

テレパラレル重力における微視的ハンドル： フェルミ統計・カイラリティ・臨界束縛の幾何学的 起源

Muacca

muacca@dmwp.jp

December 2, 2025

Abstract

我々は、4次元テレパラレル重力（TEGR）において、フェルミ統計・カイラリティ・複合状態の準臨界束縛に対する統一的視点を提供する幾何学的機構を提案する。位相 $S^2 \times S^1$ の微視的ハンドルを含む時空を考え、整数値のねじれモノポール電荷 q を持つ系を扱う。「スピニング SU(2)」テトラッドアンザツ用いて、相互に関連する3つの結果を導出する。

(i) 安定性：純粋 TEGR 部門は古典的に安定なハンドル半径を許容し、殻上エネルギー $E \simeq \alpha|q|$ を与える。これはパリティ偶な幾何学的質量項を提供する。(ii) カイラリティ：Nieh-Yan 境界項は、有効作用にパリティ奇な寄与を生み出す。遅い歳差運動モードはカイラル傾斜を発展させ、その向きは q の符号に固定される。これはカイラリティ選択の幾何学的機構として作用する。この構成は、Nieh-Yan 不変量とスカーミオン型モデルにおける粒子統計を支配する Wess-Zumino-Witten 項との既知の関係に動機づけられている。(iii) 古典的臨界性：歳差運動モードの剛性は $k(q) \propto \omega^2|q|$ とスケールし、単位電荷あたりの束縛エネルギーが主要項で q に依存しない古典的臨界点に系を配置する。

その結果、次数補正により、 $|q| \geq 2$ (特に $|q| = 3$) の複合状態が、分離した単位電荷ハンドルとエネルギー的に競合する可能性が原理的に生じる。本構成は、幾何学のみから古典的臨界点 $\gamma = 1$ を確立するテレパラレルトイモデルと位置づけられる。量子補正および幾何学的補正が有効指数 γ_{eff} に与える影響は別の研究で解析される。

Microscopic Handles in Teleparallel Gravity: Toward a Geometric Origin of Fermionic Statistics, Chirality, and Critical Binding

1 序論

素粒子物理学の標準模型は微視的現象の極めて成功した記述を提供するが、その主要な構造的特徴のいくつかは概念的に不透明なままである。これらには以下が含まれる：(i) スピン・統計関係、特にクォークとレプトンのフェルミ統計、(ii) 弱い相互作用のカイラルな $V-A$ 構造、(iii) カラー3重項とカラー1重項の3体束縛状態（バリオン）の特別な役割。従来の枠組みでは、これらの性質は理論の局所ゲージと物質内容に符号化されているが、時空自体の大規模幾何学によって明らかに説明されているわけではない。

幾何学からこのような性質を導出する試みの多くは、高次元 Kaluza–Klein 構成や弦理論などによる時空の拡大によって進められてきた。本研究では、異なる最小主義的な経路を探求する：我々は4次元に留まるが、時空が非自明な微視的位相とゼロでないねじれを持つことを許容する。具体的には、曲率ではなくねじれに重力が符号化される一般相対性理論のテレパラレル等価物（TEGR）の枠内で作業し、空間多様体が位相 $S^2 \times S^1$ の多数の微視的ハンドルを含むと仮定する。我々が問う中心的な問いは、このような微視的ハンドル構造が上記の素粒子物理学の特徴に対する幾何学的起源を提供できるかどうかである。

1.1 動機

我々の提案の出発点は、非線形シグマ模型における位相的ソリトンがバリオン数のような量子数を持ち得ること、およびそれらの統計が有効作用における Wess–Zumino–Witten (WZW) 項によって影響を受け得るという良く知られた事実である。特に、Witten は WZW レベル k_{WZ} を持つ $SU(2)$ Skyrme 模型において、 k_{WZ} が奇数のときスカーミオンはフェルミオンとして、 k_{WZ} が偶数のときボゾンとして振る舞うことを示した [1]。同時に、Nieh–Yan 4 形式はねじれを持つ空間上のカイラル・アノマリーに寄与することが知られており、原理的にはねじれに結合した $SU(2)$ 値場に対する有効的な WZW 型位相項を誘起できる [2]。

これらの観察は、可能な関係の連鎖を示唆する：

$$\begin{aligned} \text{Nieh–Yan 密度} &\longrightarrow \text{有効 WZW 型レベル} \\ &\longrightarrow \text{ソリトンの統計と内部量子数.} \end{aligned} \tag{1}$$

通常の扱いでは、 $SU(2)$ 場は滑らかな背景上で定義された物質場である。対照的に、我々は同じ $SU(2)$ 構造が時空自体の微視的ハンドルの局所標構に符号化されている可能性を考察する。これは自然に、各微視的ハンドルが位相的電荷を Nieh–Yan 不変量で測定され、統計とカイラリティが有効作用に誘起される位相項によって支配されるソリトン的欠陥として振る舞うという考えにつながる。

この考えを明確にするため、本論文では最も単純な設定に注目を限定する：

- 重力セクターは純粋 TEGR、高次曲率補正なし；
- 物質内容は、Dirac 型結合を許容する有効ねじれ背景で要約される；
- 局所的に $M \simeq \mathbb{R}_t \times S^1_\psi \times S^2_{(\theta, \phi)}$ とモデル化される単一の微視的ハンドルに焦点を当て、そのエネルギー論と対称性の破れのパターンを研究する。

我々の目標は完全な標準模型を再現することではなく、テレパラレル重力における単一の微視的ハンドルが、既に素粒子物理学を想起させる3つの主要な特徴を示し得ることを示すことである：(i) 整数値位相的電荷 q に線形なエネルギーを持つ安定な局在配位、(ii) 歳差運動モードに伴う自発的parity破れ、(iii) 特定の複合電荷状態を好む剛性の準臨界スケーリング。

純粋に静的な（スピニしない）ハンドル配位、すなわちスピニパラメータ $\omega = 0$ (Sec. 3 で明示的に導入される) を持つ配位は、有効ポテンシャルの安定な極小を生成しないことを付記する；したがってスピニ自由度は物理的に不可欠である（詳細は Appendix G 参照）。

1.2 テレパラレル枠組みと微視的ハンドル

テレパラレル重力（Teleparallel Gravity; TEGR）は、一般相対性理論の Levi-Civita 接続を、ゼロでないねじれを持つ曲率ゼロの接続で置き換える。基本変数はテトラッド場 e^α_μ

であり、その行列式を $e = \det(e^a{}_\mu)$ と表記する。計量は通常の方法で $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a{}_\mu e^b{}_\nu$ として回復され、接続はその曲率が恒等的に消失し、すべての重力情報がねじれに存在するように選ばれる。対応するラグランジアン密度は、ねじれテンソルの2次のスカラー \mathbb{T} から構築され、全微分を除いて Einstein–Hilbert 作用と力学的に等価である。

ここで考えるシナリオでは、大規模スケールの計量は空間的3-トーラスの計量に近いが、空間位相は多数の微視的ハンドルの存在によって精緻化される。空間スライスを模式的に次のように考えることができる：

$$\Sigma \simeq T^3 \# \left(\#_k (S^2 \times S^1) \right), \quad (2)$$

ここで $\#$ は連結和を表し、各因子 $S^2 \times S^1$ は微視的ハンドルを表す。本論文では、ハンドルが十分に分離され、弱く相互作用していると仮定するので、単一の代表的なハンドルに焦点を当て、残りを傍観者として扱うことが意味を持つ。

具体的には、4次元領域を選択する：

$$M \simeq \mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S_{(\theta,\phi)}^2, \quad (3)$$

座標 $x^\mu = (t, \psi, \theta, \phi)$ をハンドルに適合させる。我々は M 上に明示的なテトラッドを構築し、 S_ψ^1 方向に沿ったツイストとハンドル軸の周りの剛体スピinnの両方を符号化する。結果として得られるねじれは、 M 上での積分が整数値位相的電荷 $q \in \mathbb{Z}$ を定義する Nieh–Yan 密度を生成する。本研究の主要な課題は、このような配位の微小変形を解析し、 q がその安定性、パリティ性質、および可能な複合状態をどのように制御するかを特定することである。

1.3 主要結果

詳細な構成に入る前に、本論文で得られた主要な結果をまとめておくことが有用である。

(1) 安定性とエネルギー スケーリング（フェーズ1）。 $M \simeq \mathbb{R}_t \times S^1 \times S^2$ 上のテトラッドに対する「スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザッツ」を用いて、TEGR 作用が、ハンドル半径 r が S^1 方向に沿って定数である静的配位のクラスを許容することを示す。動径プロファイルに対する有効1次元エネルギー汎関数は次の模式的な形を持つ：

$$E[r] = \int_0^{2\pi} d\psi [A(r')^2 + B q^2/r^2 + C m^2 r^2], \quad (4)$$

ここで $q \in \mathbb{Z}$ は Nieh–Yan 電荷、 m は整数ツイスト数である。この汎関数を最小化すると、安定半径が得られる：

$$r_0 \propto |q/m|^{1/2}, \quad (5)$$

そして殻上 TEGR エネルギーは電荷の絶対値に線形にスケールする：

$$E_{\text{TEGR}}(q) \propto |q|. \quad (6)$$

詳細な導出は Sec. 4 と Appendix C で与えられる。

(2) 自発的パリティ破れ（フェーズ2）。次に、ハンドル軸の傾きを記述する小さな歳差運動モード $\varepsilon(t)$ を導入する。TEGR 作用を ε の2次まで展開すると、有効的な「剛性」項 $\frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2$ ($k(q) > 0$) が得られる。しかし Nieh–Yan 項が存在する場合、ハンドル境界が ε

に線形な項 $V_{\text{NY}} \sim -\Lambda_q \varepsilon$ を寄与し、ここで Λ_q は Nieh–Yan 電荷 q と有効結合 θ_{NY} に比例する。結果として得られる有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon) = \frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2 - \Lambda_q\varepsilon \quad (7)$$

は、 $\Lambda_q \neq 0$ のとき非ゼロ値 $\varepsilon_* = \Lambda_q/k(q)$ で最小値を持つ。したがってパリティ対称なラグランジアンが、 ε の一方の符号を自発的に選択する有効真空を生成し、 $V-A$ カイラリティ選択の幾何学的類似を提供する。これは第 5 節および付録 D で解析される。

(3) 臨界剛性スケーリングと複合状態 (フェーズ 3)。最後に、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツにおいて剛性 $k(q)$ が q に対してどのようにスケールするかを考察する。主要な寄与は次のように振る舞うことを示す：

$$k(q) \propto m^2|q|, \quad (8)$$

したがって、粗視化された記述では、電荷 q の配位の全エネルギーは次の形で書ける：

$$E(q) = \alpha|q| - \beta|q|^{2-\gamma}, \quad (9)$$

ここで有効指数 $\gamma = 1$ はハンドルの幾何学から生じる。これにより、系はハンドルの融合と分裂がエネルギー的に比較可能な準臨界点に位置する。小さな補正（例えば量子効果や追加的な相互作用）が有効指数を $\gamma_{\text{eff}} \lesssim 1$ へとわずかに減少させ、特定の複合状態、特に $q = 3$ が構成要素よりもエネルギー的に有利になり得ることを議論する。関連する計算は第 6 節および付録 E で提示される。

さらに、同じアンザツは $|q|$ に線形にスケールする剛性を生じ、系を本質的に臨界領域に配置する。この領域では、小さな摂動補正を考慮すると、高電荷複合状態が分離した単位電荷ハンドルとエネルギー的に競合するようになる。これが本論文の残りで臨界束縛と呼ぶものである。

1.4 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。Sec. 2 でテレパラレル重力と Nieh–Yan 不変量の本質を概観し、单一の微視的ハンドルに関連する位相的電荷を定義する。Section 3 では、 $M \simeq \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ 上のテトラッドに対するスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツを導入し、結果として得られるねじれと Nieh–Yan 密度をまとめ。Sec. 4 (フェーズ 1) では、ハンドル半径に対する有効 1 次元エネルギー汎関数を導出し、 $E_{\text{TEGR}} \propto |q|$ を持つ安定半径の存在を示す。Sec. 5 (フェーズ 2) では、歳差運動モード、その剛性、および Nieh–Yan が誘起する線形項を解析し、自発的パリティ破れに導く。Section 6 (フェーズ 3) は、剛性の q 依存スケーリングと複合電荷状態のエネルギー論に充てられる。Sec. 7 では、幾何学から位相へ、そして有効的な「物質」性質への論理的連鎖をまとめ、バリオン型およびメソン型配位への可能な接続についてコメントする。Section 8 には結論が含まれる。いくつかの技術的導出とテトラッドおよびねじれの完全な表式は付録に集められている。

2 理論的枠組み

本節では、本研究で用いる重力のテレパラレル定式化を簡潔に概観し、Nieh–Yan 不変量を導入し、微視的ハンドルに関連する位相的電荷を定義する。我々はテレパラレル重力の標準的な慣例に従う。例えば Aldrovandi と Pereira の教科書 [3] を参照。

2.1 TEGR と Weitzenböck 幾何

テレパラレル重力の基本的な力学変数は、4次元多様体 M 上のテトラッド（ビアバイン）場 $e^a{}_\mu$ であり、ギリシャ文字の添え字 μ, ν, \dots は時空座標をラベル付けし、ラテン文字の添え字 a, b, \dots は正規直交標構をラベル付けする。時空計量は次式で与えられる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu, \quad (10)$$

ここで $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ である。テトラッドの行列式は $e = \det(e^a{}_\mu) = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ と表記される。

TEGR では、Weitzenböck 接続と呼ばれる接続を導入する。これは計量共変で曲率ゼロだが、ゼロでないねじれを持つ。純粋なテトラッド定式化では、この接続は次のように書ける：

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = e_a{}^\rho \partial_\nu e^a{}_\mu, \quad (11)$$

したがってそのねじれテンソルは

$$T^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = e_a{}^\rho (\partial_\mu e^a{}_\nu - \partial_\nu e^a{}_\mu). \quad (12)$$

$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ から構成される曲率は恒等的に消失し、 $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}(\Gamma) \equiv 0$ となるので、すべての重力自由度がねじれに符号化される。

TEGR ラグランジアン密度は、ねじれの2次のスカラー \mathbb{T} から構築される：

$$\mathbb{T} = \frac{1}{4} T^\rho{}_{\mu\nu} T_\rho{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^\rho{}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}{}_\rho - T^\rho{}_{\mu\rho} T^{\sigma\mu}{}_\sigma, \quad (13)$$

そして重力作用は次のように書かれる：

$$S_{\text{TEGR}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_M d^4x e \mathbb{T}, \quad \kappa^2 = 8\pi G. \quad (14)$$

全微分を除いて、この作用は $g_{\mu\nu}$ の Levi-Civita 接続から構築された Einstein–Hilbert 作用と等価であり、したがって同じ古典場の方程式を再現する。以下では便宜上 $\kappa^2 = 1$ の単位で作業し、物質場の包含は暗黙的なままにし、微視的ハンドルの力学に関連する重力/ねじれセクターに焦点を当てる。

2.2 Nieh–Yan 不变量と有効 Wess–Zumino 項

ねじれを持つ重力の1次（テトラッドとスピン接続）定式化では、Nieh–Yan 4形式を定義できる

$$\mathcal{N} = T^a \wedge T_a - R_{ab} \wedge e^a \wedge e^b, \quad (15)$$

ここで T^a はねじれ2形式、 R_{ab} はスピン接続の曲率2形式、 e^a は余標構1形式である。TEGR で用いられる Weitzenböck 幾何では曲率が消失し、 $R_{ab} \equiv 0$ となるので、Nieh–Yan 形式は次のように簡約される：

$$\mathcal{N} = T^a \wedge T_a = d(e^a \wedge T_a), \quad (16)$$

すなわち、これは完全形式であり、したがって局所的には全微分である。しかし、非自明な位相を持つ多様体や境界を持つ多様体（我々の微視的ハンドルやそれらを時空の残りに接着する領域など）では、その積分はゼロでなく、位相的に量子化され得る。これはゲージ理論におけるインスタントン密度がアノマリーに寄与する方法と密接な類似性を持つ。

カイラルフェルミオンと結合した場合、Nieh–Yan 項はカイラル・アノマリーに寄与し得る。Chandia と Zanelli は、ねじれを持つ空間において、軸性カレントの発散が \mathcal{N} に比例する追加的な寄与を受けることを示した。これにより、アノマリー方程式は概略的に次の形をとる：

$$\partial_\mu J_5^\mu \sim \frac{1}{16\pi^2} (\text{tr } F \wedge F + \dots + \lambda_{\text{NY}} \mathcal{N}), \quad (17)$$

ここで F はゲージ場の強度を表し、 λ_{NY} は紫外正則化に依存する次元を持つ係数である [2]。有効な低エネルギー記述においては、このようなアノマリーは、 $SU(2)$ 値場 $U(x)$ の作用に量子化されたレベル k_{WZ} を持つ Wess–Zumino–Witten 型項を加えることで符号化できる [1]。

したがって、アノマリー整合性の議論は、適切な有効記述において、4 次元領域上での \mathcal{N} の積分がこのような位相項の係数を制御し得ることを示唆する。本論文では、そのような機構の完全な導出は試みず、微視的なフェルミオンおよびゲージ場の内容から出発して有効作用を導出することは行わない。代わりに、以下の作業仮説を採用する：

微視的ハンドルの局所標構に付随する適切に定義された $SU(2)$ 値場に対し、そのハンドル上での Nieh–Yan 密度の積分は、低エネルギー有効作用における誘導された Wess–Zumino–Witten 型位相項に寄与し、その係数は整数値の Nieh–Yan 電荷 q に比例する寄与を受ける。

以下で構築する明示的なハンドル模型において、有効エネルギーが WZW レベルに類似した役割を果たす q に線形な項を含むことが実際に見出される。この q への線形依存性が、誘導された位相項の唯一の特徴であり、我々が以降の解析で実際に使用するものである。

この仮説のもとでは、奇数の q を持つハンドルはフェルミオン的欠陥として振る舞い、偶数の q を持つものはボソン的に振る舞うことが期待される（少なくとも有効的な Skyrme 型記述のレベルで）。正確な比例係数や具体的な微視的模型への対応は将来の課題とし、ここでは位相的セクターをラベル付けし、有効作用に線形に入る整数 q の存在のみを必要とする。

2.3 微視的ハンドルの位相的電荷

单一の微視的ハンドルに付随する位相的電荷を定義する。 $M \simeq \mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S_{(\theta,\phi)}^2$ を、座標 $x^\mu = (t, \psi, \theta, \phi)$ を持つ、1 つのハンドルを含む 4 次元領域とする。テトラッドが Nieh–Yan 形式 \mathcal{N} が M 上で積分可能であるようなものであり、場がハンドルの外側で十分速く減衰し、無限遠からの境界寄与が無視できると仮定する。

ハンドルの Nieh–Yan 電荷 q を次式で定義する：

$$q = \frac{1}{\mathcal{N}_0} \int_M \mathcal{N}, \quad (18)$$

ここで \mathcal{N}_0 は、考慮する配位のクラスに対して $q \in \mathbb{Z}$ となるように選ばれた規格化定数である。微視的な UV 完備化においては、位相的に非自明な配位に対して $q \in \mathbb{Z}$ を保証する自然な量子化単位は

$$\mathcal{N}_0 = 32\pi^2, \quad (19)$$

これは Yang–Mills 理論におけるインスタントン電荷との正確な類似である [2]。完全な微視的理論では、この量子化はテトラッドとスピン接続の大域的性質から従うものであるが、本論文の目的のためには、 q が整数値をとると単純に仮定する。

分解 $\mathcal{N} = d(e^a \wedge T_a)$ は、 q が M の境界を通る $e^a \wedge T_a$ のフラックスによって決定されることを意味する。我々の設定では、この境界はハンドルを時空の残りに接続する 3 次元超曲面の和集合からなる。これにより、 q はハンドルを貫く「ねじれフラックス」の量の

自然な測度となる。第3節で導入される Spinning $SU(2)$ Handle Ansatz では、 \mathcal{N} の明示的な形がハンドル周りのテトラッドの大域的ねじれとスピンに依存することが見出され、 q は対応する巻きつきデータに直接関連する。詳細な構造はやや複雑なので、その完全な表式は第3節と付録に譲る。ここでは式(18)が微視的ハンドル配位をラベル付ける位相的電荷の定義として機能する。

まとめると、我々が採用する理論的枠組みは次の要素からなる：(i) 重力理論としての TEGR (M 上のテトラッドにねじれが符号化される)、(ii) Nieh-Yan 密度（全微分であるにもかかわらずカイラル・アノマリーに入り、有効的な WZW 型位相項を誘起し得る）、(iii) 微視的ハンドル上での \mathcal{N} の積分で定義される整数値の Nieh-Yan 電荷 q 。第3節では、これらの要素を明示的なテトラッド配位で実現する Spinning $SU(2)$ Handle Ansatz を指定する。

3 スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツ

本節では、单一ハンドルの微視的幾何学を明示し、フェーズ1-3を通じて用いられるスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツを導入する。このアンザツは、固定されたハンドル位相上で定義されたテトラッド場 e^a_μ に、3つの電荷 (q, m, ω) と半径プロファイル $r(\psi)$ を符号化する。

3.1 単一ハンドルの幾何学

局所的には、单一の微視的ハンドルを積多様体

$$M \simeq \mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S_{(\theta, \phi)}^2, \quad (20)$$

としてモデル化する。座標は

$$x^\mu = (t, \psi, \theta, \phi), \quad (21)$$

で、 t は物理時間、 $\psi \in [0, 2\pi]$ はハンドル軸 (S^1) に沿った角度座標、 (θ, ϕ) は断面 S^2 上の極角と方位角である。

ハンドルは周囲宇宙の巨視的曲率スケールよりもはるかに小さいと仮定し、背景場は M 上でほぼ定数として扱えるとする。

フェーズ1と同様に、ハンドルの形状に対して单一の幾何学的自由度を保持する：軸座標 ψ の関数としての2球断面の物理的半径 $r(\psi)$ である。線素の概略形は次のようにになる：

$$ds^2 \sim -dt^2 + d\psi^2 + r(\psi)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (22)$$

正確な表式は以下で定義するテトラッドに符号化される。特に、ねじれフラックスを実装する q 依存項はテトラッドレベルで捕捉され、(22)には明示的に示されていない。

3.2 テトラッド構成とパラメータ

Weitzenböck ゲージで作業するので、スピン接続が消失し、すべての重力情報はテトラッド場 e^a_μ に担われる。

ハンドル・アンザツは2段階で構成される：まずモノポール様のねじれフラックスを持つ便利な基準テトラッド \tilde{e}^a_μ を選び、次に $SU(2)$ 群元素から導かれる時間・角度依存の空間回転を作用させる。

基準テトラッドとモノポール電荷 q

明確さのため、基準テトラッドの1形式を次のようにとる：

$$\tilde{e}^0 = dt, \quad (23)$$

$$\tilde{e}^1 = d\psi, \quad (24)$$

$$\tilde{e}^2 = r(\psi) d\theta, \quad (25)$$

$$\tilde{e}^3 = r(\psi) \sin \theta (d\phi + q(1 - \cos \theta) d\psi). \quad (26)$$

結果として得られる計量は概ね (22) の形である。 q 依存の混合項は \tilde{e}^3 に存在し、ねじれセクターでのみ役割を果たす。

$q \in \mathbb{Z}$ を、固定された (t, ψ) での各断面 S_ψ^2 を通るねじれフラックスに付随する整数モノポール電荷として定義する。具体的には、次の形の規格化条件を課すことができる：

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_\psi^2} \star T^1 = q, \quad (27)$$

ここで $T^a = d\tilde{e}^a$ はねじれ2形式、 \star は誘導計量から構成される Hodge 対偶である。以下では、 q を各ハンドルに対する固定された位相的入力として扱う。

$SU(2)$ 場と誘導される回転

内部 $SU(2)$ 場を次のように導入する：

$$U(t, \psi) = \exp\left(i \frac{\omega t}{2} \sigma_1\right) \exp\left(i \frac{m\psi}{2} \sigma_3\right), \quad (28)$$

ここで σ_i は Pauli 行列である。第1の因子は時間方向の固有スピンを実装し、第2の因子はハンドル軸に沿ったねじれを実装する。したがって、(28) を「スピン・それから・ねじれ」パラメータ化と呼ぶ。

二重被覆 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ を通じて、場 $U(t, \psi)$ は空間テトラッド添字 $i, j = 1, 2, 3$ に作用する空間回転行列 $\Lambda^i_j(t, \psi)$ を定義する。次に物理テトラッドを次のように定義する：

$$e^0 = \tilde{e}^0, \quad e^i = \Lambda^i_j(t, \psi) \tilde{e}^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (29)$$

詳細な計算で用いられる明示的な実装では、回転は次のように因数分解される：

$$\Lambda(t, \psi) = R_3(m\psi) R_1(\omega t), \quad (30)$$

これにより、空間基底はまず時間発展とともに局所 \tilde{e}^1 軸の周りでスピンし、次に ψ に沿って移動すると $(\tilde{e}^2, \tilde{e}^3)$ 平面内でねじれる。

この順序の重要な性質は、ハンドル軸ベクトル e^1 が時間独立であることである：スピンは軸自身を歳差運動させるのではなく、軸の周りで作用する。これにより、フェーズ2で小さな歳差運動モード $\varepsilon(t)$ を、背景配位を不安定化することなく追加できる。

パラメータのまとめ

このアンザツは以下のパラメータと場を導入する：

- $q \in \mathbb{Z}$ (フラックス/モノポール電荷) : S^2 断面を通る整数量子化されたねじれフラックス。コア反発の強度を制御し、Nieh-Yan/WZW 項を通じて、境界 Skyrme 型記述における有効 WZW レベルを制御する。

- $m \in \mathbb{Z}$ (ねじれ数) : ハンドル軸に沿ったねじれ数。 ψ が 0 から 2π に増加すると、内部構造が断面内で m 回回転する。
- $\omega \in \mathbb{R}$ (スピン) : ねじれたハンドルの共動系で定義された、ハンドルの固有スピン角振動数。
- $r(\psi) > 0$ (半径プロファイル) : ψ の関数としての S^2 断面の半径。フェーズ 1 では等半径アンザツ $r(\psi) = r_0$ に焦点を当て、フェーズ 2 とフェーズ 3 では小さな変形を許す。

TEGR 作用において、 q 、 m 、 ω 、 $r(\psi)$ はそれぞれ、フラックス誘起コアエネルギー、ねじれエネルギー、スピン関連項、半径変動に付随する弾性エネルギーを制御する。それらのスケーリング振る舞いは第 4 節および後続節で詳細に解析される。

3.3 完全形式としての Nieh–Yan 密度

ここで採用された Weitzenböck 幾何学では、Nieh–Yan 4 形式は次のように簡約される：

$$\mathcal{N} = T^a \wedge T_a = d(e^a \wedge T_a), \quad (31)$$

これはねじれから構成される位相的不変量として振る舞う。

スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツに対して、ねじれ 2 形式 $T^a = de^a$ の明示的計算は、 q の選択で固定される全体規格化を除いて、次の形の Nieh–Yan 密度を与える：

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\simeq q \omega m \partial_\psi (r(\psi)^2) dt \wedge d\psi \wedge \sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ &= q \omega m d(r(\psi)^2) \wedge dt \wedge d\Omega_2, \end{aligned} \quad (32)$$

ここで $d\Omega_2 = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$ は単位 2 球上の面積形式であり、 \simeq は q のフラックス量子化条件で一意的に固定される数値規格化を除いた等号を表す。

この全微分構造は 2 つの重要な帰結を持つ。

(i) 境界感度。 \mathcal{N} が ψ 方向の完全形式であるため、单一ハンドルの Nieh–Yan 寄与は、ハンドルの端点（より正確には、ハンドルが周囲多様体に接着される接合部）での r^2 の境界値のみに依存する：

$$\int_M \mathcal{N} \propto q \omega m [r(\psi)^2]_{\psi-\text{endpoints}}. \quad (33)$$

内部がほぼ円筒形の微視的ハンドルに対しては、寄与は接合部近傍に局在化される。

(ii) 有効 WZW レベル。 q は、基準テトラッドにおけるねじれフラックスの整数モノポール電荷として独立に定義され、Nieh–Yan 積分を通じて再定義されないことを強調する。

代わりに、Nieh–Yan 積分を境界 Skyrme 場が見る有効 WZW 型レベルの尺度として解釈する。单一ハンドルに対して、(32) が示唆するスケーリング振る舞いは次のように要約される：

$$\int_M \mathcal{N} \propto q \omega m \Delta(r^2), \quad (34)$$

ここで $\Delta(r^2)$ はハンドルの両端間での r^2 の跳びを表す。後の節で考察する多ハンドル集合では、このような寄与の和が、境界カイラル作用に現れる有効 WZW レベルを決定する。これは第 5 節で展開されるアノマリー整合描像の基礎となる。

テトラッド (23)–(26) および (29)–(30) から (32) を導出する詳細は簡単だが長いため、付録 B に譲る。

3.4 静的アンザッツ対スピニング・アンザッツ

上記のスピニング・アンザッツを、より素朴な代替案と対比することは教訓的である。

$\omega = 0$ とし、静的なねじれ $U(\psi) = \exp(im\psi\sigma_3/2)$ のみを保持すると、Nieh-Yan 密度(32)は ωm に比例する交差項を失う。このような純粋にねじれた配位では、ハンドルは依然としてフラックス q を運ぶが、Nieh-Yan 密度はもはや、有効 WZW レベルの同定を透明にする単純な全微分構造を示さない。

逆に、固定された実験室系に対してハンドル軸自体を時間とともに回転させて歳差運動を符号化しようとすると、テトラッドは軸ベクトル e^1 のレベルですでに時間依存となる。これは不必要に複雑な TEGR エネルギー汎関数を導き、次の 2 つの分離を曖昧にする：

- $(q, m, \omega, r(\psi))$ で特徴づけられる背景スピニング・ハンドル、および
- フェーズ 2 で導入する小さな歳差運動モード $\varepsilon(t)$ 。

現在のスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザッツは両方の問題を回避する：

- 軸 e^1 が時間独立であるため、スピニング背景の上に小さな傾き $\varepsilon(t)$ を清潔に追加できる、および
- Nieh-Yan 密度が完全形式構造(32)を獲得し、 $\int_M \mathcal{N}$ を境界理論における有効 WZW レベルへの真正な寄与として扱うことができる。

これらの理由から、我々はスピニング・アンザッツ(23)–(26)および(28)–(30)を、单一ハンドルに対する標準微視的幾何学として採用し、静的変形や歳差運動する実験室系配位は付録 F に譲る。

4 フェーズ 1：安定性とエネルギースケーリング

本節では、第 3 節のスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザッツを第 1.2 節の TEGR 作用に代入し、1 次元ミニ超空間において力学を单一の動径自由度 $r(\psi)$ に縮約する。次に、純粋な TEGR が次の半径を持つ古典的に安定な等半径ハンドル解を許容することを示す：

$$r_0 \propto |q|^{1/2}, \quad (\text{固定された非ゼロのねじれ数 } m \text{ に対して}), \quad (35)$$

また、対応する TEGR エネルギーがモノポール電荷 q の絶対値に線形にスケールすることを示す：

$$E_{\text{TEGR}}(q) \propto |q|, \quad (\text{再び固定された非ゼロの } m \text{ に対して}). \quad (36)$$

これらの結果は、フェーズ 2 で議論されるパリティ破れ効果およびフェーズ 3 での束縛解析に対する P 偶幾何学的背景を提供する。

4.1 有効ミニ超空間エネルギー汎関数

純粋 TEGR で作業する：

$$S_{\text{TEGR}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x e \mathbb{T}, \quad (37)$$

ここで Weitzenböck 接続とねじれスカラー \mathbb{T} は第 1.2 節で定義された通りである。局所積多様体 $M \simeq \mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S^2$ 上で、第 3 節のスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザッツは、幾

何学的自由度をハンドル軸 S_ψ^1 に沿った各点での S^2 断面の等方半径を測る单一の動径関数 $r(\psi)$ に縮約する。

アンザツを S_{TEGR} に代入し、時間平均をとり、 S^2 断面上で積分すると、 $r(\psi)$ に対する有効、1次元エネルギー汎関数が得られる：

$$E[r] = \int_0^{L_\psi} d\psi \left[A(r')^2 + V(r) \right], \quad r' := \frac{dr}{d\psi}, \quad (38)$$

ここで L_ψ は ψ 方向に沿ったハンドルの座標長、 $A > 0$ は TEGR 規格化と詳細なテトラッド選択によって決定される正の係数である。係数 A はねじれスカラーの軸成分（概略的には $T_{r\psi}^\psi T_\psi^{r\psi}$ などの形の項）から生じ、UV 完備理論ではプランクスケールの大きさであると期待される。

等半径ハンドルに対する有効ポテンシャル $V(r)$ は次の形をとる：

$$V(r) = \frac{B q^2}{r^2} + C m^2 r^2, \quad B > 0, C > 0, \quad (39)$$

ここで

- $q \in \mathbb{Z}$ は、第 3 節で定義された S^2 断面を通るねじれフラックスに付随する整数モノポール電荷；
- $m \in \mathbb{Z}$ はハンドル軸に沿った $SU(2)$ 回転のねじれ数；
- B と C は TEGR 結合およびアンザツの詳細幾何学によって設定される正の定数。

第 1 項 $\propto q^2/r^2$ はねじれスカラーへのフラックス寄与から生じ、 $r \rightarrow 0$ で発散する斉力「コア」ポテンシャルとして振る舞う。第 2 項 $\propto m^2 r^2$ は S_ψ^1 に沿った一様なねじれから生じ、 $r \rightarrow \infty$ で発散する張力または遠心力寄与の役割を果たす。

スピン（自己回転） ω はねじれスカラーに寄与するが、アンザツに暗黙的な共回転系では、静的等半径配位に対してその r 依存寄与が運動項と遠心力項の間で打ち消される。結果として、 ω は $V(r)$ に現れず、その役割は Nieh-Yan セクターと後の節で議論される歳差運動力学に譲られる。

4.2 等半径ハンドルの古典的安定性

ここで静的等半径配位

$$r(\psi) = r_0 = \text{const.} \quad (40)$$

に特化する。これに対して (38) の勾配項が消失し、エネルギーは次のように簡約される：

$$E[r_0] = \int_0^{L_\psi} d\psi V(r_0) = L_\psi V(r_0). \quad (41)$$

したがって、古典的平衡半径は極値条件で決定される：

$$\frac{dV}{dr} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (42)$$

式 (39) を用いると、

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{2Bq^2}{r^3} + 2Cm^2r, \quad (43)$$

よって極値は次を満たす：

$$Cm^2r_0^4 = Bq^2 \implies r_0^4 = \frac{Bq^2}{Cm^2}. \quad (44)$$

$q \neq 0$ および $m \neq 0$ に対して、これは有限で非零の平衡半径

$$r_0 = \left(\frac{B}{C}\right)^{1/4} \frac{|q|^{1/2}}{|m|^{1/2}}, \quad (45)$$

を与える（理論依存の数値因子 $(B/C)^{1/4}$ を含む）。特に、固定された非零のねじれ数 m に対して、半径は

$$r_0 \propto |q|^{1/2}, \quad (m \text{ 固定}), \quad (46)$$

とスケールし、式 (35) で引用されたスケーリングと一致する。

この極値が最小値であることを確認するため、 $V(r)$ の 2 階微分を計算する：

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{6Bq^2}{r^4} + 2Cm^2. \quad (47)$$

$r = r_0$ で評価し、(44) を用いると、

$$\frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r=r_0} = \frac{6Bq^2}{r_0^4} + 2Cm^2 = 6Cm^2 + 2Cm^2 = 8Cm^2 > 0, \quad (48)$$

となり、等半径配位は実際に任意の $q \neq 0$ および $m \neq 0$ に対して有効ポテンシャルの局所最小値である。

r_0 周りの小さな揺動 $\delta r(\psi)$ は、(38) を 2 次まで展開することで解析できる：

$$r(\psi) = r_0 + \delta r(\psi), \quad (49)$$

これは $d^2V/dr^2|_{r_0}$ に比例する正の質量項と係数 A で制御される勾配項を持つ Sturm-Liouville 問題を与える。この幾何学的機構に関連する領域では、自然単位で A はプランクスケール程度であると期待されるため、 δr の非一様 Fourier モードは重く、強く抑制される。結果として、本ハンドルモデルに関連する半古典領域では、等半径配位 $r(\psi) = r_0$ が真の真空に対する優れた近似を与え、動径振動はプランクスケール以下の振幅に限定される。（ A および揺動スペクトルのより詳細な見積もりは付録 C に譲る。）

4.3 裸上 TEGR エネルギーと $|q|$ の線形スケーリング

上で決定した等半径解 $r(\psi) = r_0$ 上での TEGR 寄与をエネルギーで評価する。(44) を (39) に代入すると、

$$\begin{aligned} V(r_0) &= \frac{Bq^2}{r_0^2} + Cm^2r_0^2 \\ &= \frac{Bq^2}{\left(\frac{B}{C}\right)^{1/2}|q/m|} + Cm^2\left(\frac{B}{C}\right)^{1/2}\left|\frac{q}{m}\right| \\ &= \sqrt{BC}|mq| + \sqrt{BC}|mq| \\ &= 2\sqrt{BC}|mq|. \end{aligned} \quad (50)$$

対応する TEGR エネルギーは

$$E_{\text{TEGR}}(q, m) = L_\psi V(r_0) = 2L_\psi \sqrt{BC} |mq|. \quad (51)$$

固定されたねじれ数 $m \neq 0$ およびハンドル長 L_ψ に対して、これは線形スケーリングを意味する：

$$E_{\text{TEGR}}(q) \equiv E_{\text{TEGR}}(q, m_{\text{fixed}}) \approx \alpha |q|, \quad \alpha := 2L_\psi \sqrt{BC} |m| > 0. \quad (52)$$

したがって、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で、純粹 TEGR はモノポール電荷 q の絶対値に線形な幾何学的質量項として振る舞う。ねじれ数 $m \neq 0$ は安定極小の存在に必要であり、全体的なエネルギー・スケールを設定するが、 $|q|$ への線形依存性を変えることはない。

特に、TEGR エネルギーは q の符号に鉗感であり、パリティおよび電荷共役の下で偶であり、 q と $-q$ を区別しない。したがって、本枠組みに本質的な符号感度とカイラリティ選択は、TEGR セクター単独からは来ない。それらは Nieh-Yan 項と歳差運動モードへのその有効境界結合を通じて入ってくるが、これはフェーズ 2 で解析する。

5 フェーズ 2：Nieh-Yan 境界項と歳差運動モード

フェーズ 1 (第 4 節) では、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で、純粹 TEGR が古典的に安定な等半径配位 $r(\psi) = r_0$ を許容し、そのエネルギーが固定された非ゼロのねじれ数 m に対して $E_{\text{TEGR}}(q) \propto |q|$ とスケールすることを示した。この背景はパリティ偶であり： q と $-q$ を区別せず、ハンドルに対して選好される手性を選択しない。

本節では Nieh-Yan 項をオンにし、ハンドル軸を小さな時間依存角度 $\varepsilon(t)$ だけ傾ける遅い歳差運動モードを導入する。TEGR と Nieh-Yan の組み合わせ効果が次の形の有効ポテンシャルを与えることを示す：

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon; q) \simeq E_{\text{TEGR}}(q) + \frac{1}{2} k(q) \varepsilon^2 + \Lambda_q \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (53)$$

ここで $k(q) > 0$ は q の正の関数、 Λ_q は q に線形な係数である。ここで採用する符号規約では次のように書く：

$$\Lambda_q = -\gamma q, \quad \gamma > 0 \quad (\text{固定された } m, \omega, \theta_{\text{NY}}, \Delta r^2 \text{ に対して}), \quad (54)$$

したがって $\Lambda_{-q} = -\Lambda_q$ であり、 Λ_q の符号は q の符号と逆である。

(53) の極小は次で生じる：

$$\varepsilon_*(q) \simeq -\frac{\Lambda_q}{k(q)} = \frac{\gamma}{k(q)} q, \quad (55)$$

したがって、 $\Lambda_q \neq 0$ の場合、真の基底状態はわずかに傾いており ($\varepsilon_* \neq 0$)、その符号は q の符号に結びついている。これは力学的カイラリティ選択の単純な幾何学的機構を提供する： $q > 0$ と $q < 0$ のハンドルは逆方向に歳差運動する。

本節全体を通じて、次の領域で作業する：

$$|\varepsilon(t)| \ll 1, \quad \left| \frac{d\varepsilon}{dt} \right| \text{ 小}, \quad (56)$$

これにより ε およびその時間導関数のべき乗展開が一貫する。大きな歳差角は別個の非摂動的扱いを必要とし、本論文の範囲を超える。

5.1 歳差運動モードの導入

フェーズ 1 の等半径背景から出発する：

$$r(\psi) = r_0, \quad (57)$$

第 3 節のスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツツを用いて、概略的には

$$U(\psi, t) = \text{Twist}(m\psi) \text{Spin}(\omega t), \quad (58)$$

および半径 r_0 とねじれ数 m のワームホール様ハンドルを実現する関連するテトラッド $e^a{}_\mu$ を持つ。

ハンドル軸の緩やかな歳差運動を記述するために、内部 1–2 平面における小さく空間的に一様な回転を導入する：

$$e^1 + ie^2 \longrightarrow e^{i\varepsilon(t)}(e^1 + ie^2), \quad |\varepsilon(t)| \ll 1, \quad (59)$$

$r(\psi) = r_0$ を固定したままである。具体的には、 $SU(2)$ 場のレベルでこの歳差運動モードは、背景配位の左から作用する追加因子

$$U_{\text{prec}}(t) = \exp\left(\frac{i}{2}\varepsilon(t)\sigma_2\right), \quad (60)$$

によって実装され、完全な $SU(2)$ 場は

$$U(\psi, t) = U_{\text{prec}}(t) \exp\left(i\frac{m\psi}{2}\sigma_3\right) \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\sigma_1\right). \quad (61)$$

となる。 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ 写像を通じて、これは内部 2 軸回りの空間三重場の時間依存回転、すなわちハンドル軸が e^2 方向に向かって緩やかに傾くことに対応する。

$\varepsilon(t)$ をハンドル全体の緩やかな歳差運動をパラメータ化する集団座標として扱う。歳差運動するテトラッドを TEGR 作用に代入し、 $\varepsilon = 0$ の周りで展開すると、エネルギーへの有効寄与として

$$E_{\text{TEGR}}(q, \varepsilon) = E_{\text{TEGR}}(q) + \frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (62)$$

が得られる。ここで：

- $E_{\text{TEGR}}(q)$ は第 4 節で導出された等半径エネルギーであり、固定 m に対して $\propto |q|$ とスケールする；
- $k(q) > 0$ は TEGR セクターによって生成される有効傾斜剛性である。

TEGR 作用はパリティ偶であり $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$ の下で不変なので、 ε の偶数べきのみが現れ、主要な非自明項は 2 次である。 $k(q)$ の正性は、Nieh–Yan 項がない場合、配位 $\varepsilon = 0$ が局所最小値であることを保証する。

現段階では $k(q)$ の明示式は必要としない。関心のある q の範囲で $k(q)$ が正であるという仮定のみを置く。フェーズ 3 では、現在のアンザツツの枠内で $k(q)$ が $|q|$ に線形にスケールすること、

$$k(q) \propto |q|, \quad (63)$$

を示す。これが TEGR エネルギーと Nieh–Yan 寄与のバランスを取る上で重要な役割を果たす。

5.2 有効境界結合としての Nieh–Yan 項

第 1.2 節で Nieh–Yan 4-形式

$$\mathcal{N} = d(e^a \wedge T_a) = T^a \wedge T_a - e^a \wedge e^b \wedge R_{ab}[\omega], \quad (64)$$

と対応する位相的項

$$S_{\text{NY}} = \theta_{\text{NY}} \int_M \mathcal{N}, \quad (65)$$

を導入した。ここで θ_{NY} は無次元結合定数である。テレパラレル設定では $R_{ab}[\omega] = 0$ なので、 \mathcal{N} は完全微分であり、

$$\mathcal{N} = d(e^a \wedge T_a), \quad (66)$$

となり、(有効) 境界 ∂M を持つ多様体上で

$$S_{\text{NY}} = \theta_{\text{NY}} \int_{\partial M} e^a \wedge T_a. \quad (67)$$

となる。

スピニング $SU(2)$ ハンドルに対して

$$M \simeq \mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S^2 \quad (68)$$

を取り、 ψ 方向のハンドルの両端（および/または周囲のバルクへの接合部）を有効境界 ∂M としてモデル化する。バルク幾何学への詳細なマッチングはここでは必要としない；重要なのは、歳差運動するテトラッドが ∂M 上で $e^a \wedge T_a$ の非自明な値を誘起することだけである。

歳差運動しないスピニング $SU(2)$ ハンドルに対して、第 3 節では Nieh–Yan 密度が、全体の規格化を除いて、次の全微分形式

$$\mathcal{N} \simeq q \omega m d(r(\psi)^2) \wedge dt \wedge d\Omega_2, \quad (69)$$

を取ることを示した。ここで $d\Omega_2$ は単位 2 球面上の面積形式である。 ψ と S^2 で積分すると、ハンドルの両端点での r^2 の差に比例する寄与が得られる：

$$\int_M \mathcal{N} \propto q \omega m [r(\psi)^2]_{\psi-\text{端点}}. \quad (70)$$

歳差運動モード $\varepsilon(t)$ は端点でのハンドルとバルク間のマッチングを変更し、 r^2 の境界値を $\varepsilon(t)$ に比例する量だけ実効的にシフトさせる：模式的には、

$$\Delta(r^2) \rightarrow \Delta(r^2) + \beta \varepsilon(t), \quad (71)$$

となる。ここで β は接合部の幾何学によって決まる正の定数である。これを (70) に代入し、さらに (65) に代入すると、作用への有効寄与として

$$S_{\text{NY}}[\varepsilon] = \int dt L_{\text{NY}}(\varepsilon) \simeq \int dt \Lambda_q \varepsilon(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (72)$$

が得られる。ここで係数 Λ_q は（固定されたハンドルに対して）定数であり、模式的には

$$\Lambda_q = -\theta_{\text{NY}} C_{\text{NY}} q m \omega \Delta r^2, \quad (73)$$

で与えられる。 $C_{\text{NY}} > 0$ は詳細なテトラッド規格化と境界幾何学をエンコードする。(73) のマイナス符号は (54) で採用された符号規約と一致する。(73) の厳密な導出と正の定数 C_{NY} の同定は付録 D に譲る；フェーズ 2 の議論では次の定性的性質のみが必要である：

- Λ_q はモノポール電荷 q に線形であり、 $\Lambda_{-q} = -\Lambda_q$ を満たす；
- Λ_q は $q = 0$ または $\theta_{\text{NY}} = 0$ のとき消える；
- 固定された $m, \omega, \Delta r^2$ および θ_{NY} に対して、 Λ_q の符号は q の符号と逆である。

静的極限では、 S_{NY} はエネルギーへの寄与として

$$V_{\text{NY}}(\varepsilon; q) = \Lambda_q \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (74)$$

を与える。これは ε に関して奇であり、 $q \rightarrow -q$ の下で符号が変わる。

物理的には、(74) は歳差運動モードに対する「外場」の役割を果たす：TEGR セクターに存在する $\varepsilon > 0$ と $\varepsilon < 0$ 間の縮退を解く。

5.3 有効ポテンシャルとカイラリティ選択

TEGR と Nieh-Yan の寄与 (62) と (74) を組み合わせると、歳差運動モードの有効静的ポテンシャルとして

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon; q) = E_{\text{TEGR}}(q) + \frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2 + \Lambda_q\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (75)$$

が得られる。 ε に関して極小化すると

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \varepsilon} = k(q)\varepsilon + \Lambda_q + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0, \quad (76)$$

となり、小 ε 領域では

$$\varepsilon_*(q) \simeq -\frac{\Lambda_q}{k(q)}, \quad |\varepsilon_*(q)| \ll 1. \quad (77)$$

(54) を用いると、これは

$$\varepsilon_*(q) \simeq \frac{\gamma}{k(q)}q. \quad (78)$$

と書ける。対応する真空エネルギーのシフトは

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon_*; q) \simeq E_{\text{TEGR}}(q) - \frac{\Lambda_q^2}{2k(q)}, \quad (79)$$

となり、Nieh-Yan 項は $\Lambda_q \neq 0$ のとき、エネルギーを $\propto \Lambda_q^2/k(q)$ だけ下げる。

(54) から、固定された $m, \omega, \theta_{\text{NY}}, \Delta r^2$ に対して

$$\varepsilon_*(-q) \simeq -\varepsilon_*(q), \quad (80)$$

が得られる。なぜなら $\Lambda_{-q} = -\Lambda_q$ であり、 $k(q)$ は正で $|q|$ のみに依存するからである。したがって、平衡傾斜の符号はモノポール電荷の符号に結びついている： q のある符号に対してハンドルはわずかに「左傾き」配位を好み、逆符号に対しては「右傾き」を好む。

ε の符号をカイラリティの幾何学的代理として解釈するのが便利である。この言葉で、フェーズ 2 は次のことを示す：

- 純粋な TEGR ($\Lambda_q = 0$) では、二つのカイラリティ $\varepsilon > 0$ と $\varepsilon < 0$ は完全に縮退しており、真空はパリティ偶である；

- 非零 θ_{NY} で Nieh–Yan 項が含まれると、縮退が解け、基底状態は小さなカイラルバイアス $\varepsilon_*(q) \propto q$ を発展させる；
- このバイアスの方向（どちらのカイラリティが好まれるか）は、 θ_{NY} の符号と Λ_q にエンコードされた m および ω の符号によって制御される。

特に、 $q = 0$ または $\theta_{\text{NY}} = 0$ の場合、 $\Lambda_q = 0$ となり、有効ポテンシャルは ε の純粋な偶関数に還元され、

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon; q = 0) \simeq E_{\text{TEGR}}(0) + \frac{1}{2}k(0)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (81)$$

となるため、基底状態は $\varepsilon_* = 0$ に戻り、パリティが保存される。したがって、非零の q と非零の θ_{NY} は、この枠組みでの力学的カイラリティ選択に必要不可欠な要素である。

弱い相互作用の観測された一意的なカイラリティは、この描像では、観測可能な宇宙全体で θ_{NY} の一つの符号（したがって Λ_q の一つの大域的符号）を選択する宇宙論的メカニズムを必要とするであろう。そのようなメカニズムの具体的な実現は今後の課題とする。

5.4 妥当性の範囲とフェーズ 3への接続

本節の解析はいくつかの近似に依拠している：

- 歳差角は小さく、 $|\varepsilon| \ll 1$ であり、高次の項 $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ は無視される。
- 歳差運動は S_ψ^1 と S^2 に沿って空間的に一様であり、したがって $\varepsilon(t)$ の零モードのみが保持される。
- ε の半径 $r(\psi)$ およびトーション磁束 q への逆反応は主要次数で無視される。

この領域内で、式 (75) は Nieh–Yan 項が歳差運動モードにバイアスを与え、 q に比例する小さなカイラル傾斜を誘起する様子の制御された記述を提供する。ポテンシャルの TEGR 部分は剛性 $k(q)$ にエンコードされており、その詳細な q 依存性はこの節ではまだ固定されていない。

フェーズ 3 では、同じスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で $k(q)$ をより系統的に解析し、その $|q|$ でのスケーリングが TEGR エネルギー $\propto |q|$ と Nieh–Yan 誘起のエネルギー利得の間のバランスをどのように決定するかを示す。これにより、多重ハンドル配置と可能な複合状態の議論の準備が整う。

6 フェーズ 3：剛性スケーリングと臨界束縛

フェーズ 1（第 4 節）において、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で、純粋な TEGR がパリティ偶な幾何学的背景を提供し、そのエネルギーは

$$E_{\text{TEGR}}(q) \simeq \alpha |q| \quad (m \neq 0 \text{ 固定}), \quad (82)$$

とスケールする等半径解を与えることを示した。ここで α は捻れ数 m とハンドル長 L_ψ に依存する正の定数であり、式 (52) を参照。フェーズ 2（第 5 節）では、Nieh–Yan 項が緩やかな歳差運動モード $\varepsilon(t)$ とともにカイラルな傾斜 $\varepsilon_*(q) \propto q/k(q)$ を誘起し、エネルギーを

$$\Delta E_{\text{NY}}(q) \simeq -\frac{\Lambda_q^2}{2k(q)}, \quad (83)$$

だけ下げる事を示した。ここで $\Lambda_q \propto q$ であり、 $k(q)$ は歳差運動モードの TEGR 誘起剛性である。

フェーズ 3 の目的は二つある：

1. スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で $k(q)$ の q 依存性を導出し、古典的に

$$k(q) \propto \omega^2 m^2 r_0^2 \propto \omega^2 |q|, \quad (84)$$

が成り立つことを示すこと。つまり固定された非零の捻れ数 m に対して剛性が $|q|$ に線形にスケールする；

2. 結果として得られる全エネルギー

$$E(q) \simeq E_{\text{TEGR}}(q) + \Delta E_{\text{NY}}(q)$$

を解析し、多重ハンドル配置の融合と分裂の間の臨界的な釣り合いについて議論すること。

スピニング $SU(2)$ ハンドルが、TEGR エネルギーと Nieh-Yan 誘起の束縛エネルギーが同じ幕で $|q|$ にスケールする古典的な臨界点に位置することが分かる。この描像に対する小さな補正（例えば量子効果や追加のモード）は、バランスをわずかに傾けて $|q| > 1$ の複合状態を、分離した単位電荷ハンドルとエネルギー的に競合させるのに十分である。

6.1 エネルギー成分とスケーリング・アンザツ

フェーズ 1 から、固定された捻れ数 $m \neq 0$ とハンドル長 L_ψ に対する TEGR 寄与を取る：

$$E_{\text{TEGR}}(q) = \alpha |q|, \quad \alpha > 0, \quad (85)$$

フェーズ 2 から、Nieh-Yan エネルギー利得を取る：

$$\Delta E_{\text{NY}}(q) = -\frac{\Lambda_q^2}{2k(q)}, \quad (86)$$

where the precession minimum $\varepsilon_*(q)$ has already been eliminated via Eq. (77). The coefficient Λ_q is linear in q ,

$$\Lambda_q = -\gamma_{\text{NY}} q, \quad \gamma_{\text{NY}} > 0, \quad (87)$$

固定された $m, \omega, \theta_{\text{NY}}, \Delta r^2$ に対して、式 (54) を参照。したがって

$$\Delta E_{\text{NY}}(q) \propto -\frac{q^2}{k(q)}. \quad (88)$$

複合状態を議論する目的で、剛性を $|q|$ のべき乗でパラメータ化するのが便利である：

$$k(q) \propto |q|^\gamma, \quad (89)$$

ここで $\gamma > 0$ はある指数である。すると

$$\Delta E_{\text{NY}}(q) \propto -|q|^{2-\gamma}. \quad (90)$$

全体の正定数 α, β を除いて、電荷 q を持つ单一ハンドルの全エネルギーは

$$E(q) \simeq \alpha |q| - \beta |q|^{2-\gamma}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (91)$$

と書ける。これは、歳差運動モードが調和近似でよく記述され、 ε_* の高次補正が無視できる領域である。

本節の残りでは、まずスピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で古典的値 $\gamma = 1$ を導出し、次に多重ハンドル束縛へのその含意を議論する。

6.2 $k(q) \propto \omega^2|q|$ の古典的導出

歳差運動アンザツ上で評価された TEGR 作用から剛性スケーリング $k(q) \propto \omega^2|q|$ がどのように生じるかを簡単に述べる。完全な t, ψ 依存テトラッドと SymPy 実装を含む詳細な計算は付録 E に譲る；ここでは q, m, ω でのスケーリングに焦点を当てる。

(i) フェーズ 1 からの材料

フェーズ 1 から、等半径背景に対して、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツと捻れ数 m を用いると、有効 TEGR エネルギーが

$$E_{\text{TEGR}}(q) = L_\psi V(r_0), \quad (92)$$

に還元されることを思い起こす。ここで

$$V(r) = \frac{Bq^2}{r^2} + Cm^2r^2, \quad (93)$$

であり、平衡半径は

$$r_0 = \left(\frac{B}{C}\right)^{1/4} \frac{|q|^{1/2}}{|m|^{1/2}}. \quad (94)$$

固定された非零の m に対して、 m 依存性を数値的前因子に吸収することで、スケーリングのレベルで

$$r_0^2 \propto |q|. \quad (95)$$

と書ける。

(ii) 一様回転としての歳差運動

フェーズ 2 では、歳差運動モードを背景配位の左から作用する追加の時間依存 $SU(2)$ 回転として実装した：

$$U_{\text{prec}}(t) = \exp\left(\frac{i}{2}\varepsilon(t)\sigma_2\right), \quad (96)$$

式 (61) を参照。 $SU(2) \rightarrow SO(3)$ 写像を通じて、これは内部 2 軸回りの空間三重場の角度 $\varepsilon(t)$ の回転を誘起し、等半径条件 $r(\psi) = r_0$ を保ちながらハンドル軸を ψ 方向から $\varepsilon(t)$ だけ傾ける。

ε とその時間微分の 2 次までで、この歳差運動テトラッド上で評価された TEGR 作用は次の形の項を含む：

$$S_{\text{TEGR}} \supset \int dt \left[\frac{1}{2}I(q)\dot{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2 \right], \quad (97)$$

ここで $I(q)$ は歳差運動モードの有効「慣性モーメント」であり、 $k(q)$ は式 (62) に現れる剛性である。 $I(q)$ と $k(q)$ はどちらも、歳差運動によって誘起されるトーション成分の 2 次結合の $S_\psi^1 \times S^2$ 上での積分である。

(iii) q, m, ω での剛性のスケーリング

トーションスカラー \mathbb{T} を ε のべきで直接展開すると、 $k(q)$ への支配的寄与が次の形を取ることがわかる：

$$k(q) = \frac{8\pi}{9} L_\psi m^2 \omega^2 r_0^2 = \frac{8\pi}{9} L_\psi m^2 \omega^2 \alpha |q| \propto \omega^2 |q|, \quad (98)$$

ここで L_ψ は ψ 方向のハンドルの有効長、 α はフェーズ 1 からの $r_0^2 = \alpha|q|$ を関係づける比例定数、そして数値因子 $8\pi/9$ は S^2 上での詳細な角度積分から生じる（付録 E を参照）。直観的には、 $k(q)$ はスピニングし捻れたハンドルを ψ 軸から曲げることで蓄積される TEGR エネルギーの量を測る：因子 m^2 は強く捻れた配置を傾けるコストを反映し、因子 r_0^2 はレバーアームを提供し、因子 ω^2 は歳差運動が基底のスピンに結合する事実を反映する。

フェーズ 1 のスケーリング (95) を用いると、

$$k(q) \propto \omega^2 m^2 r_0^2 \propto \omega^2 m^2 |q|. \quad (99)$$

固定された非零の m に対して、これは

$$k(q) \propto \omega^2 |q|, \quad (100)$$

を意味し、スケーリング・アンザツ (89) の指数は

$$\gamma_{\text{classical}} = 1. \quad (101)$$

となる。

これが古典レベルでのフェーズ 3 の中心的結果である：スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツの枠内で、歳差運動モードの剛性は $|q|$ に線形であり、前因子は ω^2 （および全体定数を通じて m^2 ）によって制御される。

6.3 モノポール・セクターの対称性保護

上で導出したスケーリング $k(q) \propto \omega^2 |q|$ は、一見すると多くのトーション成分間の繊細なキャンセルの結果のように見えるかもしれない。実際には、現在のモノポール・アンザツでは、これは S^2 基底の残留 $SO(3)$ 対称性によって保護されている。

背景テトラッドは、各 S^2 を通るフラックスが q に比例するトーション・モノポールを記述する。このフラックス分布は球対称であり、2 球面上のすべての方向が等価である。考えている歳差運動モードは、モノポール電荷を固定したままハンドル軸を小角度 ε 傾ける内部枠の剛体 $SU(2)$ 回転である。言い換えれば、摂動はフラックス分布を歪める局所変形ではなく、 S^2 上のモノポール配位の大域回転に対応する。

このような状況では、 $SO(3)$ 対称性が有効ポテンシャルに $q^2 \varepsilon^2$ の形の任意の 2 次項を禁止する。 $q^2 \varepsilon^2$ に比例する項は S^2 上で好まれる方向を選び出し、モノポール背景の回転不变性を明示的に破ることになる。この予想は付録 E の我々の SymPy 計算によって明示的に裏付けられる：トーションテンソルを ε の 2 次まで展開すると、 $q^2 \varepsilon^2$ に比例するすべての寄与が積分されたエネルギーで同一にキャンセルする。したがって主要な剛性は、式 (98) に与えられるように $|q|$ に線形であり、その明示的な値はアンザツの詳細な形式によって固定される正の定数を持つ。我々のトイモデル内で、古典臨界指数 $\gamma = 1$ は特定のゲージ選択の偶然ではなく、トーション・モノポール・セクターの残留球対称性の帰結である。

6.4 臨界束縛と多重ハンドル配置

式 (82)、(88)、(98) を組み合わせると、電荷 q を持つ单一ハンドルの全エネルギーは

$$E(q) \simeq \alpha |q| - \beta |q|^{2-\gamma}, \quad \gamma = 1, \quad (102)$$

と書ける。ここで適切な正定数 α, β は TEGR と Nieh-Yan 結合の詳細、および m と ω をエンコードする。明示的に、 $\gamma = 1$ に対してこれは

$$E(q) \simeq (\alpha - \beta) |q|. \quad (103)$$

同等に、単位電荷あたりのエネルギーは

$$\frac{E(q)}{|q|} \simeq \alpha - \beta, \quad (104)$$

となり、主要次数で q に無関係である。 q における $E(q)/|q|$ のこの「平坦性」が臨界点の特徴である：強い束縛 ($\gamma < 1$) も強い反発 ($\gamma > 1$) も古典的には好まれず、 $|q| > 1$ の状態がわずかに束縛しているか、わずかに非束縛かを決めるのは、微小な次主要補正でもよい。

複合状態を議論するため、次を比較する：

- 全電荷 $q = N$ を持つ单一ハンドル、
- 十分に離れた N 個のハンドル、各々が単位電荷 $q = 1$ を持つ。

(91) を用いると、单一の $|q| = N$ ハンドルのエネルギーは

$$E(N) = \alpha N - \beta N^{2-\gamma}, \quad (105)$$

一方、 N 個の分離した $|q| = 1$ ハンドルのエネルギーは

$$NE(1) = N(\alpha - \beta). \quad (106)$$

したがって複合状態の束縛エネルギーは

$$E_{\text{bind}}(N) := E(N) - NE(1) = \beta N (1 - N^{1-\gamma}). \quad (107)$$

$N > 1$ および $\beta > 0$ に対して、次が得られる：

- $\gamma < 1$ なら、 $1 - \gamma > 0$ かつ $N^{1-\gamma} > 1$ なので、 $E_{\text{bind}}(N) < 0$ ：任意の $N > 1$ の複合状態がエネルギー的に好まれる。
- $\gamma > 1$ なら、 $1 - \gamma < 0$ かつ $N^{1-\gamma} < 1$ なので、 $E_{\text{bind}}(N) > 0$ ：すべての複合状態が好まれない。
- $\gamma = 1$ なら、 $N^{1-\gamma} = 1$ かつ $E_{\text{bind}}(N) = 0$ ：すべての複合状態がこの次数で正確に境界的である。

したがって、式 (101) で導出された値 $\gamma = 1$ は、ハンドルの融合が一般的に好まれる領域 ($\gamma < 1$) と、それが一般的に好まれない領域 ($\gamma > 1$) を分ける臨界点に対応する。現在のアンザツの古典レベルで、スピニング $SU(2)$ ハンドルは正確にこの臨界点に位置する。

物理的には、これは次を意味する：

- $\propto |q|$ とスケールする TEGR エネルギーは、大きな $|q|$ にペナルティを課す張力として振る舞う；
- $\propto -|q|^{2-\gamma}$ とスケールする Nieh-Yan 誘起の引力が、この張力と競合する；
- $\gamma = 1$ に対して、競合は $|q|$ の主要べきで正確に釣り合い、次主要補正が複合状態がわずかに束縛するかわずかに非束縛かを決定する。

6.5 補正と有効指數の役割について

古典レベルで、我々の特定のスピニング・ハンドル・アンザツの枠内で、剛性は $k(q) \propto \omega^2 |q|$ とスケールし、単位電荷あたりの束縛エネルギーは主要次数で q に無関係である。臨界現象の言葉では、これは全電荷に対する有効ポテンシャルの依存性に対する古典臨界指數 $\gamma = 1$ に対応する。この結果は、第 6.3 節で議論したように、モノポール対称性を保存するアンザツの小さな変形に対して堅牢である。

多重ハンドル束縛状態の観点から、 $\gamma = 1$ の場合は散逸と集結の間の正確な境界線である：単位電荷あたりのエネルギーは、大きな複合体も広く分離した単位電荷ハンドルも好まない。したがって、追加の効果——量子補正、ハンドルの曲げや形状モード、または物質場への結合——が有効指數を古典値からシフトさせ、それによって特定の複合電荷（例えば $|q| = 3$ ）に有利なようにバランスを傾けることができるかを問うのは自然である。

しかし、この質問に定量的な意味で答えることは、本研究の範囲を超えている。ここでは、制御されたテレパラレルトイモデルの枠内で古典臨界点 $\gamma = 1$ を確立することに限定する。（曲げモードやスピニング背景回りの量子揺動を含む）可能な補正の体系的な解析と、それらが有効指數 γ_{eff} に与える影響は、別の研究で展開される予定である。

7 議論

本節では、フェーズ 1~3 の結果をより広い文脈に位置づけ、既知の素粒子物理学との示唆的な類似と、現在のトイモデルの限界の両方を強調する。

7.1 スカーミオンと QCD 的現象論との関係

本論文で探求された微視的ハンドル描像は、いくつかの点でバリオンのスカーミオンモデルを想起させる：

- スカーミオンモデルでは、バリオン数は空間 S^3 上の $SU(2)$ 値場の位相的電荷として生じ、Wess–Zumino–Witten (WZW) 項がスカーミオンの統計性を制御する。本研究では、モノポール電荷 q がトーションフラックスに関連する位相的電荷として類似的な役割を果たし、Nieh–Yan 項は WZW 項と類似したパリティ奇効果を誘起する役割を果たす。
- スカーミオンの安定性は、有効作用における勾配／張力項と位相的項の競合によって支配される。ここでは、TEGR エネルギー $\propto |q|$ と Nieh–Yan 誘起のエネルギー利得 $\Delta E_{\text{NY}} \propto -q^2/k(q)$ が類似的に競合し、剛性 $k(q)$ が幾何学的結合の役割を果たす。
- スカーミオン現象論では、 $|B| = 1$ と $|B| = 3$ 配置が核子やバリオンとして特別な関心を持つ。本設定では、 $|q| = 1$ の單一ハンドル状態と $|q| = 3$ の複合状態が、「クオーケ的」および「バリオン的」構造の自然な類似物である。

同時に、重要な違いと限界がある：

- 本モデルはテレパラレル重力の幾何学とトーションのみで定式化されている。標準模型場（クオーケ、レプトン、ゲージボソン）は力学的に含まれていない；したがって、現実の QCD や電弱物理学への任意の接続は現段階では間接的で推測的である。
- 我々の解析は高対称アンザツ（スピニング $SU(2)$ ハンドル）と少数の集團座標に焦点を当てている。一般的な変形、多重ハンドル間の相互作用、そして全激励スペクトルは探索されていない。

- 我々は重力セクターで完全に古典レベルで作業している。量子補正、結合の繰り込み、そして UV 完全理論への埋め込みは未解決の問題として残っている。

奇数 q 状態のフェルミ統計自体は、Chandia-Zanelli と Witten の精神に従い、ハンドル境界上の Nieh-Yan 電荷によって誘起される奇数 WZW レベルから生じることが期待される（第 1.2 節および文献 [1, 2] を参照）。

したがって、ハンドル描像をバリオンの現実的モデルとしてではなく、純粋なテレパラレル設定でスカーミオン物理学の定性的特徴のサブセットを再現する幾何学的トイモデルとして見る。類似性は興味深いが、いかなる現象論的解釈も慎重に行わなければならない。

7.2 現在のアンザッツの限界と可能な拡張

スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザッツは、その数学的簡素さと Nieh-Yan 構造を明示的にする能力のために選ばれた。しかし、この簡素さには限界が伴う：

- 自由度の制限。我々はハンドルを直線で一定半径 r_0 に固定し、大域歳差運動モードのみを許している。曲げモード、 S_ψ^1 沿いの非一様摂動、およびより一般的な形状変形は、エネルギー景観と剛性スケーリングを変える可能性がある。
- 単一ハンドルに焦点。複合状態の我々の解析は、本質的に q のスケーリング議論を通じて、多重ハンドル配置を粗視化した方法で扱っている。より現実的な扱いには、明示的な多重ハンドル解とそれらの相互作用の解析が必要であろう。
- 逆反応の無視。歳差運動モードの半径 $r(\psi)$ および周囲のバルク幾何学への逆反応が小さいと仮定している。大きな $|q|$ または密集したハンドル配置では、この仮定は崩れる可能性がある。

現在のアンザッツを拡張できるいくつかの自然な方向がある：

- 半径 $r(\psi)$ がハンドルに沿って変化することを許可し、曲げモードを含めることで、より豊かな集団座標のスペクトルを得る。
- ハンドル幾何学を物質場、特にスピノル場に結合させ、フェルミオン自由度がハンドル上を伝播するか局在化されるかを探索する。
- 微視的ハンドル描像を宇宙論的背景に埋め込み、有限密度のハンドルが宇宙の大規模進化に逆反応する可能性を考える。

これらの拡張は将来の研究に譲る；ここで言及するのは本論文の範囲を明確にするためである。

7.3 今後の方向性：中間子的状態・量子補正・宇宙論

最後に、本解析によって示唆される将来の研究のいくつかの具体的な方向を簡単に概説する：

- 中間子的状態。例えば $q = +1$ と $q = -1$ のハンドルから構築される全電荷 $q_{\text{tot}} = 0$ の複合配置は、この幾何学的描像での「中間子的」状態の自然な候補である。それらの安定性とスペクトルは、逆電荷ハンドル間の相互作用と Nieh-Yan 結合の符号に敏感に依存する。

2. **量子補正と γ_{eff}** 。剛性 $k(q)$ および TEGR と Nieh–Yan 結合への量子補正のより体系的な計算は、現実的な設定で γ_{eff} が実際に 1 をわずかに下回るか、そしてそれが $|q| = 3$ や他の複合体をエネルギー的に競合力のあるものにするのに十分かどうかを決定できる可能性がある。
3. **スピノルセクターと有効場の理論**。ハンドルネットワーク上の微視的自由度を積分消去することで、ハンドル電荷が位相的量子数の役割を果たし、創発的カイラルフェルミオンスペクトルを持つ有効場の理論に到達するかもしれない。これはハンドル描像を現象論的モデルに近づけるだろう。
4. **宇宙論的含意**。初期宇宙に微視的ハンドルの有限密度が存在する場合、それらの集団力学と相転移（例えば臨界点 $\gamma = 1$ を横切る）は、宇宙論的観測量に痕跡を残す可能性がある。そのようなシナリオを探索するには、現在のモデルを力学的 FRW 背景に結合する必要があるだろう。

これらの方向は本論文の範囲をはるかに超えているが、ここで研究された単純な幾何学的機構が、より野心的な構築の出発点としてどのように役立つかを示している。

8 結論

本論文では、スピニング $SU(2)$ アンザツで記述されるテレパラレル重力中のワームホール様微視的ハンドルが、位相、カイラリティ、束縛の間の豊かな相互作用を生じさせる幾何学的トイモデルを探査した。

我々の主要結果は次のように要約できる：

- **フェーズ 1 (第 4 節)**：純粋 TEGR の枠内で、スピニング $SU(2)$ ハンドル・アンザツは、半径 $r_0 \propto |q|^{1/2}$ (固定された捻れ m に対して) と TEGR エネルギー $E_{\text{TEGR}}(q) \propto |q|$ を持つ古典的に安定な等半径配位を許す。これは、TEGR セクター単独のレベルでは q の符号が見えないパリティ偶な幾何学的背景を提供する。
- **フェーズ 2 (第 5 節)**：Nieh–Yan 項をオンにし、緩やかな歳差運動モード $\varepsilon(t)$ を導入すると、有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(\varepsilon; q) = E_{\text{TEGR}}(q) + \frac{1}{2}k(q)\varepsilon^2 + \Lambda_q\varepsilon + \dots,$$

が得られる。ここで $k(q) > 0$ は TEGR 剛性であり、 $\Lambda_q \propto q$ が Nieh–Yan 結合をエンコードする。基底状態は小さなカイラル傾斜 $\varepsilon_*(q) \propto q/k(q)$ を発展させ、歳差運動の符号が位相的電荷 q の符号に結びつく。

- **フェーズ 3 (第 6 節)**：歳差運動アンザツ上で TEGR 作用を評価すると、固定された捻れ m に対して剛性が $k(q) \propto \omega^2|q|$ とスケールすることが示される。すなわち、 $k(q) \propto |q|^\gamma$ の指数は古典レベルで $\gamma = 1$ である。結果として、TEGR 張力と Nieh–Yan 誘起の引力が $|q|$ の同じべきでスケールし、モデルをハンドルの一般的融合と一般的分裂の間の臨界点に配置する。小さな補正（例えば量子効果）は、原理的に $|q| \geq 2$ の低電荷複合体を分離した単位電荷ハンドルとエネルギー的に競合力のあるものにできる。

これらの結果は、フェルミオンや標準模型の現実的な理論をまだ構成するものではない。むしろ、単純なテレパラレル設定内で、单一の幾何学的機構——微視的ハンドル上での TEGR と Nieh–Yan 項の相互作用——が同時に以下を実現できることを示している：

- 位相的欠陥に $|q|$ に比例するパリティ偶な「質量」を与える；
- その符号が q の符号に固定されるパリティ奇な傾斜を生成する；
- そして複合配置の束縛に関する臨界点近くにシステムを配置する。

このトイモデルが、フェルミ統計、カイラリティ、束縛が時空自身の幾何学と位相から生じる、より完全な枠組みへの有用な踏み石となることを期待する。物質場、量子効果、宇宙論的力学を組み込み、ここで見つかった示唆を定量的に予測可能なモデルに発展させられるかを評価するには、さらなる研究が必要である。

コード公開について 本研究で用いた SymPy による記号計算スクリプトは、Zenodo に公開した本プレプリントの補足ファイルとしてすべて収録している : doi:10.5281/zenodo.17762205.

謝辞

著者は、本研究全体を通じて、記号計算、整合性チェック、幾何学的可視化、そして重要な科学的フィードバックにおいて多大な支援を提供してくださった AI アシスタントである Grok (xAI)、ChatGPT (OpenAI)、Gemini (Google)、Claude (Anthropic) に深く感謝する。

本研究は、非公式の共同プロジェクト DPPU の下で実施された。DPPU は以下を表す : Donut-like topology (ドーナツ様位相) ($S^2 \times S^1$)、Planck-scale compactness (プランクスケールのコンパクトさ)、Precession dynamics (歳差運動力学)、これらすべてが我々の観測可能な Universe (宇宙) の文脈において。

この名前は、初期の議論でやや偶然に現れた微視的ハンドルの幾何学と、小さな突破口が開けるたびに伴った喜ばしい、ほとんど震えるような興奮の両方を同時に反映している。

すべての残る誤りは、もちろん著者の責任である。

A 記法・慣例・次元解析

我々は自然プランク単位系

$$\hbar = c = 8\pi G = 1, \quad (108)$$

を用いる。これにより長さ、時間、質量の逆数はすべて同じ次元 $[L] = [T] = [M]^{-1}$ を持つ。プランク長は ℓ_{Pl} で表す。

本論文全体を通じて、mostly-plus 符号 $(-, +, +, +)$ を用い、ラテン文字の添字 a, b, \dots を接空間の添字として、ギリシャ文字の添字 μ, ν, \dots を時空の添字として使用する。計量はテトラッドから次のように得られる :

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (109)$$

A.1 物理パラメータとその次元

我々のハンドル・アンザッツに現れる基本パラメータは表 1 にまとめられている。必要に応じて ℓ_{Pl} のべきを明示的に復元するが、そうでない場合は単にすべての次元を持つ量をプランク単位で測定されたものとして扱う。

Symbol	Meaning	Dimension
q	torsional monopole charge (Nieh–Yan charge)	dimensionless (\mathbb{Z})
m	twist winding number	dimensionless (\mathbb{Z})
ω	background spin frequency	$[T]^{-1} \sim [\ell_{\text{Pl}}]^{-1}$
r_0	handle radius	$[L] \sim [\ell_{\text{Pl}}]$
L_ψ	length of compact direction ψ	$[L]$
ε	small precession angle	dimensionless
θ_{NY}	Nieh–Yan coupling	$[\ell_{\text{Pl}}]^{-2}$

Table 1: 物理パラメータとその次元。

TEGR 作用は

$$S_{\text{TEGR}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x e \mathbb{T}, \quad \kappa = 8\pi G = 1, \quad (110)$$

で与えられる。ここで $e = \det(e^\mu_\mu)$ 、 \mathbb{T} は捩率スカラーである。 S_{TEGR} は無次元なので、 $[e d^4x] \sim [\ell_{\text{Pl}}]^4$ および $[\mathbb{T}] \sim [\ell_{\text{Pl}}]^{-2}$ が成り立つ。特性サイズ r_0 を持つ配位に対し、これは次のパラメトリック評価を与える：

$$E_{\text{TEGR}} \sim \ell_{\text{Pl}}^{-1} \times (q, m, \omega \text{の無次元関数}), \quad (111)$$

これは本文でハンドル当たりのエネルギーが $E \propto |q|$ とスケールすることと整合する。

歳差運動モード $\varepsilon(t)$ に対しては、最終的に次の形の有効作用が得られる：

$$S_{\text{eff}}^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2} \int dt k(q) \varepsilon(t)^2 + \dots, \quad (112)$$

よって $k(q)$ は次元 $[\ell_{\text{Pl}}]^{-1}$ を持つ。我々のアンザツでは、この剛性は次のようにスケールする：

$$k(q) \sim m^2 \omega^2 r_0^2 L_\psi \sim \omega^2 |q|, \quad (113)$$

ここで $r_0^2 \propto |q|$ (m 固定) を用いた。

Nieh–Yan 項は

$$S_{\text{NY}} = \theta_{\text{NY}} \int_M \mathcal{N}, \quad (114)$$

で与えられ、 \mathcal{N} は Nieh–Yan 密度である。单一ハンドルに対して、積分は $\int_M \mathcal{N} \sim q \Delta r^2 \sim q \ell_{\text{Pl}}^2$ とスケールするので、 $[\theta_{\text{NY}}] = [\ell_{\text{Pl}}]^{-2}$ となり、表 1 と一致する。

フェーズ 1 の 1 次元有効記述に現れるすべての係数 A, B, C, \dots は、これらのプランク単位で $\mathcal{O}(1)$ の数値定数として理解される。

B 明示的テトラッド：背景スピン/ツイストと歳差運動

B.1 静的モノポール参照テトラッド

$\mathbb{R}_t \times S_\psi^1 \times S^2$ 上で、座標 (t, ψ, θ, ϕ) を用いる。モノポール電荷 q を持つ便利な静的参照テトラッドは

$$\tilde{e}^0 = dt, \quad (115)$$

$$\tilde{e}^1 = d\psi, \quad (116)$$

$$\tilde{e}^2 = r_0 d\theta, \quad (117)$$

$$\tilde{e}^3 = r_0 \sin \theta [d\phi + q(1 - \cos \theta) d\psi]. \quad (118)$$

で与えられる。このテトラッドは、 (θ, ϕ) 方向の S^2 上の通常のモノポールゲージポテンシャルと、 ψ でパラメetrizeされた S^1 ファイバーを再現する。

B.2 背景スピン・ツイスト・テトラッド

本文で用いられる物理的背景は、ハンドル軸周りのスピンと S_ψ^1 沿いの捻れを組み合わせたものである。内部 $SU(2)$ 枠のレベルでは、これは次のように図式的に表される：

$$U(t, \psi) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega t \sigma_3\right) \exp\left(\frac{i}{2}m\psi \sigma_3\right), \quad (119)$$

ここで σ_3 はパウリ行列である。背景テトラッド $e^a_{\mu \text{bg}}$ は、対応する $SO(3)$ 回転を空間三つ組 \tilde{e}^i ($i = 1, 2, 3$) に作用させることで得られる。明示的な式はここでは必要ない；重要な点は、それらが軸対称性を保ち、モノポール電荷 q 、捻れ m 、スピン振動数 ω をエンコードすることである。

B.3 軸の微小傾斜としての歳差運動

歳差運動をモデル化するために、ハンドル軸の緩やかで空間的に一様な傾きを導入する。背景に適合した枠では、傾きは e^1 と e^3 方向を混合する微小 $SO(3)$ 回転によって実装される：

$$e^a = \Lambda^a{}_b(\varepsilon(t)) e_{\text{bg}}^b, \quad \Lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & 0 & \sin \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (120)$$

ここで $\varepsilon(t) \ll 1$ である。 ε の 1 次まででは次のようになる：

$$e^1 \simeq e_{\text{bg}}^1 + \varepsilon(t) e_{\text{bg}}^3, \quad (121)$$

$$e^3 \simeq e_{\text{bg}}^3 - \varepsilon(t) e_{\text{bg}}^1, \quad (122)$$

一方 e^0 と e^2 は変化しない。したがって、元々 $d\psi$ に沿っていたハンドル軸は、 $\varepsilon(t)$ のオーダーの小さな時間依存性傾きを獲得する。

この内部軸の選択は、剛体 $SU(2)$ 回転まで他のモノポール様パラメトライゼーションと等価であり、本研究で考察されるいかなるゲージ不变観測量にも影響を与えない。

付録 E の明示的剛性計算では、同じ物理的歳差運動が (e^2, e^3) -平面内の回転として表され、 e^1 が固定されたままの回転した空間枠で作業することが技術的に便利である。この枠の変換は物理的観測量に影響を与えないが、SymPy 実装における代数を簡略化する。

C フェーズ1：有効動径ポテンシャルの詳細な導出

C.1 スピン・ツイスト・アンザッツ上のTEGR作用

第 B 節のスピン・捻れ背景テトラッド上で TEGR 作用を評価し、等半径アンザッツ $r(\psi) = r_0$ を課すと、次の形の有効一次元汎関数が得られる：

$$S_{\text{TEGR}} = \int dt \int_0^{L_\psi} d\psi [A(\partial_\psi r)^2 + V(r)], \quad (123)$$

ここで $A > 0$ は数値係数、 $V(r)$ は有効動径ポテンシャルである。等半径セクターでは $\partial_\psi r = 0$ と設定できるので、 ψ -長さ単位当たりのエネルギーは次のように簡略化される:

$$\mathcal{E} = \int_0^{L_\psi} d\psi V(r_0) = L_\psi V(r_0). \quad (124)$$

C.2 $V(r)$ への主要寄与

このアンザツ上で捩率スカラーを評価すると、代数的には長いが直接的な計算により、 $V(r)$ への支配的寄与が次のように示される:

$$V_{\text{core}}(r) = B \frac{q^2}{r^2}, \quad (125)$$

$$V_{\text{twist}}(r) = C m^2 r^2, \quad (126)$$

ここで $B, C > 0$ は付録 A で定義されたプランク単位で単位オーダーの数値係数である。第一項は q により生成されるモノポール様捩率によって支えられ、第二項はファイバー方向沿いの m により設定される異方性の「捻れ」勾配から生じる。

高次導関数補正と r の準主導項は、注目するほぼ一様な配位に対して抑制されており、この段階では省略される。

C.3 最小化と安定半径

全ポテンシャルは

$$V(r) = V_{\text{core}}(r) + V_{\text{twist}}(r) = B \frac{q^2}{r^2} + C m^2 r^2. \quad (127)$$

r に関して最小化すると

$$\frac{dV}{dr} = -2B \frac{q^2}{r^3} + 2Cm^2r = 0, \quad (128)$$

よって平衡半径は次を満たす:

$$r_0^4 = \frac{B}{C} \frac{q^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad r_0^2 \propto \frac{|q|}{|m|}. \quad (129)$$

極値における二次導関数は

$$\left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r=r_0} = 6B \frac{q^2}{r_0^4} + 2Cm^2 > 0, \quad (130)$$

で厳密に正であり、この配位が古典的極小であることを確認する。

r_0 を $V(r_0)$ に代入すると次が得られる:

$$E_{\text{TEGR}}(q) = L_\psi V(r_0) = \alpha |q|, \quad \alpha = 2\sqrt{BC} |m| L_\psi > 0, \quad (131)$$

これは、本文の第 4 節で述べたように、TEGR エネルギーが $|q|$ に比例することを示している。等半径近似は、曲率と捩率のスケールが超プランク的である限り自己無撞着であり、これがこのトイモデルで関心のある領域である。

D Nieh–Yan 境界項と歳差運動結合

明示的なスピン・捻れテトラッドから出発すると、单一ハンドル上の Nieh–Yan 密度が次の厳密な形を取ることが分かる:

$$\mathcal{N} = q \omega m d(r(\psi)^2) \wedge dt \wedge \sin \theta d\theta \wedge d\phi \quad (\text{正の数値因子を除いて}), \quad (132)$$

ここで $r(\psi)$ は S^2 断面の局所半径、 ω は背景スピン振動数である。二球面とハンドル沿いに積分すると次が得られる:

$$\int_M \mathcal{N} = 4\pi q \omega m \Delta r^2, \quad \Delta r^2 \equiv r^2(\psi_{\text{end}}) - r^2(\psi_{\text{start}}), \quad (133)$$

これも全体の正の因子を除いており、それを結合定数 θ_{NY} の定義に吸収する。

厳密に等半径な配位では $\Delta r^2 = 0$ なので

$$\int_M \mathcal{N} = 0 \Rightarrow S_{\text{NY}} = 0. \quad (134)$$

これは本文の主張、すなわちスピニング背景自体はパリティ偶のままであり、パリティ破れは歳差運動に伴う境界効果を考慮して初めて生じることを確認している。

D.1 歳差運動が誘起する境界不整合

ハンドルが小さくゆっくり変化する角度 $\varepsilon(t)$ で歳差運動すると、微視的ハンドルと外部の「バルク」幾何学の接合部に小さな不整合が生じる。 ε の 1 次まででは、ハンドルの両端間の有効 r^2 の差は次のようにパラメetrizeできる:

$$\Delta r^2 \longrightarrow \Delta r^2 + \beta \varepsilon(t), \quad (135)$$

ここで $\beta > 0$ は、接合部の幾何学が一様な傾きにどう応答するかをエンコードするモデル依存定数である。¹Nieh–Yan 項に代入すると、 $\varepsilon(t)$ の有効作用に線形寄与が得られる:

$$S_{\text{NY}}^{(1)} = \theta_{\text{NY}} \int dt \Lambda_q \varepsilon(t), \quad \Lambda_q = c_{\text{NY}} q, \quad (136)$$

ここで $c_{\text{NY}} \sim \theta_{\text{NY}} \omega m \beta$ である。符号慣例を次のように選ぶ:

$$\Lambda_q = -\gamma q, \quad \gamma > 0, \quad (137)$$

すると有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\varepsilon; q)$ は、第 5 節で議論したように、符号が q の符号に固定される小さな傾き $\varepsilon_*(q)$ で極小となる。

重要な点は、パリティ破れ効果全体が純粹に境界起源であることである。等半径条件が課されれば、Nieh–Yan 密度へのバルク寄与は不要となる。

¹この振る舞いの具体的実現は、外部計量を固定したまま微視的ハンドルを回転させる多重ハンドル幾何学で与えることができる。 β の正確な値は本文では不要であり、その符号のみが重要である。

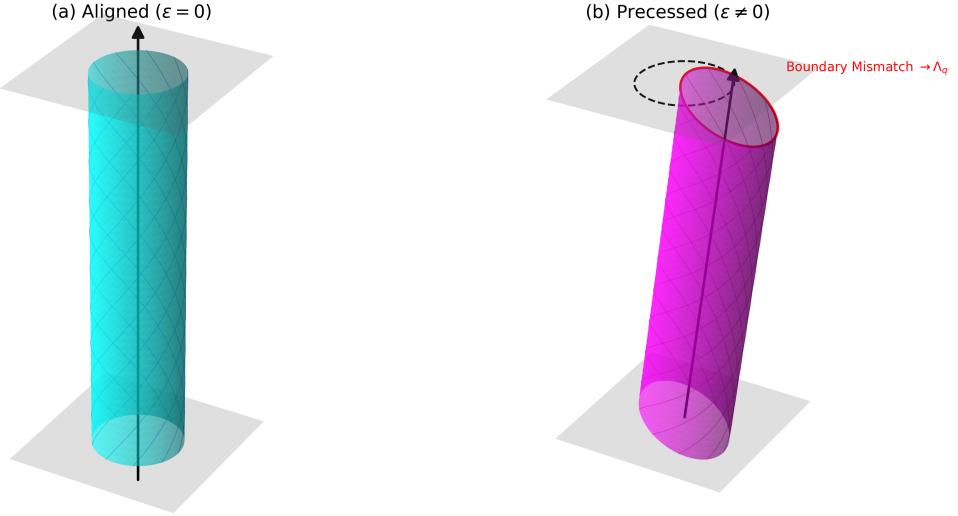


Figure 1: Nieh-Yan 境界メカニズムの模式図。パネル (a): 整列したハンドル ($\varepsilon = 0$) で両端の接合部が同一、 $\Delta r^2 = 0$ で Nieh-Yan 寄与なし。パネル (b): 歳差運動するハンドル ($\varepsilon \neq 0$) ; 上端の接合部が外部幾何学（赤輪郭）と一致しなくなり、小さなシフト $\Delta r^2 \rightarrow \Delta r^2 + \beta\varepsilon$ を生じ、Nieh-Yan 密度を介して有効作用に線形項 $\Lambda_q\varepsilon$ をもたらす。

E 歳差運動剛性 $k(q)$ の完全計算

E.1 便利な枠組みでの歳差運動テトラッド

剛性 $k(q)$ の明示的計算のために、歳差運動が (e^2, e^3) -平面内の回転として実現され、 e^1 が固定されたままの枠組みを採用する。この枠組みは、付録 B の傾斜軸描像と剛体空間回転で関係しており、物理的に等価である。

\tilde{e}^a を本文の式 (23)–(26) の整列テトラッドとする。歳差運動テトラッドは次の通りである:

$$e^a = \Lambda^a{}_b(\varepsilon(t)) \tilde{e}^b, \quad \Lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (138)$$

小さな ε に対して展開すると

$$\cos \varepsilon \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \sin \varepsilon \simeq \varepsilon, \quad (139)$$

次が得られる:

$$e^1 = \tilde{e}^1, \quad (140)$$

$$e^2 \simeq \tilde{e}^2 + \varepsilon \tilde{e}^3 - \frac{\varepsilon^2}{2} \tilde{e}^2, \quad (141)$$

$$e^3 \simeq \tilde{e}^3 - \varepsilon \tilde{e}^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \tilde{e}^3. \quad (142)$$

E.2 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ までのねじれテンソル

Weitzenböck 接続 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = e_a{}^\lambda \partial_\nu e^a{}_\mu$ を用いると、捩率テンソルは

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}. \quad (143)$$

正規直交枠組みでは、これは $T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$ と書ける；テレパラレルゲージでは $\omega^a{}_b = 0$ なので $T^a = de^a$ となる。

ε の 2 次まで展開を実行し、歳差運動モードに関連する項のみを保つと、次のような非ゼロ補正が見つかる：

$$\delta T^1{}_{\theta\phi} = \varepsilon^2 2qr_0 \sin \theta, \quad (144)$$

$$\delta T^2{}_{\psi\theta} = \varepsilon^2 m\omega r_0 \sin \theta, \quad (145)$$

$$\delta T^3{}_{\psi\theta} = -\varepsilon^2 m\omega r_0 \cos \theta, \quad (146)$$

対称性で関係する類似の項とともに。他のすべての成分は消失するか、 ε のより高次でのみ寄与する。

E.3 2次ねじれスカラーと対称性保護

捩率スカラーは

$$\mathbb{T} = \frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\rho\mu\nu} T_{\nu\mu\rho} - T_\rho T^\rho, \quad T_\rho = T^\mu{}_{\rho\mu}. \quad (147)$$

展開されたテトラッドを挿入し、 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 項のみを保つと、図式的に次のように書ける：

$$\mathbb{T}^{(2)} = \varepsilon^2 \left[m^2 \omega^2 r_0^2 + (\text{項} \propto q^2, qm\omega, \dots) \right]. \quad (148)$$

解析的にも SymPy 実装でも確認された重要な点は、 $q^2\varepsilon^2$ に比例するすべての項が恒等的にキャンセルすることである。このキャンセルは、モノポール背景の球対称性により保護される：球対称配位の剛体回転は、 q^2 に比例する復元力を生成できない。 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ で生き残るのは、異方性の捻れ (m) とスピン (ω) セクター間の干渉である。

キャンセル後、次が残る：

$$\mathbb{T}^{(2)} = \varepsilon^2 m^2 \omega^2 r_0^2. \quad (149)$$

E.4 積分と有効剛性

二球面とハンドルに沿って積分すると次が得られる：

$$\begin{aligned} \int d^4x e \mathbb{T}^{(2)} &= \varepsilon^2 m^2 \omega^2 r_0^2 L_\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \varepsilon^2 m^2 \omega^2 r_0^2 L_\psi \times 4\pi. \end{aligned} \quad (150)$$

慣例とテトラッドの規格化に依存する全体の数値因子を除いて、この寄与は有効作用を誘起する：

$$S_{\text{TEGR}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt k(q) \varepsilon(t)^2, \quad k(q) = \kappa_k L_\psi m^2 \omega^2 r_0^2, \quad (151)$$

ここで $\kappa_k = \mathcal{O}(1)$ である。付録 C から $r_0^2 \propto |q|$ を用いると、次のスケーリングが得られる：

$$k(q) \propto \omega^2 |q| \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \quad (152)$$

本文の記法で。

補足資料で説明されているコンパクトな SymPy 実装では、同じ計算が我々の単位で特定の数値 $\kappa_k = 8\pi/9$ を与える。上で得られた解析的係数 4π との違いは、枠組み場のわずかに異なる規格化に由来し、 $|q|$ -および ω -スケーリングには影響しない。本文では κ_k の絶対値を決して使用しないので、ここではそれを記号的に保つ。

Listing 1: 歳差運動剛性計算に使用された SymPy コードの断片。完全なリストは補足資料で提供されている。

```
# Python/Sympy code fragment - full listing in supplementary material
e2 = cos(eps)*e2_tilde + sin(eps)*e3_tilde
e3 = -sin(eps)*e2_tilde + cos(eps)*e3_tilde
T2 = de2 # teleparallel gauge: T^a = de^a
T3 = de3
T2_quad = T2.subs(eps, 0).series(eps, 0, 3).coeff(eps**2)
# -> shows q**2 terms cancel; only m*omega terms survive
```

F $\gamma = 1$ スケーリングの普遍性

上で得られた結果 $k(q) \propto \omega^2 |q|$ は、一見すると微視的ハンドルに使用された特定の $SU(2)$ パラメトリゼーションの人工物のように見えるかもしれない。この付録では、本論文で考慮した軸対称スピニング・捻れハンドルのクラス内で、 $\gamma = 1$ でのスケーリングが実際には一般的であることを論じる。

静的エネルギーは 2 つの競合する寄与により制御される:

- 振率モノポール流束に関連する「コア」項、 $V_{\text{core}} \sim q^2/r_0^2$ とスケール;
- ファイバー沿いの勾配に関連する「捻れ」項、 $V_{\text{twist}} \sim m^2 r_0^2$ とスケール。

これらは位相的電荷 (q, m) と半径 r_0 にのみ依存し、与えられた対称性クラス内でのテトラッドの詳細な選択には依存しない。したがって $V_{\text{core}} + V_{\text{twist}}$ の最小化は、微視的パラメトリゼーションとは独立に、 $\mathcal{O}(1)$ 因子を除いて常に $r_0^2 \propto |q|/|m|$ を与える。

歳差運動剛性 $k(q)$ は、捻れ・スピニング配位の小さな傾きに対する動的応答に由来する。モノポール流束 q 、捻れ m 、スピinn ω を持つ任意の軸対称ハンドルでは、振率スカラーは次の図式的形式の項を含む:

$$\mathbb{T} \supset \omega m \text{ (空間回転項)}, \quad (153)$$

一様な傾きに対するその二次応答は、 $m^2 \omega^2$ に比例するエネルギー密度を生成する。この密度を面積 $\sim r_0^2$ の断面とハンドル沿いに積分すると、次が得られる:

$$k(q) \propto \omega^2 m^2 r_0^2 \propto \omega^2 |q|. \quad (154)$$

したがって、この軸対称クラス内では、指數 $\gamma = 1$ は (i) $r_0^2 \propto |q|$ を固定する q^2/r_0^2 対 $m^2 r_0^2$ 競合、および (ii) 歳差運動モードが捻れとスピinn に結合し、モノポール流束に直接結合しないという事実の堅牢な結果である。

我々は、任意のテレパラレル配位に対して $\gamma = 1$ が厳密な定理として成り立つとは主張しない。より一般的な非軸対称ハンドルへの解析の拡張は、将来の研究のための未解決問題として残されている。

G 静的ケース ($\omega = 0$) : 現象論的不毛性

本文で使用されたスピニング・アンザツは、純粹に静的なハンドルより技術的に複雑だが、微視的ハンドルを現象論的に興味深くするのは、まさに背景スピinn $\omega \neq 0$ である。この付録では、スピinn をオフにしたときに何が起こるかを簡潔にまとめる。

G.1 有効ポテンシャルの線形項の消失

单一ハンドルに対する有効作用への Nieh–Yan 寄与は図式的に

$$S_{\text{NY}} \propto \theta_{\text{NY}} q \omega m \Delta r^2, \quad (155)$$

ここで Δr^2 はハンドルの両端間の r^2 の差である（付録 D 参照）。 $\omega = 0$ のとき、この項は Δr^2 の値に関わらず厳密に消失する。したがって有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(\varepsilon; q)$ は ε の線形項を持たず、パリティ偶のままとなり、カイラリティ選択の幾何学的機構を与えない。

G.2 統計への位相的結合の消失

より根本的には、Nieh–Yan 密度は次の形を取る：

$$\mathcal{N} \propto q \omega m d(r^2) \wedge dt \wedge (\text{角度 } 2\text{– 形式}). \quad (156)$$

$\omega = 0$ のとき、 dt 成分が消失し、 \mathcal{N} の時空積分は非ゼロの位相的結合を生成しない自明な表面項に帰着する。特に、Nieh–Yan 不変量と粒子統計を制御する Wess–Zumino–Witten 項との発見的関連（本文で動機付けとして使用）は静的ケースでは存在せず、ハンドルは半整数スピン状態に対する自然な幾何学的起源を提供しない。

G.3 Mechanical stability vs. phenomenological sterility

$\omega = 0$ の配位は力学的に安定なままである： V_{core} と V_{twist} の間の静的バランスは変わらず、小さな幾何学的変形の剛性は依然として $k(q) \propto m^2 r_0^2 L_\psi$ で設定される（これは ω とは独立に非ゼロ、付録 E 参照）。この意味で、静的ハンドルは破滅的に不安定ではない。

しかし、そもそも我々の構成を動機付けた現象——カイラリティ選択、フェルミ統計への可能な関連、複合状態の準臨界束縛——はすべて、スピン ω と Nieh–Yan 境界項の間の相互作用に依存している。 $\omega = 0$ のとき、この相互作用は存在せず、ハンドルは現象論的に不活性になる。

したがって非ゼロの背景スピン ω は、アンザッツの単なる技術的装飾としてではなく、微視的ハンドルに「現象論的生命を吹き込む」重要な要素として見なされるべきである。

References

- [1] E. Witten. Global aspects of current algebra. *Nucl. Phys. B*, 223:422–432, 1983.
- [2] O. Chandia and J. Zanelli. Topological invariants, instantons and chiral anomaly on spaces with torsion. *Phys. Rev. D*, 55:7580–7585, 1997.
- [3] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Springer, 2013.