

2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

1. 已知 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $c = \pi^{\frac{1}{2}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()
- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$
2. 若 $2^x = 8^{y+1}$, 且 $9^y = 3^{x-9}$, 则 $x+y$ 的值是 ()
- A. 18 B. 24 C. 21 D. 27
3. 已知集合 $A = (0, +\infty)$, $B = \{y \mid y = 2^x, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $(1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $[0, 1)$

二、填空题

4. 函数 $y = a^{x-2} + 1 (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 的图像必经过点_____
5. 函数 $y = 3^{x+1} - 2$ 的图像是由函数 $y = 3^x$ 的图像沿 x 轴向_____ 平移_____ 个单位, 再沿 y 轴向_____ 平移_____ 个单位得到的.

三、解答题

6. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

参考答案:

1. D

【分析】结合指数函数的单调性确定正确选项.

【详解】 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上递减,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 < \pi^{\frac{1}{2}},$$

即 $a < b < c$.

故选: D

2. D

【分析】根据 $2^x = 8^{y+1}$ 、 $9^y = 3^{x-9}$ 得到关于 x, y 的两个方程, 解出 x, y 的值即可得到答案.

【详解】解: $\because 2^x = 8^{y+1}$, \therefore 有 $2^x = 2^{3y+3}$, $\therefore x = 3y + 3$;

又 $9^y = 3^{x-9}$, $\therefore 3^{2y} = 3^{x-9}$, $\therefore 2y = x - 9$;

联立方程, 解得 $\begin{cases} x = 21 \\ y = 6 \end{cases}$, $\therefore x + y = 27$,

故选: C.

3. A

【分析】先求出集合 B , 进而通过集合的交集运算求出 $A \cap B$.

【详解】对集合 B , 由题意: $x \in (0, +\infty)$, 所以 $y = 2^x > 1$, 则 $B = (1, +\infty)$, $\therefore A \cap B = (1, +\infty)$.

故选: A.

4. (2,2)

【分析】指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像必经过点 $(0, 1)$, 由此计算即可.

【详解】令 $x - 2 = 0$, 解得 $x = 2$, 当 $x = 2$ 时 $y = a^0 + 1 = 2$,

所以函数 $y = a^{x-2} + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像必经过点 $(2, 2)$.

故答案为: (2,2)

5. 左 1 下 2

【分析】利用函数图象变换规律即得.

【详解】函数 $y = 3^{x+1} - 2$ 的图象由函数 $y = 3^x$ 的图像沿 x 轴向左平移 1 个单位得到函数 $y = 3^{x+1}$

的图象，再沿 y 轴向下平移 2 个单位得到的.

故答案为：左；1；下；2.

6. $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数.

【分析】利用函数单调性的定义讨论即可.

【详解】因为 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$,

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$, 则 $2^{x_1} < 2^{x_2}$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - \frac{2}{2^{x_1} + 1} - \left(1 - \frac{2}{2^{x_2} + 1}\right) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} \\ &= \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)} < 0, \text{ 所以 } f(x_1) < f(x_2), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数.