

一维朗之万方程的谐振子求解

何翼成 *

April 30, 2022

Project 1

一 题目分析

- ◆ 从不同的初态出发 1. $q = 0, \dot{q} = 1$ 2. $q = 4, \dot{q} = 0$
- 求解一维谐振子的朗之万方程 $\ddot{q} + \dot{q} + q = \xi(t)$ $\langle \xi(t) \rangle = 0$
 $\langle \xi(t) \xi(0) \rangle = 2T \delta(t)$

1. 对于不同的温度T统计热平衡态下动能的平均值

$$\frac{1}{2} \langle \dot{q}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} [\dot{q}(t)]^2 dt \quad \text{并找出温度和动能平均值的关系}$$

2. 对于不同的温度T统计热平衡态下势能的平均值

$$\frac{1}{2} \langle q^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} [q(t)]^2 dt \quad \text{并找出温度和动能平均值的关系}$$

Figure 1: 题目总览

二 代码展示

```
1 clear;clc;
2
3 %初始条件区
4 x0=0;v0=1;
```

*学号:520072910043;
邮箱地址: heyicheng@sjtu. edu. cn

```

5      %x0=4;v0=0;
6      dt=0.1;%时间间隔
7      tspan=0:dt:2000;%时间序列
8      T=0:0.1:300;%温度
9      TXmx=zeros(length(T),length(tspan));
10     TVmx=TXmx;
11     avgEK=zeros(1,length(T));
12     avgV=avgEK;
13     m=round(1/5*length(tspan));%截取数据量
14
15     %计算T-x和T-v矩阵
16     for i=1:length(T)
17         Ti=T(i);
18         [xi,vi]=Euler(x0,v0,dt,tspan,Ti);
19         TXmx(i,:)=xi;TVmx(i,:)=vi;
20         %对于不同温度T的动能平均项
21         avgEK(i)=avgek(vi,m);
22         %对于不同温度T的势能平均值
23         avgV(i)=avgv(xi,m);
24         clc;
25         disp("已完成第"+i+"轮计算,占比为"+i/length(T)*100+"%")
26     end
27
28     %绘制T-<Ek>和T-<V>图像
29     figure(1)
30     plot(T,avgEK,'r')
31     xlabel('Temprature'),ylabel('<E_{k}>')
32     figure(2)
33     plot(T,avgV,'r')
34     xlabel('Temprature'),ylabel('<V>')
35
36
37     %函数定义区
38     %步进法求x,v
39     function [x,v]=Euler(x0,v0,dt,tspan,T)
40         x=zeros(1,length(tspan));v=x;
41         x(1)=x0;v(1)=v0;
42         %计算x,t
43         for i=2:length(tspan)
44             x(i)=x(i-1)+v(i-1)*dt;
45             v(i)=v(i-1)+(sqrt(2*T)*randn(1,1)*sqrt(dt))-(v(i-1)+x(i-1))*dt;
46         end
47     end
48
49     %求解平均动能和势能
50     function avgEk=avgek(v,m)
51         id=(length(v)-m):length(v);
52         avgEk=1/2*sum(v(id).^2)/m;
53     end

```

```

54 function avgV=avgv(x,m)
55     id=(length(x)-m):length(x);
56     avgV=1/2*sum(x(id).^2)/m;
57 end
    
```

三 结果分析与结论

在代码中分别准备了不同的初始条件，代入不同的初始条件进行运行就可以得到对应的图像。

3.1 初始条件一

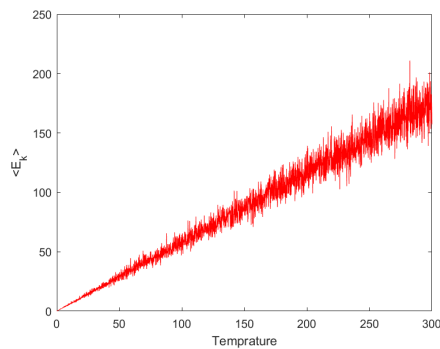


Figure 2: 在初始条件一的情况下的 $\langle E_k \rangle$ 的演化情况

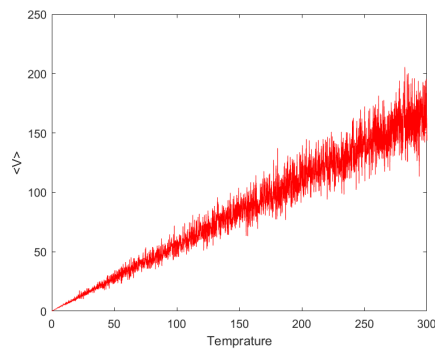


Figure 3: 在初始条件一的情况下的 $\langle V \rangle$ 的演化情况

3.2 初始条件二

由上述图像可知，由于在计算时对原始方程的高度简化（各参数均取 1，比如质量、玻尔兹曼常数等），所以得到的方程的解也必须对其结果的含义进行考量。不难发现，当玻尔兹曼常数取到 1 的时候，原本的能均分原理所产生的一维动能公式 $E_k = \frac{1}{2}k_bT$ 自然而然地化作了 $E_k = \frac{1}{2}T$ 。再观察一下图像，会发现数值模拟地结果虽然沿着温度升高并不平滑，但是总体上与 $y = \frac{1}{2}x$ 的直线拟合非常良好。同样，对于平均势能而言，也遵循了类似的规律，其拟合同样和 $y = \frac{1}{2}x$ 接近。

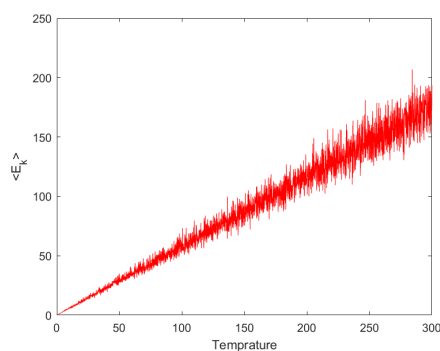


Figure 4: 在初始条件二的情况下的 $\langle E_k \rangle$ 的演化情况

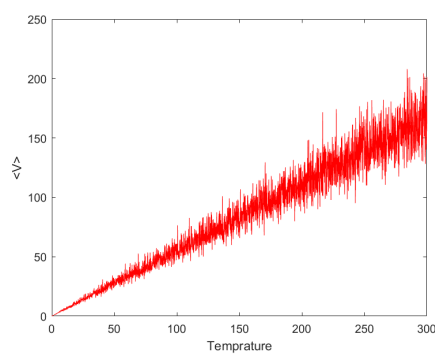


Figure 5: 在初始条件二的情况下的 $\langle V \rangle$ 的演化情况