^{2x-1} = 1$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = 1 - \frac{2}{5^x + 1}$ .

(1) 证明: 函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数;

(2)  $x \in [-1, 2]$  时, 求函数  $f(x)$  的值域.



**参考答案:**

1. C

【分析】根据指数函数的定义，逐项判定，即可求解.

【详解】根据指数函数的定义知， $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ ,

可得函数  $y = 2 \cdot 3^x$  不是指数函数；函数  $y = -3^x$  不是指数函数；函数  $y = 3^{-x}$  是指数函数；函数  $y = 1^x$  不是指数函数.

故选：C.

2. A

【分析】令  $x+1=0$ ，即可求出定点坐标；

【详解】当  $x+1=0$ ，即  $x=-1$  时， $a^{x+1} = a^0 = 1$ ，为常数，

此时  $f(x) = 4+1=5$ ，即点  $P$  的坐标为  $(-1, 5)$ .

故选：A.

【点睛】本题考查指数型函数过定点，考查运算求解能力，属于基础题.

3. C

【分析】分  $x > 0$  和  $x < 0$  两种情况，然后根据指数函数图像和对称性进行判断.

【详解】解：令  $y = f(x) = \frac{xa^x}{|x|} (a > 1)$ ，则  $f(x) = \begin{cases} a^x (x > 0) \\ -a^x (x < 0) \end{cases} (a > 1)$

$\therefore$  当  $x > 0$  时， $y = a^x$  在第一象限内的图像一样；

当  $x < 0$  时，其图像与  $y = a^x (x < 0)$  的图像关于  $x$  轴对称；

故选：C

4.  $(-\infty, 0)$

【分析】直接由指数函数的单调性解不等式即可.

【详解】由  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ，可得  $x < 0$ ，故解集为  $(-\infty, 0)$ .

故答案为： $(-\infty, 0)$ .

5.  $\frac{1}{2}$

【分析】将已知方程，利用指数的性质将两边化成同底数的幂，利用指数函数的性质即得

$2x-1=0$ ,从而求得.

【详解】 $3^{2x-1}=1=3^0$ ,  $\therefore 2x-1=0$ ,  $\therefore x=\frac{1}{2}$ ,

故答案为:  $\frac{1}{2}$

6. (1) 证明见解析; (2)  $[-\frac{2}{3}, \frac{12}{13}]$ .

【分析】(1) 根据函数单调性的定义, 令  $x_1 < x_2$ , 结合函数解析式判断  $f(x_1), f(x_2)$  的大小关系, 即可证结论.

(2) 由 (1) 知  $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$ , 即可得  $x \in [-1, 2]$  上的值域.

【详解】(1) 令  $x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = 1 - \frac{2}{5^{x_1} + 1} - (1 - \frac{2}{5^{x_2} + 1}) = \frac{2(5^{x_1} - 5^{x_2})}{(5^{x_2} + 1)(5^{x_1} + 1)}$ ,

由  $(5^{x_2} + 1)(5^{x_1} + 1) > 0$ ,  $5^{x_1} - 5^{x_2} < 0$ , 即  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 有  $f(x_1) < f(x_2)$ .

$\therefore$  函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数;

(2) 由 (1) 知:  $x \in [-1, 2]$  上有  $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$ ,

$\therefore f(x)$  的值域为  $[-\frac{2}{3}, \frac{12}{13}]$ .



## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 在① $y=4^x$ ; ② $y=x^4$ ; ③ $y=-4^x$ ; ④ $y=(-4)^x$ ; ⑤ $y=\frac{1}{4^x}$ 中,  $y$ 是关于 $x$ 的指数函数的个数是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

2. 函数 $y=(a^2-4a+4)a^x$ 是指数函数, 则有 ( )

- A.  $a=1$  或  $a=3$       B.  $a=1$                       C.  $a=3$                       D.  $a>0$  且  $a\neq 1$

3. 已知 $a=2^{0.1}$ ,  $b=0.3^3$ ,  $c=0.3^{0.1}$ , 则 $a, b, c$ 的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$                       B.  $c < b < a$   
C.  $b < c < a$                       D.  $a < c < b$

### 二、填空题

4. 若指数函数 $y=a^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值和最小值的差为 $\frac{1}{2}$ , 则底数 $a=$ \_\_\_\_\_

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\frac{a+2}{a^2}\cdot 3^{-x}$  ( $a\neq 0$ ) 为奇函数, 则 $a=$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知指数函数 $f(x)=ax$  ( $a>0$  且  $a\neq 1$ ), 过点 $(2, 4)$ .

(1)求 $f(x)$ 的解析式;

(2)若 $f(2m-1)\cdot f(m+3)<0$ , 求实数 $m$ 的取值范围.



参考答案:

1. B

【分析】根据指数函数的定义进行求解判断即可.

【详解】根据指数函数的定义, 知①⑤中的函数是指数函数, ②中底数不是常数, 指数不是自变量, 所以不是指数函数; ③中 $4^x$ 的系数是-1, 所以不是指数函数; ④中底数 $-4 < 0$ , 所以不是指数函数.

故选: B.

2. C

【分析】根据已知条件列不等式, 由此求得正确选项.

【详解】由已知得 $\begin{cases} a^2 - 4a + 4 = 1 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ , 即 $\begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ , 解得 $a = 3$ .

故选: C

3. C

【分析】根据指数函数的单调性比较大小.

【详解】 $\because y = 0.3^x$  是减函数,  $3 > 0.1 > 0$ , 所以 $0.3^3 < 0.3^{0.1} < 1$ ,

又 $2^{0.1} > 1$ ,

$\therefore b < c < a$ .

故选: C.

4.  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{3}{2}$  或  $\frac{1}{2}$

【分析】就 $a > 1, 0 < a < 1$ 分类讨论后可得关于 $a$ 的方程, 从而可得 $a$ 的值.

【详解】若 $a > 1$ , 则指数函数 $y = a^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $a$ , 最小值为1,

所以 $a - 1 = \frac{1}{2}$ , 即 $a = \frac{3}{2}$ ,

若 $0 < a < 1$ , 则指数函数 $y = a^x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为1, 最小值为 $a$ ,

故 $1 - a = \frac{1}{2}$ , 即 $a = \frac{1}{2}$ ,

故答案为:  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ .

5. 2 或 -1

【分析】根据条件，由  $f(0)=0$ ，求出  $a$  的值，再检验即可.

【详解】函数  $f(x)=3^x-\frac{a+2}{a^2}\cdot 3^{-x}(a\neq 0)$  为奇函数，其定义域为  $R$

由  $f(0)=1-\frac{a+2}{a^2}=0$ ，解得  $a=2$  或  $a=-1$

当  $a=2$  时， $f(x)=3^x-3^{-x}$ ，则  $f(-x)=3^{-x}-3^x=-f(x)$ ，满足条件.

当  $a=-1$  时， $f(x)=3^x-3^{-x}$ ，则  $f(-x)=3^{-x}-3^x=-f(x)$ ，满足条件.

故答案为：2 或 -1

6. (1)  $f(x)=2^x$

(2)  $m < 4$

【分析】(1) 将点 (2, 4) 代入函数解析式即可；

(2) 根据函数的单调性，即可求出  $m$  的取值范围.

(1)

将点 (2, 4) 代入  $f(x)=a^x$ ，得  $4=a^2, a=2$ ，

故  $f(x)=2^x$ ；

(2)

$\because 2 > 1$ ， $\therefore f(x)$  是增函数，

$f(2m-1)-f(m+3) < 0$ ，即  $f(2m-1) < f(m+3)$ ，

$2m-1 < m+3$ ， $m < 4$ ；

综上， $f(x)=2^x$ ， $m < 4$ .

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知  $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c = \pi^{\frac{1}{2}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )
- A.  $b < a < c$                       B.  $a < c < b$                       C.  $b < c < a$                       D.  $a < b < c$
2. 若  $2^x = 8^{y+1}$ , 且  $9^y = 3^{x-9}$ , 则  $x+y$  的值是 ( )
- A. 18                                      B. 24                                      C. 21                                      D. 27
3. 已知集合  $A = (0, +\infty)$ ,  $B = \{y \mid y = 2^x, x \in A\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
- A.  $(1, +\infty)$                       B.  $[0, +\infty)$                       C.  $(0, +\infty)$                       D.  $[0, 1)$

### 二、填空题

4. 函数  $y = a^{x-2} + 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$  的图像必经过点\_\_\_\_\_
5. 函数  $y = 3^{x+1} - 2$  的图像是由函数  $y = 3^x$  的图像沿  $x$  轴向\_\_\_\_\_ 平移\_\_\_\_\_ 个单位, 再沿  $y$  轴向\_\_\_\_\_ 平移\_\_\_\_\_ 个单位得到的.

### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ , 试讨论函数  $f(x)$  的单调性.



参考答案:

1. D

【分析】结合指数函数的单调性确定正确选项.

【详解】 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  在  $R$  上递减,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 < \pi^{\frac{1}{2}},$$

即  $a < b < c$ .

故选: D

2. D

【分析】根据  $2^x = 8^{y+1}$ 、 $9^y = 3^{x-9}$  得到关于  $x, y$  的两个方程, 解出  $x, y$  的值即可得到答案.

【详解】解:  $\because 2^x = 8^{y+1}$ ,  $\therefore$  有  $2^x = 2^{3y+3}$ ,  $\therefore x = 3y + 3$ ;

又  $9^y = 3^{x-9}$ ,  $\therefore 3^{2y} = 3^{x-9}$ ,  $\therefore 2y = x - 9$ ;

联立方程, 解得  $\begin{cases} x = 21 \\ y = 6 \end{cases}$ ,  $\therefore x + y = 27$ ,

故选: C.

3. A

【分析】先求出集合  $B$ , 进而通过集合的交集运算求出  $A \cap B$ .

【详解】对集合  $B$ , 由题意:  $x \in (0, +\infty)$ , 所以  $y = 2^x > 1$ , 则  $B = (1, +\infty)$ ,  $\therefore A \cap B = (1, +\infty)$ .

故选: A.

4. (2,2)

【分析】指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图像必经过点  $(0, 1)$ , 由此计算即可.

【详解】令  $x - 2 = 0$ , 解得  $x = 2$ , 当  $x = 2$  时  $y = a^0 + 1 = 2$ ,

所以函数  $y = a^{x-2} + 1$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图像必经过点  $(2, 2)$ .

故答案为: (2,2)

5. 左 1 下 2

【分析】利用函数图象变换规律即得.

【详解】函数  $y = 3^{x+1} - 2$  的图象由函数  $y = 3^x$  的图像沿  $x$  轴向左平移 1 个单位得到函数  $y = 3^{x+1}$

的图象，再沿  $y$  轴向下平移 2 个单位得到的.

故答案为：左；1；下；2.

6.  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数.

【分析】利用函数单调性的定义讨论即可.

【详解】因为  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,

设  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $x_1 < x_2$ , 则  $2^{x_1} < 2^{x_2}$ ,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - \frac{2}{2^{x_1} + 1} - \left(1 - \frac{2}{2^{x_2} + 1}\right) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} \\ &= \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)} < 0, \text{ 所以 } f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

故  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数.



## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = 4 + a^{x+1}$  的图象经过定点  $P$ , 则点  $P$  的坐标是 ( )  
A.  $(-1, 5)$       B.  $(-1, 4)$       C.  $(0, 4)$       D.  $(4, 0)$
2. 已知  $a = 2^{0.1}, b = 0.3^3, c = 0.3^{0.1}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$   
C.  $b < c < a$       D.  $a < c < b$
3. 函数  $y = (a^2 - 4a + 4)a^x$  是指数函数, 则有 ( )  
A.  $a = 1$  或  $a = 3$       B.  $a = 1$       C.  $a = 3$       D.  $a > 0$  且  $a \neq 1$

### 二、填空题

4. 已知  $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \leq 0 \\ f(x-2), & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(3)$  的值为\_\_\_\_\_.
5. 函数  $y = a^{x+2019} + 2020 (a > 0, a \neq 1)$  的图像恒过定点\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = 2^{x^2-1}$ .
  - (1) 求函数  $f(x)$  的定义域;
  - (2) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性, 并证明;
  - (3) 解不等式  $f(x) \geq 4$ .



参考答案:

1. A

【分析】令  $x+1=0$ ，即可求出定点坐标；

【详解】当  $x+1=0$ ，即  $x=-1$  时， $a^{x+1}=a^0=1$ ，为常数，

此时  $f(x)=4+1=5$ ，即点  $P$  的坐标为  $(-1, 5)$ .

故选：A.

【点睛】本题考查指数型函数过定点，考查运算求解能力，属于基础题.

2. C

【分析】根据指数函数的单调性比较大小.

【详解】 $\because y=0.3^x$  是减函数， $3>0.1>0$ ，所以  $0.3^3<0.3^{0.1}<1$ ，

又  $2^{0.1}>1$ ，

$\therefore b<c<a$ .

故选：C.

3. C

【分析】根据已知条件列不等式，由此求得正确选项.

【详解】由已知得  $\begin{cases} a^2-4a+4=1 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} a^2-4a+3=0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ ，解得  $a=3$ .

故选：C

4.  $\frac{1}{e}+1$

【分析】将  $x=3$  代入对应解析式依次推导即可.

【详解】 $f(3)=f(1)=f(-1)=\frac{1}{e}+1$ .

故答案为： $\frac{1}{e}+1$ .

5.  $(-2019, 2021)$

【解析】根据  $a^0=1(a>0, a\neq 1)$ ，结合条件，即可求得答案.

【详解】 $\because a^0=1(a>0, a\neq 1)$ .

$\therefore$  函数  $y=a^{x+2019}+2020(a>0, a\neq 1)$  的图像恒过定点  $(-2019, 2021)$ ，

故答案为: $(-2019, 2021)$ .

【点睛】本题的解题关键是掌握 $a^0 = 1(a > 0, a \neq 1)$ ,考查了分析能力和计算能力,属于基础题.

6. (1)  $R$ ; (2) 详见解析; (3)  $\{x | x \geq \sqrt{3} \text{ 或 } x \leq -\sqrt{3}\}$ .

【分析】(1) 由指数函数的定义域可得解;

(2) 由 $f(-x) = f(x)$ 可知函数为偶函数;

(3) 利用对数函数的单调性可知 $2^{x^2-1} \geq 4 = 2^2$ , 得 $x^2 - 1 \geq 2$ , 从而得解.

【详解】(1) 易知函数 $f(x) = 2^{x^2-1}$ ,  $x \in R$ .

所以定义域为 $R$ .

(2) 由 $f(-x) = 2^{(-x)^2-1} = 2^{x^2-1} = f(x)$ , 从而知 $f(x)$ 为偶函数;

(3) 由条件得 $2^{x^2-1} \geq 4 = 2^2$ , 得 $x^2 - 1 \geq 2$ , 解得 $x \geq \sqrt{3}$  或  $x \leq -\sqrt{3}$ .

所以不等式的解集为:  $\{x | x \geq \sqrt{3} \text{ 或 } x \leq -\sqrt{3}\}$ .

【点睛】本题主要考查了指数型函数的定义域, 奇偶性及解指数不等式, 属于基础题.