# 0.1 量子动力学

## 0.1.1 时间演化和薛定谔方程

含时薛定谔方程 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$, 则态的时间演化为 $|\psi(t')\rangle = U(t',t)|\psi(t)\rangle, \quad U(t',t) = \tau\exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_t^{t'} H(t'')\mathrm{d}t''\right)$

1. 概率守恒: $\langle\psi(t')|\psi(t')\rangle = \langle\psi(t)|U^\dagger(t',t)U(t',t)|\psi(t)\rangle = 1 \iff U^\dagger(t',t)U(t',t) = \mathbb{I}$.
2. 可拼接: $U(t_i,t_k) = U(t_i,t_j)U(t_j,t_k), \quad t_k < t_j < t_i$
3. $U(t,t) = \mathbb{I}$.

无穷小时间演化算符 $U(t+\mathrm{d}t,t)$ 展开: $U(t+\mathrm{d}t,t) = \mathbb{I} - \dfrac{i}{\hbar}H\mathrm{d}t + \mathcal{O}[(\mathrm{d}t)^2]$, 若 $U^\dagger U = \mathbb{I}$, 则

$$
\begin{aligned}
U^\dagger U &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{\hbar}H^\dagger\mathrm{d}t + \cdots\right)\left(\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}H\mathrm{d}t + \cdots\right) = \mathbb{I} + \frac{i}{\hbar}(H^\dagger - H)\mathrm{d}t + \cdots = \mathbb{I} \\
&\Rightarrow H^\dagger = H \\
|\psi(t+\mathrm{d}t)\rangle &= \left\{\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}H\mathrm{d}t + \mathcal{O}[(\mathrm{d}t)^2]\right\}|\psi(t)\rangle \\
&\Rightarrow i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,t_0) = HU(t,t_0)
\end{aligned}
$$

## 0.1.2 经典力学时间演化

重温分析力学:

$$
\begin{aligned}
\text{哈密顿方程:}\quad & \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \\
\text{牛顿方程导出:}\quad & H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad \dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\nabla_q V. \\
\text{时间演化:}\quad & \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p}\dot{p} \\
& = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}
\end{aligned}
$$

## 0.1.3 海森堡绘景

薛定谔 $i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$, 若 $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$, 则 $U(t,0) = e^{-iHt/\hbar}$.

任意 $A$ 在 $t$ 时刻矩阵元为 $\langle\psi'(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi'(0)|U^\dagger(t,0)AU(t,0)|\psi(0)\rangle$. 取含时部分 $A_H(t) = U^\dagger(t,0)A_H(0)U(t,0)$, 而使态不随时间演化. 得到与分析力学中类似于泊松括号的关系:

$$
\frac{\mathrm{d}A_H(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\Big[A_H(t), H\Big]
$$

## 0.1.4 相互作用绘景

特攻 $H(t) = H_0 + V(t)$. 其中 $\partial_t H_0 = 0$. 将 $H_0$ 的 $U_0(t)$ 和 $H(t)$ 的 $U(t)$ 分离开.

$$
\begin{aligned}
|\psi_I(t)\rangle &= U_0^{-1}(t)|\psi_S(t)\rangle, \quad U_0(t) = e^{-iH_0t/\hbar} \\
|\psi_H(t)\rangle &= U^{-1}(t)|\psi_S(t)\rangle, \quad U(t) = e^{-iHt/\hbar}
\end{aligned}
$$

相互作用绘景中的态演化满足

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_I(t)\rangle &= V_I(t)|\psi_I(t)\rangle \\
V_I(t) &= U_0^{-1}(t)V(t)U_0(t) \\
A_I(t) &= U_0^{-1}(t)AU_0(t)
\end{aligned}
$$

定义 $U(t) := U_0(t)U_I(t)$, 其中 $U_I(t)$ 对应的是 $V(t)$ 导致的时间演化. 那么

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) &= (H_0+V)U(t)\\
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_0(t) &= H_0U_0(t)\\
i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) = i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_0U_I) &= i\hbar\left[\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t}U_I + U_0\frac{\mathrm{d}U_I}{\mathrm{d}t}\right]\\
&= H_0U_0U_I + i\hbar U_0\frac{\mathrm{d}U_I}{\mathrm{d}t} = H_0U + i\hbar U_0\frac{\mathrm{d}U_I}{\mathrm{d}t}\\
i\hbar\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} &= H_0U + VU\\
\Rightarrow i\hbar U_0\frac{\mathrm{d}U_I}{\mathrm{d}t} &= VU = VU_0U_I \Rightarrow i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_I = U_0^{-1}VU_0U_I = V_IU_I(t)
\end{aligned}
$$

### 0.1.5　密度矩阵的时间演化

### 0.1.6　电磁场中的带电粒子

#### 0.1.6.1　常势场

#### 0.1.6.2　电磁场

#### 0.1.6.3　A-B 效应

#### 0.1.6.4　匀磁场中的运动

#### 0.1.6.5　霍尔效应

##### 0.1.6.5.1　经典霍尔效应

##### 0.1.6.5.2　Drude 模型

##### 0.1.6.5.3　整数量子霍尔效应

##### 0.1.6.5.4　霍尔电阻平台