0.1 简答题

1. 中心势场中的单粒子哈密顿量为 $H = \dfrac{\vec{p}^2}{2M} + V(r)$. 轨道角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 那么 $[\vec{L}, H] = ?$

   由于是中心势场, 不妨设 $V(r) = r^n$, 则

$$
\begin{aligned}
[\vec{L}, H] &= \left[\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j p_k, \sum_{\alpha}^{3} \frac{p_\alpha^2}{2m} + r^n\right] = \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i [x_j p_k, p_\alpha^2] + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i [x_j p_k, r^n] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} \hat{x}_i \epsilon_{ijk} \left\{ \cancel{x_j p_\alpha [p_k, p_\alpha]} + \cancel{x_j [p_k, p_\alpha] p_\alpha} + p_\alpha [x_j, p_\alpha] p_k + [x_j, p_\alpha] p_\alpha p_k \right\} + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j [-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}, r^n] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} 2i\hbar \delta_{j\alpha} p_\alpha p_k + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j \left(-i\hbar n r^{n-1} r^{-\frac{1}{2}} x_k\right) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i \left\{ \frac{i\hbar}{m} p_j p_k + (-i\hbar n r^{n-\frac{3}{2}}) x_j x_k \right\}
\end{aligned}
$$

   注意到 $j \iff k$ 和 ϵ_{ijk} 的反对称性质, 可以得到 $[\vec{L}, H] = \boxed{0}$.

2. 考虑一阶近似, 当 $i \neq f$ 时, 跃迁概率为

$$
P_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f | V(t') | i \rangle e^{\mathrm{i}\omega_{fi} t'} \right|^2
$$

   其中 $\hbar\omega_{fi} = E_f - E_i$. 当微扰为

$$
V(t) = \begin{cases} V e^{-\mathrm{i}\omega t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}
$$

   跃迁概率为?

$$
\begin{aligned}
P_{i\to f}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f | V e^{-\mathrm{i}\omega t'} | i \rangle e^{\mathrm{i}\omega_{fi} t'} \right\|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f | V | i \rangle e^{-\mathrm{i}\omega t'} e^{\mathrm{i}\omega_{fi} t'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f | V | i \rangle e^{\mathrm{i}(\omega_{fi} - \omega) t'} \right\|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f | V | i \rangle e^{\mathrm{i}\Delta\omega t'} \right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\left\| \int_0^t \mathrm{d}t' e^{\mathrm{i}\Delta\omega t'} \right\|^2 = \left\| \frac{e^{\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1}{\mathrm{i}\omega} \right\|^2 = \frac{(e^{\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1)(e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1)}{(\Delta\omega)^2} = \frac{2 - 2\cos\Delta t}{(\Delta\omega)^2} = \frac{4}{(\Delta\omega)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)
$$

$$
P_{i\to f}(t) = \boxed{\frac{4\left|\langle f | V | i \rangle\right|^2}{\hbar^2 (\Delta\omega)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}
$$

3. 算符 $\Omega(t) \equiv U^{-1}(t) U_0(t)$, 算符 $\Omega_\pm \equiv \lim\limits_{t\to\mp\infty} \Omega(t)$, 其中

   - $U_0(t) = e^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}$ 是自由系统 H_0 的时间演化算符;
   - $U(t) = e^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$ 是短程势散射系统的时间演化算符.

   $H = H_0 + V$. 散射算符定义为 $S \equiv \Omega_-^\dagger \Omega_+$, 那么 $[S, H_0] = ?$

4. 动量空间中自由粒子的 **Dirac** 方程可以写为

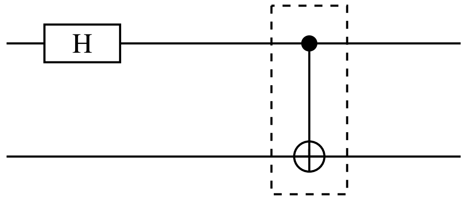
$$
\begin{aligned}
(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\, \chi_+(\vec{p}) &= m \chi_-(\vec{p}) \\
(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\, \chi_-(\vec{p}) &= m \chi_+(\vec{p})
\end{aligned}
$$

当质量 $m=0$时, 两个 **Weyl** 旋量之间没有耦合, 得到动量空间中的 **Weyl** 方程

$$(E-\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi_{+}=0,\quad (E+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi_{-}=0$$

定义螺旋度算符为 $\frac{1}{2}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}$, 其中 $\hat{\vec{p}}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, 那么可知 **Weyl** 旋量 $\chi_{\pm}$ 恰好是螺旋度算符的本征态, 本征值分别为?

5. 一个可以制备 **Bell** 态的简单量子线路为



它包含两个张量: 一个 **Hadamard gate (H)** 和一个 **controlled NOT gate (CNOT)**(虚线框里), 在 S^z 表象下它们的矩阵表示为,

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$
$$\textbf{CNOT}=e^{\frac{i\pi}{4}(\mathbb{I}-\sigma_1^z)\otimes(\mathbb{I}-\sigma_2^x)}$$

将以上量子线路作用到 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 上得到的态为?