分析迭代法的长时响应和初值依赖

何翼成 *

February 17, 2022

一　题目分析

原题目为分析迭代方程 $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$,$\mu \in (0,2), x_n \in [-1,1]$. 如何考虑 $\mu \in (0,2)$ 下 x_n 的长时间行为，及其初值 $x_0 \in (-1,1)$ 的关系。

首先可以知道的是这个方程应当理论上存在不动点，所以在迭代次数高于一定步数后，所得到的 x_n 将会逐渐趋于一个稳定值。所以在给定某一 x_0 后，经过长时间迭代后，必能得到 $x_n(\mu)$ 的函数。在这期间可以通过建立一个全零矩阵用以存储每一步所得到的迭代结果。

当然，结合题意，最后还要对初值的依赖进行分析，相当于再加入一个变量，那么可以化为二维数组，然后使用 surf 函数对其进行完全的绘制。

二　代码编写与运行

2.1　代码展示

```
%迭代方程x_{n+1}=1-mu*x_{n}^2,0<mu<2,-1<=x_{n}<=1;
%分析0<mu<2下的x_{n}的长时间行为，及其与初值-1<x_{0}<1的关系
clear;clc;
format long
mu=0:0.01:2;%mu的定义域
steps=100;%迭代步数
x0s=-1:0.01:1;%初始值x_{0}的定义域
xn=zeros(length(x0s),length(mu));%存储不同mu和x_{0}下所得到的x_{n}
for k=1:length(x0s)
    xmn=zeros(steps,length(mu));
    x0=x0s(k);%该循环确定x_{0}的值
    for i=1:length(mu)
        x_tmp=x0;
        mu_tmp=mu(i);%该循环确定mu的值
        for j=1:steps
            x_tmp=1-mu_tmp*x_tmp^2;%该循环根据前面确定的x_{0}和mu的值进行迭代
```

*学号:520072910043;
邮箱地址：heyicheng@sjtu. edu. cn

```
            xmn(j,i)=x_tmp;
        end
    end
    xn(k,:)=xmn(length(steps),:);%x_{n}存储每一个x_{0}对应的一维数组
end
[x,y]=meshgrid(x0s,mu);%将定义域的两串数组化为二维数组的坐标
surf(x,y,xn)%绘制三维图像
```

2.2 所得结果展示与分析

以下是得到的根据不同的 x_0 和 μ 得到的长时间之后的 x_n 的图像。

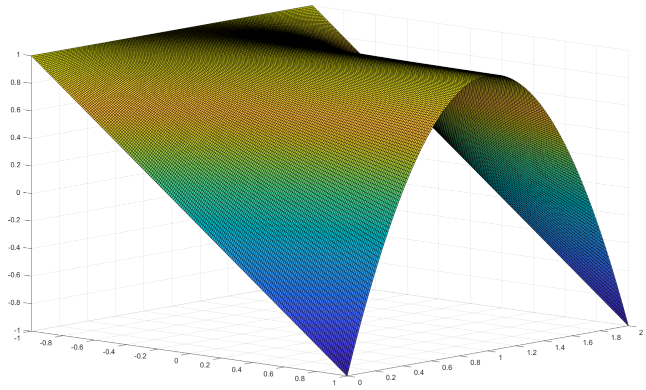

Figure 1: 总览图

大致来说，该图像是由数个类二次曲线堆叠而形成的表面。为了更精细地对其中的数据分析，我们需要单独对每一个维度进行分析。

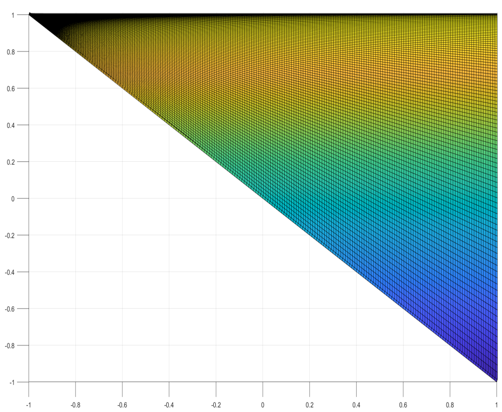

Figure 2: 若取定某一 x0

我们先讨论当 x_0 不变时，x_n 的变化情况。不失一般性地截取总览图中的图像，我们不难看到，图像实际上是由一条条的直线堆叠而成的。

我们也可以简单地总结为，x_n 与 μ 成线性关系，且为负相关。

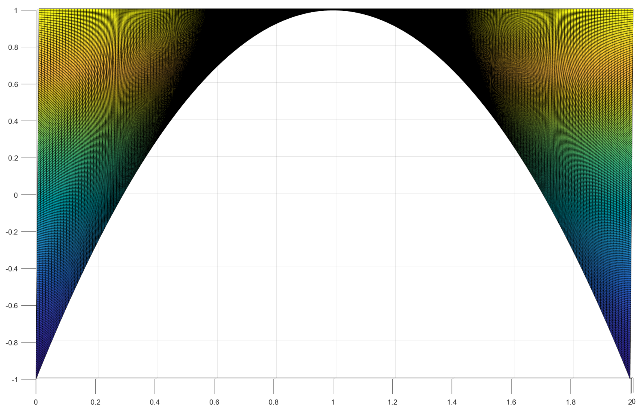

Figure 3: 若取定某一 mu

上面的图像相当于取定了 μ 值后所得到的 x_n，影响之的参数只有初值 x_0。我们也不难看出来，这条曲线十分接近二次曲线。结合方程的性质，我们合理推测其为抛物线。