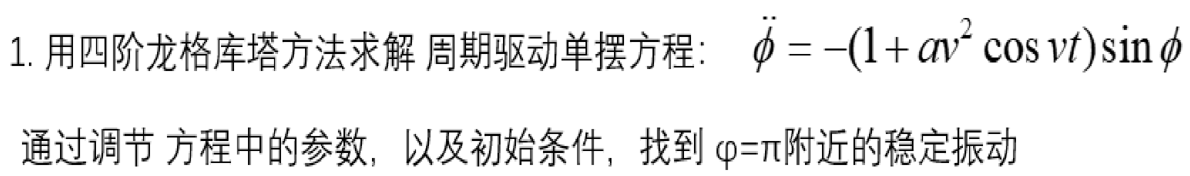
龙格库塔法求解微分方程

何翼成 *

March 28, 2022

Project 1

一 题目分析


1. 用四阶龙格库塔方法求解 周期驱动单摆方程: $\ddot{\phi} = -(1 + av^2 \cos vt)\sin\phi$

通过调节 方程中的参数，以及初始条件，找到 φ=π附近的稳定振动

Figure 1: 题目总览

由上可知，即可构造 $y_1 = \phi, y_2 = y_1'$, 从而使用龙科库塔法进行数值求解

二 代码展示

2.1 前置函数编写

以下为第一问所用到的微分方程，通过构造写为方程组，不难知道该问题为 2 阶。

```
%编写第一问的方程组,由于本问题的阶数为2所以以下按照2阶编写
%为了方便表示，将原始方程简写为以下形式:
%y''=-(1+a*v^2*cos(v*x))*sin(y)
%令y=y(1),y'=y(2),y''=y(2)'
%初始条件为y(0)=pi,y'(0)=?(待定系数)
function dy=Fun(x,y)
%x为自变量
%y为向量，包含y,y',y''...等
%a,v为待定的方程参数
a=1;v=0.01;%暂定方程参数a,v
dy=zeros(size(y));
```

*学号:520072910043;
邮箱地址：heyicheng@sjtu. edu. cn

```
dy(1)=y(2);                  %dy(1)即为y的一阶导
dy(2)=-(1+a*v^2*cos(v*x)).*sin(y(1));%dy(2)即为y的二阶导
end
```

以下则是编写龙格库塔法的主体函数，即使用加权的斜率平均数进行步进法。

```
function y=RK(x,h,y)
  len=length(x);%x为行向量
   %龙格库塔法主体函数
  for i=2:len
      K1=Fun(x(i-1),y(i-1,:));           %K1
      K2=Fun(x(i-1)+1/2*h,y(i-1,:)+1/2*h.*K1);%K2
      K3=Fun(x(i-1)+1/2*h,y(i-1,:)+1/2*h.*K2);%K3
      K4=Fun(x(i-1)+h,y(i-1,:)+h.*K3);   %K4
      y(i,:)=y(i-1,:)+h/6.*(K1+2*K2+2*K3+K4);
          %更新y的第i行,其中y(i,1)是原函数的y, y(i,2)是原函数的一阶导...
  end
end
```

以下为绘图函数，观察 ϕ 在一段时间内的震荡情况来判断是否达到了所要求的“在 π 附近震荡”的情况。

```
function y=PlotAll()
x=0:0.001:100;%x:行向量,代表了历经的时间t
l=length(x);
h=x(2)-x(1);%h:步长,注意和x的间隔相同
y=zeros(length(x),2);%y:矩阵,列数为微分方程阶数,行数为x的长度。
y(1,:)=[pi,5];%代入初始条件, 由于是在\Phi=pi附近,所以不妨设初始位置就在pi。
Y=RK(x,h,y);
hold on
grid on
phi=Y(:,1);
%区间平移, 将其整理在[0,2*pi]区间内
for ii=1:length(phi)
    while phi(ii)>2*pi
        phi(ii)=phi(ii)-2*pi;
    end
    while phi(ii)<0
        phi(ii)=phi(ii)+2*pi;
    end
end
plot(x,phi)
xlabel('t')
ylabel('\Phi')
%添加一条基准线
```

```
plot(x,zeros(1,l)+pi,'k')
end
```

2.2 主体函数编写

```
clear;clc;
PlotAll()
```

由此可以观察得到的图像进行简要分析，从而得到所需要的初始条件和方程参数。

三　结果分析与结论

由于尝试思路不明确，所以在得出结论的时候较为困难。在这里进行了简单的调参，得到了一个看似周期性的结果，所以录入如下。

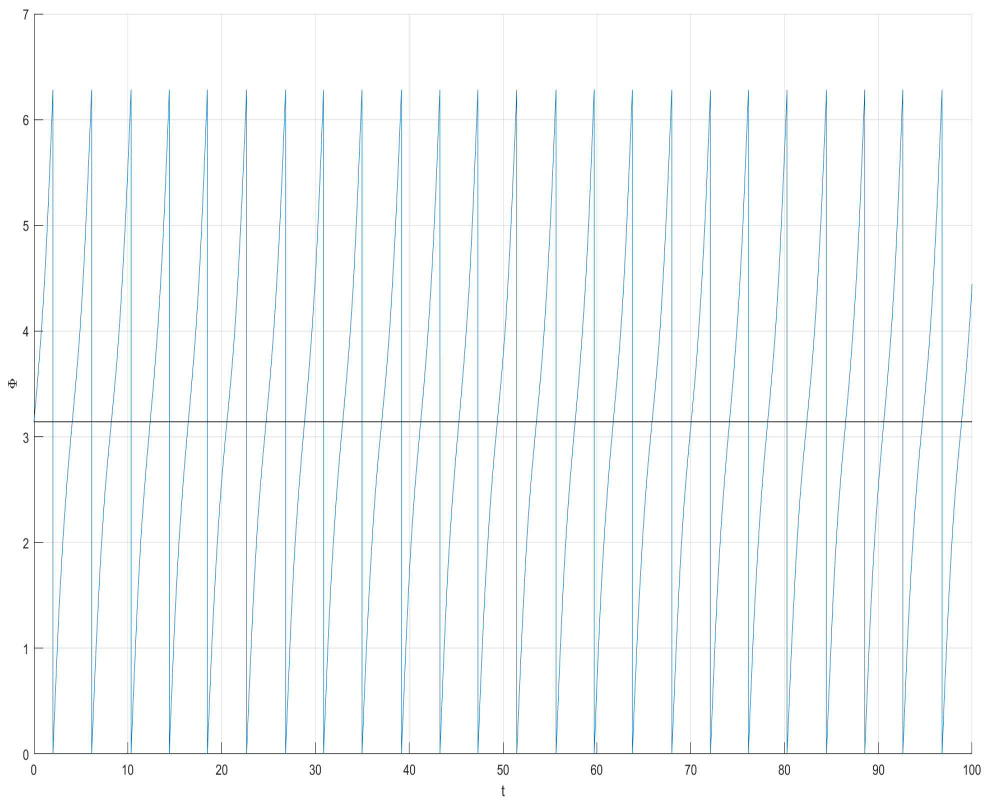


Figure 2: 调参后 (a=0.01,v=5,phi(0)=pi,phi'(0)=1)

Project2

四　题目分析

2. 用四阶龙格库塔方法求解一组耦合转的运动方程组：　$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_j \sin(\theta_j - \theta_i)$

其中N=1000为转子的总数，K为耦合大小，　ω_i为【-1，1】之间均匀分布的随机数

从初态$\theta_i(t=0)=0$出发，　定义复数序参量量　$r(t) = \frac{1}{N}\sum_i e^{i\theta(t)}$

分别计算K=0.2 和K=5时，r(t)的模 |r(t)| 随时间的演化，说明这两种情况下有何区别，以及从物理上解释为什么会有这种差别

Figure 3: 题目总览

可以看出，这里需要解一个数量为 1000 的方程组。我们在解多阶微分方程的时候对方程进行了化为方程组的思想方法，在这里我们就可以直接使用方程组的思想，对于问题一中的情况稍作修改就可以得到同样有效的代码。

五　代码展示

5.1　前置函数编写

以下为第二问所用到的微分方程，由于方程数量较多，所以我们采取循环的方式对方程组进行生成。

```
 function dtheta=fun(t,theta)
 w=2*rand([1,1000])-1;
 dtheta=zeros(1,1000);
 for ii=1:1000
     dtheta(ii)=w(ii)+0.2/1000*sum(theta-theta(ii));
 end
end
```

以下的编写思路和第一问是一样的，因为调用的变量为矩阵的行向量，因此可以便利地接受任意多的元素进行计算。

```
 function theta=rk(t,h,theta)
 len=length(t);
 for i=2:len
     K1=fun(t(i-1),theta(i-1,:));
     K2=fun(t(i-1)+1/2*h,theta(i-1,:)+1/2*h*K1);
     K3=fun(t(i-1)+1/2*h,theta(i-1,:)+1/2*h*K2);
     K4=fun(t(i-1)+h,theta(i-1,:)+h*K3);
     theta(i,:)=theta(i-1,:)+h/6.*(K1+2*K2+2*K3+K4);
```

```
  end
end
```

以下为绘图函数，使用求和函数后将其求模得到随时间变化的情况。

```
function theta=PlotIt()
t=0:0.01:50;
h=t(2)-t(1);
theta=zeros(length(t),1000);
theta(1,:)=zeros(1,1000);%初始条件是所有转子起始位置为0
Theta=rk(t,h,theta);
hold on
grid on
r=zeros(1,length(t));
    for j=1:length(t)
        r(j)=1/1000*abs(sum(exp(1i*Theta(j,:))));
    end
plot(t,r)
end
```

5.2 主体函数编写

```
clear;clc;
PlotIt()
```

本文中所例举的是 K=0.2 的情况，如果要得到 K=5 的情形只需要稍作修改即可。

六　结果分析与结论

通过观察我们可以发现，K=5 的情况下，r 函数以快得多的速度收敛到一个较为稳定的范围内。比如 K=0.2 时，大约到了 t=10 的时候 r 函数才开始出现振荡现象。而 K=5 的情况下就要快得多，大约在 t=0.7 的时候就进入了频率极高的振荡现象。

这是因为，K=5 时转子们以更强的方式耦合在了一起，因此以很快的速度进行了同步。

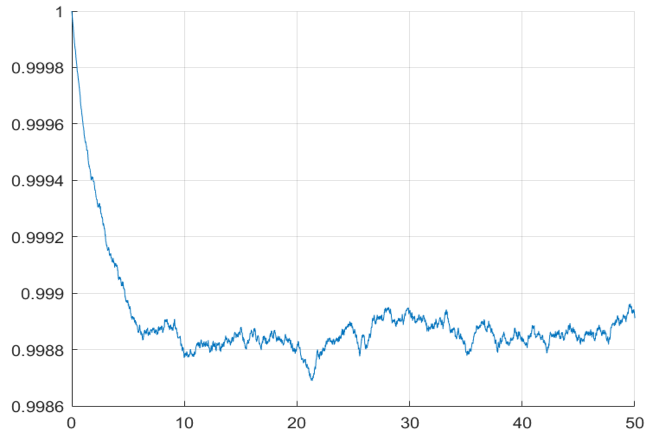


Figure 4: K=0.2

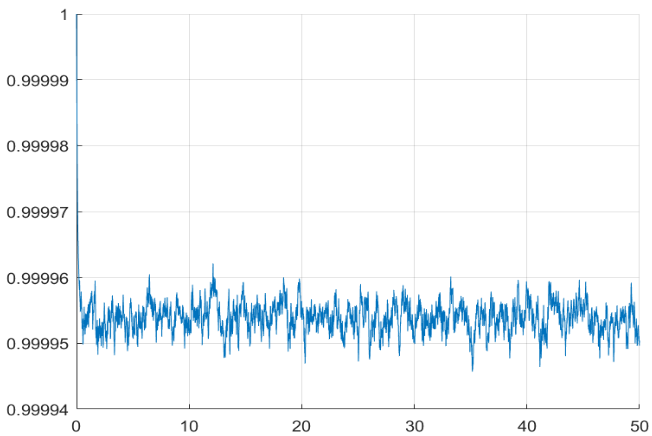


Figure 5: K=5