

高中数学平行组卷 2022-10-21

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 下列幂函数中是偶函数的是 ()

- A. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ B. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ C. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ D. $f(x) = x^3$

2. 给定四个命题: ①当 $n = -1$ 时, $y = x^n$ 是减函数; ②幂函数的图象都过 $(0,0)$, $(1,1)$ 两点; ③幂函数的图象不可能出现在第四象限; ④幂函数 $y = x^n$ 在第一象限为减函数, 则 $n < 0$, 其中正确的命题为 ()

- A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ③④

3. 下列命题中, 正确的有 () 个

- ①对应: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 是映射, 也是函数;
②若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1,2)$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
③幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 与 $y = x^4$ 图像有且只有两个交点;
④当 $b > 0$ 时, 方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 恒有两个实根.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

4. 下列命题中所有正确的序号是_____.

- ①函数 $f(x) = a^{x-1} + 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像一定过定点 $P(1,4)$;
②函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1,3)$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,4)$;
③已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(-2) = 8$, 则 $f(2) = -8$;
④ $f(x) = \frac{1}{1-2^x} - \frac{1}{2}$ 为奇函数.

5. 幂函数 $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$ ($a, m \in \mathbb{N}$) 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 $a+m =$ _____.

三、解答题

6. 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m-1}$ 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，函数

$$g(x) = 3^x - 2k.$$

(1) 求 m 的值；

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时，记 $f(x)$ ， $g(x)$ 的值域分别为集合 A, B ，若 $A \cup B = B$ ，求实数 k 的取值范围.

参考答案:

1. B

【分析】利用幂函数的性质以及偶函数的定义即可求解.

【详解】对于 A, $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, 定义域 $\{x|x \geq 0\}$, 此函数为非奇非偶函数, 故 A 不正确;

对于 B, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, 定义域为 R , 且 $f(-x) = f(x)$,

故函数为偶函数, 故 B 正确;

对于 C, $f(x) = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$, 定义域 $\{x|x \geq 0\}$, 此函数为非奇非偶函数, 故 C 不正确;

对于 D, $f(x) = x^3$, 定义域为 R , 且 $f(-x) = -f(x)$, 此函数为奇函数, 故 D 不正确;

故选: B

【点睛】本题考查了幂函数的性质, 考查了基本知识的掌握情况, 属于基础题.

2. D

【分析】根据幂函数的性质: 单调性、图象、特殊点, 以及指数与函数性质间的关系, 即可判断各项的正误.

【详解】①当 $n = -1$ 时, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 都递减, 而在 $x \in R$ 不单调, 错误;

②幂函数的图象都过 $(1, 1)$, 但不一定过 $(0, 0)$, 错误;

③幂函数的图象不可能出现在第四象限, 正确;

④幂函数 $y = x^n$ 在第一象限为减函数则 $n < 0$, 正确;

故选: D

3. C

【分析】对于①, 由映射和函数的定义判断即可;

对于②, 由抽象函数的定义求解即可;

对于③, 结合幂函数的性质作出图象即可判断;

对于④, 将问题转化为 $y = |2^x - 1|$ 与 $y = b$ 的图象交点个数的问題, 作出图象即可判断.

【详解】解: 对于①, 对应: $A = R, B = R, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 是映射, 也是函数; 符合映射, 函数的定义, 故①对;

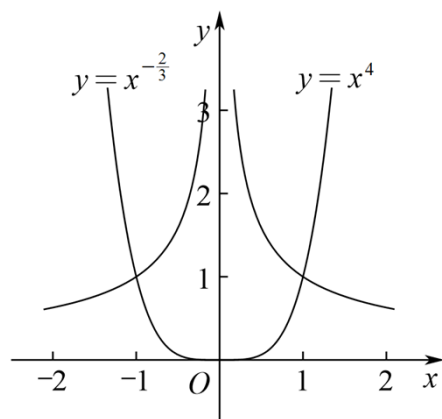
对于②, 若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 2)$, 则 $x-1 \in (0, 1), \therefore 2x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 故函数

$f(2x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，故②对

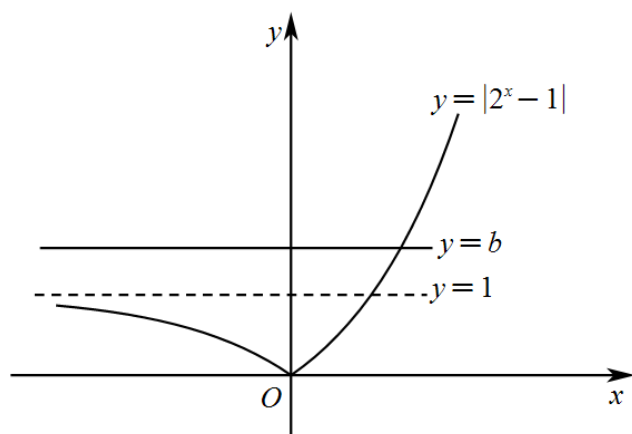
对于③，幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且图

像过 $(1, 1), (-1, 1)$ ， $y = x^4$ 为偶函数，在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且图像过

$(1, 1), (-1, 1)$ 所以两个图像有且只有两个交点；故③对；



于④，当 $x > 1$ 时， $|2^x - 1|$ 单调递增，且函数值大于 1，所以当 $b > 1$ 时，方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 只有一个实根.故④错；



故选：C

4. ①④

【详解】①令 $x-1=0$, 可得 $x=1$ ， $f(x)=4$ ，所以函数 $f(x) = a^{x-1} + 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像一定过定点 $P(1, 4)$ ；

②函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 3)$ ，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$ ，故②不对；

③中， $f(-2) = 32 - 8a - 2b - 8 = 8$ ， $\therefore 8a + 2b = 16$ ，所以 $f(2) = 32 + 8a + 2b - 8 = 40$.

故③不对.

$$\textcircled{4} f(-x) = \frac{1}{1-2^{-x}} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{2^x-1} - \frac{1}{2} = \frac{2^x-1+1}{2^x-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-2^x} = -f(x), \text{ 所以函数为奇函数}$$

5. 3

【解析】由幂函数 $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$ ($a, m \in N$) 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数, 可得 $m^2-2m-3 < 0$, 且 m^2-2m-3 为偶数, $m \in Z$, 且 $a-1=1$. 解出即可.

【详解】 \because 幂函数 $f(x) = (a-1)x^{m^2-2m-3}$ ($a, m \in N$) 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数,

$\therefore m^2-2m-3 < 0$, 且 m^2-2m-3 为偶数, $m \in N$, 且 $a-1=1$.

解得 $-1 < m < 3$, $m = 0, 1, 2$,

且 $a=2$,

只有 $m=1$ 时满足 $m^2-2m-3=-4$ 为偶数.

$\therefore m=1$.

$a+m=3$

故答案为: 3.

【点睛】本题考查幂函数的性质, 根据幂函数性质求参数值, 可根据幂函数性质列不等式和等式, 求解即可, 属于基础题.

$$6. (1) m=3; (2) \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

【分析】(1) 根据幂函数定义可构造方程求得 $m=-1$ 或 3 , 代入验证可知 $m=-1$ 不合题意, 从而得到结果;

(2) 根据两函数单调性可求得集合 A, B , 由并集结果知 $A \subseteq B$, 由此可得不等式组, 解不等式组求得结果.

【详解】(1) $\because f(x)$ 为幂函数 $\therefore m^2-2m-2=1$, 解得: $m=-1$ 或 $m=3$

当 $m=-1$ 时, $f(x) = x^{-2}$, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不合题意;

当 $m=3$ 时, $f(x) = x^2$, 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意

综上所述: $m=3$

(2) 由 (1) 知: $f(x) = x^2$

\because 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x), g(x)$ 单调递增 $\therefore A = [1, 4], B = [3-2k, 9-2k]$

$$\because A \cup B = B \quad \therefore A \subseteq B \quad \therefore \begin{cases} 3-2k \leq 1 \\ 9-2k \geq 4 \end{cases}, \text{解得: } 1 \leq k \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

【点睛】 本题考查根据幂函数的定义和性质求解参数值、函数值域的求解、根据集合的包含关系求解参数范围的问题. 关键是能够根据函数的单调性准确求得函数值域, 进而根据包含关系得到不等式组.