0.1 相对论量子力学

0.1.1 洛伦兹协变性

0.1.1.1 单位制约定

原子单位制: $\hbar(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2)=c(\mathrm{m/s})=1$.

1. $c=1$: 速度 v 无量纲; 时间 t 和距离 x 同量纲; 质量 m, 动量 p, 能量 E 同量纲.
2. $\hbar=1$: 时间 t 和距离 x 乘积后与能量 E 同量纲.

0.1.1.2 协变逆变记号

来源于相对论. $\begin{cases}\text{逆变}:a^\mu &=(a^0,+\vec{a})\\ \text{协变}:a_\mu &=(a^0,-\vec{a})\end{cases}$. 其中 $a_\mu=\eta_{\mu\nu}a^\nu$. $\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}+1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

4-矢量的内积: $a^\mu b_\mu=a^0b^0-\vec{a}\cdot\vec{b}$.

时空 4-矢量 $x^\mu=(t,\vec{x})$, 逆变 4-梯度: $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\equiv\partial^\mu=\left(\dfrac{\partial}{\partial t},-\nabla\right)$, 协变 4-梯度: $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\equiv\partial_\mu=\left(\dfrac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$

0.1.1.3 洛伦兹群

若 Λ^μ_ν 令 $x^\mu=\Lambda^\mu_\nu x_\nu$, 使得 $x^\mu x_\mu=x^\nu x_{nu}$, 则该变换属于 Lorentz 变换.

0.1.2 Klein-Gordon 方程

0.1.2.1 Klein-Gordon 方程的推导

相对论的能动关系: $E^2=p^2+m^2$. 对其使用一次量子化 $p\to\hat{p}=-i\nabla,\quad E\to\hat{H}=i\dfrac{\partial}{\partial t}$, 得到 Klein-Gordon 方程:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\psi=0\\ \Rightarrow\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\psi=0\end{aligned}$$

平面波解 $\psi(\vec{x},t)=Ae^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-iEt}=Ae^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\overset{p^\mu=(E,\vec{p}),x_\mu=(t,-\vec{x})}{\Longrightarrow}Ae^{-ip^\mu x_\mu}$, 它意味着 $E=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$.

常规理解 K-G 方程会带来负能量, 负概率等难以解释的问题. 解决方法是引入自然存在正负的电荷 q. K-G 方程用于描述自旋为 0 的粒子.

K-G 具有 Lorentz 协变性, 因此完美适用电磁作用. 那么推广至 $\begin{cases}E &\to E-q\phi\\ \vec{p} &\to\vec{p}-q\vec{A}\end{cases}$, $p_\mu\to A_\mu=(\phi,-\vec{A})$, K-G 方程形式维持:

$$\left[D_\mu D^\mu+m^2\right]\psi=0,\quad \text{协变微分}: D_\mu=\partial_\mu+iqA_\mu$$
$$D_\mu D^\mu=D_t^2-\vec{D}^2,\quad\begin{cases}D_t=\partial_t+iq\phi\\ \vec{D}=\vec{\nabla}-iq\vec{A}\end{cases}$$

为了求解二阶方程, 使用共轭展开引入两个新函数降阶:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x},t)&=\frac{1}{2}\left[\psi(\vec{x},t)+\frac{i}{m}D_t\psi(\vec{x},t)\right]\\ \chi(\vec{x},t)&=\frac{1}{2}\left[\psi(\vec{x},t)-\frac{i}{m}D_t\psi(\vec{x},t)\right]\end{aligned}$$

满足

$$
\begin{aligned}
iD_t\phi &= -\frac{1}{2m}\vec{D}^2(\phi+\chi)+m\phi \\
iD_t\chi &= +\frac{1}{2m}\vec{D}^2(\phi+\chi)-m\phi \\
\Rightarrow iD_t\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix} &= -\frac{1}{2m}\vec{D}^2\begin{bmatrix}+\phi+\chi\\ -\phi-\chi\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}+\phi\\ -\phi\end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2m}\vec{D}^2\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

使用 Pauli 矩阵合成公式中出现的以若干 1 和 -1 为元素的矩阵, 即 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\sigma^z+i\sigma^y$, 以及 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\sigma^z$, 所以最后 K-G 方程化为

$$
iD_t\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix}=-\frac{1}{2m}\vec{D}^2\left[\sigma^z+i\sigma^y\right]\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix}+m\left[\sigma^z\right]\begin{bmatrix}\phi\\ \chi\end{bmatrix}
$$

4-矢量概率流 $j^\mu=\dfrac{i}{2m}\Big[\psi^*D^\mu\psi-\psi(D^\mu\psi)^*\Big]$, 概率密度 $\rho=j^0=\dfrac{i}{2m}\Big[\psi^*D_t\psi-(D_t\psi)^*\psi\Big]=\phi^*\phi-\chi^*\chi$, 其中 ϕ 为正粒子波函数, χ 为反粒子波函数.

0.1.3 Dirac 方程

K-G 是 ∂_t^2 的, Dirac 为了化为传统的 ∂_t^1, 推广 Pauli 矩阵为 4×4 的 γ 矩阵, 使得∇ 为一阶. Dirac 方程描述自旋 $\dfrac{1}{2}$, $g=2$ 的粒子.

0.1.3.1 自由粒子的 Dirac 方程

$K\to K'$, 则 $\begin{cases}t'=+t\cosh\zeta-z\sinh\zeta\\ x'=x\\ y'=y\\ z'=-t\sinh\zeta+z\cosh\zeta\end{cases}$, $\tanh\zeta=v$, 其中有 $\dfrac{p_z}{m}=v_z\gamma=-\sinh\zeta(*)$.

存在两种方法 $\Omega_\pm$ 使得 (*) 成立, 定义 Weyl 旋量来体现着这种区别:

$$
\begin{aligned}
\chi_\pm(p_z) &= e^{\mp\frac{1}{2}\zeta\sigma_z}\xi \\
\Rightarrow \chi_-(p_z) &= e^{\zeta\sigma_z}\chi_+(p_z) \qquad (**)
\end{aligned}
$$

由于 $me^{\zeta\sigma_z}=m(\cosh\zeta+\sigma_z\sinh\zeta)=E-\sigma_zp_z$, 所以 ** 展开为

$$
\begin{cases}(E-\sigma_zp_z)\chi_+(p_z)=m\chi_-(p_z)\\ (E+\sigma_zp_z)\chi_-(p_z)=m\chi_+(p_z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(E-\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_+(\vec{p})=m\chi_-(\vec{p})\\ (E+\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_-(\vec{p})=m\chi_+(\vec{p})\end{cases}
$$

1. 0 质量粒子. 此时 $\chi_\pm$ 去耦合, 即 $(E\mp\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi_\pm=0$. 根据能动关系, $m=0$ 时 $E=|\vec{p}|$, 所以同除 $|\vec{p}|$ 进行归一化:

$$
\begin{aligned}
&\left(1\mp\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_\pm(\vec{p})=0,\quad \hat{\vec{p}}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|},\quad \text{螺旋度算符: }\frac{1}{2}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{\sigma}\chi_\pm(\vec{p})=\pm\frac{1}{2}\chi_\pm(\vec{p})
\end{aligned}
$$

2. 一次量子化 $\vec{p}\to-i\nabla$, $E=i\partial_t$, 得到坐标表象的 Dirac 方程:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial_t\pm\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_\pm(\vec{r},t)+im\varphi_\mp(\vec{r},t)=0 \\
&\varphi_\pm(\vec{r},t)=\int \mathrm{d}^3\vec{p}e^{-iEt}e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}\chi_\pm(\vec{p}),\quad E=\sqrt{p^2+m^2}
\end{aligned}
$$

3. Dirac 方程的协变性. Dirac 旋量定义为 $\psi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{+1} \\ \varphi_{+2} \\ \varphi_{-1} \\ \varphi_{-2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$. 现在引入 γ 矩阵以进行后续讨论, 它被定义为

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \equiv -\gamma_i, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

定义 $\Sigma^i = \sigma^{3i}, \quad i = \{1,2,3\}$, 则 Dirac 旋量满足的方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \vec{\nabla} + im\gamma^0 \right) \psi = 0$$

利用协变 4-梯度 $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$ 和逆变 4-梯度 $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$, 将 Dirac 化为协变形式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0$$

(a) Dirac 方程与 Klein-Gordon 方程. 通过左乘 $(-i\gamma^\mu \partial_{mu} - m)$, 将方程化为 $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$. 代入平面波解, 即有

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu p_\mu - m = 0 \Rightarrow E = \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m \\ &\Rightarrow \hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \quad \alpha_i \equiv \gamma^0 \gamma^i, \quad \beta \equiv \gamma^0 \end{aligned}$$

(b) 电磁场. 引入 $\begin{cases} p_\mu \to p_\mu - qA_\mu \\ i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu \\ D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \end{cases}$, 有电磁场中的 Dirac 方程为

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

通过约定 $(P_0, \vec{P}) \equiv i\partial^\mu - qA^\mu = (i\partial_t - q\phi, -i\nabla - q\vec{A})$ 分离时空导数, 得到 Weyl 旋量形式的 Dirac 方程:

$$(P^0 \mp \vec{P} \cdot \vec{\sigma})\varphi_\pm = m\varphi_\mp$$