Teorija informacij in sistemov, predavanje 11

Uroš Lotrič

Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za računalništvo in informatiko

7. Uvod

- Pri analizi signalov in sistemov je izjemno pomembna količina frekvenca.
- Pet pomembnih vidikov frekvence
  - invariantnost sinusoid,
  - Fourierova predstavitev,
  - resonanca,
  - modulacija in premik frekvenc,
  - vzorčenje.

7. Invariantnost sinusoid

- Vzemimo zvezni signal, ki prehaja skozi linearni medij (sistem) kot je na primer električno vezje
- V splošnem bo signal na izhodu drugačen od signala na vhodu (zvok, ki ga poslušamo pod vodo je bistveno bolj popačen od tistega, ki ga poslušamo na zraku)
- Pomembno pri signalih pa je, da se vhodni signal v obliki sinusoide

$$x(t) = A\sin(2\pi\nu t + \theta)$$

  popači v izhodni signal z drugačno amplitudo in fazo θ, vendar ohrani frekvenco ν.
- Razlog, da se frekvenca ohrani je v tem, da linearne sisteme lahko zapišemo v obliki elementarnih operacij kot so (množenje s konstanto, odvajanje, integracija, zakasnitev, vsota)

7. Fourierova transformacija

- Vsako periodično funkcijo (če je dovolj lepa) lahko zapišemo kot kombinacijo sinusoid. Poslpošitve.
- V kombinaciji z invariantostjo sinusoid to pomeni, da lahko
  - vsako funkcijo razstavimo na sinusoide,
  - obravnavamo obnašanje vsake sinusoide v sistemu posebej,
  - na koncu združimo ločene rezultate.

Ta koncept se danes uporablja pri vsaki analizi signalov.

7. Resonanca

- Do resonance pride, ko je frekvenca vsiljenega nihanja enaka frekvenci lastnega nihanja. Takrat pride do ojačitve amplitud.
- Primer: pihanje čez vrat steklenice; če ujamemo pravo frekvenco slišimo globok ton.
- Resonanca je pomembna lastnost električnih vezij, s katero zagotovimo nihanja, nastavljanje radijskih sprejemnikov na pravo postajo, odstranimo šum.

7. Modulacija in frekvenčni premik

- Iz matematične analize vemo, da nelinearne operacije nad signali (kvadriranje, množenje) privedejo do pomembnih transformacij v frekvenčnem prostoru.
- Iz osnovne trigonometrije vemo
  $\sin(2\pi\nu_1 t)\sin(2\pi\nu_2 t) =$
  $\frac{1}{2}[\cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t) - \cos(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t)]$,

  $\cos(2\pi\nu t) = \sin(2\pi\nu t + \pi/2)$
- Produkt sinusoid s frekvencama ν_1 in ν_2 lahko torej zapišemo kot vsoto sinusoide s frekvenco $\nu_1 + \nu_2$ in sinusoide s frekvenco $\nu_1 - \nu_2$.
- To lastnost izkorišča amplitudna modulacija (radijske postaje AM) in frekvenčni premik, s katerim lahko zagotovimo hkraten prenos več signalov po istem mediju.

7. Teorem vzorčenja

- Kako pogosto moramo vzorčiti, da ne izgubimo kakšne vitalne informacije?
- Nyquist in Shannon sta prišla do zaključka, da moramo signal vzorčiti vsaj s frekvenco $2\nu_c$, če je najvišja opažena frekvenca v signalu ν_c.
- Na tem zaključku sloni vsa današnja tehnologije. Rezultat predstavlja tudi osnovo za Shannonovo znamenito formulo za kapaciteto zveznega kanala.

7.1 Fourierova vrsta 1

- Funkcija je periodična s periodo T, če velja $x(t+T) = x(t)$ za vsak t, $-\infty < t < \infty$, kjer je je T najmanjša pozitivna vrednost s to lastnostjo.
- Funkciji $\sin(t)$ in $\cos(t)$ sta periodični s periodo 2π.
- Funkciji $\sin(2\pi t/T)$ in $\cos(2\pi t/T)$ sta potem periodični funkciji s periodo T in frekvenco $\nu_0 = 1/T$.
- Čas merimo v sekundah, frekvenco v številu ciklov na sekundo
- Pri analizi signalov zapis večkrat poenostavimo tako, da namesto frekvence uporabimo kotno hitrost $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi/T$.
- Višji harmoniki sinusoid s frekvenco ν_0 so sin in cos funkcije s frekvencami, ki so večkratniki osnovne frekvence, $n\nu_0$.

7.1 Fourierova vrsta 2

- Fourier je pokazal, da lahko vsako periodično funkcijo $x(t)$ s periodo T zapišemo kot

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \ , \ \ n \geq 1$$

- Dokaz!
- To velja za vsako funkcijo, ki zadošča Dirichletovim pogojem:
  - je enoznačna (za vsak t ena sama vrednost),
  - je končna povsod, oziroma je njen integral končen ,
  - je absolutno integrabilna (ima končno energijo), $\int_0^T |x(t)| dt < \infty$,
  - mora imeti končno število ekstremov v vsakem območju,
  - imeti mora končno število končnih nezveznosti v vsakem območju.

7.1 Fourierova vrsta 3

- Bolj kompaktna predstavitev je z uporabo Eulerjeve formule $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, $i = \sqrt{-1}$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

Koeficienti so kompleksni:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-in\omega_0} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega_0} dt$$

- Zveza med obema zapisoma:
  - $n = 0 : c_0 = a_0/2$
  - $n > 0 : c_n = (a_n - ib_n)/2$
  - $n < 0 : c_n = (a_{-n} + ib_{-n})/2$
- Negativne frekvence so matematični konstrukt, ki nam pride prav pri opisovanju signalov. Vsako sinusoido opišemo z dvema paremtroma: prej a_n, b_n, zdaj elegantno s c_n in c_{-n}.

7.1 Fourierova vrsta 4

- Primer: V Fourierovo vrsto razvijmo urin signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < T/2 \\ -1 & , t/2 \leq t < T \end{cases}$$

Rezultat:

$$x(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4}{\pi n} sin(n\omega_0 t)$$

7.2 Fourierova transformacija 1

- Fourierovo vrsto lahko posplošimo, tako da spustimo $T \to \infty$.
- Dobimo Fourierovo transformacijo. Predstavlja jedro vseh frekvenčnih analiz.
- Enačba:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Funkcijo $X(\nu)$ imenujemo Fourierova transformacija ali frekvenčni spekter $x(t)$.
- Iz zgornje enačbe sledi, da je Fourierova transformacija

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Primer: vzemimo pulz širine T v času $t = 0$. Dobimo: $X(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu}$
- Manjši kot je T v časovnem prostoru, širši je signal v frekvenčnem prostoru.

7.2 Fourierova transformacija 2

- Lastnosti:
  - linearnost:

$$f(t) = ax(t) + by(t) \to F(\nu) = aX(\nu) + bY(\nu)$$

  - skaliranje:

$$f(t) = x(at) \to F(\nu) = \frac{1}{|a|} X(\frac{1}{a}\nu)$$

  - premik:

$$f(t) = x(t - t_0) \to F(\nu) = e^{-i2\pi\nu t_0} X(\nu)$$

  - modulacija:

$$f(t) = e^{i2\pi t\nu_0} x(t) \to F(\nu) = X(\nu - \nu_0)$$

  - konvolucija:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau \to F(\nu) = X(\nu)Y(\nu)$$

7.3 Energija signala 1

- Energija signala:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$

- **Parsevalov teorem** (dokaz)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

- Porazdelitev energije po frekvencah podaja funkcija $|X(\nu)|^2$, ki jo imenujemo **energijska spektralna gostota**
- Primer: Za enotski pulz iz prejšnjega primera velja $|X(\nu)|^2 = \left[\frac{\sin(\pi T \nu)}{\pi \nu}\right]^2$ iz česar se vidi, da je energija zbrana okrog $\nu = 0$ in z višjimi frekvencami hitro pada

7.4 Zajem signalov 1

- Zvezen signal $x(t)$ je funkcija zvezne spremenljivke t.
- Diskreten signal je definiran samo za določene čase, ki si najpogosteje sledijo v enakih časovnih intervalih, $x_k = x(k\Delta)$, Δ je perioda vzorčenja.
- Signale danes običjano zajemamo z računalniki. Za to se uporabljajo vezja A/D pretvorniki. Imajo končno natančnost, na primer 12 bit. Signal torej opišemo s končno mnogo različnimi amplitudami (2^{12})
- Diskretnemu in kvantiziranemu signalu rečemo tudi digitalni signal.
- Kvantizacija je običajno tako fina, da jo lahko zanemarimo.

7.5 DFT 1

- Frekvenca vzorčenja ν_s (sampling) je obratno sorazmerna periodi vzorčenja, $\nu_s = 1/\Delta$
- Naslednjič bomo pokazali, da iz časovne vrste lahko popolnoma rekonstuiramo zvezni signal, če v signalu nastopajo samo frekvence, ki so manjše od $\nu_c = \nu_s/2 = 1/(2\Delta)$, torej je $F(\nu) = 0$ za $\nu \geq \nu_c$. ν_c se imenuje Nyquistova kritična frekvenca.
- Ocenimo Fourierovo transformacijo iz N zaporednih vzorcev

$$x_k = x(k\Delta)\ ,\ \ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

7.5 DFT 2

- Iz N vzorcev na vhodu v DFT bomo lahko izračunali natanko N neodvisnih točk na izhodu.
- Namesto, da bi določili DFT za vse točke od $-\nu_c$ do $+\nu_c$ se lahko omejimo samo na določene vrednosti

$$\nu_n = \frac{n}{N\Delta}\ , \ n = -N/2, \ldots, N/2$$

  Spodnja in zgornja meja ustrezata ravno Nyquistovi frekvenci.
- Trenuten zapis vključuje $N+1$ vrednost. Izkazalo se bo, da sta obe robni vrednosti enaki. Imamo jih zaradi lepšega zapisa.

7.5 DFT 3

- Naprej so stvari trivialne

$$X(\nu_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi\nu_n k\Delta} \Delta$$

- Če v zgornji enačbi izpustimo Δ, dobimo enačbo za DFT:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi nk/N}$$

- Povezava s FT je $X(\nu_n) \approx \Delta X_n$
- Iz enačbe za DFT sledi, da je DFT periodična s periodo N. To pomeni, da je $X_{-n} = X_{N-n}$
- Koeficiente X_n lahko zato namesto na intervalu $[-N/2, N/2]$ računamo na intervalu $[0, N-1]$.

7.5 DFT 4

- Zveza med koeficienti $X_0, \ldots, X_{N-1}$ in frekvencami $-\nu_c, \ldots, \nu_c$:

indeks	frekvenca
$n = 0$	$\nu = 0$
$1 \leq n \leq N/2 - 1$	$0 < \nu < \nu_c$
$N/2$	$-\nu_c,\ +\nu_c$
$N/2 + 1 \leq n \leq N - 1$	$-\nu_c < \nu < 0$

- Inverzna DFT (izpeljava)

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i2\pi nk/N}$$

- Podobnost med inverzno DFT in DFT in algoritem FFT.

7.6 Močnostni spekter diskretnega signala

- Diskretna različica Parsevalovega teorema

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2$$

- Pri diskretni različici je PSD vedno v intervalu $[-\nu_c, \nu_c]$.
- Močnostni spekter je potem

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{N^2}|X_0|^2 \\ P(\nu_n) &= \frac{1}{N^2}\left[|X_n|^2 + |X_{N-n}|^2\right] \ , \ n = 1, 2, \ldots, N/2 - 1 \\ P(\nu_c) &= \frac{1}{N^2}|X_{N/2}|^2 \end{aligned}$$