左左的2022年10月24日高中数学作业

未命名

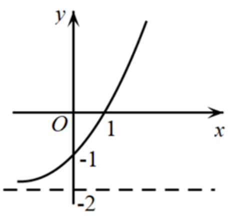
一、单选题

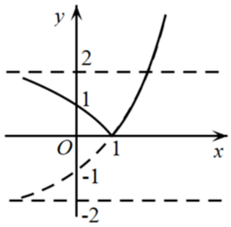
1．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-3x+3, x<0\\ \mathrm{e}^{-x}+1, x\geq 0\end{cases}$，则不等式 $f(a)<f(3a-1)$ 的解集为（　　）

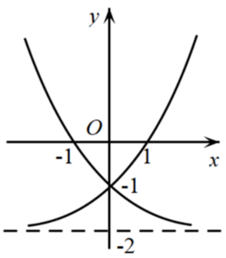
A．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

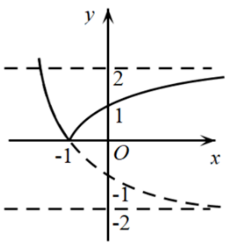
C．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

2．如图所示，函数 $y=\left|2^x-2\right|$ 的图像是（　　）

A．

B．

C．

D．

3．函数 $y=2^x-2^{-x}$（　　）

A．是 **R** 上的减函数

B．是 **R** 上的增函数

C．在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

D．无法判断其单调性

4．设 $a=3^{0.7}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

二、填空题

5．函数 $f\left(x\right)=4^x-2^{x+1}+3$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 的值域为______.

6．函数$f（x）=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}+2$，若有$f（a）+f（a-2）>4$，则$a$的取值范围是________.

三、解答题

7．函数$f\left(x\right)$对任意的实数m，n，有$f\left(m+n\right)=f\left(m\right)+f\left(n\right)$，当$x>0$时，有$f\left(x\right)>0$．

（1）求证：$f\left(0\right)=0$．

（2）求证：$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上为增函数．

（3）若$f\left(1\right)=1$，解不等式$f\left(4^x-2^x\right)<2$．

参考答案：

1．C

【分析】由函数解析式判断函数的单调性，根据单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可；

【详解】解：因为$f(x)=\begin{cases}-3x+3,x<0\\ \mathrm{e}^{-x}+1,x\geq 0\end{cases}$，

当$x<0$时$f(x)=-3x+3$函数单调递减，且$f\left(x\right)>-3\times 0+3=3$，

当$x\geq 0$时$f(x)=\mathrm{e}^{-x}+1$函数单调递减，且$f\left(0\right)=\mathrm{e}^{0}+1=2<3$，

所以函数$f\left(x\right)$在$(-\infty,+\infty)$上是单调递减，

所以不等式$f(a)<f(3a-1)$等价于$a>3a-1$，解得$a<\dfrac{1}{2}$.

即不等式的解集为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$；

故选：C

2．B

【分析】将原函数变形为分段函数，根据$x=1$及$x\neq 1$时的函数值即可得解.

【详解】$\because y=\left|2^{x}-2\right|=\begin{cases}2^{x}-2,x\geq 1\\ 2-2^{x},x<1\end{cases}$,

$\therefore x=1$时，$y=0,x\neq 1$时，$y>0$.

故选：B.

3．B

【分析】利用指数函数的单调性结合单调性的性质可得出结论.

【详解】因为指数函数$f\left(x\right)=2^{x}$为$\mathbf{R}$上的增函数，指数函数$g\left(x\right)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$为$\mathbf{R}$上的减函数，

故函数$y=2^{x}-2^{-x}$是$\mathbf{R}$上的增函数.

故选：B.

4．D

【分析】利用指数函数与对数函数的性质，即可得出a,b,c的大小关系.

【详解】因为$a=3^{0.7}>1$，

$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}=3^{0.8}>3^{0.7}=a$，

$c=\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，

所以$c<1<a<b$.

故选：D.

【点睛】本题考查的是有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法：

（1）利用指数函数的单调性：$y=a^x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（2）利用对数函数的单调性：$y=\log_a x$，当$a>1$时，函数递增；当$0<a<1$时，函数递减；

（3）借助于中间值，例如：0 或 1 等.

5．$[2,3)$

【分析】令$2^x=t$，结合二次函数的性质即可得出答案.

【详解】解：$f(x)=\left(2^x\right)^2-2\times2^x+3=\left(2^x-1\right)^2+2$，

设$2^x=t$，

当$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$时，$0<t\le\sqrt{2}$，所以$2\le(t-1)^2+2<3$，

所以$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$的值域为$[2,3)$.

故答案为：$[2,3)$.

6.（1，+∞）

【分析】构造函数 F（x）=f（x）－2，则 f（a）+f（a－2）>4 等价于 F（a）+F（a－2）>0，分析$F(x)$奇偶性和单调性即可求解.

【详解】设 F（x）=f（x）－2，则 F（x）=$\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，易知 F（x）是奇函数，F（x）=$\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$
=$\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$=1－$\frac{2}{3^{2x}+1}$在 R 上是增函数，

由 f（a）+f（a－2）>4 得 F（a）+F（a－2）>0，

于是可得 F（a）>F（2－a），即 a>2－a，解得 a>1.

答案：（1，+∞）

7.（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）$\{x \mid x<1\}$

【分析】（1）令 $m=n=0$，代入等式，可求得 $f(0)=0$；

（2）令 $n=-m$，代入等式，结合 $f(0)=0$，可得到 $f(-m)=-f(m)$，从而可知 $y=f(x)$ 是奇函数，然后用定义法可证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数；

（3）原不等式可化为 $f\left(4^{x}-2^{x}\right)<f(2)$，结合函数 $f(x)$ 的单调性，可得出 $4^{x}-2^{x}<2$，解不等式即可.

【详解】（1）证明：令 $m=n=0$，则 $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，$\therefore f(0)=0$.

（2）证明：令 $n=-m$，则 $f(m-m)=f(m)+f(-m)$，

$\therefore f(0)=f(m)+f(-m)=0$，$\therefore f(-m)=-f(m)$，

$\therefore$对任意的 m，都有 $f(-m)=-f(m)$，即 $y=f(x)$ 是奇函数.

在 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，

$\therefore f\left(x_2-x_1\right)=f\left(x_2\right)+f\left(-x_1\right)=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

$\therefore$函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数.

（3）原不等式可化为 $f\left(4^{x}-2^{x}\right)<1+1=f(1)+f(1)=f(2)$，

由（2）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，可得 $4^{x}-2^{x}<2$，即 $\left(2^{x}-2\right)\left(2^{x}+1\right)<0$，

$\because 2^{x}+1>0$，$\therefore 2^{x}-2<0$，解得 $x<1$，

故原不等式的解集为 $\{x \mid x<1\}$.

【点睛】本题考查函数奇偶性、单调性，考查不等式的解法，考查学生的推理能力与计算求解能力，属于中档题.