

雪崩数值模拟与次数概率分布

何翼成 *

March 13, 2022

一 题目分析

考虑一个50*50的二维正方格点系统（开放边界条件）

1. 制备一个初态，其中每个格点 (x,y) 上定义一个【0-50】之间均匀分布的随机数 $z(x,y)$
2. 如果 $z(x,y)$ 大于等于4，则按照规则：

$$z(x,y) \rightarrow z(x,y) - 4,$$

$$z(x \pm 1, y) \rightarrow z(x \pm 1, y) + 1,$$

$$z(x, y \pm 1) \rightarrow z(x, y \pm 1) + 1,$$

同时更新所有格点上的 $z(x,y)$ ，记作一步演化（边界上的点更新规则类似），演化足够多步，直至所有格点上 $z(x,y) < 4$ ，系统不再演化（稳态）。

3. 从格点中随机选择一个点 (X,Y) ，将该点 $z(X,Y)+1$ ，然后按照上述规则演化，直到系统达到新的稳态。记录这一过程中“雪崩”发生的总次数 S 。
4. 重复若干次 步骤3，统计不同 S 的概率分布 $P(S)$ ，讨论 $P(S)$ 随 S 的函数关系。

Figure 1: 题目总览

由上可知，一个比较简单的思路就是统计每一轮中该矩阵的大于等于四的位点的坐标，然后在另一个空白矩阵的对应位点填上-4，以及上下左右位点的 +1。而对于边界上的点，不妨填充一周的 0，最后统计时只取中间的 2-51 行列即可。

观察到后面的对于雪崩次数 S 的需求，那么可以在每个循环额外增加一个对于雪崩次数的统计。

二 代码展示

2.1 前置函数编写

以下为进一步更新所用到的函数。

*学号:520072910043;
邮箱地址: heyicheng@sjtu. edu. cn

```

1  function [z,S]=step(z,S)
2  %z为一次更新后的矩阵，S为雪崩发生次数
3  %扩展矩阵，进行补零
4  A=zeros(52,52);
5  A(2:51,2:51)=z;
6  %原始的处理矩阵
7  B=zeros(52,52);
8  for i=2:51
9      for j=2:51
10         if A(i,j)>=4
11             B(i,j)=B(i,j)-4;
12             B(i-1,j)=B(i-1,j)+1;
13             B(i+1,j)=B(i+1,j)+1;
14             B(i,j-1)=B(i,j-1)+1;
15             B(i,j+1)=B(i,j+1)+1;
16             S=S+1;
17         end
18     end
19 end
20 %同时演化一步
21 z=z+B(2:51,2:51);
22 end

```

以下为迭代函数，将一个矩阵更新至稳态为止。

```

1  function [z,n,S]=update(z,S0)
2  %输出稳态的z矩阵，n为本次更新次数，S为累计发生次数
3  n=0;S=S0;
4  while max(max(z))>=4
5      [z,S]=step(z,S);
6      n=n+1;
7  end
8  disp("本轮更新次数为"+n+",雪崩累计发生次数为"+S+",平均每轮雪崩"+S/n+"次")
9  if max(max(z))<4
10     disp("本轮未更新")
11 end
12 end

```

以下为扰动函数，即随机选择一个位点使其值 +1.

```

1  function b=pert(z)
2  %扰动函数，随机选择一个点使其值加一
3  coord=randi(50,1,2);
4  z(coord)=z(coord)+1;

```

```
5 b=z;  
6 end
```

2.2 主体函数编写

```
1 %%  
2 %扰动后演化至稳定  
3 %数据预备  
4 clear;clc;  
5 z=rand(50,50)*50;  
6 S_series=zeros(1,10^6);%记录S频率用的列表  
7 %先使矩阵处于稳态  
8 z=update(z,0);  
9 for l=1:length(S_series)  
10 %先扰动，再使其演化为稳态  
11 z=pert(z);  
12 [z,~,S]=update(z,0);  
13 S_series(l)=S;  
14 end  
15 histogram(S_series,10000)  
16 xlabel("S雪崩次数")  
17 ylabel("n(S)频率")
```

由此可以统计每一次随即位点 +1 之后发生雪崩的次数。

三 结果分析与结论

由于生成图像较为极端，所以下面将会按照总体和局部分别展示呈现的图像。

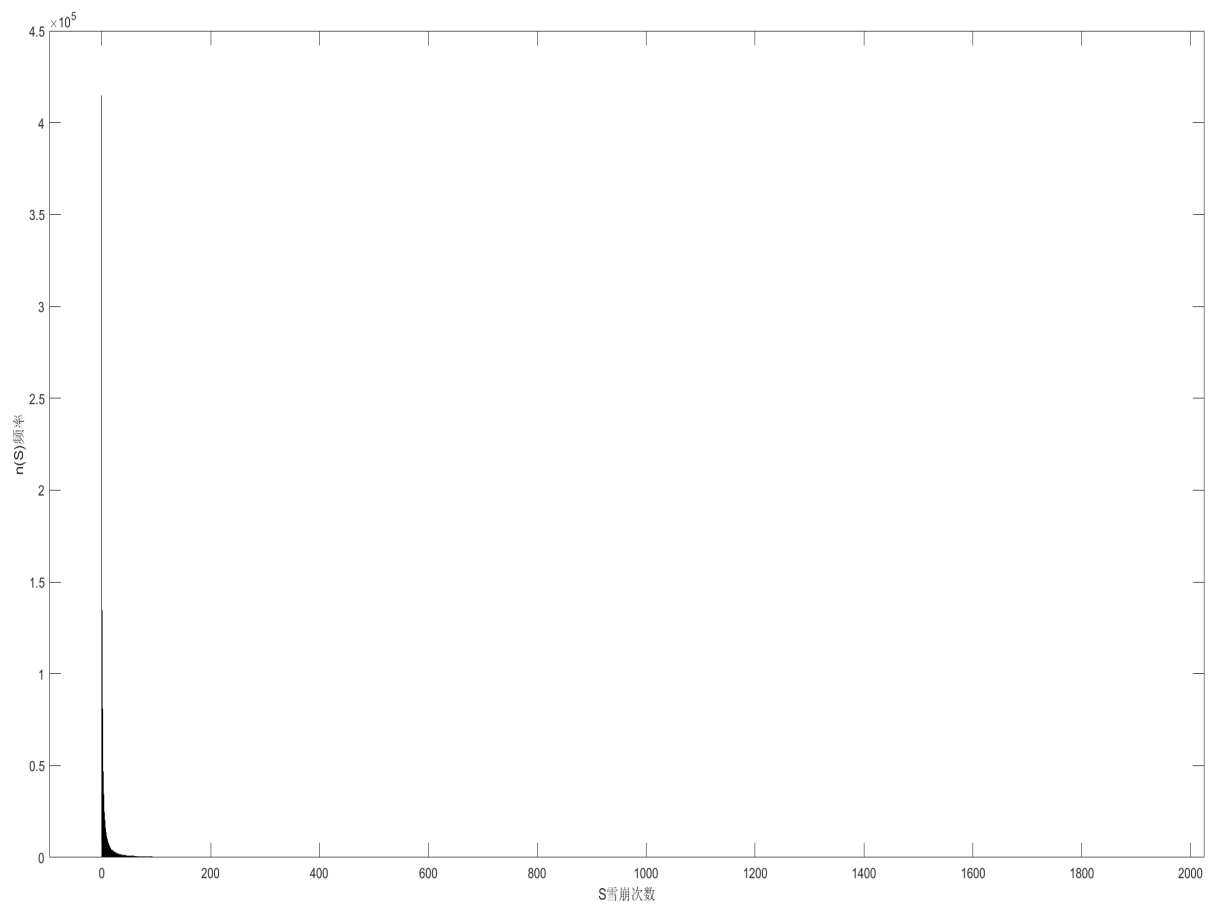


Figure 2: 总览图

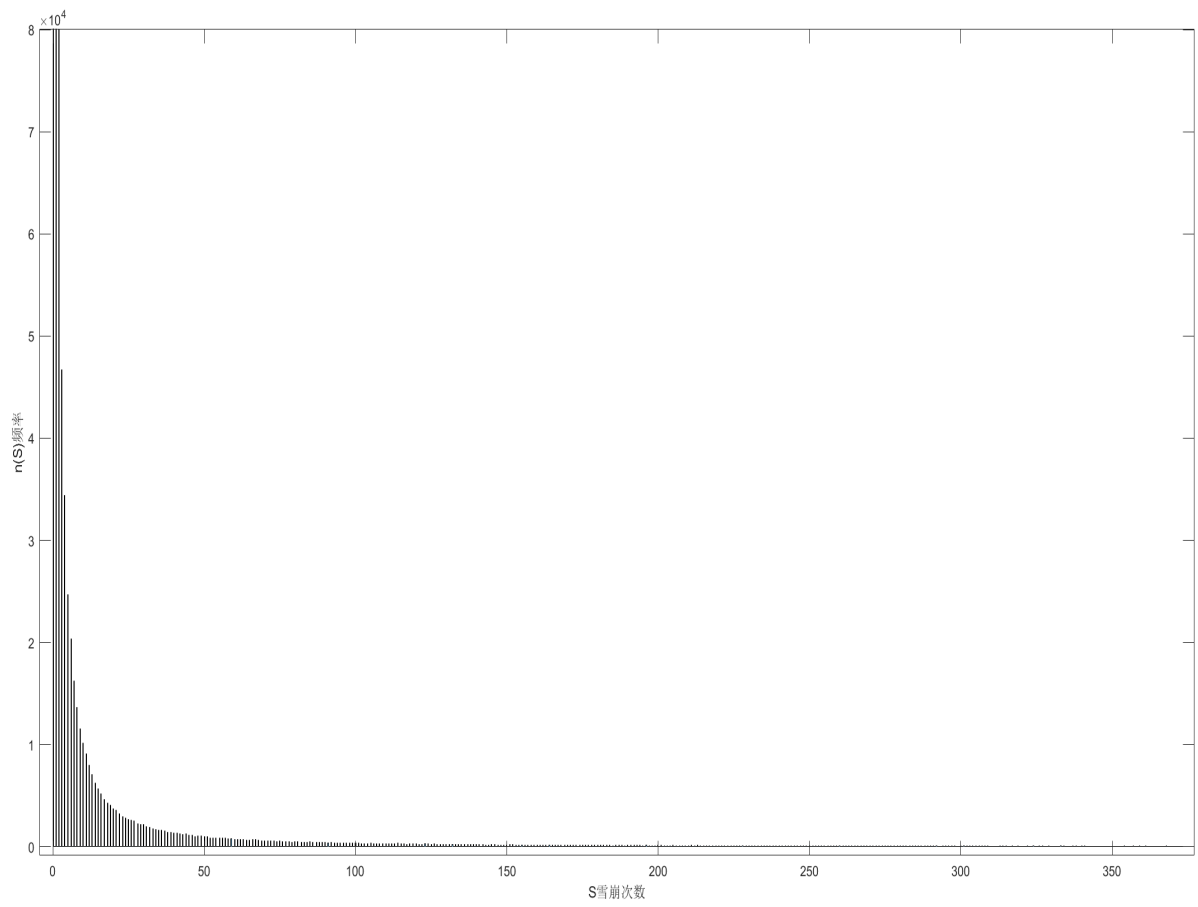


Figure 3: 局部图

由此可知，由于在绘制频率直方图时 $n(S)$ 的区间取得非常小，所以可以近似看作为 $P(S)$ 的相似图像，那么就可以看出，雪崩次数非常密集地聚集在了 0 100 次，从 100 次之后就开始变得逐渐稀薄，并且总体呈现出类似于反比例函数的图像。
次数即使从 0 开始也是非常急剧的下降。