



上海交通大学学士学位论文

颗粒介质中的超声波传播

姓 名：何翼成
学 号：520072910043
导 师：王宇杰教授
院 系：物理与天文学院、致远学院
专 业 名 称：物理学 (致远荣誉计划)
申请学位层次：学士

2024 年 6 月 27 日

A Dissertation Submitted to
Shanghai Jiao Tong University for Bachelor's Degree

**ULTRASONIC PROPAGATION IN GRANULAR
MEDIA**

Author: He Yicheng

Supervisor: Prof. Wang Yujie

School of Physics and Astronomy, Zhiyuan College

Shanghai Jiao Tong University

Shanghai, P.R. China

June 27th, 2024

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：何翼成

日期：2024 年 05 月 25 日

上海交通大学

学位论文使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。

本学位论文属于 ☒ 公开论文

☐ 内部论文，☐ 1 年/☐ 2 年/☐ 3 年 解密后适用本授权书。

☐ 秘密论文，____ 年（不超过 10 年）解密后适用本授权书。

☐ 机密论文，____ 年（不超过 20 年）解密后适用本授权书。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：何翼成

日期：2024 年 05 月 25 日

指导教师签名：王宇

日期：2024 年 05 月 25 日

摘 要

颗粒介质是常见的强耗散非平衡态体系。目前对于颗粒介质的研究手段中, CT 成像等方式虽然已经成熟, 但是不擅长于处理动态问题, 而声学的高灵敏、非侵入特性能够弥补这一点。从熟悉学习颗粒介质中的声学研究方法出发, 本文研究了超声波在颗粒介质中的传播特性。振幅较小时, 超声波可作为颗粒介质内部应力结构的探针; 振幅较大时, 超声波则作为一种外部激励的能源。典型的颗粒介质中的声信号可视为两部分: 相干弹性波和多重散射尾波。对于相干弹性波, 本文讨论了如何使用飞行时间法和频散能量图法测定声速, 并且将其和传统的时差法进行了比较; 观察到了首峰随传播距离增大出现的展宽现象, 使用归一化宽度对其进行描述并且和一维随机层理论导出的结果符合较好; 检测了声速和介质所受单轴应力之间的指数关系, 并与等效介质理论的预测进行对比和误差分析。对于散射尾波, 本文探讨了由辐射传递方程导出的扩散行为近似, 并且发现其与测定的强度曲线符合较好, 拟合计算得到了平均自由程和非弹性吸收时间; 研究了振幅和颗粒介质非线性的关系, 发现振幅超过一定值后使得其结构因泵浦而变化, 并引入相似性参数对其进行描述。最后对颗粒介质的剪切响应进行了研究, 发现了无法向应力的随机稀疏堆积和施加法向应力的随机密集堆积应力-应变曲线的不同, 并且对后者进行了微滞滑的现象学分析, 得出了预测介质失效的图像。这些技术积累将为后续使用声学研究颗粒介质中的剪切带、监测受剪切过程的声发射事件以及将声学方法耦合至 CT 成像研究等提供基础。

关键词: 颗粒介质, 超声波, 随机堆积

ABSTRACT

Granular media are strongly dissipative nonequilibrium systems. Currently, although methods like CT imaging for granular media research are already mature, they are not adept at handling dynamic problems, while the high sensitivity and non-invasive nature of acoustic method can compensate for this. To be familiar with acoustic research methods in granular matter, this paper investigates the propagation characteristics of ultrasonic waves in granular media. When the amplitude is small, ultrasonic waves can serve as probes for the internal stress structure of granular media; when the amplitude is large, ultrasonic waves act as a source of external excitation. Typical acoustic signals in granular media can be treated as two component: coherent elastic waves and multiple-scattered tail waves. For coherent elastic waves, this paper discusses how to measure the speed of sound using time-of-flight method and dispersion energy map method, and compares it with traditional time-difference method; the phenomenon of broadening of the first peak with increasing propagation distance is observed, and its description using normalized width is consistent with the results derived from one-dimensional random layer theory; the exponential relationship between sound speed and uniaxial stress on the medium is detected and compared with the predictions of effective medium theory, along with error analysis. For scattered tail waves, this paper discusses the diffusion behavior approximated by the radiative transfer equation and finds good agreement with the measured intensity curve, fitting to calculate the mean free path and non-elastic absorption time; the relationship between amplitude and nonlinearity of granular media is studied, finding that exceeding a certain value of amplitude causes configuration changes due to pumping and introduces the similarity parameter for description. Finally, the shear response of granular media is studied, revealing the differences between stress-strain curves of random loose packing under no stress and random close packing under normal stress, and a phenomenological analysis of micro-slip is conducted on the latter, yielding a predictive image of medium failure. This accumulation of acoustic techniques will provide a foundation for subsequent studies using acoustics to probe shear bands in granular media, monitor acoustic emission events during shear processes, and couple acoustic methods to CT imaging research, among others.

Key words: granular media, ultrasonic, random packing

目 录

第一章 绪论	1
1.1 颗粒物质	1
1.2 颗粒物质的研究方法现状	3
1.2.1 实验方法	3
1.2.2 理论方法	4
1.3 本章小结	7
第二章 相干首波	9
2.1 声速的测量	9
2.1.1 装置搭建	9
2.1.2 飞行时间法测定颗粒介质中的声速	14
2.1.3 频散能量图法	18
2.2 声速与单轴应力的指数关系	21
2.2.1 等效介质理论 (EMT)	21
2.2.2 实验验证	26
2.3 超声脉冲在颗粒介质中的展宽	28
2.3.1 归一化宽度的定义	28
2.3.2 归一化宽度与颗粒介质厚度的关系	29
2.3.3 归一化宽度与单轴应力的关系	33
2.4 本章小结	33
第三章 散射尾波	35
3.1 超声波在颗粒介质中的扩散近似	35
3.1.1 理论推导	35
3.1.2 实验验证	36
3.2 超声波在颗粒介质中的非线性	37
3.2.1 非线性波方程与各级谐波	37
3.2.2 声源振幅对颗粒介质结构的影响	39
3.3 本章小结	43

第四章 颗粒介质的剪切响应	45
4.1 引言	45
4.1.1 STZ 理论	45
4.2 实验装置	46
4.3 应力-应变曲线	47
4.3.1 RCP 与 RLP 的剪切响应差异	47
4.3.2 蠕变与滞滑	47
4.4 本章小结	50
第五章 全文总结	51
参考文献	53
致 谢	59

插图

图 1-1	振台振动、剪切盒循环剪切等外部激励方式的装置示意图	5
图 1-2	颗粒介质中典型的声信号。由相干首波 (E) 和散射尾波 (S) 组成。下图展示了声信号在时域上的各频率分量强度。	5
图 2-1	奈奎斯特-香农采样定理示意图。原始信号 $f=10\text{ Hz}$ ，采样频率分别为 6, 22, 30 和 70 Hz 时的离散采样信号与重建信号。	10
图 2-2	声学激励与探测系统示意图。S 代表声源探头 (Source)，R 代表接收探头 (Receiver)	10
图 2-3	功率放大器 ATA-101B 的幅频特性曲线。	12
图 2-4	G150 与 W800 两种声学探头响应系数 $\tilde{K}(\omega)$	14
图 2-5	Ellák Somfai 等人测量的三种定义的到达时间与传播距离的关系，插图 为不同到达时间定义的示意图	15
图 2-6	声学探头进行压电转换的固有耗时	16
图 2-7	同步采集源信号 (Src.) 与响应信号 (Res.)，以及波前到达时刻 (Wave- front, WF)，波峰到达时刻与首次过零时刻 (1st 0 crossing)。	17
图 2-8	5 循环 30 千赫兹正弦波列作为试探信号，颗粒介质为直径 2 毫米钢珠 的随机密堆积，单轴应力 9 千帕下的声速测量	18
图 2-9	根据异地响应信号计算频散能量图	20
图 2-10	声速 $V_{\text{T.O.F.}}$ 与单轴应力 P 的幂律关系。 $P = 0.40, 3.34, 6.30, 8.43, 9.63,$ 11.31 和 14.46 kPa ，颗粒介质为厚度 $L = 19\text{ mm}$ 的直径 2mm 钢珠随机 密堆积	27
图 2-11	通过相干波峰 A_1 归一化，且时间轴以波峰到达时间 t_1 进行缩放后的 不同颗粒样品厚度下测得的响应信号	31
图 2-12	颗粒介质厚度为 6, 11, 16, 20, 24 和 30 mm 时的响应信号首峰宽度 $t_1 - t_0$ 与归一化宽度 W	32
图 2-13	单轴应力 P 与归一化宽度 W 的关系	33
图 3-1	扩散行为近似实验中的信号处理。	37
图 3-2	在单轴应力 $P = 38.6\text{ kPa}$ 、采用连续激励协议下，超声响应信号的声速、 相似性参数、谐波线性分析	42
图 4-1	剪切装置与数据收集系统示意图	46

图 4-2	RCP 与 RCP 在剪切速率为 20 pps 下的力学响应曲线	48
图 4-3	微滞滑数量及其最近邻失效前时间间隔的直方图	49

符号对照表

d	颗粒粒径
ϕ	体积分数
χ	等效温度
λ	波长
f	频率
$V_{\text{T.O.F.}}$	飞行时间法测得的声速
$p(t)$	时域声压
$p_i(t)$	入射声压
$\tilde{Z}_S(\omega)$	角频域声阻抗
L	颗粒介质厚度
t_0	响应信号波前到达时间
t_1	响应信号波峰到达时间
t_2	响应信号首次过零到达时间
P	单轴应力
V_L	纵波声速
V_T	横波声速
W	首峰归一化宽度
α	衰减系数
V_φ	相速度
$C_{i,j}(\tau)$	信号 i 和 j 的互相关函数
τ	延迟时间
K	体弹性模量
G	剪切模量
ρ^*	颗粒介质密度
ρ	颗粒材料密度
Z	颗粒平均接触数
C_n	颗粒在法向的接触强度系数
C_t	颗粒在切向的接触强度系数

f_n	法向接触力
f_t	切向接触力
w	颗粒重叠量
a	颗粒接触圆面半径
G_g	颗粒材料剪切模量
ν_g	颗粒材料泊松比
$\mathbf{I}^{(nm)}$	从颗粒 m 指向 n 的单位矢量
Δs	颗粒间切向相对位移
λ_L	颗粒材料第一 Lamé 常数
μ_L	颗粒材料第二 Lamé 常数
\mathbf{e}_{ij}	颗粒介质应变张量
$\sigma_{ij}^{(n)}$	颗粒 n 的 Cauchy 应力张量
δ_{ij}	克罗内克符号
C_{ijkl}^*	颗粒介质的等效模量张量
λ_L^*	颗粒介质的等效第一 Lamé 常数
μ_L^*	颗粒介质的等效第二 Lamé 常数
P_{eff}	有效应力
$k(\omega)$	频域上的波数
ν_K	体弹性模量的涨落
L_c	体弹性模量的关联长度
D	扩散系数
τ_α	非弹性吸收时间
ν_e	能量传输速度
U_0	声源能量
l^*	平均自由程
Q	品质因子
G_g	颗粒材料剪切模量
μ_f	颗粒间摩擦系数
u_t	切向振幅
u_n	法向振幅
μ	介质切变黏度

μ_B	介质体变黏度
κ	介质热导率
c_v	定容热容
c_p	定压热容
β	介质的非线性系数
ρ_0	介质在平衡态下的密度
c_0	介质在平衡态下的声速
$\xi(a)$	相对物质坐标 a 的流体粒子位移量
$u_{n\omega}$	n 倍频谐波分量
α_μ	黏性吸收系数
α_h	热吸收系数
ω	角频率
$\Psi_{i,j}(\tau)$	信号 i 和 j 的归一化交叉关联函数
β_{Hertz}	Hertz 接触力一阶非线性系数
δ_{Hertz}	Hertz 接触力二阶非线性系数
$u_t^E(f_t)$	切向振幅的弹性响应分量
$u_t^H(f_t)$	切向振幅的耗散响应分量
D_n	法向接触力的刚度系数
D_t	切向接触力的刚度系数
f_t^*	切向接触力的幅值
ε_{pl}	塑性形变量
V_f	颗粒介质的自由体积
n_\pm	处于状态 \pm 的数密度
σ	介质所受的偏应力
n_∞	$(n_- + n_+)$ 在稳定平衡态下的值

第一章 绪论

1.1 颗粒物质

“当一个物体被分作几个单独运动的小部分时，它是液态的；而当它的所有部分都接触在一起时，它是固态的。”这就是 17 世纪笛卡尔对于颗粒物质机械性质的朴素认知。颗粒物质在自然界中广泛存在，拥有可被类比于寻常物质所有的固（颗粒静堆积，也被称作 jammed state，即阻塞态）、液（颗粒流，也被称作 unjammed state，即非阻塞态）、气（颗粒分布均匀、快速运动）三态^[1]，其共通特征是由离散物质构成的聚集系统，如沙漠、土壤、泥石流、沙尘暴；而在人类建设文明中，颗粒物质无疑也占有重要地位，如谷物堆积、矿石输运、药物粉末等生产行为，其背后也隐藏着颗粒堆积与流变的学问。即使是成本相对低廉的煤炭、水泥、沙砾等工业材料，总共的生产与加工对地球上生产能源消耗的比例也来到了约 10%^[2]。因此对于颗粒物质的研究与理解，不仅有益于进一步认知自然界，从而防治地震、滑坡、雾霾、沙漠化等自然灾害，还有助于减少工业中的能源损失、预防粉尘爆炸等事故，进而提升人类工业文明的生产效率、提高生产质量。

颗粒物质的物理学是一门复杂的学科。颗粒物质通常被定义为尺度大于微米量级的宏观离散体，通过接触、碰撞等形式聚集组成的多体系统。颗粒物质拥有着丰富的物理特性，总结如下：

1. 宏观性。足够的尺度与质量使得颗粒介质的运动无需考虑分子层面的热运动以及量子层面的概率分布效应，一种常见的分析思路是计算对比热力学尺度的 $k_B T$ 与颗粒尺度对应的引力势能 mgd ，而常温（ $\sim 300\text{ K}$ ）外部激励对于颗粒介质堆积结构的作用可以忽略（目前也的确存在对沙堆进行循环热剪切的相关实验^[3]，但是这与我们论证不能通过温度遍历相空间的思路显然不同）。对于颗粒物理的力学研究也大多基于经典的牛顿力学；
2. 离散性。在以等半径硬球组成的颗粒固体中，颗粒通常以随机的方式形成堆积，即介质中通常存在着空隙；对应地，使用体积分数 ϕ 来评估颗粒介质的空间利用率，其中对于等大硬球的情形存在着随机松散堆积（random loose packing, RLP）和随机密堆积（random close packing）两个体积分数极限，分别约为 0.55^[4] 和 0.64^[5]。随机性堆积的非晶结构使得传统的连续介质力学对颗粒介质的描述存在偏差^[6]；

3. 多体性。三体问题已经是能产生混沌现象的复杂力学体系；即使只是静止状态下的颗粒固体，对于 N 个颗粒进行描述也仍然需要多达 $3N$ 个正则坐标，即颗粒介质的多体特征使得其具有难以求解的极高自由度，所以对其进行宏观力学上的建模求解也是困难重重；
4. 耗散性。颗粒间复杂的相互摩擦与碰撞使得系统中的各成员能迅速将动能转化为分子层面的热运动。因此颗粒系统中存在强耗散性，在失去外部能量驱动的情况下可以长期处于某一亚稳态（metastable state）。常规的统计力学假设，即系统在温度激励下可以遍历相空间中的微观态，对于颗粒介质而言失效。换言之，颗粒介质是典型的非平衡态系统；
5. 敏感性。颗粒介质中存在高度复杂的力链与接触网络，而振动、剪切等外部激励容易使得颗粒进行重排（Rearrangement），使得这两种网络都具有高敏感性。因此对颗粒物质展开实验研究时，需要慎重考虑过程中的技术细节，避免观测手段本身对颗粒介质造成的扰动介入到所观察的实验现象中。
6. 多分散性（polydispersity）。该术语原意是描述高分子聚合物的分子量不均一性，被援引至颗粒介质中用于指代多种不同颗粒的混合。虽然在大多数实验与理论中都是使用等大硬球模型来描述颗粒介质，但是在真实世界中的颗粒介质中，颗粒的尺寸、形状^[7-8]、材料等参数不只是非均匀的，而且其在各自参数定义域上的分布也未必有规律，同时伴随着相分离^[9]等复杂动力学现象。

颗粒物质的物理学也是年轻的学科。由于颗粒固体的弹性模量相较于通常的结晶固体要小得多，因此也被 de Gennes 将其与玻璃、液晶等体系共同称为“软物质”，并评论称“Granular matter, in 1998, is at the level of solid-state physics in 1930.”^[10]。2005 年 Science 提出的 125 个最重要前沿科学问题^[11]中，“能否发展关于湍流动力学和颗粒材料运动学的综合理论？”赫然在列；而 2021 年提出的“新 125 个科学问题”^[12]中，“集体运动的基本原理是什么？”仍然彰显着颗粒物质物理学的神秘。颗粒物理中的未知比已知多得多，虽然寻常但是蕴含着深刻的物理原理，亟待研究者们前赴后继的努力。

1.2 颗粒物质的研究方法现状

1.2.1 实验方法

针对颗粒物理中丰富的物理性质，目前研究者们已开发出多角度的实验研究方法。

1. 光-弹性实验^[13]。对于光学透明的介质，其内部应变时会展现出双折射现象，因此可以直观体现颗粒介质在受单轴剪切、环形剪切等外部作用下其内部的应力分布情形。但是由于偏振光在异质性介质中的传播、三维介质中的精确测量困难等问题^[14]，光弹性方法通常只适用于二维平面的颗粒介质；
2. X射线计算机断层扫描成像（computed tomography, CT）^[15]。X射线扫描图像经由去边界、分水岭算法分割等处理后可以重构出颗粒介质的三维空间结构，从而研究颗粒介质中的接触结构与运动关系。但是该方法通常难以应用于实地实验。CT设备本身成本已经较为昂贵，并且即使只是拍摄单张图像，其所需的存储空间也已较大（对于图像分辨率 $1021 \times 1021 \times 886$ ，约占 1.7GB 的储存空间^[16]），因此如果对实际测量时所拍摄的多帧图像进行数据处理，还需要配备价格不菲的高性能计算资源，进一步提高了其技术门槛。CT设备由于射线源和探测板等性能限制，因此其空间分辨精度也会存在上限。这一点对于所研究颗粒的半径（为了得到图像中清晰的颗粒边界，一般要求颗粒的直径大于 2mm）、材料（金属颗粒对 X 光吸收率过高而影响成像效果，因此不能被用于辐照）都存在一定限制。除此之外，一般的 X 光成像方法都是通过射线源和接收器对受辐照的物体进行旋转扫描以进行建模，这个拍摄过程通常会长达数十秒，所以对于高时间分辨需求的情境下，X 射线方法扫描建模方法不得不使用多源同步^[17]的方式间接提高时间分辨率；
3. 核磁共振^[18]。另一类对颗粒介质进行成像研究的手段，只是“光源”换为了磁场。相应的，颗粒介质中需要对应的标记原子（这种原子核需要存在非零净磁矩，如最常用的质子成像就是利用的 H^1 核），搭建对应的磁场线圈等也存在一定的技术门槛。

以及本文所着眼的超声波探测技术。超声波在小振幅时具有非侵入式的探测作用，在有限振幅时则对颗粒介质具有诱导重排^[19]、流化（fluidization）/塑性软化（elastic weakening）^[19]等泵浦（pumping）作用。因此在设计超声波探测实验时，需要考虑其振幅、频率等参数与颗粒介质的相性。

超声波探测技术根据其探测思路可以大致分为两类：

1. 主动探测。超声波在颗粒介质中的传播是对其内部应力与接触结构的直接体现^[20-22]。超声波主动探测具有非侵入性、高灵敏度等优点；真实世界中的颗粒材料通常光学不透明或者剧烈光散射，使得超声波成为颗粒物质研究中独一无二的探针。对经由颗粒介质传播后的声信号进行频谱、波形、声速、衰减、相似性参数等分析，有助于研究颗粒介质内部的结构/应力特征；
2. 被动探测。颗粒介质受剪切等外部激励时出现应力-应变曲线，这种宏观事件伴随着内部颗粒的重排、碰撞与摩擦等介观过程，这类机械过程会激发颗粒的机械振动，即发射出携带介观过程信息的声信号。这种振动事件被称为声发射（Acoustic Emission, AE）。通过分析 AE 信号的频谱、能量、波形、振动模密度等特征^[23-25]，可以对颗粒介质受应力时的蠕变（creeping）、滞滑（stick-slip）事件等特征过程进行研究。

声学探测的时间尺度相较于成像方法的小很多，在时间分辨率这一方面存在着天然的优势^[19]，因此可以被设计用于剪切带探测^[26]等连续过程实验。

1.2.2 理论方法

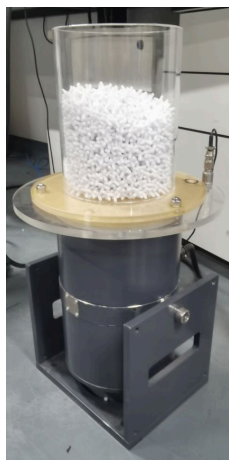
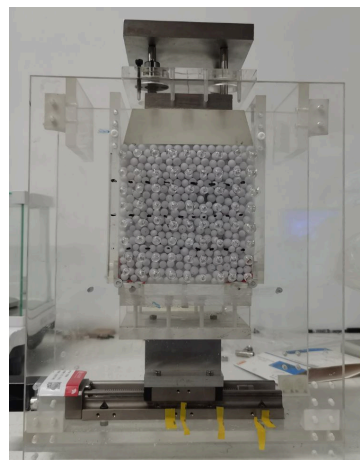
虽然颗粒物质是典型的非平衡态系统，但是对其进行统计力学上的描述仍在争取中。在实验中已经发现，通过如图 (1-1) 所示的振台振动、剪切盒循环剪切等外部激励方式操纵的颗粒堆积，其存在可重复的微观态；若进一步采取等概率假设，即相同体积颗粒堆积的微观结构概率相同，那么就可以将体积 V 替代传统的统计力学中的哈密顿量 H ，从而建立适用于颗粒物质的统计力学框架。Edwards 以这种思想提出了“等效温度”的定义^[27]：

$$\frac{1}{\chi} = \frac{\partial S(V)}{\partial V} = \frac{\partial \lambda \ln \Omega(V)}{\partial V}, \quad (1-1)$$

其中 χ 为等效温度（正式变量名为 Compactivity）， S 为熵， $\Omega(V)$ 是给定堆积体积 V 下的微观态数目， λ 是类比玻尔兹曼常数 k_B 的常数。已有实验证明，这种定义的等效温度与通过涨落耗散效应定义的温度具有一致性^[28]。

对于声学而言，在理论上依靠的主要是非线性声学^[29]、等效介质理论（Effective Media Theory, EMT）^[30]，依托于辐射传递方程（Radiative Transfer Equation, RTE）的扩散行为近似^[31-32]。

图 1-2 展示了超声波在颗粒固体中传播的示意图。可以观察到，超声波通常由相干弹性首波（Coherent Elastic Wave，简略为 E）与散射尾波（Codalike Scatter Wave，

(a) 控制加速度 a 的振台装置

(b) 通过步进电机控制的剪切盒装置

图 1-1 振台振动、剪切盒循环剪切等外部激励方式的装置示意图

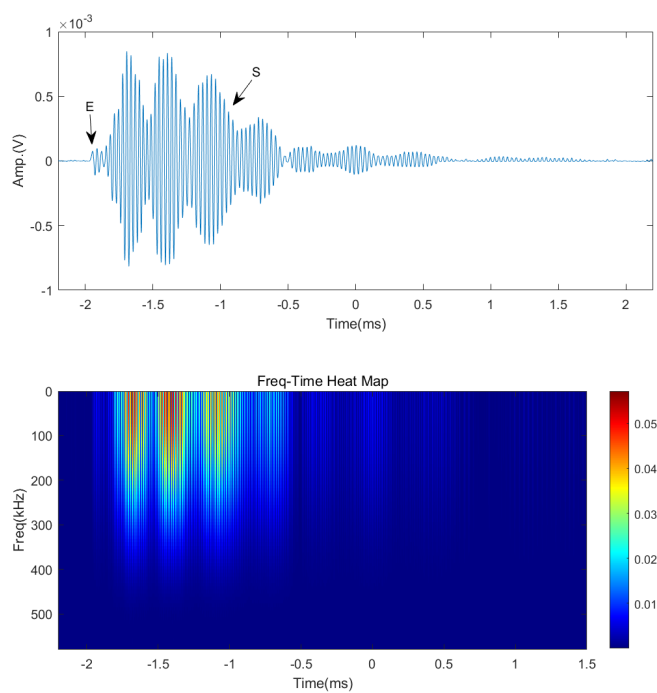


图 1-2 颗粒介质中典型的声信号。由相干首波 (E) 和散射尾波 (S) 组成。下图展示了声信号在时域上的各频率分量强度。

简略为 S)。相干波是由颗粒介质中复杂力链自平均形成的, 因此对应力与接触构型不敏感, 而散射波则是对接触构型非常敏感, 这一点与相干波完全相反^[31]。

在连续介质力学中我们已经知道, 三维介质中的波传播分为两种模式, 即纵波/压缩波 (Longitudinal Wave/Compressional Wave), 以及横波/剪切波 (Transverse Wave/Shear Wave)。这两种模式波引入到颗粒介质中时, 即分别对应了其宏观统计性质的体弹性模量 K 与剪切模量 G 。EMT 理论综合了颗粒介质特有的体积分数 ϕ 、平均接触数/配位数 Z 等物理量以及连续介质力学中的弹性模量, 从而预测颗粒介质中不同模式的声速等物理量。

声学对于颗粒介质的研究范式大致可以根据等效波长 $\lambda_{\text{eff}} = V_{\text{eff}}/f_c$ 与振幅 A 来进行总结分类。为方便我们记颗粒直径尺度为 d 。

- $\lambda_E \gg d$ 。此时关心的是在颗粒介质中的相干弹性波 (coherent elastic waves)。由于此时颗粒介质的力学响应可以类比于寻常固体, 所以 EMT 采用仿射变换近似 (affine approximation)、平均场近似等方法将其处理为等效的连续介质。此时关心的是通常是横纵波速 V_P 、 V_S 与等效介质弹性模量 K 、 G 之间存在的关系。
- $\lambda_E \sim d$ 。此时声波在颗粒介质中的传播表现出强烈的多重散射特征。颗粒接触点的耗散性使得声波在颗粒介质中的衰减吸收大大加强了, 因此研究者提出了扩散行为近似^[31]、非线性波方程^[22,33]等模型来对颗粒介质进行研究。在这些模型中, 品质因子 Q 、平均自由程 l^* 等参数用于研究颗粒因接触点等因素产生的耗散性。
- $A \rightarrow 0$ 。对于小振幅声波, 颗粒介质的非线性仅体现为其等效黏度 η 等介质固有特征, 且不会对颗粒介质的接触与应力结构造成显著影响。在此范围内我们将超声波视为非侵入性探针;
- $A \rightarrow \delta$ 。对于有限振幅声源, 颗粒介质的非线性将被进一步激发, 其等效黏度将会根据超声波振幅而产生变化, 即声源激励已经对颗粒介质造成泵浦效果。比如利用超声波诱导倾斜面上的颗粒介质发生滑坡 (landslide, avalanche)^[34], 以及地震波诱导相邻地震成核 (earthquake nucleation) 区域的二次地震 (co-seismic)^[35]等现象。

在本文中将使用激发与接收压缩波的成对声学探头, 探究在不同应力和厚度下等大硬球颗粒介质对于超声波的响应情况, 从而理解颗粒介质的内部结构与力学特性。

1.3 本章小结

本章介绍了颗粒物质的基本定义和丰富特性，以及目前在颗粒物理领域常见的实验和理论方法。在阐述了一般的声学研究范式后，我们将在以下的章节中详细展开相关实验，从而理解颗粒介质对于超声波的非线性响应。

第二章 相干首波

2.1 声速的测量

任何曾经修学过大学物理实验的本科生都熟悉如何在空气或水这类连续介质中测量声速，即令两个声学探测面在待测介质中相对，使用诸如共振波节法、相位法和时差法以计算声速。前两者的原理都是寻找某固定频率 f 信号的某个特殊相位（如峰值所对应的 $\pi/2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ）在空间中的位置，从而通过逐差法求解声波的波长 λ ，最后根据 $v = f\lambda$ 计算出声速；时差法则是考虑到了声学探头中由于压电陶瓷等探测元件进行声-电信号转换存在一定的固有时间（当然实际上由于存在光速上限，因此线缆本身传输信号也需要耗时，但是与压电陶瓷的用时相比小得多，在实验以及本文的讨论中都忽略不计），即 $\Delta L = v \times (\Delta t - t_0)$ ，所以通过拟合空间位置与到达时间的斜率 dL/dt 以确定声速。

事实上，在颗粒固体中测量声速时，上述几种方法都有着不同程度的应用，如 Paul A. Johnson 和 Xiaoping Jia 同时使用共振法与行波法（即飞行时间法，Time of Flight, T.O.F.）测定颗粒介质中的声速^[35]；而在地震学中，基于连续小波变换^[36]（Continuous Wavelet Transform, CWT）和频散能量图（Dispersion Energy Map）求解地震波相速度的方法也被广泛应用。本节将介绍如何将飞行时间法与频散能量图应用于颗粒介质的声速测量中。

2.1.1 装置搭建

奈奎斯特-香农采样定理（Nyquist-Shannon sampling theorem）指出，对信号进行采样时，采样频率必须大于该信号最高频率的两倍，才能够重构出原始信号；如果要求不出现幅值失真，则采样频率还需要更高。图 2-1 简单展示了采样频率与信号频率之间的关系。不难观察到，在采集频率较低时，会出现信号混叠现象；采集频率越高，越能逼近真实信号曲线。

常用的声学线缆是阻抗 50Ω 射频同轴线缆，传输带宽可达 $1 \sim 20 \text{ MHz}$ ，确保了对声信号进行采样时不会失真。目前在实验室中已完成部署并投入使用的声学激励与探测系统硬件、软件陈列如图 2-2 所示：

下面我们按照图中标注序号具体说明各部件的主要功能：

1. Tektronix Arbitrary Function Generator AFG31021。该仪器可以按照实验需求产

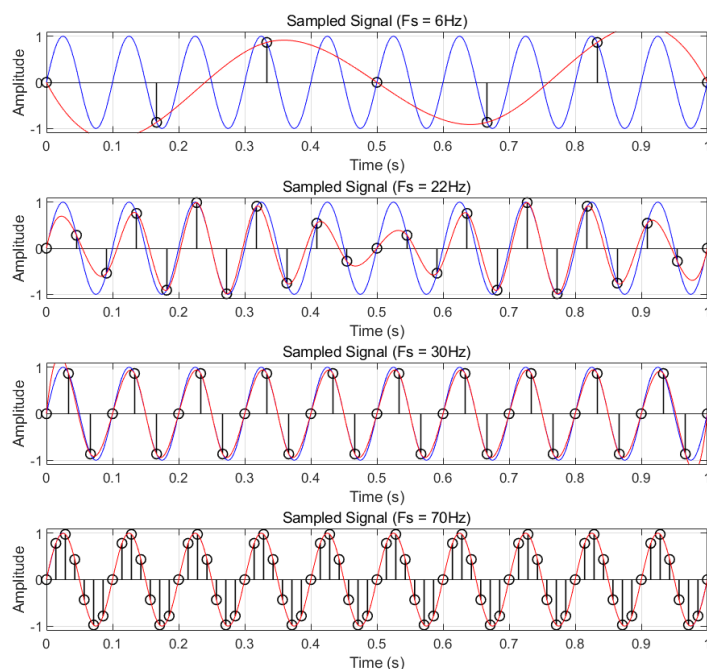


图 2-1 奈奎斯特-香农采样定理示意图。原始信号 $f=10$ Hz，采样频率分别为 6, 22, 30 和 70 Hz 时的离散采样信号与重建信号。

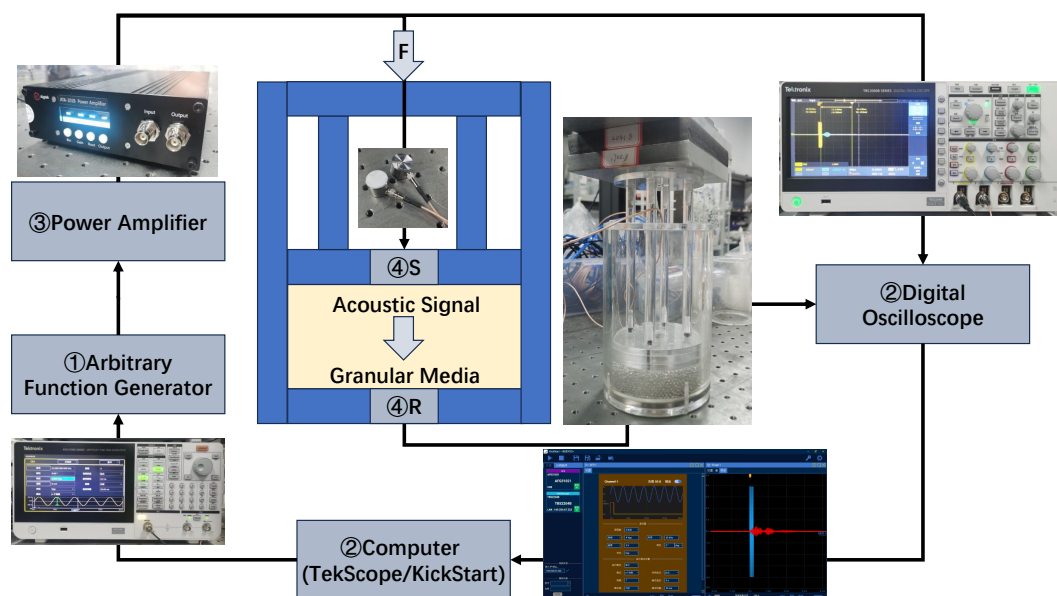


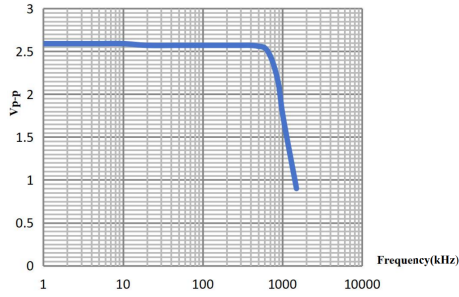
图 2-2 声学激励与探测系统示意图。S 代表声源探头 (Source)，R 代表接收探头 (Receiver)

生如控制频率的连续正弦波、设定循环数与触发时间间隔的正弦波列、单频脉冲等模拟电压信号，用于激励声学探头产生对应的机械振动。其支持写入自定义函数来对信号波形进行控制；

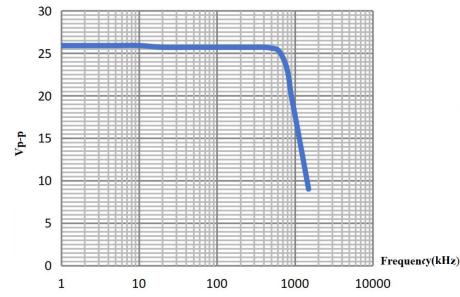
2. Tektronix TBS2204B 示波器。该示波器通过 BNC 接口对可多达 4 个独立模拟电压信号进行同步采集，可用于同时记录试探信号源以及在颗粒介质中传播后的响应信号。该示波器可以调控探头衰减系数（ $1\times$ 到 $10\times$ 不等），具体实验时需要对两者进行配平；该示波器的采样率最高可达 $1\text{GHz}/\text{Ch}$ ；单次采样长度最高可达 5×10^6 ，因此在进行快速傅里叶变换（Fast Fourier Transform, FFT）时，确保我们所关心频域区间内的分辨精度足够高。特别的是，示波器具有高精度采集和平均采集等多种采样模式，前者可用于记录瞬时事件信号，而后者则是通过 $16\sim 512$ 次采集信号的线性平均极大地减少了热噪声的影响，从而得到相对平滑的信号曲线。通过 IPv4 网口可使用 TekScope 软件对 TBS2204B 进行数据读取和记录，并且进行简单程度的操控（开始/停止记录）等。而功能更强大的 KickStart 软件能对 AFG31021 与 TBS2204B 进行同步控制，能记录多次运行所输入的信号并且在实验结束时以固定命名格式统一导出，从而极大地便利了对于声学信号的研究；
3. ATA-101B Power Amplifier。可以设置输入与输出的线缆阻抗（输入端可选取 $50\ \Omega/1\ \text{M}\Omega$ ，输出端可选取 $50\ \Omega/1.5\ \Omega$ 。目前声学常用线缆都是 $50\ \Omega$ ），其主要功能是以最小步长 $2\ \text{dB}$ 放大 AFG31021 产生的电压信号，从而满足使声学探头产生声压振幅的需求，通常适用于有限振幅波的非线性传播等实验中。可设定的最大放大效果为 $20\ \text{dB}$ ，但是由于如图 2-3 所示的其固有的频域放大极限，若初始输入的电压信号本身幅值已经较高，仍然强行设定超出频域放大曲线的增益值会导致放大器输出信号的畸变与失真。因此在设计含 ATA-101B 的实验时，需要综合考虑信号放大器本身的性能上限；
4. 清诚声发射 G150 与 W800（成对）声学探头。声学探头在部分研究领域中被称作换能器（Transducer），意指作为探头核心元件的压电陶瓷既能够将射频线缆传输的模拟电压信号通过电-压效应转换为机械振动的声信号，又能够感应机械振动的幅值强度、通过压-电效应将声信号转换为模拟电压信号，使其能被进一步展开信号处理与分析。G150 和 W800 分别是适用于 $60\text{-}400\ \text{kHz}$ 和 $50\text{-}800\ \text{kHz}$ 频域范围内工作的探头型号，谐振频率分别为 $150\ \text{kHz}$ 和 $600\ \text{kHz}$ 。在具体的实验情境中，应当根据实际需求选取合适的一对探头。两个型号的声学探头

主体都是 $\varphi 19 \text{ mm} \times 15 \text{ mm}$ 的圆柱体，侧面通过 M5 射频线进行信号交换，柱面与底面由 SUS-304 不锈钢材外壳包裹，增强声学探头的屏蔽抗干扰作用；接触面为陶瓷材料，从而接收与激发压缩波；由于这两种型号探头的尺寸相同，因此便于安装于同一颗粒容器中；

5. 单轴应力圆柱容器。通过 SOLIDWORKS 软件设计，并采用厚度 6, 8 和 10 mm 的亚克力板材料制作的容器（采用透明容器是为了兼容未来可能的 X 射线扫描建模需求）。容器内径为 $D = 90 \text{ mm}$ ，最高支持厚度为 13 cm 的颗粒介质进行实验。设置四柱单轴活塞以及用于放置金属块的加压台，从而对容器内的颗粒介质施加单轴应力。活塞与容器底部中心均留有 $\varphi=19 \text{ mm}$ 的孔洞用于安装声学探头，具体交付图纸制作时考虑公差为 0.2 mm 以便于灵活的更换。10 mm 的亚克力板被弯曲为圆筒而制作为容器壁，因此可以安全承担实验需求范围内的应力。由于探头本身并非防水型号，因此在设计与制作时容器也并未考虑防水/密封处理。



(a) ATA-101B 输出信号的最大振幅在频域上的分布。



(b) ATA-101B 输出信号的最小振幅在频域上的分布。

图 2-3 功率放大器 ATA-101B 的幅频特性曲线。

需要特别说明的是，一般情况下作用于接收器表面的声压 $p(t)$ 都不等于入射波的声压 $p_i(t)$ ，这是由探头硬质陶瓷圆面本身存在的声阻抗 $\tilde{Z}_S(\omega)$ 所导致的：

$$p(t) = \left(1 + \frac{\tilde{Z}_S(\omega)}{\rho_0 c_0 S} \right) p_i(t) = \tilde{K}(\omega) p_i(t). \quad (2-1)$$

其中 ρ_0 与 c_0 是介质处于平衡态时的密度和声速， S 是圆面探测器的面积。接收声压 $p(t)$ 通过非么正角频率傅里叶变换得到的信号频谱为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}(\omega) p_i(t) e^{-i\omega t} dt = \tilde{K}(\omega) F_i(\omega). \quad (2-2)$$

其中 $F_i(\omega)$ 为入射波声压 $p_i(t)$ 的非么正角频率傅里叶变换。因此入射波声压 $p_i(t)$ 为

$$p_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\tilde{K}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (2-3)$$

在实验中，由于我们使用的是一对同工作频域的探头，面对面接触时可以简单视为声波经历了两次同样的声阻抗过程，且假定实验工作范围内使用的模拟电压信号幅值产生的压电效应满足线性 ($p \propto U$)。那么，我们可以设定信号发生器产生的电压信号为 $U_0(\omega)$ ，则接收到的电压信号为

$$U(\omega) = \tilde{K}(\omega)^2 U_0(\omega). \quad (2-4)$$

为了测定探头的声阻抗，我们可以使用连续正弦电压信号对探头进行激励，并且将其理解为受迫阻尼振动过程：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad (2-5)$$

观察受迫振动的稳态解，即取 $t \rightarrow \infty$ 极限：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi), \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (2-6)$$

即激励信号源的振幅和响应信号振幅呈现线性，因此我们可以使用源信号振幅作为分母来对响应效率函数进行重标定。图 2-4 展示了设定源信号为一系列相同振幅 $U = 1\text{Vpp}$ 、不同频率 ω_n 的连续正弦波列 $\{U(\omega_n)\}$ 对探头进行激励，示波器的探头衰减系数均设定为 $1\times$ 时所测定的探头响应系数 $\tilde{K}(\omega)$ 。

观察可知，G150 在 $60 \sim 400\text{kHz}$ 频域内的响应系数较高，在某些频率下甚至非常接近 1，而超出其工作频域的响应系数迅速跌落；而 W800 虽然在我们所关心的频域，即 $0 \sim 1000\text{kHz}$ 内响应系数均不高，但是胜在响应曲线相对平稳。因此在实验时，如果信号集中于超声频域内的较低成分 ($\leq 400\text{kHz}$)，那么选择 G150 将是更合理

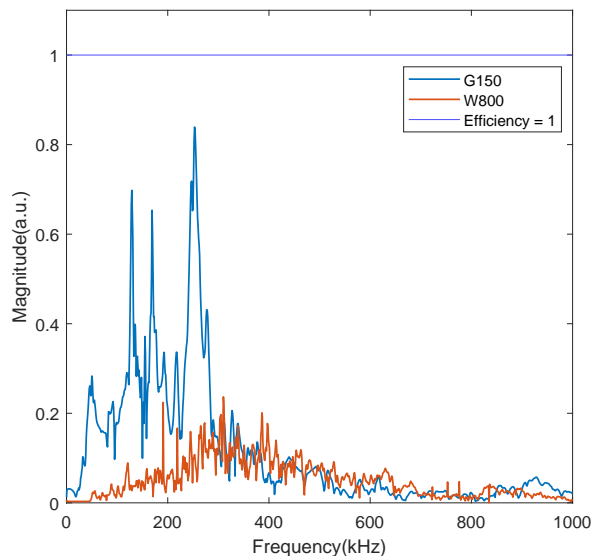


图 2-4 G150 与 W800 两种声学探头响应系数 $\tilde{K}(\omega)$

的；在关心较广的频域下的声学参数（比如衰减、相速度等）时，W800 的性能相对优异。为了弥补 W800 本身响应系数较低的缺陷，未来可以考虑使用 Physics of Acoustic Company 的 2/4/6 Type 等型号的供电前置放大器来对响应信号进行增强，从而增加信噪比、便于实验后续的信号提取与分析。

我们后续实验便可以借助式 (2-3) 来对实验中采集的响应信号进行修正。需要说明的是，声阻抗系数本身是复数，即探头本身对于信号会产生相位上的影响，但是如何准确测定这种相位差并且进行有效插值是一个较为困难的问题。我们在测定声阻抗系数的时候采用了稳态假设，而在实际实验的时候可能会由于弛豫时间的尺度较大而使得响应过程中伴随着过阻尼受迫振动的成分，因此在对实验所得的数据进行处理时，对于时间/相位相关的实验我们并不使用上述的修正方法，而是直接使用原始信号分析。

2.1.2 飞行时间法测定颗粒介质中的声速

飞行时间法，在部分文献与研究工作中又被称为行波法，其测定声速的原理即测量试探声波从声源探头传播到接收探头所消耗的时间长度 Δt ，从而计算得到

$$V_{\text{T.O.F.}} = \frac{L}{\Delta t}, \quad \Delta t = t_A - t_G. \quad (2-7)$$

其中 L 是两个探头之间颗粒介质的厚度。但具体到实际数据处理操作中，由于

响应信号本身是一个多频率成分、多峰值、在时间上具有一定长度的波列，所以如何准确定义传输声波的到达时间 t_A ($A = \text{Arrival}$) 是值得商榷的问题。为了研究这个细节，Ellák Somfai 等人定义了颗粒介质中声波的三种不同的到达时间：波前到达时间 t_0 （由于热噪声的干扰作用，波前通常被定义为信号的首个上升沿峰值 A_1 的 10% 处而与噪声幅值区分开，部分更激进的研究者会选取为 3%），（首个）波峰到达时间 t_1 ，首次过零时间 t_2 ，具体如图 2-5 所示^[37]。良好定义的波速应当满足在不同厚度下测得的结果相近，因此我们可以按照其确定在使用飞行时间法测定声速时的最佳信号参考点。

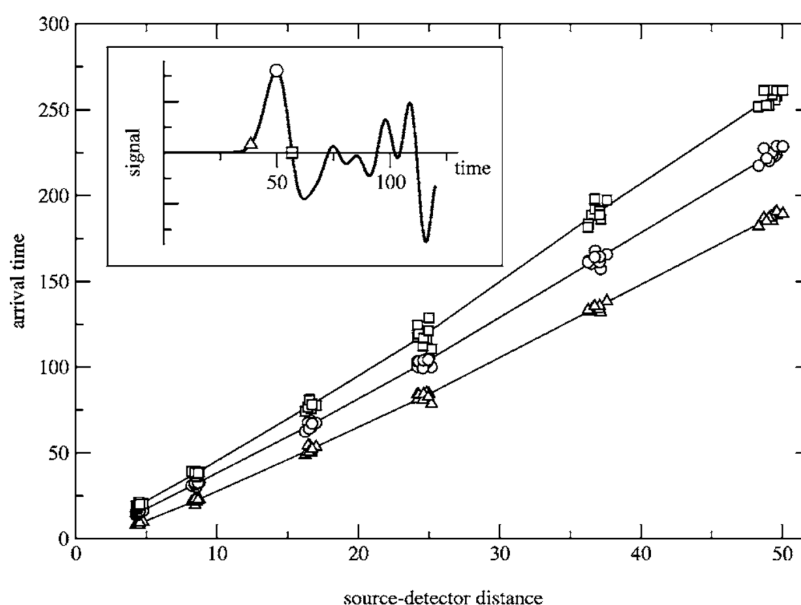


图 2-5 Ellák Somfai 等人测量的三种定义的到达时间与传播距离的关系，插图为不同到达时间定义的示意图

2.1.2.1 信号最佳参考点选取

首先我们需要测量探头本身通过压电效应进行信号转换所需要的固有耗时，这里我们采用的是 face-to-face time 的测量方法，即测量两个探头的陶瓷探测圆面直接紧密接触所时，声波传播所需要的耗时。图 2-6 展示了测得的固有时间为 $t_G = 1.54 \mu\text{s}$ ，后续使用飞行时间法时我们也将令到达时间减去该固有时间作为修正。

我们在实验中使用 Tektronix 示波器对源信号与响应信号进行了同步采集，因此容易确定具体的时间起点。下面我们简单介绍有关于如何识别信号得到各定义下的到达时间的算法。

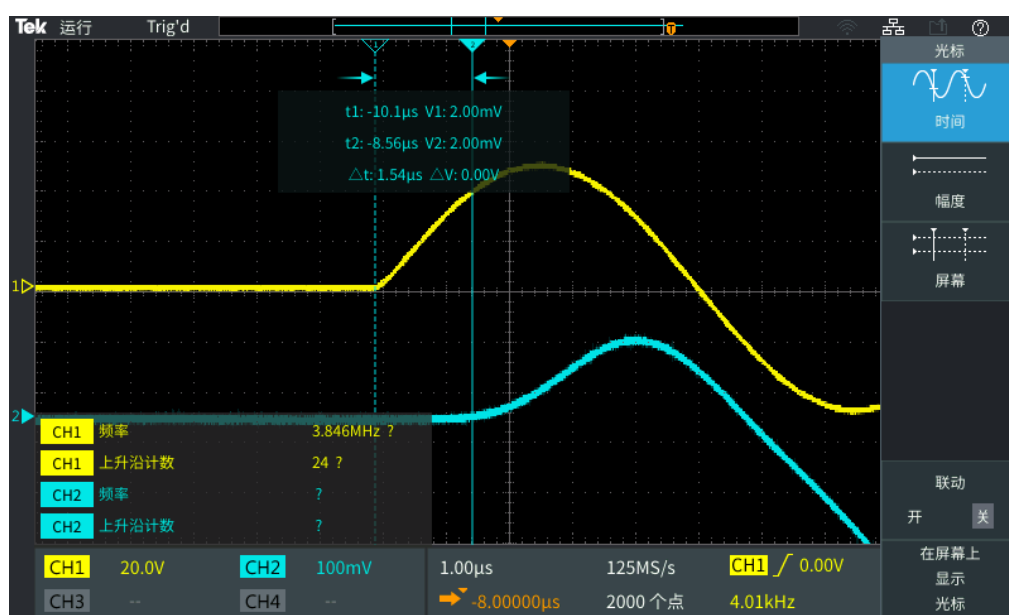
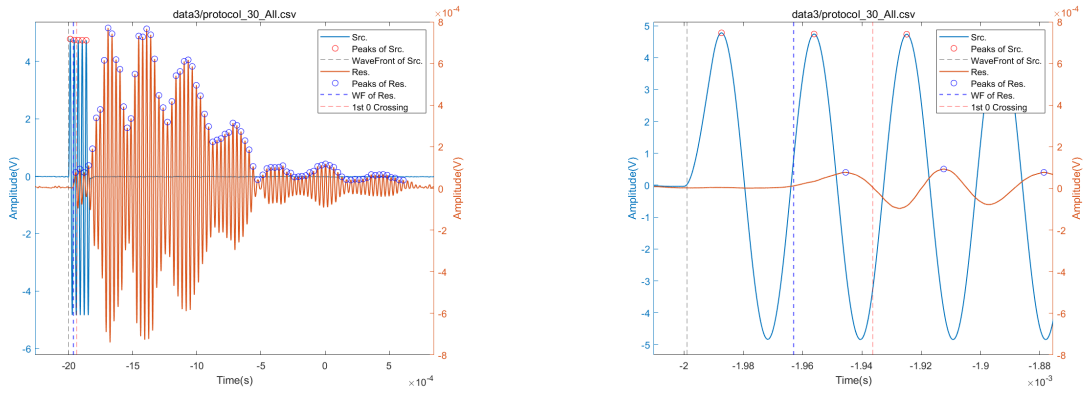


图 2-6 声学探头进行压电转换的固有耗时

1. 信号平滑。由于示波器的采样频率通常很高，而且存在着一定的热噪声对信号进行干扰，因此我们借助 Matlab 的 `movmean()` 函数对信号进行线性权重的平滑处理。我们通过平均窗口长度 `num_window` 来控制平滑程度；该参量既不能过小，使得热噪声未能被充分处理而被错误引入到响应信号中，也不能过大使得真正的响应信号也被模糊失真，使得时间顺序上更靠后的峰被错误识别为首峰；
2. 识别源信号（Src. = Source）的首峰时刻。作为源振幅信号，其信噪比明显很高，因此我们可以使用较大的噪声阈值，如源信号振幅的 40%，通过 `findpeaks()` 函数识别源信号的首个峰值。源信号的峰值位置识别通常准确率很高。需要注意的是，即使在采集时已经在示波器上设定源振幅信号和响应信号的偏置值为 0V，由于系统硬件本身的问题仍然会导致源信号和响应信号存在一定量的偏置值，而这会对后续识别信号的波前位置造成影响。
3. 计算源信号的偏置值。取首峰幅值的 1/80 作为其波前定义，通过 `find()` 函数找到其对应的时刻 t_o 作为时间原点，即近似为源信号的发射时刻。取所记录的源信号中发射时刻前的信号均值作为源信号的偏置值，并将源信号减去该偏置值作为修正。由于在记录信号时已经使用了 128 次平均采集，所以热噪声造成的幅值涨落已经被尽可能消除，因此计算所得到的偏置值是相对准确的。
4. 识别响应信号（Res. = Response）的首峰时刻。从该步骤开始，需要通过控制寻峰算法中的 `findpeaks()` 函数中的峰最小半高宽（`MinPeakWidth`）和噪声阈值

- (MinPeakProminence)，并且需要通过所识别的源信号波前时刻筛去响应信号中识别出的位置在其之前的干扰峰信号。
5. 识别响应信号的波前时刻。设定响应信号首峰幅值的 $1/10$ 作为其波前幅值，通过 `find()` 函数在源信号波前之后、响应信号首峰时刻之前的范围内寻找波前时刻。在这里使用的 $1/10$ 需要和响应信号的信噪比契合，如果信噪比过低就需要考虑调高这个比例，反之亦然。同时和计算源信号的偏置值一样，计算响应信号中波前时刻前的信号序列的均值作为响应信号的偏置值并对响应信号进行修正；
 6. 识别响应信号的首次过零时刻。在偏置修正完成后，寻找响应信号首峰时刻后的第一个过零点即可。波前与首次过零识别的准确性和响应信号的首峰识别准确性高度相关，如果首峰的信噪比足够高，便能确保以上步骤识别准确。

图 2-11 是对典型的响应信号进行三种不同到达时间识别的实例。



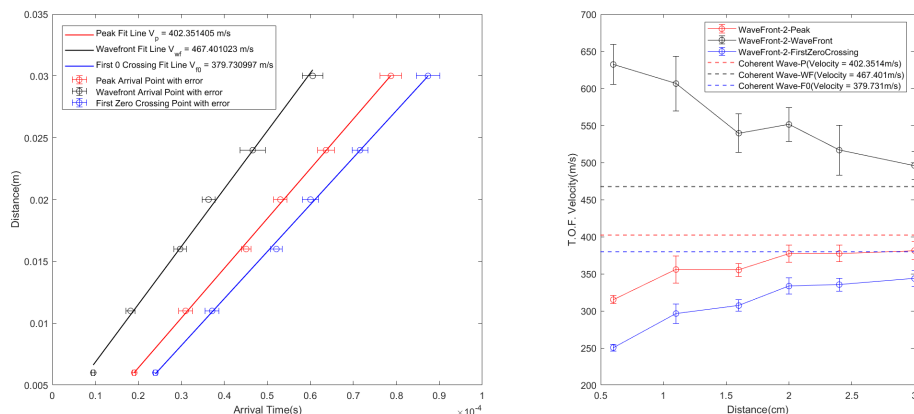
(a) 调参寻峰算法对信号识别效果（整体）

(b) 调参寻峰算法对信号识别效果（局部）

图 2-7 同步采集源信号 (Src.) 与响应信号 (Res.)，以及波前到达时刻 (Wavefront, WF)，波峰到达时刻与首次过零时刻 (1st 0 crossing)。

我们按照上述三种到达时间的识别方法，测定了在不同厚度下的声速。特别地，我们额外使用时差法拟合得到了声速 V_L ，并将其与飞行时间法测定的声速 $V_{T.O.F}$ 进行比较。结果如图 2-8 所示。实验中所使用的颗粒为 $d = 2\text{mm}$ 的钢珠，施加的单轴应力为 $P = 9\text{kPa}$ ，试探信号设定为 5 循环 30kHz 正弦波列。为了尽可能消除颗粒介质本身随机性的误差，每一个厚度都需要重新制备 7 个独立不同的随机密堆积以进行到达时间的系综平均，即 $t_i \rightarrow \bar{t}_i$ 。

由此可见，各参考点的飞行时间法定义下的声速随着传播距离 L 的增大向各自的时差法定义下的声速 V_L 逼近，其中以波峰到达时间 t_1 定义的声速在距离上的变化



(a) 以三种参考点通过时差法求得的声速 V_L

(b) 以三种参考点通过飞行时间法求得的声速 $V_{T.O.F.}$

图 2-8 5 循环 30 千赫兹正弦波列作为试探信号，颗粒介质为直径 2 毫米钢珠的随机密堆积，单轴应力 9 千帕下的声速测量

最为稳定。因此在传播距离 L 充分大时，我们可以使用飞行时间法替代时差法进行工程上的声速测量（因为时差法需要改变探头间的距离，而有的实验并不允许改变这一点，如与颗粒堆积结构本身相关的可逆性研究^[19]），而其中以波峰到达时间 t_1 定义的又是最好的。

需要额外说明的是，这三种定义的参考点对于时差法都可以适用，但是其拟合计算出的声速大小的顺序与各参考点的在时间上的先后顺序明显相关（即参考点随着传播时间/距离的增大出现了逐渐分离的现象），这一点和 Somfai 得出的结果一致。我们将这种分离现象描述为相干首波在颗粒介质中随着传播距离增大而出现的展宽。这意味着至少在频域的速度分布上颗粒介质已经表现出了异质性，即出现了色散现象；我们将在后文通过设计描述首波峰展宽程度的归一化宽度 W 以及相关实验从而更详细地探讨这一点。

2.1.3 频散能量图法

2.1.3.1 测量相速度的原理推导

考虑单频连续正弦波作为声源激励，如果我们将颗粒介质中的声学传播简单考虑为单频平面波，即

$$s(x, t) = A_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega x/V_\varphi - \omega t)}, \quad (2-8)$$

其中 A_0 是声源振幅, α 描述声信号在颗粒介质中随着传播距离 x 的衰减系数, V_φ 是信号角频率为 ω 时的相速度。假定在距离声源 x_1 与 x_2 处存在两个小接收探头 (即忽略可能造成的反射), 分别接收到声波信号 $S_1(t)$ 与 $S_2(t)$ 。则能求解相速度为

$$V_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\Delta\varphi} \omega. \quad (2-9)$$

我们很容易想到通过 FFT 算法求解两次信号的相位频谱 $\varphi_i(\omega)$, 但是显然

$$\Delta\varphi = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) + 2N(\omega)\pi \quad (2-10)$$

对于 $N(\omega)$ 的确定则较为困难, 因此地震学提出使用频散能量图观察相速度可能的分布情况。引入信号 $S_i(t)$ 与 $S_j(t)$ 的互关联函数 $C_{i,j}(\tau)$:

$$C_{i,j}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(t) S_j(t + \tau) dt. \quad (2-11)$$

其中 τ 是描述信号延迟/传播时间的参数, 因此该函数是一个时域函数。对其进行非么正角频率傅里叶变换:

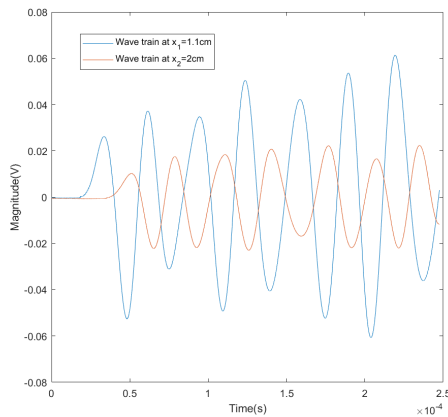
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[C_{1,2}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) S_2(t + \tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} S_2(t + \tau) d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t) S_2(\omega) e^{i\omega t} dt \\ &= S_1^*(\omega) S_2(\omega). \end{aligned} \quad (2-12)$$

其中 $S_1^*(\omega)$ 和 $S_2(\omega)$ 分别是 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$ 的非么正角频率傅里叶变换计算而来的频谱, 上标 * 表示取该复数量的共轭。接下来通过狄拉克函数 $\delta(\omega - \omega_n)$ 提取角频率为 ω_n 信号分量的延迟时间 τ_n 的信息, 再对其进行逆非么正角频率傅里叶变换:

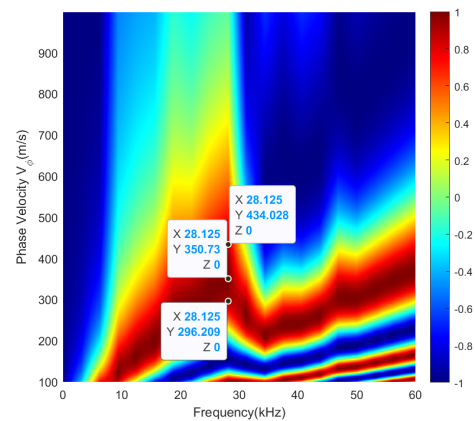
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1} \{ \delta(\omega - \omega_n) \mathcal{F}[C_{1,2}(\tau)] \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(\omega) S_2(\omega) \delta(\omega - \omega_n) e^{i\omega\tau} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} S_1^*(\omega_n) S_2(\omega_n) e^{i\omega_n\tau}.
\end{aligned} \quad (2-13)$$

具体绘制二维概率分布时，我们只需以 $S_1^*(\omega_n) S_2(\omega_n) e^{i\omega_n\tau} / 2\pi$ 的最大值进行归一化，并且取计算后的实部即可。该函数的物理含义是，延迟时间为 τ 时，即该频率分量 ω_n 对应的相速度为 $V_\varphi = \Delta x / \tau$ 的可能性大小（得到的将是 $[-1, 1]$ 之间的数值，即越接近 1 可能性越高）。通过设置离散频率分布 $\{\omega_n\}$ ，即可查看在颗粒介质中可能的相速度分布。需要说明的是，频散能量图没有从根本上解决 $N(\omega)$ 的确定问题，但是为辅助飞行时间法测定声速提供了更直观的参考工具。

2.1.3.2 颗粒介质中相速度分布



(a) 在 $x_1=1.1$ cm 与 $x_2=2.0$ cm 处采集的响应信号



(b) 0-60 kHz 的相速度频域分布热图

图 2-9 根据异地响应信号计算频散能量图

图 2-9 展示了在单轴应力容器中，根据不同采集距离 x_1 、 x_2 下的两道压缩波信号绘制的频散能量图。可以看到两道信号在发射信号的中心频率 $f_c = 30$ kHz 处的相速度约为 $V_\varphi = 350 \pm 10$ m/s。

2.2 声速与单轴应力的指数关系

2.2.1 等效介质理论 (EMT)

假定声波波长 $\lambda \gg$ 颗粒直径 d , 颗粒体系由相同颗粒组成, 满足紧束缚条件, 颗粒介质应变可采用仿射近似, 则纵波声速 V_L 与横波声速 V_T 分别为

$$V_L = \sqrt{\frac{(K + \frac{4}{3}G)}{\rho^*}}, \quad (2-14)$$

$$V_T = \sqrt{\frac{G}{\rho^*}}. \quad (2-15)$$

其中 K 与 G 分别是颗粒介质的体弹性模量与剪切弹性模量, $\rho^* = \rho\phi$ 是颗粒固体的密度, ρ 是颗粒材料的密度, ϕ 是颗粒介质的体积分数。在 EMT 中两个模量通过以下式子给出:

$$K = \frac{C_n}{12\pi} (\phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{C_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2-16)$$

$$G = \frac{C_n + \frac{3}{2}C_t}{20\pi} (\phi Z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{6\pi P}{C_n} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2-17)$$

其中 Z 是颗粒的平均接触数, 是一个和颗粒形状和介质所受应力 P 均有关的量^[7]; C_n 、 C_t 分别用于描述颗粒在法向和切向接触力强度, Hertz 接触模型和 Mindlin 接触模型分别使用了这两个系数, 即两个颗粒通过接触完成的相互作用力为

$$f_n = \frac{2}{3}C_n R^{\frac{1}{2}} w^{\frac{3}{2}}, \quad (2-18)$$

$$f_t = C_t (Rw)^{\frac{1}{2}} \Delta s, \quad (2-19)$$

其中 w 是半径分别为 R_1 、 R_2 的两个颗粒之间的重叠量, 存在关系 $Rw = a^2$, $R = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ 为颗粒的等效半径, a 是两颗粒间接触圆面的半径。引入颗粒组成材料 (下标 g) 的剪切模量 G_g 与泊松比 ν_g , 完成对力系数的表述:

$$C_n = \frac{4G_g}{1 - \nu_g}, \quad (2-20)$$

$$C_t = \frac{8G_g}{2 - \nu_g}. \quad (2-21)$$

现在我们从颗粒体系的应力-应变角度出发,通过假定颗粒介质具有各向同性,以及前文所提到的仿射近似条件下,求得颗粒介质模量^[30,38]。假定颗粒介质中两相邻接触的颗粒坐标分别为 $\mathbf{r}^{(m)}$ 、 $\mathbf{r}^{(n)}$,且颗粒球体的半径为 R 。那么从颗粒 m 指向颗粒 n 的相对坐标位矢的单位矢量为

$$\mathbf{I}^{(nm)} = \frac{\mathbf{r}^{(n)} - \mathbf{r}^{(m)}}{2R} \quad (2-22)$$

标记两颗粒的空间位移量分别为 $\mathbf{u}^{(m)}$ 、 $\mathbf{u}^{(n)}$,借助式 (2-22) 可以提取出两颗粒相对位移在其接触面法向与切向的分量,而这正是 Hertz 接触与 Mindlin 接触中所需要的法向与切向形变信息:

$$w_0 = \frac{\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}}{2} \cdot \mathbf{I}^{(nm)}, \quad (2-23)$$

$$\Delta s = \frac{\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}}{2} - w_0 \mathbf{I}^{(nm)} = \frac{\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}}{2} - \left[\frac{\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}}{2} \cdot \mathbf{I}^{(nm)} \right] \mathbf{I}^{(nm)}. \quad (2-24)$$

注意这里所取的上标,使得法向形变量指向颗粒体心之外。代入各形变量到对应的接触力模型中,我们可以计算两颗粒之间通过接触产生的相互作用力:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(nm)} &= \mathbf{F}_N^{(nm)} + \mathbf{F}_T^{(nm)} \\ &= \frac{4R^{\frac{1}{2}}w_0^{\frac{3}{2}}}{3\pi B} \mathbf{I}^{(nm)} + \frac{8(Rw_0)^{\frac{1}{2}}}{3\pi(2B+C)} \left[\frac{\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}}{2} - w_0 \mathbf{I}^{(nm)} \right] \\ &= \frac{(2R)^{\frac{1}{2}}}{3\pi B(2B+C)} \left\{ 2B \left[\left(\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(m)} \right) \cdot \mathbf{I}^{(nm)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. + C \left[\left(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)} \right) \cdot \mathbf{I}^{(nm)} \right]^{\frac{3}{2}} \mathbf{I}^{(nm)} \right\} \end{aligned} \quad (2-25)$$

其中

$$B = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\lambda_L + \mu_L} \right), \quad (2-26)$$

$$C = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\mu_L} - \frac{1}{\lambda_L + \mu_L} \right), \quad (2-27)$$

而 λ_L 和 μ_L 是颗粒材料的 Lamé 系数。假设颗粒的形变与样品的应变满足

$$u_i^{(n)} = \mathbf{e}_{ij} r_j^{(n)}, \quad (2-28)$$

其中 \mathbf{e}_{ij} 是描述颗粒介质应变的张量, $r_j^{(n)}$ 是颗粒 n 在 j 轴上的位矢分量, $u_i^{(n)}$ 是颗粒 n 在 i 轴上的位移分量。这里使用类似于 Einstein 求和约定的写法而省略了等号右边原本应有的 $\sum_j^{x,y,z}$ 求和符号。代入式 (2-22)、(2-28) 至式 (2-25) 中, 从而有

$$F_i^{(nm)} = -\frac{4R^2}{3\pi B(2B+C)} \left\{ 2B \left(-e_{i'j'} \mathbf{I}_{i'}^{(nm)} \mathbf{I}_{j'}^{(nm)} \right)^{\frac{1}{2}} e_{ij} \mathbf{I}_j^{(nm)} - C \left(-e_{i'j'} \mathbf{I}_{i'}^{(nm)} \mathbf{I}_{j'}^{(nm)} \right)^{\frac{3}{2}} \mathbf{I}_i^{(nm)} \right\}. \quad (2-29)$$

接下来我们可以尝试通过颗粒介质中统计性的应力与应变的关系来导出对应的等效模量, 具体是计算颗粒所受的接触力矢量平均来替代颗粒介质中的平均应力, 即

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \sum_n \int \sigma_{ij}^{(n)} dV_n. \quad (2-30)$$

其中 V 是颗粒介质的体积, σ_{ij} 表示在颗粒介质中的 Cauchy 应力, $\sigma_{ij}^{(n)}$ 和 V_n 分别表示颗粒 n 的 Cauchy 应力与体积。考虑体积微元 $dV = dr dS$, 即有

$$\int \sigma_{ij}^{(n)} dV_n = \frac{1}{2} \int \left(r_i' t_j^{(n)} + r_j' t_i^{(n)} \right) dS_n, \quad (2-31)$$

其中 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(n)}$ 是颗粒 n 体心指向颗粒间接触点的位矢, 而 $\mathbf{t}^{(n)}$ 描述了颗粒 n 的表面 S_n 在 \mathbf{r} 处的作用力强度。显然, 由于颗粒本身是离散存在的, 因此能与颗粒 n 产生接触并且能真正产生作用力的颗粒 m 也是有界的。所以将积分形式转换为求和形式, 并使用 $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}^{(m)} - \mathbf{r}^{(n)})/2$, 得到

$$\int \sigma_{ij}^{(n)} dV_n = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \left(r_i^{(m)} - r_i^{(n)} \right) F_j^{(nm)} + \frac{1}{2} \left(r_j^{(m)} - r_j^{(n)} \right) F_i^{(nm)} \right\}. \quad (2-32)$$

代入 (2-22) 于式 (2-32), 得到

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{R}{V} \sum_{n,m} \left(I_i^{(nm)} F_j^{(nm)} + I_j^{(nm)} F_i^{(nm)} \right). \quad (2-33)$$

因为求和符号已经写作 $\sum_{m,n}$ 形式, 在式 (2-32) 中用于消除重复计数的系数 $\frac{1}{2}$ 便不再使用。现在我们已经得出了描述力 $F_i^{(nm)}$ 的式 (2-25), 将其代入至 (2-33), 得到

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle = & \frac{8R^3}{3\pi VB(2B+C)} \sum_{n,m} \left\{ B \left(-e_{i'j'} I_{i'}^{(nm)} I_{j'}^{(nm)} \right)^{\frac{1}{2}} \left[e_{ik} I_k^{(nm)} I_j^{(nm)} + e_{jk} I_k^{(nm)} I_i^{(nm)} \right] \right. \\ & \left. - C \left(-e_{i'j'} I_{i'}^{(nm)} I_{j'}^{(nm)} \right)^{\frac{3}{2}} I_i^{(nm)} I_j^{(nm)} \right\} \end{aligned} \quad (2-34)$$

回顾前面 EMT 的求和假设：颗粒介质呈现几何学上统计性质的各向同性，各颗粒被均匀配位（接触点在球面上均匀分布），颗粒介质的体积足够大，且其中包含充分多的颗粒。所以式 (2-34) 可简化为

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle = & \frac{4R^3 ZN}{3\pi VB(2B+C)} \left\{ B \left\langle \left(-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'} \right)^{\frac{1}{2}} (e_{ik} I_k I_j + e_{jk} I_k I_i) \right\rangle \right. \\ & \left. - C \left\langle \left(-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'} \right)^{\frac{3}{2}} I_i I_j \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2-35)$$

其中 Z 是各颗粒的平均配位数， N 表示介质中颗粒的总数。引入体积分数

$$\phi = \frac{N}{V} \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (2-36)$$

以化简式 (2-35)，得到

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{\phi Z}{\pi^2 B(2B+C)} \left\{ B \left\langle \left(-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'} \right)^{\frac{1}{2}} (e_{ik} I_k I_j + e_{jk} I_k I_i) \right\rangle - C \left\langle \left(-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'} \right)^{\frac{3}{2}} I_i I_j \right\rangle \right\}. \quad (2-37)$$

对颗粒介质采取等静压假设 (isostatic)，即应变在颗粒介质中是均匀的：

$$e_{ij} = e \delta_{ij}, \quad (2-38)$$

这是因为一般都难以在真实的颗粒介质中测得一个具体的应变分布，所以使用了一个较为一般性的假设。于是化简得到

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -\frac{\phi Z (-e)^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 B} \langle I_i I_j \rangle. \quad (2-39)$$

而对于相对坐标的单位矢量 I ，有 $\langle I_i I_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$ 。约定 $\langle \sigma_{ij} \rangle = -p \delta_{ij}$ ，即

$$p = \frac{\phi Z (-e)^{3/2}}{3\pi^2 B}. \quad (2-40)$$

这里 p 实际上就是颗粒介质所受的约束应力 (confining pressure)。反解出

$$e = - \left(\frac{3\pi^2 B p}{\phi Z} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2-41)$$

接下来我们尝试求解 EMT 假设下的颗粒介质的等效模量 (effective moduli)。弹性模量通过下式给出定义：

$$\langle \delta \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \delta e_{kl} \rangle \quad (2-42)$$

因此需要求出式 (2-25) 的微元，从而导出模量关系：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}^{(nm)} = & \\ \frac{(2R)^{\frac{1}{2}} [(\mathbf{u}^{(m)} - \mathbf{u}^{(n)}) \cdot \mathbf{I}^{(nm)}]^{\frac{1}{2}}}{2\pi B(2B + C)} & \left\{ 2B (\delta \mathbf{u}^{(m)} - \delta \mathbf{u}^{(n)}) + C [(\delta \mathbf{u}^{(m)} - \delta \mathbf{u}^{(n)}) \cdot \mathbf{I}^{(nm)}] \mathbf{I}^{(nm)} \right\}. \end{aligned} \quad (2-43)$$

同样地，我们对式 (2-37) 进行类似的微元处理，得到

$$\begin{aligned} \langle \delta \sigma_{ij} \rangle = & \frac{3\phi Z}{2\pi^2 B(2B + C)} \left\{ B \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} (\delta e_{ik} I_k I_j + \delta e_{jk} I_k I_i) \right\rangle \right. \\ & \left. + C \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_k I_l I_i I_j \right\rangle \delta e_{kl} \right\}. \end{aligned} \quad (2-44)$$

根据式 (2-42)，我们导出紧束缚近似下的等效模量：

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^* = & \frac{3\phi Z}{4\pi^2 B(2B + C)} \left\{ B \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_j I_k \right\rangle \delta_{il} + B \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_i I_k \right\rangle \delta_{jl} \right. \\ & + B \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_j I_l \right\rangle \delta_{ik} + B \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_i I_l \right\rangle \delta_{jk} \\ & \left. + 2C \left\langle (-e_{i'j'} I_{i'} I_{j'})^{\frac{1}{2}} I_i I_j I_k I_l \right\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2-45)$$

对颗粒介质采用等静压假设 $e_{ij} = e \delta_{ij}$ ，式 (2-45) 就可以化简为

$$C_{ijkl}^* = \frac{3\phi Z(-e)^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2 B(2B + C)} \left\{ B \langle I_j I_k \rangle \delta_{il} + B \langle I_i I_k \rangle \delta_{jl} + B \langle I_j I_l \rangle \delta_{ik} + B \langle I_i I_l \rangle \delta_{jk} + 2C \langle I_i I_j I_k I_l \rangle \right\}. \quad (2-46)$$

我们已经在式 (2-39) 中处理过类似的单位矢量乘积的期望值，在这里将两者完整写出：

$$\langle I_i I_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (2-47)$$

$$\langle I_i I_j I_k I_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2-48)$$

由此我们尝试导出使用等效 Lamé 系数 λ_L^* 、 μ_L^* 描述的 C_{ijkl}^* :

$$C_{ijkl}^* = \lambda_L^* \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_L^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2-49)$$

其中

$$\lambda_L^* = \frac{\phi Z C (-e)^{\frac{1}{2}}}{10 \pi^2 B (2B + C)} = \frac{C}{10(2B + C)} \left(\frac{3 \phi^2 Z^2 p}{\pi^4 B^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2-50)$$

$$\mu_L^* = \frac{\phi Z (5B + C) (-e)^{\frac{1}{2}}}{10 \pi^2 B (2B + C)} = \frac{(5B + C)}{10(2B + C)} \left(\frac{3 \phi^2 Z^2 p}{\pi^4 B^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2-51)$$

而等效弹性模量 K^* 、 G^* 为

$$K^* = \lambda_L^* + \frac{2}{3} \mu_L^* \propto p^{\frac{1}{3}}, \quad (2-52)$$

$$G^* = \mu_L^* \propto p^{\frac{1}{3}}. \quad (2-53)$$

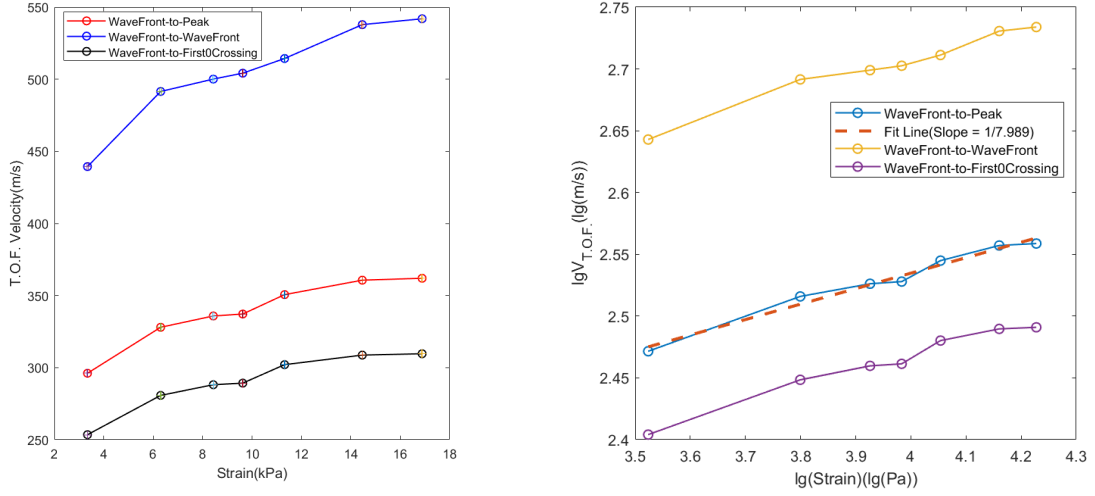
根据式 (2-14)、(2-15)，我们导出了声速 V 与应力 p 的指数关系：

$$V \propto p^{\frac{1}{6}}. \quad (2-54)$$

这一关系对于压缩波 (L) 与剪切波 (T) 的声速都成立。

2.2.2 实验验证

同样在单轴应力容器装置中，使用直径 $d = 2\text{mm}$ 的钢珠制备随机密堆积。测量摆放于单轴应力容器施压台上的各金属块质量，且根据容器内径以及活塞、支撑柱、加压台自重计算出各单轴应力为 $P = 0.40, 3.34, 6.30, 8.43, 9.63, 11.31$ 和 14.46kPa 。使用飞行时间法测定各应力下的声速 $V_{\text{T.O.F.}}(P)$ ，并观察所测得的声速与单轴应力是否存在指数关系、该指数与等效介质理论的预测值一致。图 2-13 展示了在上述的实验



(a) 双线性轴下的应力 P 与声速 $V_{T.O.F.}$ 的关系

(b) 双对数处理后的应力 P 与声速 $V_{T.O.F.}$ 的关系及其线性拟合

图 2-10 声速 $V_{T.O.F.}$ 与单轴应力 P 的幂律关系。 $P = 0.40, 3.34, 6.30, 8.43, 9.63, 11.31$ 和 14.46kPa , 颗粒介质为厚度 $L = 19\text{mm}$ 的直径 2mm 钢珠随机密堆积

条件下测得的声速 V 与单轴应力 P 的关系，并且对数据进行了双对数处理、线性拟合，观察数据点与直线的符合程度以及所拟合直线的斜率。

由此可见，在我们的实验中，声速与单轴应力的指数关系实际上为 $V \propto P^{1/7.989}$ 。这一结果与等效介质理论的预言有较大的出入，这可能是因为 EMT 的假设条件对于颗粒物质实际上是相当苛刻的。可能的偏差原因如下：

1. 真实的颗粒介质是异质性的。EMT 尝试通过增加颗粒系统的尺度与数量使得介质在统计上呈现各向同性，而在我们的实验中颗粒介质的约化厚度（Reduced Thickness） L/d 并不高，约为 7.33；如果要在实验中做到这一点，那么作为探针的小振幅声波会因为颗粒介质因为尺度增加而增强的耗散性而剧烈衰减，使得响应信号的信噪比迅速降低。增加信号发生器的源振幅从而间接增加信噪比也是不可行的，因为在后文我们将讲述有关有限振幅波传播如何诱导颗粒介质内部接触与应力结构发生变化，即试探信号应当满足小振幅条件而不对颗粒介质造成泵浦效应；
2. 颗粒介质中颗粒的接触在其表面并不一定是均匀分布的。有实验和计算证明，对受循环剪切的颗粒介质进行 X 射线旋转扫描建模追踪，对于 $D = 12\text{mm}$ 的示踪颗粒，其上下平均接触数分别为 8.41、6.56^[9]。由此可见，EMT 论述过程中所需求的“接触点在单个颗粒表面呈现均匀分布”，在大多数情况下都是并不

严格的假设；

3. 有效应力 (effective pressure/stress) 过低。在颗粒物理的研究中, 对于有效应力的理解和定义多样, 如使用体积模量的压强量纲来对应力进行重标定^[39]。在这里我们 Johnson 等人的表述, 即借助标准大气压来定义有效应力: $P_{\text{eff}} = P - 1\text{atm}$ ^[35]。在这一标准下, 不难发现在我们的实验中, 颗粒介质的有效应力并不高 (甚至有时是负数); 而在成功重复出 EMT 预言的相关实验中, 所施加应力往往都是 MPa 量级。既然声信号的传播可以粗糙理解为振动在颗粒介质内部力链上的传递, 那么充分大的应力有助于颗粒介质的接触力更有效, 响应信号的信噪比也会进一步提升。

以上种种原因, 使得在实验中重现 EMT 的各类假设是存在一定门槛的。因此以我们当前能达成的实验条件, 测量出的声速与应力的指数关系与 EMT 的不符合也在理解范围以内。

2.3 超声脉冲在颗粒介质中的展宽

颗粒介质通过异质性的力链网络传递应力, 因此声波在颗粒介质中传播时会因为其非线性出现剧烈的畸变现象, 其中脉冲超声波的展宽是较为明显的现象之一。本节讨论了颗粒介质厚度 L 以及单轴应力 P 对于脉冲波展宽的影响。

2.3.1 归一化宽度的定义

在数字信号处理中, 常见的对于峰宽度的定义是峰的半高宽, 例如在光谱分析中借助峰的半高宽定义的展宽来研究 Doppler 展宽、Stark 展宽等机制; 事实上, 前文中我们在处理响应信号的到达时间时, 用于控制寻峰算法的参数中也的确包含了半高宽阈值, 以此排除响应信号中固有的热噪声干扰。而在本小节中, 我们引入的归一化宽度参数 W 同时考虑了峰值与波前在时域中位置:

$$W \equiv \frac{t_1 - t_0}{t_1}, \quad (2-55)$$

其中 t_0 与 t_1 分别为波前与峰值的到达时间。我们在测定最佳信号参考点的时候已经能意识到, 各个参考点出现的分离现象, 即脉冲在传播距离上的展宽已经在一定程度上反映了“在颗粒介质中存在着较明显的色散关系”这一事实; 而首峰到达时间 t_1 定义的飞行时间速度, 在距离上更具有稳定性。因此, 通过与中心频率 (这里指所发射的试探信号的频率 f_c) 关联的 t_1 来对信号进行缩放操作是合理的。后文通过数

据处理后得到的图 2-11 以及对应讨论中进一步证明这一点。

2.3.2 归一化宽度与颗粒介质厚度的关系

2.3.2.1 理论推导

为了理解归一化宽度的物理含义，我们先从最简单的一维弹簧链开始推导。在凝聚态物理课程中，我们已经学习了一维晶格的色散关系为

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|, \quad (2-56)$$

其中 C 是弹簧的劲度系数， M 是弹簧所连接质点的质量， a 为平衡位置下的质点间距（晶格常数）。我们将其写为反函数形式：

$$k(\omega) = \frac{2}{a} \arcsin \left(\sqrt{\frac{M}{4C}} \omega \right). \quad (2-57)$$

为了求得此模型中的波传播速度 V ，我们对式 (2-57) 应用长波极限，即 $ka \ll 1$ ：

$$V = \lim_{ka \ll 1} \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{C}{M}} a. \quad (2-58)$$

使用 V 替换式 (2-57) 中的 C, M 项，且假定长波极限下的声速 V 充分大，使得我们足以通过 Maclaurin 级数将波矢项 $k(\omega)$ 展开至前两项：

$$k = \frac{2}{a} \left[\frac{a\omega}{2V} + \frac{1}{6} \left(\frac{a\omega}{2V} \right)^3 + o \left(\frac{1}{V^3} \right) \right] \approx \frac{\omega}{V} + \frac{2\omega^3 a^2}{3V^3} + o(\omega^3), \quad (2-59)$$

将其代入至波数项中，我们将看到

$$\exp \left[i \left(\frac{\omega}{V} + \frac{2a^2\omega^3}{3V^3} \right) x \right] = \exp[i\omega t_1] \exp \left[i \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^3 \right], \quad t_1 = \frac{x}{V}, \quad \omega_1 = \sqrt[3]{\frac{3V^3}{2a^2x}}. \quad (2-60)$$

而我们已经知道，在傅里叶变换中，存在关系

$$\mathcal{F}[f(t+t_1)] = \mathcal{F}[f(t)] e^{i\omega t_1}, \quad (2-61)$$

$$\mathcal{F}[f(\omega_1 t)] = \frac{1}{|\omega_1|} \hat{f} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right), \quad (2-62)$$

$$\mathcal{F}[Ai(t)] = \exp \left[i \cdot \frac{1}{3} \omega^3 \right]. \quad (2-63)$$

其中 $\text{Ai}(t)$ 是 Airy 函数。将波数项代入至 $a(x, -t)$ 中, 并对其进行傅里叶变换:

$$\mathcal{F}[a(x, -t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 e^{i\omega t_1} e^{i(\omega/\omega_1)^3} e^{i\omega t} e^{-i\omega t} dt = A_0 e^{i\omega t_1} e^{i(\omega/\omega_1)^3}. \quad (2-64)$$

所以, 根据傅里叶变换的平移性质 (2-61) 与尺度放缩性质 (2-62), 我们得到经由颗粒介质传播的响应信号形式可近似为通过 ω_1 控制峰宽度的 Airy 函数:

$$s(x, t) = \omega_1 \text{Ai}[\omega_1(t_1 - t)]. \quad (2-65)$$

因此, 在一维弹簧链中, 脉冲波传播到距离 L 处的归一化宽度 W 为

$$W \approx \frac{\pi}{2\omega_1} \frac{1}{t_1} \propto L^{-2/3}. \quad (2-66)$$

考虑一维球链时, 使用 $a = 2R$ 替换即可得到对应的公式^[40]。接下来我们进一步考虑颗粒介质中衰减项 α 的影响。引入体弹性模量的涨落 $v_K = \Delta K^{-1}/\bar{K}^{-1}$ 与对应的关联长度 L_c , 我们可以得到一维随机层理论对于衰减项的描述^[41]:

$$\alpha(\omega) = k''(\omega) = [\sigma_K^2 L_c^{n-1}] \left(\frac{\omega}{V}\right)^n. \quad (2-67)$$

其中满足

$$V = \bar{V} = \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{\rho}}}, \quad (2-68)$$

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \langle v_K(0) v_K(x) \rangle dx = \sigma_K^2 L_c. \quad (2-69)$$

通过引入虚波矢 k'' 写出频域内的信号分布, 并仿照上面一维弹簧链中的式 (2-60) 进行缩放操作:

$$\tilde{a}(\omega) = e^{ik'x} e^{-k''x} = e^{i\omega t_1} e^{-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^n}, \quad t_1 = \frac{x}{V}, \quad \omega_1 = \sqrt[n]{\frac{V^n}{\sigma_K^2 L_c^{n-1} x}}. \quad (2-70)$$

因此得到归一化宽度:

$$W \sim \frac{1}{\omega_1 t_1} = (\sigma_K)^{\frac{2}{n}} \left(\frac{L_c}{x} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (2-71)$$

在一维随机分层介质中有 $n = 2$, 因此在 $x = L$ 处归一化宽度为

$$W \propto L^{-\frac{1}{2}}. \quad (2-72)$$

由此我们得到了同时考虑了色散关系与衰减项的归一化宽度与颗粒介质厚度之间的指数关系。

2.3.2.2 实验验证

我们设定 5 循环 30kHz、振幅为 1VPP 的连续正弦波列电压模拟信号作为试探信号的激励源, 使用颗粒为直径 2mm 的钢珠生成随机密堆积, 施加的单轴应力为 9kPa; 每一厚度都各自单独重新制备 7 次随机密堆积以尽可能消除实验误差, 分别测定了颗粒介质厚度为 6, 11, 16, 20, 24 和 30mm 时的响应信号, 并且对各到达时间的数据进行系综平均, 计算其标准差作为误差。图 2-11 展示了其中一组响应信号的图像, 其幅值通过相干首波峰值 A_1 进行归一化处理, 且时间轴以首峰到达时间 t_1 进行重标定放缩:

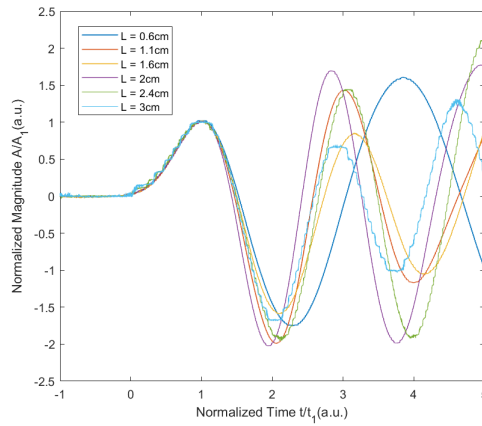


图 2-11 通过相干波峰 A_1 归一化, 且时间轴以波峰到达时间 t_1 进行缩放后的不同颗粒样品厚度下测得的响应信号

可以发现, 虽然采集信号时的颗粒介质厚度各异, 但是通过幅值归一化与时间轴的缩放, 仍能够观察到“响应信号可以提取出相干首波”的本质特征。当 $t/t_1 > 1$, 响应信号的宽度开始出现显著变化; 而在前面的信号参考点选取的实验中, 我们已经知

道, t_1 是一个性质较为良好的参考点, 因此我们可以通过借助 t_1 定义的归一化宽度 W 来探究其与颗粒介质厚度, 即信号传播距离 L 之间的关系。

图 2-12 展示了上述实验中测得的归一化宽度 W 与颗粒介质厚度 L 之间的关系。为了观察两者之间是否存在指数关系, 对图像使用了双对数处理, 并对其数据点进行线性拟合求得斜率。不难看出, 我们得出的结果约为 $W \propto L^{-0.448}$, 与理论推导的 $W \propto L^{-1/2}$ 已经相当接近。

需要说明的是, 这种偏差存在两种来源:

1. 波前到达时间的选取并不是绝对的。既然我们是通过 $S(t_0) = A_1 \cdot k$ ($k \in (0, 0.1]$) 确定的 t_0 , 那么 k 的具体数值会影响到 t_0 的选取, 从而影响到归一化宽度 W 的测定; 而在传播距离较大时, 响应信号的信噪比会因为颗粒介质吸收、耗散引起的衰减而急剧降低, 若要对经由任意传播距离的响应信号划定一条共通可行的 k 实际上是并不容易的。在真实实验以及后续的数据处理时, k 的具体数值需要通过经验来调整, 使得归一化宽度的测定并不严格;
2. 理论推导中的 $n = 2$ 是一维随机分层介质的情况。虽然我们已将色散关系和衰减同时纳入考虑, 并且实验模式中超声波的传播偏向于柱坐标中单个 z 轴方向上, 但是这一切仍不能改变“实际的颗粒介质仍然是三维体系”的事实, 因此出现 $-0.448 \sim -1/2$ 的偏差仍然是在理解范围内的。

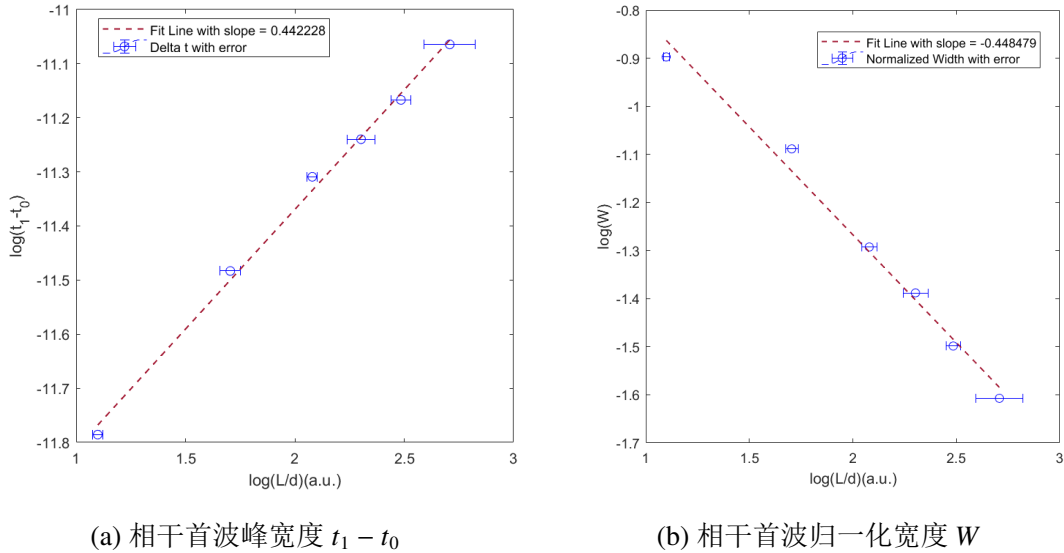


图 2-12 颗粒介质厚度为 6, 11, 16, 20, 24 和 30 mm 时的响应信号首峰宽度 $t_1 - t_0$ 与归一化宽度 W

2.3.3 归一化宽度与单轴应力的关系

类似于上述实验中考虑的颗粒介质厚度，即脉冲传播距离 L 对脉冲归一化宽度 W 的影响，我们也对在不同单轴应力 P 下的归一化宽度 $W(P)$ 进行了计算与绘图，数据来自于小节 2.2.2 中单轴应力与声速关系的实验。但遗憾的是，如图 2-13 所示，我们没有观察到两者之间存在着任何明显的规律。

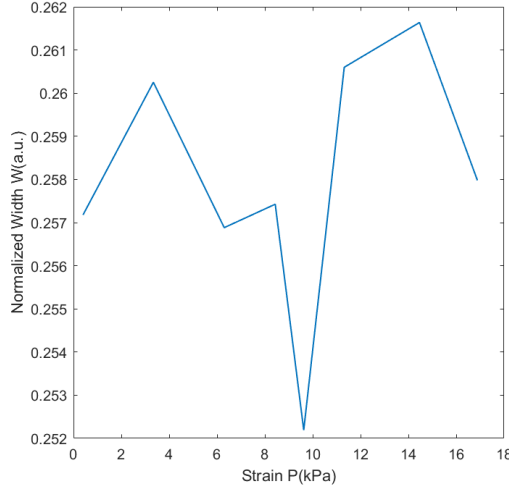


图 2-13 单轴应力 P 与归一化宽度 W 的关系

目前对于该现象的解释是，颗粒介质中本身存在着如 Jassen Effect 等现象，即在诸如圆筒形容器中颗粒介质所受重力并非完全沿轴向传递，而是会有一部分力被颗粒介质中的结构分配到径向。这与寻常的连续介质所产生的液压规律 $p = \rho gh$ 完全不同，因此早期人类的粮仓会因为设计不合理而被过量的径向应力破坏而坍塌^[42]。在我们的实验中，由于容器的几何因素，可能类似的效应使得颗粒介质对于脉冲信号的响应规律性受到影响，导致所观察到的 $W(P)$ 与 P 之间的关系并不明显。

2.4 本章小结

本章由三个部分组成，首先我们介绍了如何使用飞行时间法和频散能量图法测量颗粒介质中的声速，对三种不同参考点的声速进行了比较，并且初步观察到了首峰展宽的现象。接下来我们测量了颗粒介质中的声速 $V_{T.O.F.}$ 与单轴应力 P 的关系，并且尝试使用等效介质理论来对其指数关系进行理解，以及做出了理论与实际之间存在偏差的可能解释。最后我们测量了颗粒介质中用于描述首峰宽度的归一化宽度 W 与

颗粒介质厚度 L 的指数关系，并且使用了一维随机层理论导出的衰减对所得的指数进行了解释。我们还尝试观察单轴应力 P 和归一化宽度 W 之间的关系，但是尚没有得到明确的规律。

第三章 散射尾波

3.1 超声波在颗粒介质中的扩散近似

3.1.1 理论推导

波在强散射介质中的传播是一个古老的问题。Weaver R. L. 根据 RTE 推导出了超声波脉冲在多晶体中的扩散行为方程^[43]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} - D \nabla^2 I + \frac{I}{\tau_\alpha} = \delta(z) \delta(t) \quad (3-1)$$

其中 D 是扩散系数, τ_α 是描述信号强度在时域上衰减行为的特征时间, z 是圆柱坐标系中的轴向坐标。因为是超声波脉冲 (中心频率充分大、脉冲宽度充分小), 即视为时域和空间上的狄拉克函数 $\delta(z) \delta(t)$ 。

因为在实际的实验中, 我们使用的颗粒容器是圆筒形, 所以在求解强度方程时可以采用圆柱对称处理; 又因为单轴应力装置的容器壁是由厚达 10 mm 亚克力板制作的, 因此假定容器边界的声阻抗足够大, 使得声信号在这种情形下在容器壁全反射。在以上条件下, 得出的进入底部探头的透射通量^[31]为

$$J(t) = \frac{\nu_e U_0}{2L} e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta_n} \cos\left(\frac{n\pi l^*}{L}\right) e^{-\frac{D(n\pi)^2 t}{L^2}}, \quad \delta_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3-2)$$

其中 U_0 是声源能量, $D = \frac{1}{3} \nu_e l^*$ 为扩散系数, ν_e 为能量传输速度, l^* 为平均自由程, τ_α 正式名为非弹性吸收时间。在实验中, 我们用飞行时间法测定的声速 $V_{\text{T.O.F}}$ 来替代 ν_e 。质量因子 $Q = 2\pi f \tau_\alpha$ 也被引入用于描述颗粒介质的耗散性, 其中 f 是发射信号的中心频率。Jia 提出了在颗粒表面相对平滑时, 存在关系^[44]

$$Q^{-1} = \left[\frac{4G_g}{9\pi^2(2 - \nu_g)R} \left(\frac{3\pi}{4K_g} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \mu_f^{-1} P_0^{-\frac{2}{3}} u_t \quad (3-3)$$

其中 ν_g 、 K_g 、 G_g 是颗粒组成材料的泊松比、体弹性模量和剪切模量, R 是颗粒半径, μ_f 用于描述颗粒间的摩擦系数, P_0 是颗粒介质所受的应力大小, u_t 是描述 Mindlin 接触模型下的切向振幅。在受到含黏度流体润滑作用时, 还存在 $Q^{-1} = Q_{\text{fric}}^{-1} + Q_{\text{vis}}^{-1}$ 的修正关系, 由于在实验中未涉及所以在这里不再额外讨论。

3.1.2 实验验证

我们设定试探信号的激励源是频率为 68 kHz、10 VPP 的十循环方波脉冲模拟电压信号，施加单轴应力为 10.8kPa，触发间隔为 20 ms 以确保每一次声学信号响应都是独立的。直径 3 mm 的玻璃球通过点源法制备为随机密堆积，测得其厚度为 22 mm。由于发射信号的频率在超声频域内属于相对较低的成分，因此在实验时使用的是 G150 成对声学探头。

通过示波器的同步采集功能，我们可以得到源信号与响应信号的双通道时域波形。我们对所得数据的处理思路是：

1. 按照小节 2.1.2 中所介绍的方法，测定上述实验条件中、飞行时间法定义下的声速 $V_{T.O.F}$ ，并且将其作为能量传输速度的近似值 v_e ；同时计算偏置值并且对各信号进行修正；
2. 计算声源能量 U_0 。对于方波信号，其能量即为其幅值平方在时域上的积分。需要注意的是探头本身由于频响特性曲线会对该能量进行耗散，因此后续在拟合的过程中还需要额外引入系数进行修正；
3. 计算非弹性吸收时间 τ_α 。首先在时域上截取散射尾波（即需要去除频率成分相对较低的相干首波，避免其幅值影响后续的信号处理）；然后使用 `movemean()` 函数对响应信号尾波进行平滑处理，然后对其求平方并除以声阻抗 50Ω 得到时域上的功率波形。通过 `envelope()` 函数对功率波形求包络线，即得到了近似的 $J(t)$ 函数图像。在时间足够长的情况下，即有 $J(t) \propto e^{-t/\tau_\alpha}$ ，因此对其进行对数处理并求出斜率，即可得到非弹性吸收时间；
4. 拟合计算平均自由程 l^* 。由于式 (3-2) 本身是无穷级数，在实际应用时我们需要对其进行截断。在尝试拟合过程中，我们发现在 $n > 10$ 时就已经可以得到较好的曲线，在实际计算中我们取级数 $N=200$ 。由于我们已经通过其它方式得到了方程中的各参数，因此实际拟合时的自由参数只有 l^* ，从而极大地减少了拟合复杂度（如果不预先计算出参量，拟合探索过程所需要的循环数将轻易超过 Matlab 允许的循环上限）。

图 3-1 展示了按照上述步骤处理的各图像。

在本次实验中，我们计算得到了能量传输速度 $v_e = 399.27$ m/s，修正后的声源能量为 $1.3113 \times 10^{-10.5}$ J，非弹性吸收时间为 $\tau_\alpha \approx 0.179$ ms，平均自由程为 $l^* \approx 1.6$ mm。由此我们可以得出扩散系数为 $D \approx 0.21$ m²/s，质量因子为 $Q \approx 76.507$ 。

从图 3-1d 观察可知，拟合曲线与原始数据的吻合程度较好，因此从实验上证明

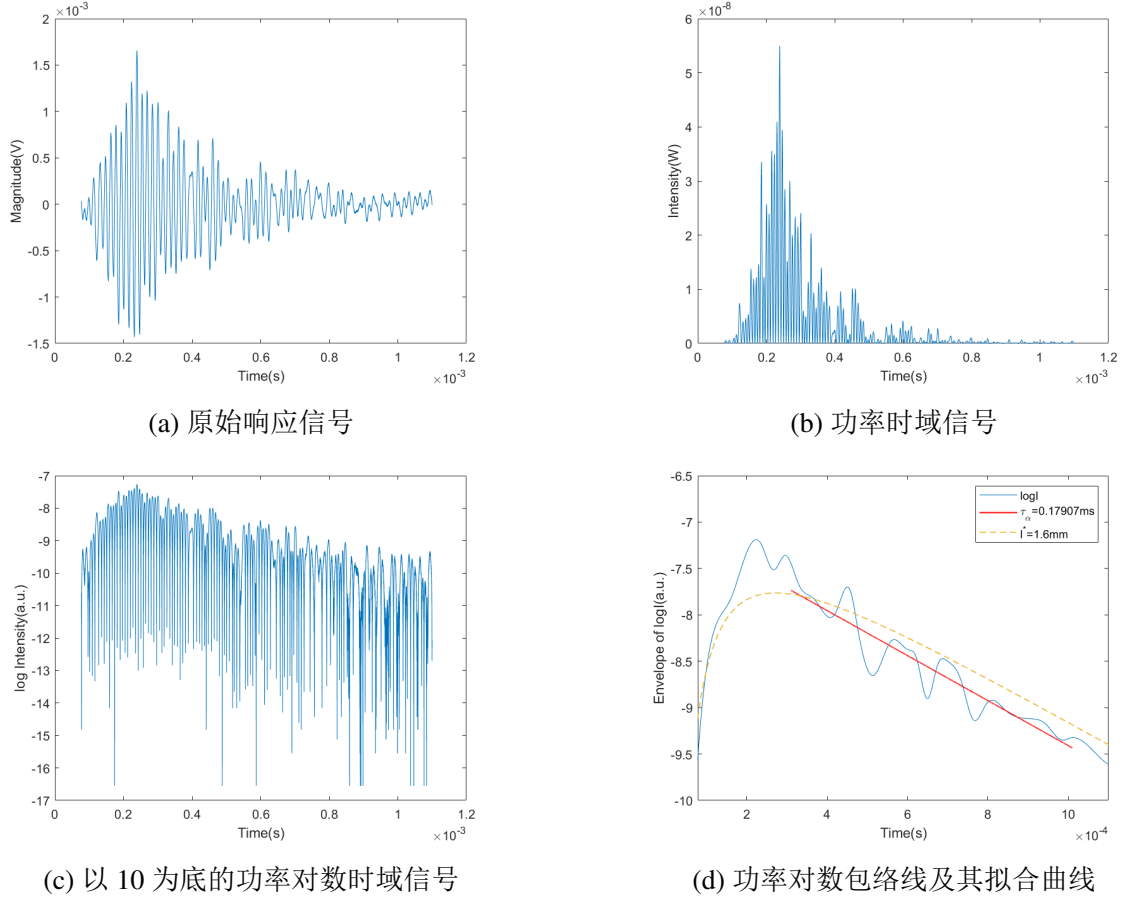


图 3-1 扩散行为近似实验中的信号处理。

了颗粒介质的散射尾波可使用来自辐射传递方程的扩散行为近似进行描述。为了进一步改善实验效果，可以尝试使用多个不同随机密堆积的系综平均信号来进行处理。

3.2 超声波在颗粒介质中的非线性

3.2.1 非线性波方程与各级谐波

在连续介质力学中，我们已经学习过描述声波传播的 Burgers 方程：

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3-4)$$

$$\delta = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{4}{3} \mu + \mu_B + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (3-5)$$

其中 μ 是介质的切变黏度， μ_B 是介质的容变黏度，这两者共同构成了介质的黏

性吸收； κ 是介质的热导率， c_v 是介质的定容热容， c_p 是介质的定压热容，这两者构成了介质的热传导吸收。两者的线性叠加构成了 Stokes-Kirchhoff 衰减公式，用于描述声波在介质中传播时的经典吸收现象。 β 是介质的非线性系数， ρ_0 和 c_0 分别是介质在平衡态下的密度和声速。

Mendousse 首个推导出专用于平面波声传播的偏微分方程。他设定具有黏度的理想气体，根据 Navier-Stokes 方程写出一维流动形式的 Lagrangian 量^[33]：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial a} \left[\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial a \partial t} \right] + \frac{\partial P}{\partial a} = 0. \quad (3-6)$$

其中， ξ 是参考于物质位置 a 的流体粒子位移量，即存在坐标关系为

$$x = a + \xi(a, t). \quad (3-7)$$

Mendousse 假定黏性吸收中由体变黏度 μ_B 和热导率 κ 引起的吸收远小于由剪切黏度 μ 所引起的从而只保留了后者，并且在黏性项中忽略了本应存在的系数 $1 + \partial \xi / \partial a$ 。考虑到流体中局域的质量守恒定律，我们可以得到平衡态下的密度 ρ_0 和流变密度 ρ 之间的关系：

$$\rho_0 = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \rho, \quad (3-8)$$

由于忽略了黏度相关的一个二阶项，总压力 P 对 $\partial \xi / \partial a$ 的级数展开化为

$$P = P_0 - \rho_0 c_0^2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial a} - \beta \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 \right], \quad (3-9)$$

所以式 (3-6) 化为下式：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \rho_0 \delta \frac{\partial^3 \xi}{\partial a^2 \partial t} - \rho_0 c_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} + 2\rho_0 c_0^2 \beta \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial a^2} = 0, \quad (3-10)$$

对于角频率为 ω 的正弦波在诸如上述方程所控制下的传播，其产生的畸变与失真可以理解为产生高次谐波的过程。因此通过级数展开求解式 (3-10)，依次得到基波、各级谐波的表达式：

$$\begin{cases} u_{1\omega}(a, t) \approx u_{\text{in}} e^{-a\alpha} \cos(ka - \omega t) \\ u_{2\omega}(a, t) \approx \frac{u_{\text{in}}^2}{8} \left(\frac{\beta\omega^2}{\alpha c_0^2} \right) e^{-2a\alpha} \cos[2(ka - \omega t)] \\ u_{3\omega}(a, t) \approx \frac{u_{\text{in}}^3}{48} \left(\frac{\beta\omega^2}{\alpha c_0^2} \right)^2 e^{-3a\alpha} \cos[3(ka - \omega t)] \end{cases} \quad (3-11)$$

其中 u_{in} 是声源振幅, a 是声波传播距离, α 是声波的衰减系数, k 是声波的波数, ω 是声波的频率。 $u_{n\omega}$ 代表 n 倍频的谐波振幅 ($n=1$ 即为基波)。我们很容易以一个简单的公式总结各谐波振幅与源振幅的关系:

$$u_{n\omega} \propto (u_{\text{in}})^n. \quad (3-12)$$

颗粒介质对于声信号的传播具有强耗散性。我们可以将振动在颗粒介质中的衰减类比于声波在具有切变黏性 μ 的流体中传播时所受的黏性吸收作用, 即使用等效黏度 μ^* 来对颗粒介质进行宏观的统计性描述。如果式 (3-12) 描述的线性关系随着声源振幅 u_{in} 逐渐增大而遭到破坏, 即说明其等效黏度已经因为声源的泵浦作用发生变化。对于水和空气这类连续介质, 在黏性力相较于弹性力很小时, 存在描述衰减 α 与声波角频率 ω 的二次关系:

$$\alpha = \alpha_\mu + \alpha_h = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \left[\frac{4}{3}\mu + \mu_B + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \propto \omega^2 \quad (3-13)$$

其中 α_μ 和 α_h 分别是描述黏性吸收和热传导吸收的衰减系数。

3.2.2 声源振幅对颗粒介质结构的影响

受振动、剪切这类外部能量激励的颗粒介质, 已经被证明其中存在着可类比于传统热力学中所存在的温度量, 即等效温度 χ 。有一种评估方法来描述外部激励的强度, 即通过重力加速度 g 来对每次激励的加速度进行重标定, 比如图 1-1 中所示的 $\Gamma > 1$ 的连续强振动实验。而具体到我们所关心的声学实验中, 通过声学探头激励的信号来对颗粒介质进行扰动, 同样可以被视为一种外部激励, 只是通过重力加速度进行归一化后的数值会非常小。在本节中, 我们尝试使用不同的声源振幅来探索颗粒介质如何在声学量级的激励下遍历可能存在的相空间。

3.2.2.1 相似性参数

引入经由归一化的交叉关联函数 (cross-relation function) $\Psi_{i,j}(\tau)$ 作为相似性参数, 以描述信号 S_i 与 S_j 的相似程度^[45]:

$$\Psi_{i,j}(\tau) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_i(t) S_j(t+\tau) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_i^2(t) dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_j^2(t) dt}}. \quad (3-14)$$

其中 τ 描述的是采集各信号之间的延迟时间。在真实的实验时，我们是通过某一采集频率 f_s 对各信号进行采样的，即得到的信号形式会是一个时域上序列的离散值 $S_i(t_n)$ ，所以实际计算时将连续积分化为离散求和形式，即为

$$\Psi_{i,j}(\tau) \equiv \frac{\sum_{n=1}^N S_i(t_n) S_j(\tau + t_n)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N S_i^2(t_n)} \sqrt{\sum_{n=1}^N S_j^2(t_n)}}. \quad (3-15)$$

该函数的定义与前文通过频散能量图求解相速度分布中所用的关联函数 $C_{i,j}$ 非常相似，区别仅在于其通过各信号平方在时域上的积分平方根进行归一化，因此最后求得的值域范围将是 $[-1, 1]$ 。如果相似性参数 $\Gamma_{i,j}$ 越接近 1，即说明信号 S_i 与 S_j 越相似，颗粒介质对于第 i 次和第 j 次的源试探信号的散射效果越接近，从而证明颗粒介质的力链结构变化越小。由于这种相似性参数对于颗粒介质内部的接触与应力结构变化极为敏感，所以低振幅超声波被视为一种非侵入式的探针：在颗粒介质经历连续外部激励时，为了察觉其内部结构是否变化，可以观察时域上相邻的响应信号之间的相似性参数是否会出现骤降。

在部分研究受环形剪切的颗粒介质中的滞滑实验中，曾提到过不同类型的滞滑事件产生的声发射信号在频域上的强度分布相似^[25]。只要我们意识到两时域信号相互做内积的结果量纲为能量，我们很容易通过能量守恒的观点将相似性参数的定义延拓到频域上。

首先我们重新证明也被称为能量定理的 Parseval 定理：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(t) \bar{S}_j(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{S}_j(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{S}_j(\omega') \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega') d\omega' d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\omega) \bar{S}_j(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3-16)$$

其中 \bar{S}_j 是时域信号 $S_j(t)$ 的共轭，而我们的探头所接收的是无相位的强度信息，因此假定两者相同。所以时域定义的相似性参数存在关系

$$\begin{aligned}
\Psi_{i,j}^t &\equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_i(t) S_j(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_i^2(t) dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_j^2(t) dt}} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_i(t) \bar{S}_j(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_i(\omega)|^2 d\omega} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_j(\omega)|^2 d\omega}} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\omega) \bar{S}_j(\omega) d\omega}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_i(\omega)|^2 d\omega} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_j(\omega)|^2 d\omega}} \\
&= \Psi_{i,j}^\omega.
\end{aligned} \tag{3-17}$$

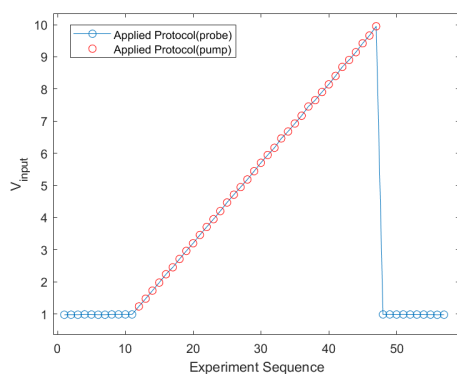
由此我们证明了时域和频域上定义的相似性参数的等价性，即 $\Psi_{i,j}^t = \Psi_{i,j}^\omega$ 。因此在后续的实验中，如果我们观察到声发射信号的频域分布曲线存在相似性，就可以使用上式来对其进行理解。

3.2.2.2 实验验证

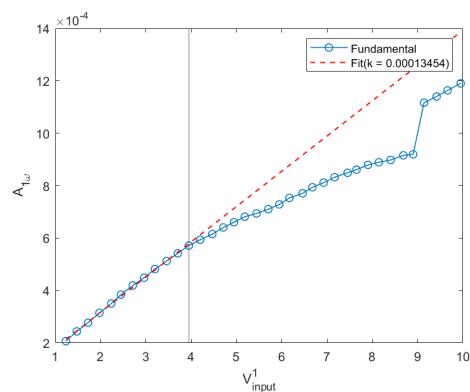
我们在应力为 38.6 kPa 的条件下，使用如图 3-2a 所示的连续激励协议来对颗粒介质发射声信号，计算声速与相似性参数与激励过程之间的关系如图 3-2b 所示。同时，我们使用带通滤波器，控制中心频率为激励信号源频率、半带宽为 1 kHz 提取声信号中各谐波分量的最大值作为其去除含时系数后的振幅，观察其与 (3-12) 的符合程度，如图 3-2c、3-2d 所示，蓝色是为了表明来自于小振幅（探测），红色则是为了表明大振幅（泵浦）。

在这里需要说明的是，在计算相似性参数时，如何确定有效信号的起始点和时域上的长度是一个需要考虑的问题。有一种在采集频率较低的情况下的方法为窗移法，即在首个信号截取某一起点和某一长度作为有效信号，随后将窗口移动间隔作为自变量（实际上就是相似性参数中的 τ ），计算各延时下的相似性参数，最后取其中得到最大值的一组作为下一次计算的起点和长度，最后得到所有信号与相邻信号的相似性参数。然而，这种方法在采集频率较高时不仅计算耗时较长，而且由于计算次数较长（一般和采样长度同量级，我们的实验中采样长度一般都是 200×10^3 ）与计算精度的问题最后会使得相似性参数几乎全部为 1，这显然是无法提供有效的分析数据的。因此在实际计算中，我们只确定共同的起始点和长度，而有效信号前的一段热噪声造成的影响是可以接受的。

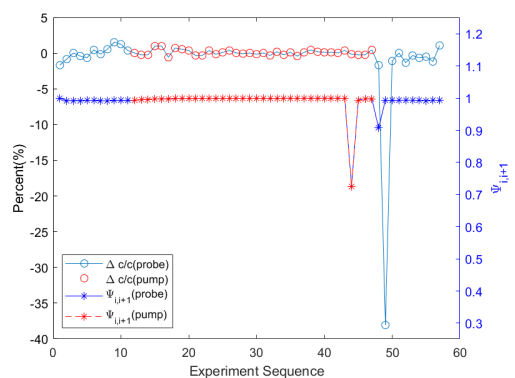
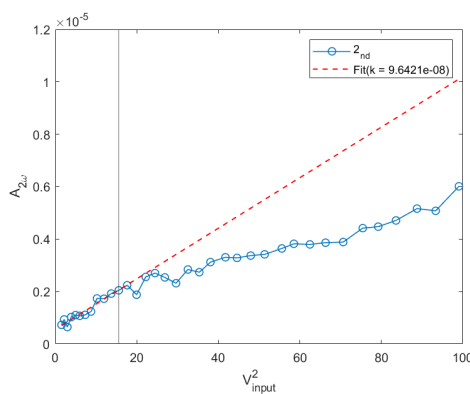
于是我们观察到了相似性参数在振幅约为 9.14 V 和在泵浦结束时的首个试探信号都出现了骤降，随后相似性参数均趋近于 1，说明颗粒介质内部结构因为外部声学



(a) 实验中激励源振幅序列



(c) 响应信号基波分量与激励源振幅线性关系的破坏

(b) 声速相对变化值 $\Delta c/c$ 和相似性参数 $\Psi_{i,i+1}$ 变化

(d) 响应信号一次谐波分量与激励源振幅平方线性关系的破坏

图 3-2 在单轴应力 $P = 38.6$ kPa、采用连续激励协议下，超声响应信号的声速、相似性参数、谐波线性分析

激励而发生了变化；声速的相对变化计算来源于小振幅时所测声速的平均值，而在逐渐激励的过程中有逐渐降低的趋势，这说明了颗粒介质的模量因为连续激励而有所降低。在小于约 3.95 V 时，基波和一次谐波都分别与激励振幅的一次和二次呈现良好的线性符合，而在大于该阈值后出现了偏离，这也能说明声学激励对于颗粒介质的衰减系数或其等效黏度造成了影响。对二次谐波 ($3 \times f$) 的分析也有过尝试，但是由于信噪比等原因效果并不理想。

3.3 本章小结

本章分别从扩散行为近似和非线性波方程对颗粒介质中的声信号散射尾波部分进行了研究。在扩散行为近似中，我们通过假定全反射的圆柱面边界条件的级数解对信号强度时域曲线拟合，从而得到了平均自由程 l^* 和非弹性吸收时间 τ_α ，从而计算得到扩散系数 D 和品质因子 Q ；在非线性波方程中，我们检验了激励源振幅和谐波振幅的线性符合关系，并且引入声速和相似性参数来辅佐表述颗粒介质内部结构是否发生变化，从而论证了颗粒介质的内部结构会因为受到声学激励而发生变化。

第四章 颗粒介质的剪切响应

4.1 引言

对于颗粒间非固结的颗粒介质，其具有一定的抗剪切作用。然而颗粒间的接触及其产生的作用力很容易因为外部剪切作用导致的颗粒重排而发生变化，因此与寻常固体的应力-应变关系存在着差异。颗粒介质内部存在着不同强度的力链，其中强力链承担了介质中绝大部分的应力成分；当强力链上的颗粒成员受到外部激励而发生相对位移时，介质的应力就可能会发生较大的变化，这也是颗粒介质的奇异力学响应来源。

在第一章中我们已经提到过，等大硬球颗粒堆积存在着两种随机堆积的体积分数极限，即随机密集堆积（RCP）与随机松散堆积（RLP），这两种堆积状态的颗粒介质对于外部剪切的响应并不相同；而在密堆积中，颗粒介质也会因为所受的剪切法向应力不同而产生不同的力学响应表象。

4.1.1 STZ 理论

Shear Transformation Zone（STZ）认为，像颗粒固体这类非晶体材料在受到剪切时，会同时出现弹性形变和塑性形变，后者则是因为颗粒间发生了不可逆的相对位移。在颗粒介质受到剪切时，我们关注其中接触结构发生变化的区域。令塑性形变量为 ε_{pl} （pl=plastic），颗粒介质中的空隙体积为 V_f （f=free，即自由体积）。假定在剪切转变区域中存在两种不同的状态，使用 + 和 - 来对其进行表述，并引入 n_{\mp} 来表示处于状态 \mp 的数密度。在上述约定下，Langer 推导出了空隙体积变化率方程^[46]：

$$\dot{V}_f = -E_1 \cdot e^{-\frac{V_1}{V_f}} + A_V |\sigma \dot{\varepsilon}_{pl}|, \quad (4-1)$$

其中 E_1 、 A_V 是常数， V_1 表示的是受剪切区域刚发生变化时的自由体积大小（也被称作临界自由体积）， σ 表示介质所受的偏应力。 ε_{pl} 定义如上，且存在关系

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = E_0 e^{-\frac{V_0}{V_f}} [\Lambda \sinh(\sigma) - \Delta \cosh(\sigma)], \quad (4-2)$$

$$\Lambda = \frac{n_- + n_+}{n_{\infty}}, \quad \Delta = \frac{n_- - n_+}{n_{\infty}}. \quad (4-3)$$

其中 n_{∞} 是 $(n_- + n_+)$ 在稳定平衡态下的值。对于 Λ 和 Δ ，其行为被描述为

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\dot{\varepsilon}_{pl} - \gamma |\sigma \dot{\varepsilon}_{pl}| \Lambda), \quad (4-4)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} |\sigma \dot{\varepsilon}_{pl}| (1 - \Lambda) \quad (4-5)$$

使用 STZ 理论，可以描述颗粒介质在受剪切时出现的蠕变和滞滑现象。

4.2 实验装置

目前剪切装置和声学装置的耦合尚不成熟，因此只简要介绍有关于剪切装置的部分。图 4-1 展示了剪切实验中的各部件。

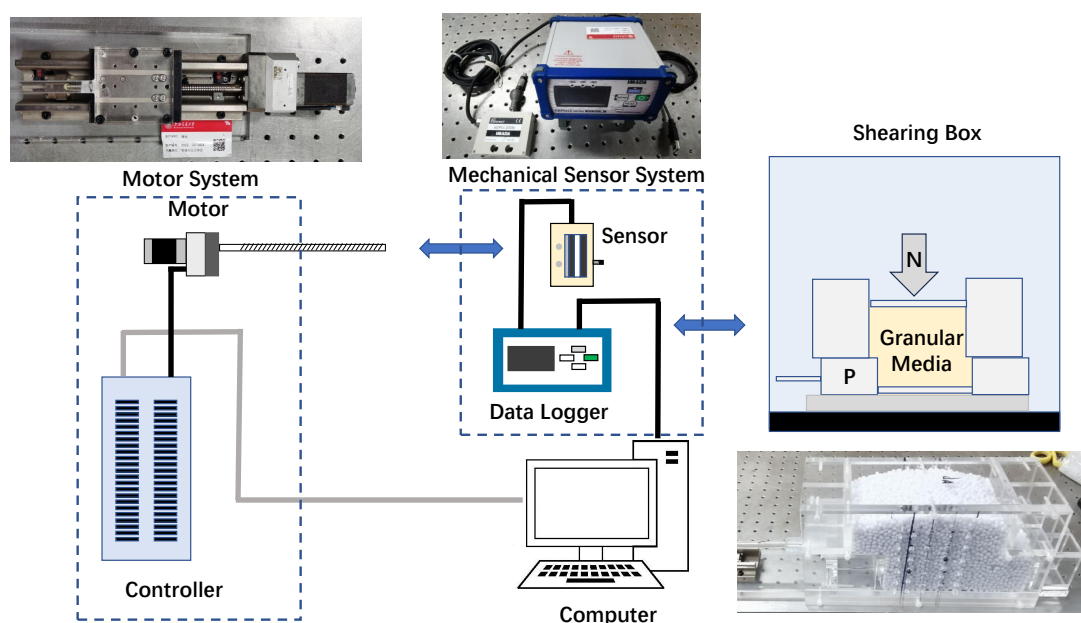


图 4-1 剪切装置与数据收集系统示意图

接下来我们来介绍各部件的主要功能：

1. 骏河步进电机。通过连杆与剪切盒的活塞部分固定连接，从而推动其进行对颗粒介质的剪切。电机通过 D214-2-2ek 信号线连接至控制器，控制器通过 USB 信道连接至计算机。计算机通过 DSCONTROL-WIN 软件来对电机进行控制，可以控制电机的运动方式为连续/步进，电机旋转方向和速度等参数。
2. IMADA 力学传感系统。由 Sensor 和 Data Logger 两部分组成，Sensor 通过信号线将感受的力大小传递至 Data Logger；后者通过 USB 信道将数据实时传递至

计算机,通过 Force Recorder 软件读取数据,力学传感器的最高采集频率为 2000 Hz,力的分辨率则是 0.1 N。在所需数据记录完毕后,即可通过.csv 格式导出以供数据分析。

3. 剪切盒。材质和单轴应力容器所使用的材质一样,是由亚克力板制作的,原本用于 X 光辐照探测剪切带。在未剪切时,其内部容积为 $18 \times 10 \times 12 \text{ cm}^3$ 的立方体,受电机控制的横截面积为 $10 \times 6 \text{ cm}^2$ 的活塞带动固连的底板进行推动,而所推动的活塞截面的高度小于颗粒介质的高度而对颗粒介质有剪切作用。由于剪切盒的活塞在运动方向上存在长度上限,为了避免颗粒漏出剪切盒的剪切应变也存在上限。剪切盒的封顶板可以拆下而替换为施加应力的活塞板,从而检测不同堆积方式的颗粒介质的力学响应机制。

4.3 应力-应变曲线

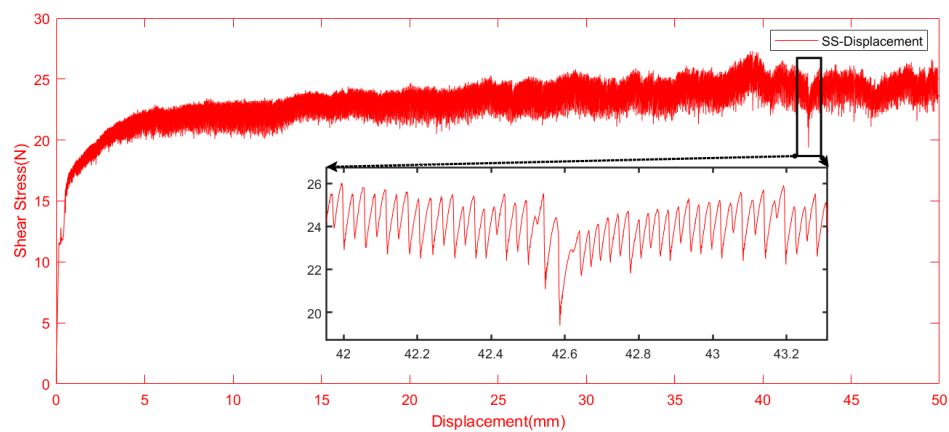
4.3.1 RCP 与 RLP 的剪切响应差异

我们使用同一剪切装置,在未施加应力与施加应力 $P = 3.97 \text{ kPa}$ 下分别测定 6 mm ABS 球所组成的颗粒介质的应力-应变曲线。为了充分展现颗粒介质的滞滑特性,我们在实验时设定的剪切速率极低;在 DSCONTROL-WIN 软件上设定的剪切速率为 20 pps,对应于现实世界的剪切速度约为 $60 \sim 70 \mu\text{m/s}$ 。图 4-2 展示了以上两种堆积在相同剪切速率下的剪切应力-应变曲线,其中定义域分别为剪切位移和时间。

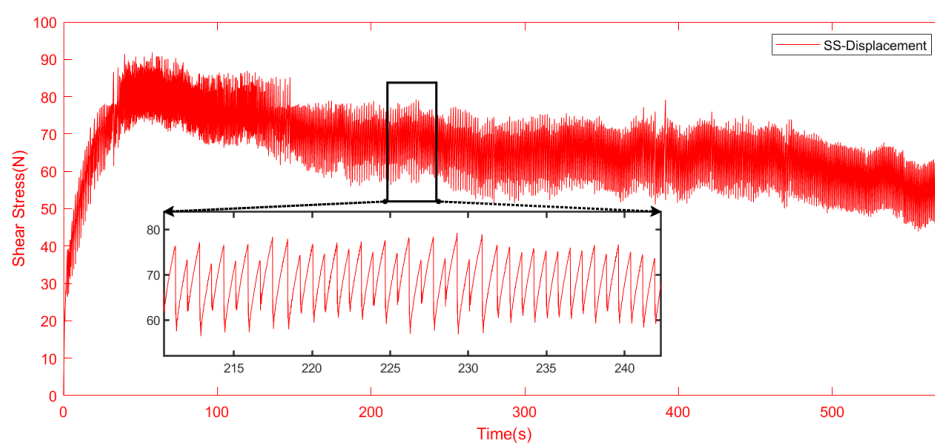
4.3.2 蠕变与滞滑

在 RCP 中得到的应力曲线更接近于传统的固体材料,即分为弹性区、屈服区 (yielding state) 和临界区 (critical state)。

- 弹性区。在剪切位移较小时,大部分颗粒位置几乎不变,而只是存在着较小程度的挤压和摩擦,这种接近线性的应力-应变关系和弹性行为相似,即产生蠕变现象;
- 屈服区。当剪切位移增大到一定程度时,即颗粒间的相互摩擦开始接近静摩擦阈值,颗粒开始产生相对滑动、重排,并且这种过程是不可逆的。应力的最高点即为颗粒介质的屈服强度。从放大图像观察可知,出现了剪切应力的反复积累提升、骤降的现象,这种过程伴随着频繁的力链断裂和重构,即滞滑。
- 临界区。在剪切位移进一步增大时,此时颗粒介质展现出可被类比于固-液相变的性质,即颗粒介质在外部剪切的激励下出现了流动的现象。



(a) 随机松散堆积的剪切应力-应变曲线



(b) 随机密集堆积的剪切应力时域曲线

图 4-2 RLP 与 RCP 在剪切速率为 20 pps 下的力学响应曲线

我们可以按照应力降（Shear Stress Drop, SSD）的大小来对滞滑事件进行粗分类。类比于环形剪切相关实验中的方法，我们按照应力降的幅值将滞滑事件分为三类：微滞滑（micro-, $SSD < 0.2 \text{ N}$ ）、小滞滑（minor-, $0.2 \text{ N} < SSD < 0.4 \text{ N}$ ）和主滞滑（major-, 在地震学也被称作 failure, $SSD > 0.4 \text{ N}$ ）。我们统计了微滞滑事件的数量以及其在最近主滞滑事件前的时间间隔，从而得到了通过微滞滑事件计数来预测可能的滞滑失效事件的事件。我们对微滞滑的发生数量进行了对数处理后绘制了图像 4-3。其解读方式是，在发生了一次主滞滑事件后，对微滞滑进行计数，若已经发生了 N 次，则下一次主滞滑可能发生的时间间隔为 $T(\log(N)) \text{ s}$ 。

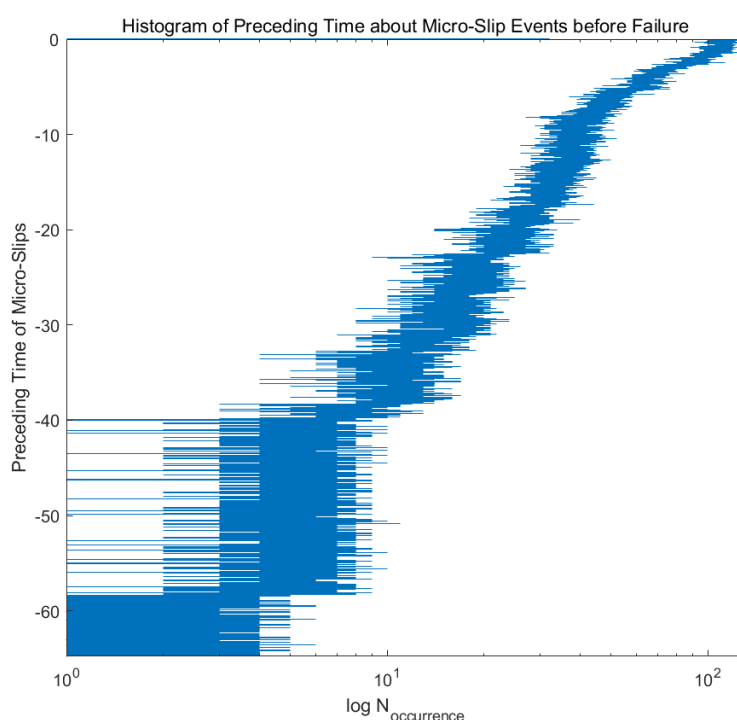


图 4-3 微滞滑数量及其最近邻失效前时间间隔的直方图

可以观察到其大致从原点引出了一条直线，而在原点附近出现了拐点，推测是因为力学传感器本身会出现一定的分辨率程度的波动（ $\sim 0.1 \text{ N}$ ），使得微滞滑的计数偏多。在未来引入多通道采集卡，从而通过声学手段辅助分析剪切过程中的滞滑事件，将有助于得到更理想的图像结果。

4.4 本章小结

本章检测了在同一剪切速率下，无法向应力的 RLP 与有法向应力的 RCP 的应力应变的区别，并且通过统计的方法对颗粒介质在受剪切过程中的滞滑事件进行现象学分析，从而得到了预测主滞滑（即滞滑失效）的可能时间，有助于应用在地震学领域进行地震预测。

第五章 全文总结

颗粒介质中的超声信号一般可分为相干首波和散射尾波，小振幅时具有探测作用，有限振幅时则具有泵浦作用。对于相干波部分，我们通过飞行时间法和频散能量图法测定了颗粒介质中的声速，并且检查了声速和颗粒介质应力之间的指数关系，分析了其与等效介质理论之间差异的可能原因；观察到了首波的展宽现象，通过归一化宽度对其进行表述，其在不同厚度的颗粒介质中的值与通过一维随机层理论导出的预测符合较好。对散射波部分，我们通过截断级数解拟合功率在时域上的曲线，从而计算得到平均自由程 l^* 和品质因子 Q ，检验了扩散行为近似导出的辐射传递方程的符合较好；通过增大激励信号的幅值，检验了颗粒介质中的非线性波激发现象，并且通过相似性参数 $\Gamma_{i,i+1}$ 和声速观察到了声波对于颗粒介质产生的不可逆泵浦作用。在对颗粒介质进行剪切时，观察到了 RLP 和 RCP 的不同应力-应变曲线，并且通过滞滑事件计数进行了滞滑失效统计预测的现象学分析。而利用相似性参数检测颗粒介质中的剪切带、监测受剪切过程的声发射事件以及将声学方法耦合至目前课题组已较为成熟的 CT 成像研究等有待后续研究。

参考文献

- [1] JAEGER H M, NAGEL S R, BEHRINGER R P. Granular solids, liquids, and gases[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 1996, 68: 1259-1273 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.1259>. DOI: 10.1103/RevModPhys.68.1259.
- [2] DURAN J. Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials[M/OL]. Springer New York, 2000 [2024-04-30]. <https://books.google.co.jp/books?id=u8lRAAAAMAAJ>.
- [3] YIN K, VASILESCU R. Effect of thermal cycles on volumetric and shear behavior of sand - concrete interface[J/OL]. *Geomechanics for Energy and the Environment*, 2023, 36: 100503 [2024-04-30]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352380823000722>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gete.2023.100503>.
- [4] ONODA G Y, LINIGER E G. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64: 2727-2730 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.2727>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.2727.
- [5] PARISI G, ZAMPONI F. Mean-field theory of hard sphere glasses and jamming[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 2010, 82: 789-845 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.82.789>. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.789.
- [6] KADANOFF L P. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 1999, 71: 435-444 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.435>. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.435.
- [7] Van den WILDENBERG S, YANG Y, JIA X. Probing the effect of particle shape on the rigidity of jammed granular solids with sound speed measurements[J/OL]. *Granular Matter*, 2015, 17(4): 419-426 [2023-11-30]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10035-015-0575-z>. DOI: 10.1007/s10035-015-0575-z.
- [8] 邢义. 椭圆颗粒随机堆积的实验研究[D]. 上海交通大学, 2018.
- [9] LI Z, ZENG Z, XING Y, et al. Microscopic structure and dynamics study of granular segregation mechanism by cyclic shear[J/OL]. *Science Advances*, 2021, 7(8): eabe8737. eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.abe8737> [2024-04-30]. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/sciadv.abe8737>. DOI: 10.1126/sciadv.abe8737.

- [10] De GENNES P G. Granular matter: a tentative view[J/OL]. *Rev. Mod. Phys.*, 1999, 71: S374-S382 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.S374>. DOI: 10.1103/RevModPhys.71.S374.
- [11] So Much More to Know ...[J/OL]. *Science*, 2005, 309(5731): 78-102. eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.309.5731.78b> [2024-04-30]. <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.309.5731.78b>. DOI: 10.1126/science.309.5731.78b.
- [12] SANDERS S. 125 questions: Exploration and Discovery[J/OL]. Science/AAAS Custom Publishing Office: Washington, DC, USA, 2021 [2024-04-30]. <https://www.science.org/content/resource/125-questions-exploration-and-discovery>.
- [13] ABED ZADEH A, BARÉS J, BRZINSKI T A, et al. Enlightening force chains: a review of photoelasticity in granular matter[J/OL]. *Granular Matter*, 2019, 21(4): 83 [2024-04-03]. <http://link.springer.com/10.1007/s10035-019-0942-2>. DOI: 10.1007/s10035-019-0942-2.
- [14] DESAILLY R. Non-Destructive 3D Photoelasticity[M/OL]// SOARES O D D. *Optical Metrology: Coherent and Incoherent Optics for Metrology, Sensing and Control in Science, Industry and Biomedicine*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987: 724-747 [2024-04-30]. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3609-6_46. DOI: 10.1007/978-94-009-3609-6_46.
- [15] RICHARD P, PHILIPPE P, BARBE F, et al. Analysis by x-ray microtomography of a granular packing undergoing compaction[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2003, 68: 020301 [2024-04-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.68.020301>. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.020301.
- [16] 许家兆. 利用 CT 成像研究颗粒物质休止角的内部结构[D]. 上海交通大学, 2021.
- [17] WANG Y, LIU X, IM K S, et al. Ultrafast X-ray study of dense-liquid-jet flow dynamics using structure-tracking velocimetry[J]. *Nature Physics*, 2008, 4(4): 305-309.
- [18] CLARKE D A, HOGENDOORN W, PENN A, et al. Magnetic resonance imaging in granular flows: An overview of recent advances[J/OL]. *Particuology*, 2023 [2024-05-01]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1674200123001979>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.partic.2023.08.007>.

- [19] JIA X, BRUNET T, LAURENT J. Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization: Slipping, compaction, and aging[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2011, 84: 020301 [2023-11-16]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.020301>. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.020301.
- [20] LIU C H, NAGEL S R. Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity[J/OL]. *Phys. Rev. B*, 1993, 48: 15646-15650 [2023-12-30]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.48.15646>. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.15646.
- [21] JIA X, CAROLI C, VELICKY B. Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media[J/OL]. *Physical Review Letters*, 1999, 82: 1863-1866 [2023-11-30]. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55967802>.
- [22] BRUNET T, JIA X, JOHNSON P A. Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media[J/OL]. *Geophysical Research Letters*, 2008, 35(19). eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2008GL035264> [2023-11-20]. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2008GL035264>. DOI: <https://doi.org/10.1029/2008GL035264>.
- [23] BRZINSKI T A, DANIELS K E. Sounds of Failure: Passive Acoustic Measurements of Excited Vibrational Modes[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, 120: 218003 [2024-01-15]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.218003>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.218003.
- [24] GOU H X, HU W, XU Q, et al. Stick-Slip Nucleation and Failure in Uniform Glass Beads Detected by Acoustic Emissions in Ring-Shear Experiments: Implications for Identifying the Acoustic Emissions of Earthquake Foreshocks[J/OL]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2023, 128(8): e2023JB026612. eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2023JB026612> [2023-10-30]. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2023JB026612>. DOI: <https://doi.org/10.1029/2023JB026612>.
- [25] HU W, GE Y, XU Q, et al. High time-resolved studies of stick – slip show similar dilatancy to fast and slow earthquakes[J/OL]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2023, 120(47): e2305134120. eprint: <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.2305134120> [2023-10-31]. <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.2305134120>. DOI: 10.1073/pnas.2305134120.

- [26] KHIDAS Y, JIA X. Probing the shear-band formation in granular media with sound waves[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2012, 85: 051302 [2024-01-15]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.051302>. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.051302.
- [27] EDWARDS S, OAKESHOTT R. Theory of powders[J/OL]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1989, 157(3): 1080-1090 [2023-10-30]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437189900344>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(89\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0378-4371(89)90034-4).
- [28] ZENG Z, ZHANG S, ZHENG X, et al. Equivalence of Fluctuation-Dissipation and Edwards' Temperature in Cyclically Sheared Granular Systems[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2022, 129: 228004 [2024-05-01]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.129.228004>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.228004.
- [29] MCCALL K R. Theoretical study of nonlinear elastic wave propagation[J/OL]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1994, 99(B2): 2591-2600. eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/93JB02974> [2023-11-21]. <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/93JB02974>. DOI: <https://doi.org/10.1029/93JB02974>.
- [30] WALTON K. The effective elastic moduli of a random packing of spheres[J/OL]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1987, 35(2): 213-226 [2024-05-02]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509687900366>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(87\)90036-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(87)90036-6).
- [31] JIA X. Codalike Multiple Scattering of Elastic Waves in Dense Granular Media[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93: 154303 [2023-10-29]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.154303>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.154303.
- [32] ZHOU H, JIA X, FU L Y, et al. Monte Carlo Simulations of Ultrasound Scattering and Absorption in Finite-Size Heterogeneous Materials[J/OL]. *Phys. Rev. Appl.*, 2021, 16: 034009 [2023-10-29]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.16.034009>. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.034009.
- [33] HAMILTON M F, BLACKSTOCK D T. *Nonlinear acoustics*[M]. San Diego, CA: San Diego, CA : Academic Press, 1998.

- [34] LÉOPOLDÈS J, JIA X, TOURIN A, et al. Triggering granular avalanches with ultrasound[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2020, 102: 042901 [2023-11-13]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.042901>. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.042901.
- [35] JOHNSON P A, JIA X. Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering[J/OL]. *Nature*, 2005, 437(7060): 871-874 [2023-12-15]. <http://dx.doi.org/10.1038/nature04015>. DOI: 10.1038/nature04015.
- [36] ZHAO H, ZHANG Y. CWT-Based Method for Extracting Seismic Velocity Dispersion[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2022, 19: 1-5. DOI: 10.1109/LGRS.2021.3056610.
- [37] SOMFAI E, ROUX J N, SNOEIJER J H, et al. Elastic wave propagation in confined granular systems[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2005, 72: 021301 [2023-11-25]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.021301>. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.021301.
- [38] 周志刚. 颗粒固体的力学响应和声波传播的研究[D]. 中国科学院物理研究所, 2017.
- [39] CHENG X, XIAO S, CAO A S, et al. A Review and Analysis of Granular Shear Experiments under Low Effective Stress Conditions[J]. *Granular Matter*, 2019, 21(4): 104 [2024-04-03]. DOI: 10.1007/s10035-019-0955-x.
- [40] LANGLOIS V, JIA X. Sound pulse broadening in stressed granular media[J/OL]. *Phys. Rev. E*, 2015, 91: 022205 [2023-11-10]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.022205>. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022205.
- [41] FOUQUE J P. Wave Propagation and Time Reversal in Randomly Layered Media[M]. New York: Springer, 2007.
- [42] SPERL M. Experiments on Corn Pressure in Silo Cells – Translation and Comment of Janssen’s Paper from 1895[J]. *Granular Matter*, 2006, 8(2): 59-65 [2024-04-19]. DOI: 10.1007/s10035-005-0224-z.
- [43] WEAVER R. Diffusivity of ultrasound in polycrystals[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1990, 38(1): 55-86. DOI: 10.1016/0022-5096(90)90021-U.
- [44] BRUNET T, JIA X, MILLS P. Mechanisms for Acoustic Absorption in Dry and Weakly Wet Granular Media[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, 101: 138001 [2023-11-13]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.138001>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.138001.

-
- [45] GILLES B, COSTE C. Low-Frequency Behavior of Beads Constrained on a Lattice[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 174302 [2023-11-25]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.174302>. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.174302.
- [46] LANGER J S. Microstructural shear localization in plastic deformation of amorphous solids[J/OL]. Phys. Rev. E, 2001, 64: 011504 [2024-03-25]. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.011504>. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.011504.

致 谢

首先我要感谢我的父母。虽然他们对于我的专业选择和未来职业规划并不理解，但是他们对于我的物质与精神上的支持使我能够完成四年间在物理领域的自由学习。

其次我要感谢我的导师。颗粒介质声学并非课题组内的主流研究方向，但是王老师循序渐进地引导我进行了更深层次的学习和实验，使我逐渐掌握了设备和数据处理的能力，并且对于具体项目的要求较为宽松，鼓励我自由地学习目前颗粒介质中已有的声学研究方法。

然后我要感谢组内的所有学长学姐们。许家兆是我颗粒物理的引路人；王鑫、罗宇煊、罗茹丹、徐梓航帮助我熟悉实验室内的仪器设备；曾智坤、邢义、袁后非等高年级博士则是为我的实验提供了很多批判性意见，引导我进行更深层次的思考；还有许多限于篇幅未提及名字的同学，他们对我研究途中的帮助同样重要。

最后我要感谢学院的老师和同学。作为专业的后进者，老师和同学的帮助使我受益匪浅，见贤思齐使我能够不断进步。

ULTRASONIC PROPAGATION IN GRANULAR MEDIA

Granular media are common strongly dissipative non-equilibrium systems with rich physical properties, such as discrete, many-body, and sensitive to outside excitation. CT imaging, MRI, and other modalities, although mature in granular media research, are not so good at dealing with dynamic problems, which can be compensated by the highly sensitive, non-destructive nature of acoustic method. Starting from familiarizing with the acoustic research methods in granular media, this thesis paper studies the characteristics of ultrasonic waves propagation in granular media, and additionally studies the shear response properties.

Ultrasonic detection techniques can be roughly categorized into two groups based on their detection ideas: 1. Active probing. Ultrasonic active probing has the advantages of being non-destructive and highly sensitive; granular materials in real world are often optically opaque or strongly light-scattering, which makes small amplitude ultrasonic waves a unique probe in the study of granular matter. The analysis of acoustic signals after propagation through granular media in terms of spectrum, waveform, speed of sound, attenuation, similarity parameters, etc., helps to study the configurational/stress characteristics inside the granular media; 2. Passive probing. When applying external excitation like shearing or tapping to granular media, it will generate stress-strain curves, which are macroscopic events accompanied by mesoscopic processes such as internal particle rearrangement, collision, and friction. These mechanical processes will excite the vibration of the grains, that is, emit acoustic signals carrying mesoscopic process information. This vibration event is called acoustic emission (AE). By analyzing the spectrum, energy, waveform, vibration mode density and other characteristics of the AE signal, it is possible to study the characteristic processes such as creeping and stick-slip events when the granular medium is applied stress.

Based on the amplitude and effective wavelength of the ultrasound waves, it is possible to roughly classify the way acoustic studies are performed in granular media. When the effective wavelength is much larger than the grain size, the concern at this point is coherent elastic waves in the granular medium. Since the mechanical response of the granular medium at this point is analogous to that of an ordinary solid, the effective medium theory uses affine approximation, mean field approximation, etc. to treat it as an effective continuous medium. The concern is usually the relationship between the transverse and longitudinal wave veloc-

ities V_P , V_S and the elastic moduli K and G of the effective medium; The propagation of acoustic waves in granular media exhibits strong multiple scattering characteristics when the effective wavelength is of similar order of magnitude to the grain size. The dissipative nature of the grain contact points makes the attenuation absorption of acoustic waves in granular media greatly enhanced, so researchers have proposed models such as diffusive behavior approximation and nonlinear wave equations to study the granular media. In these models, physical quantities such as the quality factor Q and the mean free path l^* are used to study the dissipation of granular media due to factors such as contact points. At small amplitudes, ultrasound is used as a probe of the internal stress structure of the granular medium; at larger amplitudes (name finite-amplitude in acoustics), ultrasound waves are used as an externally excitation energy source. The typical acoustic signal in a granular medium can be regarded as having two components: a coherent elastic wave part and a multiple scattering tail wave part. The coherent wave is formed by the self-averaging of complex force chains inside the granular medium and is therefore insensitive to the stress and contact configurations, whereas the scattered wave is very sensitive to the contact networks, which is the exact opposite of what the coherent wave behaves.

Nyquist-Shannon sampling theorem states that when sampling a signal, the sampling frequency must be greater than twice the highest frequency of the signal at least in order to reconstruct the original signal; if no amplitude distortion is required, the sampling frequency needs to be even higher. Commonly used acoustic cables are 50 Ω impedance RF coaxial cables with a transmission bandwidth of up to 1 to 20 MHz, which ensures that acoustic signals (<1 MHz) in the frequency range of interest are sampled without distortion.

In order to study the ultrasonic propagation characteristics of granular media, we built a uniaxial stress vessel acoustic system, which consists of the following components: 1. Tektronix Arbitrary Function Generator AFG31021; 2. Tektronix TBS2204B oscilloscope; 3. ATA-101B Power Amplifier; 4. Qing Cheng Acoustic Emission G150 and W800 acoustic probes (paired); 5. Single-axis stress cylindrical packagings.

In general the acoustic pressure $p(t)$ acting on the receiver surface is not equal to the acoustic pressure of the incident wave $p_i(t)$ due to the acoustic impedance $\tilde{Z}_S(\omega)$ inherent in the hard ceramic circular surface of the probe. In the experiment, since we use a pair of probes in the same operating frequency domain, face-to-face contact can simply be regarded

as the acoustic wave undergoing the same acoustic impedance process twice, and it is assumed that the piezoelectric effect produced by the amplitude of the analog voltage signal used in the experimental operating range satisfies linearity. In order to measure the acoustic impedance of the probe, we can determine the amplitude-frequency characteristic curve of the acoustic probe by exciting the probe using a continuous sinusoidal voltage signal at a same amplitude and interpreting it as a forced damped vibration process. This curve can then be used in subsequent experiments to correct the response signal collected in the experiment. It should be noted that the acoustic impedance coefficients themselves are complex numbers, i.e., the probe itself has a phase effect on the response signal, but how to accurately determine this phase difference and interpolate it effectively is actually a difficult problem. We used the steady-state assumption in the determination of the acoustic impedance coefficients, while in the actual experiments the response may be accompanied by an overdamped forced vibration component due to the large scale of the relaxation time, so in the processing of the experimental data, the time/phase dependent experiments are not corrected as described above, and the raw signals are used directly for the analysis.

For coherent elastic waves, this paper discusses how to determine the speed of sound using the time-of-flight and dispersive energy map methods and compares them with the conventional time-difference method. A well-defined wave velocity should satisfy the similarity of results measured at different thicknesses, so that we can follow it to determine the optimal signal reference point when using the time-of-flight method to determine the speed of sound. The idea of the algorithm to identify the signal to get the arrival time under each definition is: 1. Signal smoothing. Since the sampling frequency of the oscilloscope is usually very high, and there is a certain amount of thermal noise that interferes with the signal, we use the linear weighted smoothing of the signal with the `movmean()` function provided by Matlab; 2. Identify the arrival time of the first peak of the source signal. Due to the problems of the hardware itself, there will still be a certain amount of bias(or called "off-set" value) in the source and the response signal, which will affect the identification of the wavefront position of the signal; 3. Calculate the bias value of the source signal. Take 1/80 of the amplitude of the first peak as its wavefront definition, and find its corresponding moment t_O as the absolute time origin through the `find()` function, which is approximated as the emission moment of the source signal. Take the average value of the signal before the emission moment of

the recorded source signal as the bias value of the source signal, and subtract the bias value from the source signal as a correction; 4. Identify the arrival time of the first peak of the response signal. From this step on, it is necessary to control the minimum half-width of the peak ("MinPeakWidth") and the noise threshold ("MinPeakProminence") in the findpeaks() function of the peak-finding algorithm, and to filter out the interference peaks in the response signal that are identified before the wavefront time of the source signal; 5. Identify the wavefront arrival time of the response signal. Set 1/10 of the amplitude of the first peak of the response signal as its wavefront amplitude, and use the find() function to find the wavefront time in the range after the wavefront of the source signal and before the first peak time of the response signal. The 1/10 used here needs to match the signal-to-noise ratio of the response signal. If the signal-to-noise ratio is too low, consider increasing this ratio, and vice versa; 6. Identify the first zero-crossing time of the response signal. After the bias correction is completed, find the first zero-crossing point after the first peak time of the response signal. The accuracy of the wavefront and the first zero-crossing identification is highly correlated with the accuracy of the first peak identification of the response signal. If the signal-to-noise ratio of the first peak is high enough, the above steps can be ensured to be accurate.

This thesis paper explores the differences in the speed of sound defined by the time-of-flight method measured when the wavefront arrival time, the first peak arrival time, and the time of the first zero crossing of the response signal are used as the signal reference point, concludes that the first peak arrival time is the best reference signal point, and also summarizes the sound broadening phenomenon that occurs in the first peak as the propagation distance increases. Comparisons were also made between the speed of sound determined using the dispersive energy map method and the time-difference method with the time-of-flight one. The speed of sound defined by the time-of-flight method at each reference point approaches the speed of sound defined by the respective time-difference method V_L as the propagation distance L increases, with the speed of sound defined by the wave arrival time t_1 being the most stable over distance. Thus for sufficiently large propagation distances L , we can use the time-of-flight method instead of the time-difference method for engineering sound velocity measurements (since the time-difference method requires changing the distance between the probes, and there are experiments that do not allow this to be changed, e.g., reversibility studies related to the granular packing structure itself), which again is best

defined in terms of the wave arrival time t_1 .

Effective medium theory assumes that the granular medium is geometrically and statistically isotropic, that the particles are uniformly coordinated (contact points are uniformly distributed on the sphere), and that the granular medium is sufficiently large and contains a sufficient number of particles. We have examined the exponential relationship between the speed of sound and the uniaxial stress on the medium to be $1/8$ and compared it with the prediction of $1/6$ from the effective medium theory and analyzed the possible error sources:

1. The real granular medium is heterogeneous; EMT tries to make the medium statistically isotropic by increasing the scale and grain number of granular systems, but the Reduced Thickness of the granular medium in our experiments is not very high at L/d , which is about 7.33; if we were to do so in our experiments, the small-amplitude acoustic wave used as a probe would be drastically attenuated due to the enhanced dissipation of the granular medium due to the increase in scale, resulting in a rapid decrease in the signal-to-noise ratio of the response signal. If this were to be done experimentally, the small-amplitude acoustic waves used as probes would be violently attenuated by the enhanced dissipative properties of the granular medium due to the increased scale, causing the signal-to-noise ratio of the response signal to decrease rapidly.
2. Contacts of particles in a granular medium are not necessarily uniformly distributed on the surface; it has been demonstrated experimentally and computationally that the average number of upper and lower contacts for a tracer particle with $D = 12\text{mm}$ is 8.41 and 6.56, respectively, for a tracer particle subjected to cyclic shear by rotational X-ray scanning modeling.
3. The effective stress is too low. Using standard atmospheric pressure to define effective stress, it is found that in our experiments, the effective stress of the granular medium is not high enough (sometimes even negative); and in successful experiments that have replicated the predictions of EMT, the applied stress is often on the order of MPa. Since the propagation of sound signals can be roughly understood as the transfer of vibrations along force chains within the granular medium, a sufficiently large stress helps to make the contact forces of the granular medium more effective.

In order to explore the broadening phenomenon, the normalized width W is used to describe it and it is found that its exponential relationship with the ultrasonic propagation distance L in the granular medium is in good agreement with the results derived from the one-dimensional random layer theory. There are two possible sources of error: 1. The selection

of the wavefront arrival time is not absolute. Since we determine t_0 through $S(t_0) = A_1 \cdot k$ ($k \in (0, 0.1]$), the specific value of k will affect the selection of t_0 , and thus affect the determination of the normalized width W ; and as the propagation distance increases, the signal-to-noise ratio of the response signal will decrease sharply due to the attenuation caused by the absorption and dissipation of the granular medium, and it is not easy to define a common feasible k for the response signal propagated through any distance; 2. The $n = 2$ in the theoretical derivation is for the case of one-dimensional random layered media. Although we have taken into account both the dispersion relationship and the attenuation, and the experimental mode of ultrasonic wave propagation tends to be in the single z -axis direction in cylindrical coordinates, all this does not change the fact that "the actual granular medium is still a three-dimensional system", so the deviation of $-0.448 \sim -1/2$ is still within the range of understanding.

For the scattering tail, this paper explores the diffusive behavior approximation derived from the radiative transfer equation and attempts to use the nonlinear wave equation to characterize the ultrasonic tail in granular media. And we find that it is in good agreement with the measured intensity profile, and the mean free range l^* and inelastic absorption time τ_α are calculated by fitting. Our general approach to the idea is: 1. Determine the speed of sound defined by the time-of-flight method as an approximate value of the energy transfer speed as stated in the previous paragraph, and calculate the bias value of the signal and correct it; 2. Calculate the source energy. For a square wave signal, its energy is the square of its amplitude integrated in the time domain. It should be noted that the probe itself dissipates the energy due to the frequency response curve, so an additional coefficient is needed for correction in the subsequent fitting process; 3. Calculate the inelastic absorption time τ_α . First, the scattering tail wave is truncated in the time domain (i.e., the coherent first wave with relatively low frequency components is removed to avoid its amplitude affecting the subsequent signal processing); then the response tail wave is smoothed using the movemean() function, and then squared and divided by the acoustic impedance 50Ω to obtain the power waveform in the time domain. The envelope() function is used to obtain the approximate $J(t)$ function image by taking the envelope of the power waveform. In the case of a sufficiently long time, $J(t) \propto e^{-t/\tau_\alpha}$, so by taking the logarithm and calculating the slope, the inelastic absorption time can be obtained; 4. Fit and calculate the mean free range l^* . Since the solution itself is an

infinite series, it needs to be truncated in practical applications. In the fitting process, we find that a good curve can be obtained when $n > 10$, and in actual calculations we take $N=200$. Since we have already obtained the various parameters in the equation by other means, the actual free parameter in the fitting is only l^* , which greatly reduces the complexity of the fitting (if the parameters are not calculated in advance, the number of loops required for the fitting exploration process will easily exceed the loop limit allowed in Matlab).

The relationship between the amplitude and the nonlinearity of the granular medium is investigated, the normalized cross-correlation function of the two signals is introduced as a similarity parameter to compare whether the internal stress structure of the granular medium has changed or not, and its generalization in the frequency domain is demonstrated to be equivalent to the definition in the time domain using Parseval's theorem. The granular medium is excited by a continuous excitation protocol, and it is found that the structure changes due to pumping when the amplitude exceeds a certain value, and a similarity parameter is introduced to describe it; the response signal is extracted by a bandpass filter to observe whether the corresponding power law of the response signal harmonics continues to hold with the source amplitude. It is observed that the similarity parameter drops sharply at an amplitude of about 9.14 V and at the first probing signal at the end of the pumping, and then the similarity parameter tends to 1, indicating that the internal structure of the granular medium has changed due to external acoustic excitation; the relative change in sound speed is calculated from the average value of the sound speed measured at small amplitudes, and there is a gradual decrease in the process of gradual excitation, indicating that the modulus of the granular medium has decreased due to continuous excitation. When the amplitude is less than about 3.95 V, the fundamental and first harmonic are both in good linear agreement with the first and second powers of the excitation amplitude, respectively, and after the threshold is exceeded, deviations occur, which also indicates that the acoustic excitation has an effect on the attenuation coefficient of the granular medium.

Finally, the shear response of the granular medium is investigated and the difference between the stress-strain curves of random loose packing without normal stress and random close packing with applied normal stress is found. We can coarsely categorize the hysteresis events according to the magnitude of the Shear Stress Drop (SSD). Analogous to the methods used in the ring shear correlation experiments, we classify the stalling events into three cat-

egories according to the magnitude of the stress drop: micro-slip ($SSD < 0.2 \text{ N}$), minor-slip ($0.2 \text{ N} < SSD < 0.4 \text{ N}$), major slip (also known as failure in seismology, $SSD > 0.4 \text{ N}$). We counted the number of microslip events and their time intervals before the most recent main slip event, thus obtaining events that predict possible slip failure events by counting microslip events. We plotted the images after logarithmic processing of the number of micro-stall slip occurrences. This is interpreted by counting the micro-lag slips after a primary lag slip event has occurred, and if it has occurred N times, the time interval at which the next primary lag slip may occur is $T(\log(N))$ s. The inflection point near the origin is presumed to be due to the fact that the mechanics sensor itself fluctuates with a certain degree of resolution ($\sim 0.1 \text{ N}$), which skews the counts of the micro-stall slips. In the future, the introduction of a multi-channel acquisition card, thus assisting in the analysis of the hysteresis events during shear by acoustic means, will help to obtain more satisfactory image results.

The accumulation of these techniques will provide the basis for the subsequent use of acoustics to study shear zones in granular media, to monitor acoustic emission events subject to shear processes, and to couple acoustic methods to CT imaging studies.