差分法求解偏微分方程

何翼成 *

April 6, 2022

Project 1

一　题目分析

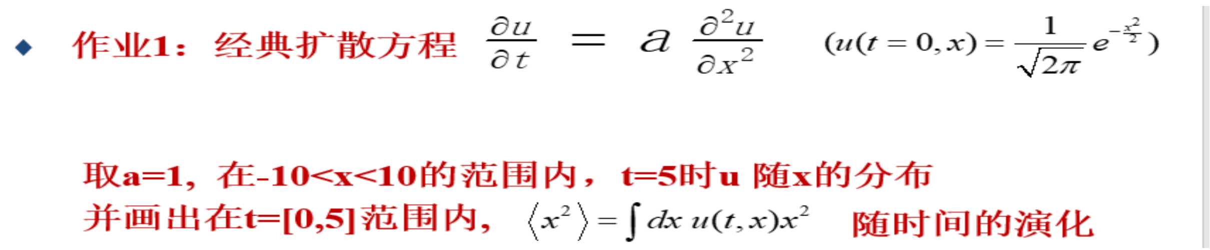

Figure 1: 题目总览

二　代码展示

```
%project1
clear;clc;
dx=0.05;
dt=0.001;
x=-10:dx:10;
t=0:dt:5;
r=dt/(dx^2);

%偏微分方程的初始条件以及边界条件
numX=length(x)-1;
numT=length(t)-1;
Phi=ones(numT+1,numX+1);
Phi(1,:)=1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);%初始条件
Phi(2:numT+1,1)=0;%边界条件
Phi(2:numT+1,numX+1)=0;%边界条件

%差分法计算数值解
```

*学号:520072910043;
邮箱地址：heyicheng@sjtu. edu. cn

```
for k=1:numT
    for i=2:numX
        Phi(k+1,i)=(1-2*r)*Phi(k,i)+r*(Phi(k,i-1)+Phi(k,i+1));
    end
end

%绘制(x,t,Phi)的三维网格图
figure(1)
set(gcf,'units','normalized','position',[0.2 0.2 0.6 0.6]);
[xx,tt]=meshgrid(x,t);
mesh(xx,tt,Phi)
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('\Phi(x,t)')
figure(2)
plot(x,Phi(end,:),'k')
xlabel('x')
ylabel('\Phi at t=5')

%计算<x^2>的时间变化
for ti=1:numT+1
    X2(ti)=sum(Phi(ti,:).*x.^2*dx);
end
figure(3)
plot(t,X2,'r')
xlabel('t')
ylabel('<x^2> at t \in [0,5]')
```

三 结果分析与结论

通过上述的代码可以完整得到 u(x,t) 在 $x \in [-10, 10] \times t \in [0, 5]$ 的演化情况，为了进行分析进行截取即可。首先是 t=5 的部分，显然我们对所命名的二维数组截取 (end,:) 即可。

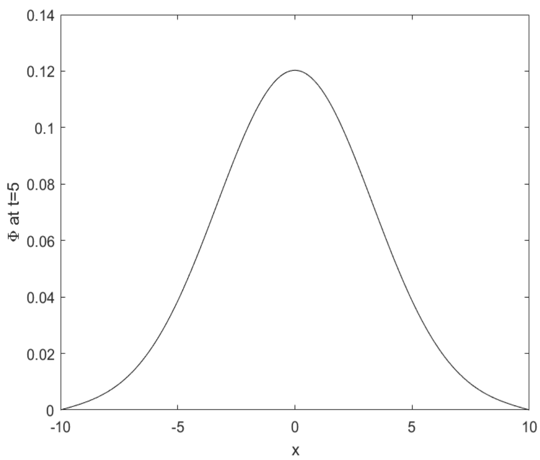

Figure 2: t=5 时的ϕ $x \in [-10, 10]$

然后就是计算的方均值。我们可以按照时间顺序依次截取 u(x,t)，然后按照离散数列求和的方法计算得到积分值，最后依次绘制在二维图像上即可。

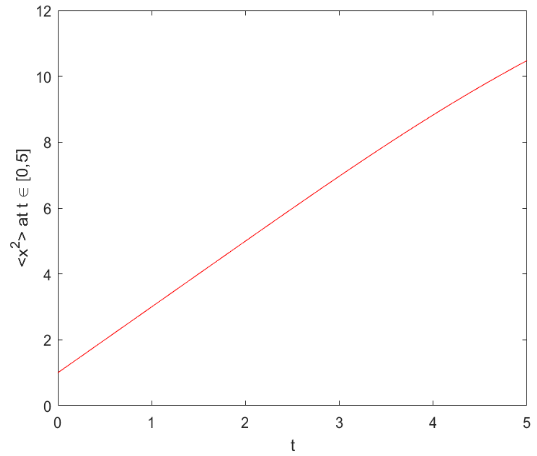

Figure 3: $<\mathrm{x}^2>$ $t \in [0, 5]$

最后展示以下求解得到的总览值。

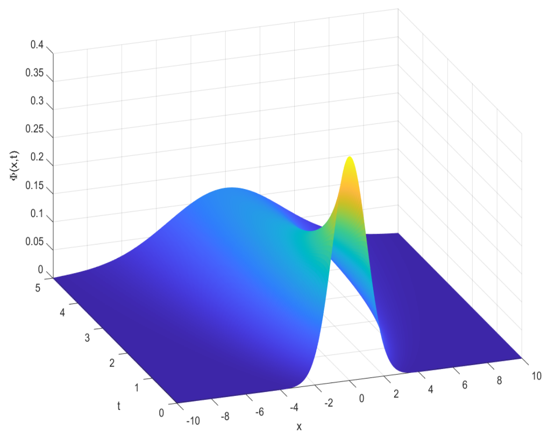

Figure 4: u(x,t) 在 X,T 平面上的演化总览

Project2

四　题目分析

由题意知我们可以将 $\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}$ 差分化，从而将该方程离散写作 $i\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{\Delta t} = H\psi_i$，其中 H 为题目中所定义的对称矩阵。所以我们将不难看出，这个题目实际上是迭代的背景。

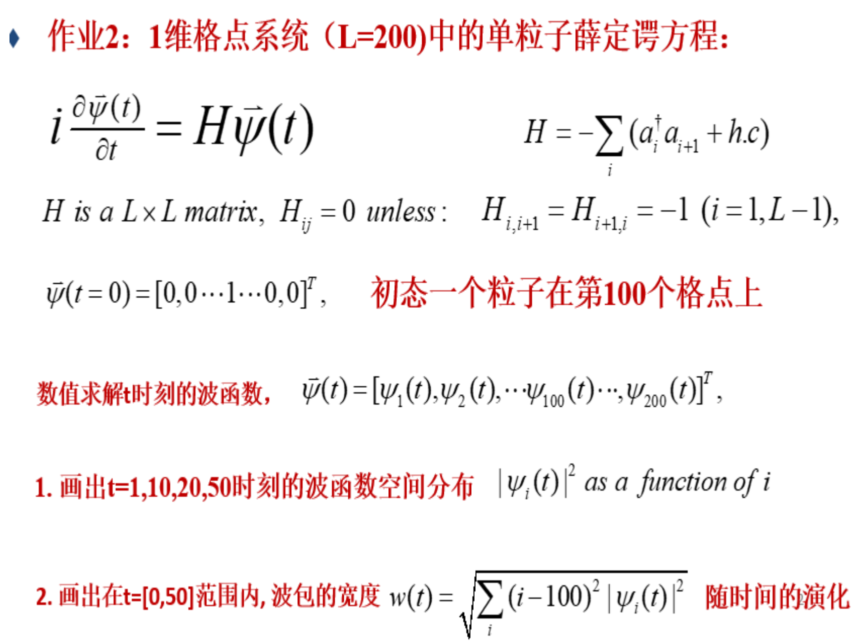

Figure 5: 题目总览

五 代码展示

```
%%
%project2
clear;clc;
L=200;
dt=0.001;
%哈密顿矩阵的生成
H=zeros(L,L);
for ii=1:L-1
    H(ii,ii+1)=-1;
    H(ii+1,ii)=-1;
end
psi=zeros(200,1);
psi(100)=1;
numT=50/dt+1;
psi_series=zeros(L,numT);
psi_series(:,1)=psi;
for n=2:numT
    psi_series(:,n)=psi_series(:,n-1)-1i*H*psi_series(:,n-1)*dt;
end
%计算波函数的模方
psi2_series=abs(psi_series);
figure(1)%t=1,10,20,50的情况
ts=[1,10,20,50];
for tn=1:length(ts)
```

```
tmp=ts(tn);
subplot(2,2,tn)
l=ts(tn)/dt;
plot(1:L,psi2_series(:,tmp/dt+1)')
xlabel("i \in [1,L] with t="+tmp)
xlim([1,200])
ylabel("|\Psi|^2(i)")
end
%计算波包宽度
b=((1:L)'-100).^2;
w=zeros(1,numT);
for j=1:numT
    w(j)=sqrt(sum(b.*psi2_series(:,j)));
end
figure(2)%绘制波包宽度随时间的演化
tspan=linspace(0,50,numT);
plot(tspan,w,'k')
xlabel('t')
ylabel('w(t)')
```

六　结果分析与结论

下面展示的是 t 在不同时间的时候 $|\psi(t)|^2$ 在 $i \in [1, 200]$ 的分布，如图已经标注了各个子图所代表的时间。

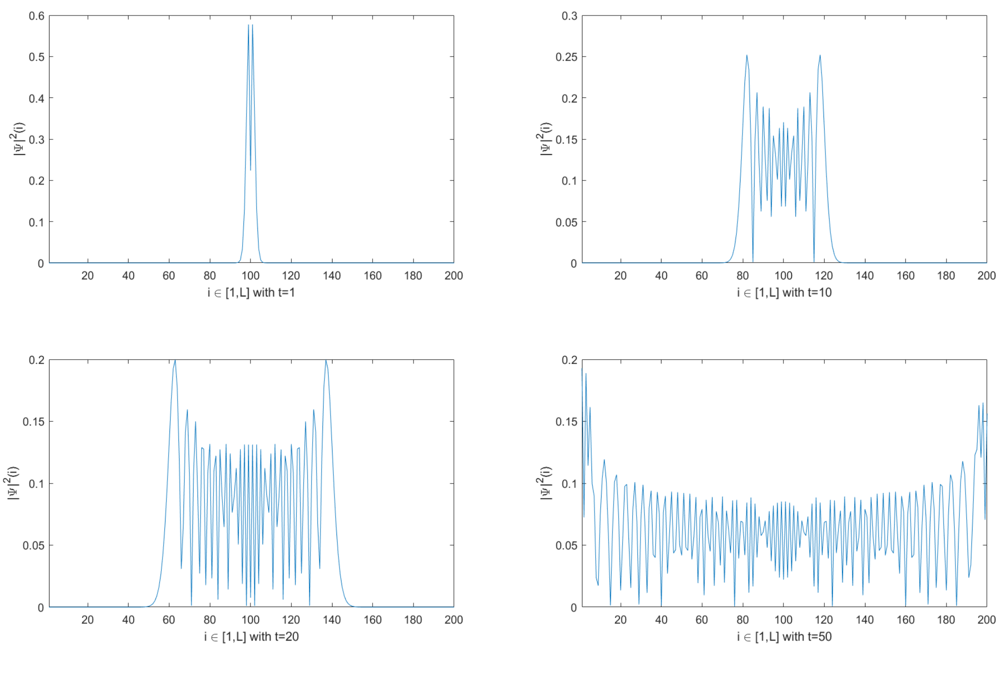

Figure 6: 不同时间下的 $|\psi|^2$

下面展示的是 $w(t)$ 在 $t \in [0,50]$ 的演化情况，可以看出随着时间的延长波包的宽度逐渐增大，在本数值方法下 t 接近 50 的时候，$w(t)$ 出现了小幅度的回落。

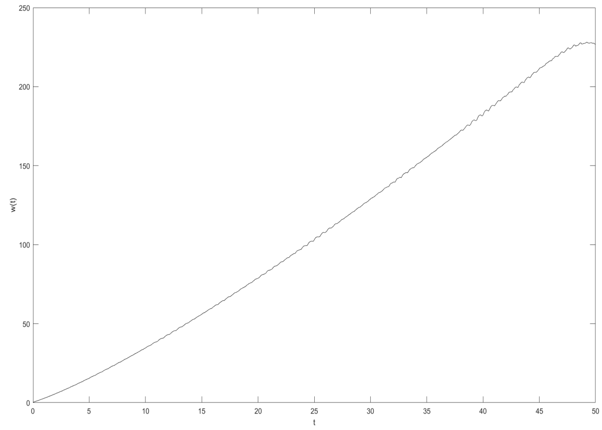

Figure 7: 波包宽度 w(t) 随着时间的演化情况