

高中数学平行组卷 2022-10-21

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 下列函数中是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = x^{-1}$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = x^2$ D. $y = x^3$

2. 函数 $y = a^{x+1} - 3$ 与 $g(x) = \log_a(x+m) + n$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象经过同一个定点, 则 m^n 的值是 ()

- A. 4 B. -1 C. 3 D. $\frac{1}{4}$

3. 下列命题中, 正确的有 () 个

- ①对应: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2+1}$ 是映射, 也是函数;
②若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 2)$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;
③幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 与 $y = x^4$ 图像有且只有两个交点;
④当 $b > 0$ 时, 方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 恒有两个实根.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

4. 函数 $f(x) = \sqrt{64 - x^2} + \log_2(2\sin x - 1)$ 的定义域是_____.

5. 指数函数 $y = f(x)$ 的图像经过点 $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, 那么 $f(4)f(2)$ 等于_____.

三、解答题

6. 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | m-1 < x < 2m+1\}$.

(1) 当 $x \in \mathbb{Z}$ 时, 求 A 的非空真子集个数;

(2) 当 $B \subseteq A$ 时, 求 m 的取值范围.

参考答案:

1. D

【解析】根据函数的单调性和奇偶性对各个选项逐一分析即可.

【详解】对 A, 函数 $y = x^{-1}$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故错误;

对 B, 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 是非奇非偶函数, 故错误;

对 C, 函数 $y = x^2$ 是偶函数, 故错误;

对 D, 函数 $y = x^3$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故正确.

故选: D

【点睛】本题主要考查幂函数的奇偶性和单调性, 考查学生对基础知识的理解掌握, 属于基础题.

2. D

【分析】结合指数函数和对数函数过定点分别求出题中所给函数的经过的定点, 进而得到

$\begin{cases} 1-m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$, 求出 m, n , 结合指数的运算即可求出结果.

【详解】因为函数 $y = a^{x+1} - 3$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 经过定点 $(-1, -2)$, 函数 $g(x) = \log_a(x+m) + n$

($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象经过定点 $(1-m, n)$, 由题意知 $\begin{cases} 1-m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} m=2 \\ n=-2 \end{cases}$, 故

$$m^n = 2^{-2} = \frac{1}{4},$$

故选: D

3. C

【分析】对于①, 由映射和函数的定义判断即可;

对于②, 由抽象函数的定义求解即可;

对于③, 结合幂函数的性质作出图象即可判断;

对于④, 将问题转化为 $y = |2^x - 1|$ 与 $y = b$ 的图象交点个数的问題, 作出图象即可判断.

【详解】解: 对于①, 对应: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$ 是映射, 也是函数; 符合映射, 函数的定义, 故①对;

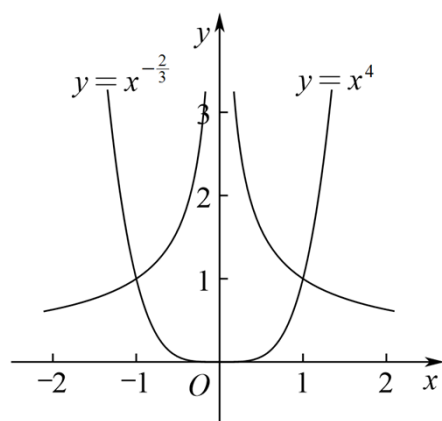
对于②, 若函数 $f(x-1)$ 的定义域是 $(1, 2)$, 则 $x-1 \in (0, 1), \therefore 2x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 故函数

$f(2x)$ 的定义域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 故②对

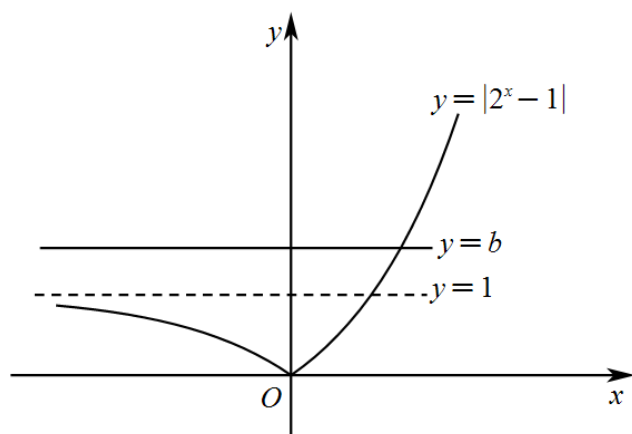
对于③, 幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 为偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且图

像过 $(1, 1), (-1, 1)$, $y = x^4$ 为偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且图像过

$(1, 1), (-1, 1)$ 所以两个图像有且只有两个交点; 故③对;



于④, 当 $x > 1$ 时, $|2^x - 1|$ 单调递增, 且函数值大于 1, 所以当 $b > 1$ 时, 方程 $|2^x - 1| - b = 0$ 只有一个实根. 故④错;



故选: C

$$4. \left(-\frac{11}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{6}\pi, 8\right]$$

【分析】由题意, 得 $\begin{cases} 64 - x^2 \geq 0, & ① \\ 2\sin x - 1 > 0, & ② \end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域.

【详解】由题意, 得 $\begin{cases} 64 - x^2 \geq 0, & ① \\ 2\sin x - 1 > 0, & ② \end{cases}$

由①得 $-8 \leq x \leq 8$,

由②得 $\sin x > \frac{1}{2}$, 由正弦曲线得 $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

所以不等式组的解集为 $\left(-\frac{11}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{6}\pi, 8\right]$

故答案为 $\left(-\frac{11}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{6}\pi, 8\right]$

【点睛】本题考查函数定义域的求法, 属基础题.

5. 64

【详解】设 $y = f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1) \therefore a^{-2} = \frac{1}{4} \therefore a = 2$

$$\therefore f(4)f(2) = 2^4 2^2 = 64$$

6. (1) 62

$$(2) (-\infty, -2] \cup [-1, 1]$$

【分析】(1) 由条件确定集合 A 中元素, 即可求解;

(2) 由 $B \subseteq A$, 分类讨论, 建立不等式求解即可.

(1)

$$(1) \because x \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore A = \{x | -2 \leq x \leq 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$\therefore A \text{ 的非空真子集的个数为 } 2^6 - 2 = 62.$$

(2)

分两种情况讨论: ①当 $B = \emptyset$ 时, $m - 1 \geq 2m + 1$, 则 $m \leq -2$;

$$\textcircled{2} \text{ 当 } B \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} m > -2, \\ m - 1 \geq -2, \text{ 解得 } -1 \leq m \leq 1. \\ 2m + 1 \leq 3 \end{cases}$$

综上可得, m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [-1, 1]$.