

# 佳承的 2022 年 10 月 24 日高中数学作业

未命名

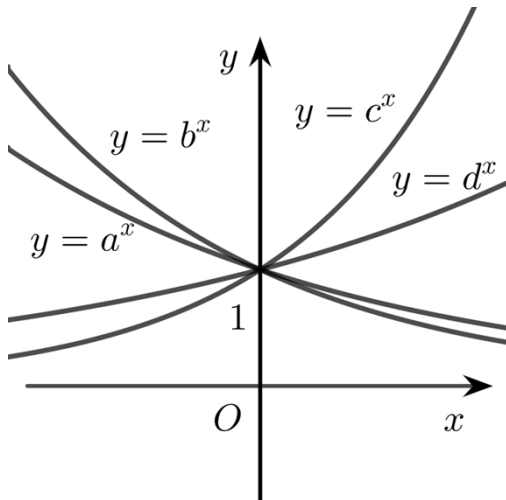
## 一、单选题

1. 已知  $0 < a < 1, b < -1$ , 则函数  $y = a^x + b$  的图像必定不经过 ( )

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 函数①  $y = a^x$ ; ②  $y = b^x$ ; ③  $y = c^x$ ; ④  $y = d^x$  的图象如图所示,  $a, b, c, d$  分别

是下列四个数:  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$  中的一个, 则  $a, b, c, d$  的值分别是 ( )



A.  $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

B.  $\sqrt{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

C.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$ ,

D.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \sqrt{3},$

3. 若  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ , 则 ( )

- A.  $\ln(y-x+1) > 0$       B.  $\ln(y-x+1) < 0$       C.  $\ln|x-y| > 0$       D.  $\ln|x-y| < 0$

## 二、填空题

4. 已知  $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}, b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}}, c = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

5. 化简:  $\left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. 已知函数  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ .

(1) 若  $f(x) = 2$ , 求  $2^x$  的值;

(2) 若  $2'f(2t) + mf(t) \geq 0$ ，对于任意  $t \in [1, 2]$  恒成立，求实数  $m$  的取值范围.

参考答案:

1. A

【解析】根据指数函数的图象结合图象的平移可得正确的选项.

【详解】因为  $0 < a < 1$ , 故  $y = a^x$  的图象经过第一象限和第二象限,

且当  $x$  越来越大时, 图象与  $x$  轴无限接近.

因为  $b < -1$ , 故  $y = a^x$  的图象向下平移超过一个单位, 故  $y = a^x + b$  的图象不过第一象限.

故选: A.

2. C

【分析】根据指数函数的性质, 结合函数图象判断底数的大小关系.

【详解】由题图, 直线  $x=1$  与函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为  $c, d, a, b$ , 而

$$\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

故选: C.

3. A

【分析】将不等式变为  $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ , 根据  $f(t) = 2^t - 3^{-t}$  的单调性知  $x < y$ , 以此去判断各个选项中真数与1的大小关系, 进而得到结果.

【详解】由  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$  得:  $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ ,

$$\text{令 } f(t) = 2^t - 3^{-t},$$

$\because y = 2^x$  为  $R$  上的增函数,  $y = 3^{-x}$  为  $R$  上的减函数,  $\therefore f(t)$  为  $R$  上的增函数,

$$\therefore x < y,$$

$\because y - x > 0$ ,  $\therefore y - x + 1 > 1$ ,  $\therefore \ln(y - x + 1) > 0$ , 则 A 正确, B 错误;

$\because |x - y|$  与1的大小不确定, 故 CD 无法确定.

故选: A.

【点睛】本题考查对数式的大小的判断问题, 解题关键是能够通过构造函数的方式, 利用函数的单调性得到  $x, y$  的大小关系, 考查了转化与化归的数学思想.

4.  $c < b < a$  或  $a > b > c$

【分析】利用指数函数的单调性比较大小即可

【详解】因为  $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数，且  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < 0$ ，

所以  $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{3}{5}\right)^0$ ，所以  $a > b > 1$ ，

因为  $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数，且  $-\frac{3}{4} < 0$ ，

所以  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ，所以  $c < 1$ ，

所以  $c < b < a$

故答案为：  $c < b < a$  或  $a > b > c$

5.  $2 - \frac{1}{2^{63}}$

【分析】分析式子可以发现，若在结尾乘以一个  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ ，则可以从后到前逐步使用平方差公式进行计算，为保证恒等计算，在原式末尾乘以  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 2$  即可.

【详解】原式  $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{16}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \times 2$   
 $= \left(1 + \frac{1}{2^{32}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^{32}}\right) \times 2$   
 $= \left(1 - \frac{1}{2^{64}}\right) \times 2$   
 $= 2 - \frac{1}{2^{63}}$

故答案为：  $2 - \frac{1}{2^{63}}$ .

6. (1)  $\sqrt{2} + 1$ ; (2)  $m \geq -5$ .

【分析】(1) 当  $x < 0$  时， $f(x) = 0 \neq 2$ ，舍去；

当  $x \geq 0$  时， $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2$ ，即  $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ ， $2^x > 0$ 。基础即可得出。

(2) 当  $t \in [1, 2]$  时,  $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ , 即  $2^t(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}}) + m(2^t - \frac{1}{2^t}) \geq 0$ , 即  $m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1)$ . 化

简解出即可得出.

【详解】解: (1) 当  $x < 0$  时,  $f(x) = 0 \neq 2$ , 舍去;

当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2$ , 即  $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ ,  $2^x > 0$ .

解得  $2^x = 1 + \sqrt{2}$ ,

(2) 当  $t \in [1, 2]$  时,  $2^t f(2t) + mf(t) \geq 0$ , 即  $2^t(2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}}) + m(2^t - \frac{1}{2^t}) \geq 0$ ,

即  $m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1)$ .

因为  $2^{2t} - 1 > 0$ , 所以  $m \geq -(2^{2t} + 1)$ .

由  $t \in [1, 2]$ , 所以  $-(2^{2t} + 1) \in [-17, -5]$ .

故  $m$  的取值范围是  $[-5, +\infty)$ .