2022年10月23日高中数学作业

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．一次函数 $g(x)$满足 $g[g(x)]=9x+8$，则 $g(x)$的解析式是（　）

A．$g(x)=9x+8$

B．$g(x)=3x-2$

C．$g(x)= -3x-4$ 或 $g(x)=3x+2$

D．$g(x)=3x+8$

2．已知 $f\left(x\right)=\left(m^2-2m-7\right)x^{\frac{m-2}{3}}$ 是幂函数，且在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，则满足 $f\left(a-1\right)>1$ 的实数 a 的范围为（　）

A．$\left(-\infty,0\right)$　　B．$\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left(0,2\right)$　　D．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

3．设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x)$ 为奇函数，$f\left(x+1\right)$ 为偶函数，当 $x\in\left[1,2\right]$ 时，$f(x)=ax^2+b$.若 $f\left(3\right)=3$，则 $f\left(\frac{17}{2}\right)=$（　）

A．$\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{7}{4}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{15}{4}$

二、填空题

4．函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2-4ax+2}}$ 的定义域为R，则实数 a 的取值范围为______.

5．已知偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(-1)=0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}<0$ 的解集__________

三、解答题

6．函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left|x+a\right|$（$a\in R$）.

(1)当 $a=1$ 时，

①求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

②求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-4,1\right]$ 的值域；

(2)当 $x\in\left[-3,3\right]$ 时，记函数 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $g\left(a\right)$，求 $g\left(a\right)$ 的表达式.

参考答案：

1．C

【分析】利用待定系数法可求出结果.

【详解】因为 $g(x)$是一次函数，

所以设 $g(x)=kx+b(k\neq0)$，

所以 $g[g(x)]=k(kx+b)+b$，

又因为 $g[g(x)]=9x+8$，所以$\begin{cases}k^2=9,\\kb+b=8,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=3,\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}k=-3,\\b=-4,\end{cases}$

所以 $g(x)=3x+2$ 或 $g(x)=-3x-4$.

故选：C

2．D

【分析】由幂函数的定义求得m的可能取值，再由单调性确定m的值，得函数解析式，结合奇偶性求解.

【详解】由题意$m^2-2m-7=1$，解得$m=4$或$m=-2$，

又$f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，所以$\dfrac{m-2}{3}>0$，$m>2$，

所以$m=4$，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，易知$f(x)$是偶函数，

所以由$f\left(a-1\right)>1$得$\left|a-1\right|>1$，解得$a<0$或$a>2$.

故选：D.

3．B

【分析】根据题意，化简整理，可求得$f(x)$的周期，代入特殊值，即可求得 a，b 的值，即可得$f(x)$的解析式，代入所求，化简整理，即可得答案.

【详解】由题意得$-f(x)=f\left(-x\right)$，$f\left(x+1\right)=f\left(-x+1\right)$，

所以$f(x+2)=f\left[-(x+1)+1\right]=f(-x)=-f(x)$①，

所以$f(x+4)=-f(x+2)$②，

①②联立可得：$f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$，即$f(x)$的周期为4，

又$f\left(2\right)=f\left(0\right)=0$，$f(3)=f\left(-1\right)=-f\left(1\right)$，

所以$4a+b=0$且$a+b=-3$，解得$a=1$，$b=-4$，即$f(x)=x^2-4$

所以$f\left(\frac{17}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{4}$.

故选：B

4．$\left[0,\frac{1}{2}\right)$

【分析】利用函数的定义域为R,转化为$ax^2-4ax+2>0$恒成立,然后通过分类讨论$a\neq0$和$a=0$两种情况分别求得a的取值范围，可得答案.

【详解】$f(x)=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2-4ax+2}}$的定义域为$R$是使$ax^2-4ax+2>0$在实数集$R$上恒成立.

若$a=0$时，$2>0$恒成立，所以$a=0$满足题意，

若$a\neq0$时,要使$ax^2-4ax+2>0$恒成立,则有$\begin{cases}a>0\\ \Delta=16a^2-8a<0\end{cases}$

解得$0<a<\frac{1}{2}$.

综上,即实数a的取值范围是$[0,\frac{1}{2})$.

故答案为: $[0,\frac{1}{2})$.

5．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

【分析】分$x>0$和$x<0$两种情况讨论x的范围，根据函数的单调性可得到答案.

【详解】因为$f(x)$是偶函数，且$f(-1)=0$，所以$f(1)=f(-1)=0$，

又$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数，

①当$x>0$时，由$\dfrac{f(x)}{x}<0$得$f(x)<0$，又由于$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，且$f(1)=0$，所以$f(x)<f(1)$，得$x>1$；

②当$x<0$时，由$\dfrac{f(x)}{x}<0$得$f(x)>0$，又$f(-1)=0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数，所以$f(x)>f(-1)$，所以$-1<x<0$.

综上，原不等式的解集为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

【点睛】方法点睛: 本题主要考查函数相关性质，利用函数性质解不等式，运用函数的奇偶性与单调性的关系是进行区间转换的一种有效手段.奇函数在对称区间上的单调性相同，且$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.偶函数在对称区间上的单调性相反，且$f\left(x\right)=f\left(-x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$..

6．(1)①$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-1\right]$，$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$；单调递减区间为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$；②$\left[-18,0\right]$

(2) $g\left(a\right)=\begin{cases}a+3,a\geq-2\sqrt{2}\\ \frac{a^2+4a+4}{4},-4<a<-2\sqrt{2}\\ -a-3,a\leq-4\end{cases}$

【分析】（1）①分别在$x\leq-1$和$x>-1$两种情况下，结合二次函数的单调性可确定结果；

②根据①中单调性可确定最值点，由最值可确定值域；

（2）分别在$-a\geq3$、$-a\leq2$、$2<-a<3$三种情况下，结合二次函数对称轴位置与端点值的大小关系可确定最大值，由此得到$g\left(a\right)$.

(1)

当$a=1$时，$f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left|x+1\right|$；

①当$x\leq-1$时，$f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(-x-1\right)=-x^2+x+2$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right]$上单调递增；

当$x>-1$时，$f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x+1\right)=x^2-x-2$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增；

综上所述：$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-1\right]$，$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$；单调递减区间为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

②由①知：$f\left(x\right)$在$\left[-4,-1\right]$上单调递增，在$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},1\right]$上单调递增，

$\therefore f\left(x\right)_{\min}=\min\left\{f\left(-4\right),f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$，$f\left(x\right)_{\max}=\max\left\{f\left(-1\right),f\left(1\right)\right\}$；

$\because f\left(-4\right)=-18$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$，$f\left(-1\right)=0$，$f\left(1\right)=-2$，

$\therefore f\left(x\right)_{\min}=-18$，$f\left(x\right)_{\max}=0$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left[-4,1\right]$上的值域为$\left[-18,0\right]$.

(2)

由题意得：$f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-2\right)\left(x+a\right)=x^2+\left(a-2\right)x-2a,x\geq-a\\ -\left(x-2\right)\left(x+a\right)=-x^2+\left(2-a\right)x+2a,x<-a\end{cases}$

①当$-a\geq 3$，即$a\leq -3$时，$f(x)=-x^2+(2-a)x+2a$，对称轴为$x=\frac{2-a}{2}\geq\frac{5}{2}$；

当$\frac{2-a}{2}\geq 3$，即$a\leq -4$时，$f(x)$在$[-3,3]$上单调递增，

$\therefore g(a)=f(3)=-a-3$；

当$\frac{5}{2}\leq\frac{2-a}{2}<3$，即$-4<a\leq -3$时，$f(x)$在$\left[-3,\frac{2-a}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{2-a}{2},3\right]$上单调递减，

$\therefore g(a)=f\left(\frac{2-a}{2}\right)=\frac{a^2+4a+4}{4}$；

②当$-a\leq 2$，即$a\geq -2$时，若$x\in[-3,2]$，$f(x)\leq 0$；若$x\in(2,3]$，$f(x)>0$；

$\because$当$x\in(2,3]$时，$f(x)=x^2+(a-2)x-2a$，对称轴$x=\frac{2-a}{2}\leq 2$，

$\therefore f(x)$在$(2,3]$上单调递增，

$\therefore g(a)=f(3)=a+3$；

③当$2<-a<3$，即$-3<a<-2$时

$f(x)$在$\left[-3,\frac{2-a}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{2-a}{2},-a\right)$上单调递减，在$(-a,3]$上单调递增，

$\therefore g(a)=\max\left\{f(3),f\left(\frac{2-a}{2}\right)\right\}=\max\left\{a+3,\frac{a^2+4a+4}{4}\right\}$，

若$a+3\geq\frac{a^2+4a+4}{4}$，即$-2\sqrt{2}\leq a<-2$时，$g(a)=a+3$；

若$a+3<\frac{a^2+4a+4}{4}$，即$-3<a<-2\sqrt{2}$时，$g(a)=\frac{a^2+4a+4}{4}$；

综上所述：$g(a)=\begin{cases}a+3,a\geq -2\sqrt{2}\\ \frac{a^2+4a+4}{4},-4<a<-2\sqrt{2}\\ -a-3,a\leq -4\end{cases}$.