

0.1 量子动力学

0.1.1 时间演化和薛定谔方程

含时薛定谔方程 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$, 则态的时间演化为 $|\psi(t')\rangle = U(t', t) |\psi(t)\rangle$, $U(t', t) = \tau \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} H(t'') dt'' \right)$

1. 概率守恒: $\langle \psi(t') | \psi(t') \rangle = \langle \psi(t) | U^\dagger(t', t) U(t', t) | \psi(t) \rangle = 1 \iff U^\dagger(t', t) U(t', t) = \mathbb{I}$.
2. 可拼接: $U(t_i, t_k) = U(t_i, t_j) U(t_j, t_k)$, $t_k < t_j < t_i$
3. $U(t, t) = \mathbb{I}$.

无穷小时间演化算符 $U(t + dt, t)$ 展开: $U(t + dt, t) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} H dt + \mathcal{O}[(dt)^2]$, 若 $U^\dagger U = \mathbb{I}$, 则

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left(\mathbb{I} + \frac{i}{\hbar} H^\dagger dt + \dots \right) \left(\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} H dt + \dots \right) = \mathbb{I} + \frac{i}{\hbar} (H^\dagger - H) dt + \dots = \mathbb{I} \\ &\Rightarrow H^\dagger = H \\ |\psi(t + dt)\rangle &= \left\{ \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} H dt + \mathcal{O}[(dt)^2] \right\} |\psi(t)\rangle \\ &\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \end{aligned}$$

0.1.2 经典力学时间演化

重温分析力学:

$$\begin{aligned} \text{哈密顿方程: } \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \\ \text{牛顿方程导出: } H(q, p) &= \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad \dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\nabla_q V. \\ \text{时间演化: } \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \end{aligned}$$

0.1.3 海森堡绘景

薛定谔 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$, 若 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, 则 $U(t, 0) = e^{-iHt/\hbar}$.

任意 A 在 t 时刻矩阵元为 $\langle \psi'(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi'(0) | U^\dagger(t, 0) A U(t, 0) | \psi(0) \rangle$. 取含时部分 $A_H(t) = U^\dagger(t, 0) A U(t, 0)$, 而使态不随时间演化. 得到与分析力学中类似于泊松括号的关系:

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_H(t), H]$$

0.1.4 相互作用绘景

特攻 $H(t) = H_0 + V(t)$. 其中 $\partial_t H_0 = 0$. 将 H_0 的 $U_0(t)$ 和 $H(t)$ 的 $U(t)$ 分离开.

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= U_0^{-1}(t) |\psi_S(t)\rangle, \quad U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar} \\ |\psi_H(t)\rangle &= U^{-1}(t) |\psi_S(t)\rangle, \quad U(t) = e^{-iH t/\hbar} \end{aligned}$$

0.1.5 密度矩阵的时间演化

0.1.6 电磁场中的带电粒子

0.1.6.1 常势场

0.1.6.2 电磁场

0.1.6.3 A-B 效应

0.1.6.4 匀磁场中的运动

0.1.6.5 霍尔效应

0.1.6.5.1 经典霍尔效应

0.1.6.5.2 Drude 模型

0.1.6.5.3 整数量子霍尔效应

0.1.6.5.4 霍尔电阻平台