

## 2022 年 10 月 25 日高中数学作业

学校:\_\_\_\_\_ 姓名:\_\_\_\_\_ 班级:\_\_\_\_\_ 考号:\_\_\_\_\_

### 一、单选题

1. 已知函数  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增      B. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递增  
C. 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减      D. 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  是单调递减

2. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x}+1, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f(a) < f(3a-1)$  的解集为 ( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$       B.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$   
C.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

3. 设  $a \log_3 4 = 2$ , 则  $4^{-a} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{16}$       B.  $\frac{1}{9}$       C.  $\frac{1}{8}$       D.  $\frac{1}{6}$

### 二、填空题

4. 函数  $y = (0.5^x - 8)^{\frac{1}{2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

5. 已知函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  是偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

6. 指数函数  $y = f(x)$  图像经过点  $(3, 8)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 解不等式  $f(x^2 - x) \leq f(x + 3)$ .



参考答案:

1. B

【分析】根据奇函数的定义及指数函数的单调性判断可得;

【详解】解:  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = 3^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x = -f(x)$ ,

所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  为奇函数,

又  $y = 3^x$  与  $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$  在定义域上单调递增, 所以  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

故选: B

2. C

【分析】由函数解析式判断函数的单调性, 根据单调性将函数不等式转化为自变量的不等式, 解得即可;

【详解】解: 因为  $f(x) = \begin{cases} -3x+3, & x < 0 \\ e^{-x}+1, & x \geq 0 \end{cases}$ ,

当  $x < 0$  时  $f(x) = -3x+3$  函数单调递减, 且  $f(x) > -3 \times 0 + 3 = 3$ ,

当  $x \geq 0$  时  $f(x) = e^{-x}+1$  函数单调递减, 且  $f(0) = e^0 + 1 = 2 < 3$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是单调递减,

所以不等式  $f(a) < f(3a-1)$  等价于  $a > 3a-1$ , 解得  $a < \frac{1}{2}$ .

即不等式的解集为  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ;

故选: C

3. B

【分析】根据已知等式, 利用指数对数运算性质即可得解

【详解】由  $a \log_3 4 = 2$  可得  $\log_3 4^a = 2$ , 所以  $4^a = 9$ ,

所以有  $4^{-a} = \frac{1}{9}$ ,

故选: B.

【点睛】本题考查的是有关指对式的运算的问题, 涉及到的知识点有对数的运算法则, 指数的运算法则, 属于基础题目.

4.  $(-\infty, -3)$

【分析】将函数转化为根式形式，根据根式复合型函数定义域范围求解，转化为指数函数不等式  $2^{-x} > 2^3$ ，根据其单调性进一步求解.

【详解】因为  $y = (0.5^x - 8)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{0.5^x - 8}}$ ，所以  $0.5^x - 8 > 0$ ，则  $2^{-x} > 2^3$ ，

即  $-x > 3$ ，解得  $x < -3$ ，

故函数  $y = (0.5^x - 8)^{-\frac{1}{2}}$  的定义域为  $(-\infty, -3)$ .

故答案为:  $(-\infty, -3)$ .

5. -1

【分析】利用偶函数的定义直接求解.

【详解】函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  的定义域为  $\mathbb{R}$ .

因为函数  $f(x) = ae^x - e^{-x} + a$  是偶函数，所以  $f(x) = f(-x)$ ，即  $ae^{-x} - e^x + a = ae^x - e^{-x} + a$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立，

亦即  $(a+1)e^{-x} = (a+1)e^x$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立，

所以  $a = -1$ .

故答案为: -1

6. (1)  $f(x) = 2^x$

(2)  $[-1, 3]$

【分析】(1) 设  $f(x) = a^x$ ，( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，将点 (3,8) 代入计算可得；

(2) 根据函数单调性即可求出不等式的解集.

(1)

解:  $\because$  指数函数的图象经过点 (3,8)，设  $f(x) = a^x$ ，( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )，

$\therefore a^3 = 8$ ，

解得  $a = 2$ ，

$\therefore f(x) = 2^x$ ；

(2)

解：由于函数  $f(x)=2^x$  为  $R$  上增函数，且  $f(x^2-x)\leq f(x+3)$ ，

$$\therefore x^2-x\leq x+3,$$

解得  $-1\leq x\leq 3$ ，

则不等式的解集为  $[-1,3]$ ．