0.1 简答题

1. **中心势场中的单粒子哈密顿量为 $H = \dfrac{\vec{p}^2}{2M} + V(r)$. 轨道角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 那么 $[\vec{L}, H] = ?$**

   由于是中心势场, 不妨设 $V(r) = r^n$, 则

$$\begin{aligned}
[\vec{L}, H] &= \left[\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j p_k, \sum_{\alpha}^{3} \frac{p_\alpha^2}{2m} + r^n\right] = \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i [x_j p_k, p_\alpha^2] + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i [x_j p_k, r^n] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} \hat{x}_i \epsilon_{ijk} \left\{ \cancel{x_j p_\alpha [p_k, p_\alpha]} + \cancel{x_j [p_k, p_\alpha]} p_\alpha + p_\alpha [x_j, p_\alpha] p_k + [x_j, p_\alpha] p_\alpha p_k \right\} + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j [-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}, r^n] \\
&= \frac{1}{2m} \sum_{ijk\alpha} 2i\hbar \delta_{j\alpha} p_\alpha p_k + \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i x_j \left(-i\hbar n r^{n-1} r^{-\frac{1}{2}} x_k \right) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_i \left\{ \frac{i\hbar}{m} p_j p_k + (-i\hbar n r^{n-\frac{3}{2}}) x_j x_k \right\}
\end{aligned}$$

   注意到 $j \iff k$ 和 ϵ_{ijk} 的反对称性质, 可以得到 $[\vec{L}, H] = \boxed{0}$.

2. **考虑一阶近似, 当 $i \neq f$ 时, 跃迁概率为**

$$P_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f|V(t')|i\rangle e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t'} \right|^2$$

   其中 $\hbar\omega_{fi} = E_f - E_i$. 当微扰为

$$V(t) = \begin{cases} V e^{-\mathrm{i}\omega t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

   跃迁概率为?

$$\begin{aligned}
P_{i\to f}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f|V e^{-\mathrm{i}\omega t'}|i\rangle e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t'} \right\|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f|V|i\rangle e^{-\mathrm{i}\omega t'} e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t'} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f|V|i\rangle e^{\mathrm{i}(\omega_{fi}-\omega)t'} \right\|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left\| \int_0^t \mathrm{d}t' \langle f|V|i\rangle e^{\mathrm{i}\Delta\omega t'} \right\|^2 \\
\left\| \int_0^t \mathrm{d}t' e^{\mathrm{i}\Delta\omega t'} \right\|^2 &= \left\| \frac{e^{\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1}{\mathrm{i}\omega} \right\|^2 = \frac{(e^{\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1)(e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} - 1)}{(\Delta\omega)^2} = \frac{2 - 2\cos\Delta t}{(\Delta\omega)^2} = \frac{4}{(\Delta\omega)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \\
P_{i\to f}(t) &= \boxed{\frac{4\left|\langle f|V|i\rangle\right|^2}{\hbar^2(\Delta\omega)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. *算符 $\Omega(t) \equiv U^{-1}(t) U_0(t)$, 算符 $\Omega_\pm \equiv \lim_{t\to\mp\infty} \Omega(t)$, 其中
   - $U_0(t) = e^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar}$ 是自由系统 H_0 的时间演化算符;
   - $U(t) = e^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$ 是短程势散射系统的时间演化算符.

   $H = H_0 + V$. 散射算符定义为 $S \equiv \Omega_-^\dagger \Omega_+$, 那么 $[S, H_0] = ?$

4. **动量空间中自由粒子的 Dirac 方程可以写为**

$$(E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_+(\vec{p}) = m\chi_-(\vec{p}), \quad (E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_-(\vec{p}) = m\chi_+(\vec{p})$$

   当质量 $m = 0$时, 两个 Weyl 旋量之间没有耦合, 得到动量空间中的 Weyl 方程

$$(E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_+ = 0, \quad (E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \chi_- = 0$$

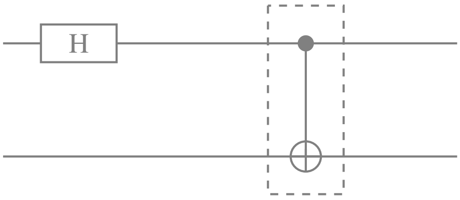
定义螺旋度算符为 $\frac{1}{2}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}$, 其中 $\hat{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, 那么可知 Weyl 旋量 $\chi_\pm$ 恰好是螺旋度算符的本征态, 本征值分别为?

当 $m = 0$ 且 $|\vec{p}| = E$ 时, 原 Dirac 方程即为

$$\begin{aligned} &(1 - \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma})\chi_+(\vec{p}) = 0, \quad (1 + \hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma})\chi_-(\vec{p}) = 0 \\ \Rightarrow\ &(1 - 2\hat{h})\chi_+(\vec{p}) = 0, \quad (1 + 2\hat{h})\chi_-(\vec{p}) = 0 \end{aligned}$$

其中 $\hat{h}$ 即为螺旋度算符. 显然 χ_+ 和 χ_- 分别是 $\hat{h}$ 的本征态, 本征值则为 $\boxed{\pm\frac{1}{2}}$

5. *一个可以制备 Bell 态的简单量子线路为



它包含两个张量: 一个 Hadamard gate (H) 和一个 controlled NOT gate (CNOT)(虚线框里), 在 S^z 表象下它们的矩阵表示为,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{CNOT} = \exp\left\{\mathrm{i}\pi\frac{1}{4}(\mathbb{I} - \sigma_1^z)\otimes(\mathbb{I} - \sigma_2^x)\right\}$$

将以上量子线路作用到 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 上得到的态为?

注意到

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}(\mathbb{I} - \sigma_1^z)\otimes(\mathbb{I} - \sigma_2^x) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} & \\ & 2 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ A^2 &= A \\ e^{i\alpha A} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\alpha A)^n = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\alpha)^n(A)^n = \mathbb{I} + A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\alpha)^n - 1\right) \\ &= \mathbb{I} + A(e^{i\alpha} - 1) \\ \Rightarrow \mathrm{CNOT} &= \mathbb{I} - 2A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此, CNOT 的作用是调换第三, 第四元素的位置, 这个作用当且仅当第一个量子比特为 $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 时才会发生.

$$\begin{aligned} &\left(\hat{H}_{(1)}\otimes\mathbb{I}_{(2)}\right)|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} = \hat{H}_{(1)}|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\otimes\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{(1)} + |\downarrow\rangle_{(1)})\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)}). \\ &\mathrm{CNOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} + \mathrm{CNOT}|\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{(1)}\otimes|\uparrow\rangle_{(2)} + |\downarrow\rangle_{(1)}\otimes|\downarrow\rangle_{(2)}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)}, \quad \text{for simplicity.} \end{aligned}$$