Diskretne strukture UNI
Vaje 9

1. Funkcija $\sigma_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

$\sigma_0(0) = 0$

$\sigma_0(1) = 1$

$\sigma_0(2) = 2$

$\sigma_0(3) = 2$

$\sigma_0(4) = 3$

$\sigma_0(5) = 2$

$\vdots$

Opazimo: $\sigma_0(p) = 2 \iff p$ je praštevilo.

$\boxed{f \text{ je injektivna} \iff \forall x \forall y : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \iff \forall x \forall y : (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))}$ ⇝ zahteva dokaz

$\boxed{f \text{ ni injektivna} \iff \exists x \exists y : (x \neq y \wedge f(x) = f(y))}$ ⇝ zadošča protiprimer

Ker je $\sigma_0(2) = \sigma_0(3)$, f ni injektivna.

$\boxed{f : A \to B \text{ je surjektivna} \iff Z_f = B \iff \forall y \in B\, \exists x \in A : f(x) = y}$ ⇝ zahteva dokaz

$\boxed{f \text{ ni surjektivna} \iff Z_f \neq B \iff \exists y \in B\, \forall x \in A : f(x) \neq y}$ ⇝ zadošča protiprimer

Dokažimo, da je σ_0 surjektivna, tj. $Z_{\sigma_0} = \mathbb{N}$.

dovolj bi bilo že $y > 0$, samo $y = 0$ moramo obravnavati posebej, ker je tam σ_0 definirana drugače

Očitno je $0, 1, 2, 3 \in Z_{\sigma_0}$. Naj bo $y \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število, večje od 3. Iščemo $x \in \mathbb{N}$, da bo $\sigma_0(x) = y$, tj. da bo imel x natanko y deliteljev.

Spomnimo se, da ima število s praštevilskim razcepom $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ natanko $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$ deliteljev. Torej bo imel npr. $x = 2^{y-1}$ natanko y deliteljev in bo $\sigma_0(x) = y$. Zato je $Z_{\sigma_0} = \mathbb{N}$ in je σ_0 surjektivna. ∎

2. Funkcija $\sigma_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

(a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 11\}$.

(b) Poišči vse n, za katere je $\sigma_1(n) = 12$.

(c) Ali obstaja n, da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?

(d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?

Tudi če ne poznate odgovora, lahko dobite 10 pri DS :)

a) $\sigma_1(0) = 0$

$\sigma_1(1) = 1$

$\sigma_1(2) = 1+2 = 3$

$\sigma_1(3) = 1+3 = 4$

$\sigma_1(4) = 1+2+4 = 7$

$\sigma_1(5) = 1+5 = 6$

$\sigma_1(6) = 1+2+3+6 = 12$

$\sigma_1(7) = 1+7 = 8$

$\sigma_1(8) = 1+2+4+8 = 15$

$\sigma_1(9) = 1+3+9 = 13$

$\sigma_1(10) = 1+2+5+10 = 18$

$\sigma_1(11) = 1+11 = 12$

$\vdots$

b) $\sigma_1(n) = 12$

$n_1 = 6$, $n_2 = 11$

Je še kakšna rešitev? Ker 1 in n vedno delita n, je $\sigma_1(n) = 1 + n +$ morebitni ostali delitelji $\geq 1+n$.

Za $n > 11$ je torej $\sigma_1(n) \geq 1+n > 1+11 = 12$. Torej za $n > 11$ ni rešitev enačbe $\sigma_1(n) = 12$. Do vključno $n = 11$ sta edini rešitvi $n_1 = 6$ in $n_2 = 11$.

c) $\sigma_1(n) = 2n =$ vsota vseh deliteljev n. Števila s to lastnostjo imenujemo popolna števila.

$n_1 = 6$, $\sigma_1(6) = 12$

$n_2 = 28$, $\sigma_1(28) = 1+2+4+7+14+28 = 56 = 2 \cdot 28$

$n_3 = 496$, $\sigma_1(496) = 1+2+4+8+16+31+62+124+248+496 = 992 = 2 \cdot 496$

$n_4 = 8128$, ...

A000396 Perfect numbers n: n is equal to the sum of the proper divisors of n. 530
(Formerly M4186 N1744)
6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, 2658455991569831744654692615953842176, 191561942608236107294793378084303638130997321548169216

oeis.org

Če obstajajo, so večja od tega :) V resnici je večje od 10^{1500}, ni deljivo s 105, ...
(Wikipaedia: Perfect numbers)

Ni znano, če obstajajo liha popolna števila, niti ni znano, če je popolnih števil neskončno.

d) σ_1 ni injektivna, ker je $\sigma_1(6) = \sigma_1(11)$ in $6 \neq 11$.

Je $\sigma_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektivna? $0 \in Z_{\sigma_1}$

$1 \in Z_{\sigma_1}$

2 ?

Ali obstaja n, da je $\sigma_1(n) = 2$, tj. vsota vseh (različnih) deliteljev $n = 2$?

Ker je $\sigma_1(n) \geq n+1$, sta kandidata le $n \in \{0, 1\}$, ampak $\sigma_1(0) \neq 2$ in $\sigma_1(1) \neq 2$.

$\Rightarrow 2 \notin Z_{\sigma_1}$ in σ_1 ni surjektivna.

3. (a) Poišči injektivno funkcijo $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

(b) Poišči surjektivno funkcijo $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

a) Injektivna funkcija $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$?

	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$					...
6	$\frac{6}{1}$						...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Vsa števila oblike $\frac{a}{b}$ za vse $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postavimo v zaporedje:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

Odstranimo ponovitve ★, da ostanejo samo različna racionalna števila:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \underbrace{\cancel{\frac{2}{2}}}_{=1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \underbrace{\cancel{\frac{2}{4}}}_{=\frac{1}{2}}, \underbrace{\cancel{\frac{3}{3}}}_{=1}, \underbrace{\cancel{\frac{4}{2}}}_{=2}, \frac{5}{1}, \dots$$

Dodamo še vse negativne okrajšane ulomke:

$$\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$$

in še 0, da dobimo seznam vseh različnih racionalnih števil:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$$

Funkcija f naj vsakemu priredi njegovo mesto (indeks) v seznamu:

$$f(0)=0,\ f(\tfrac{1}{1})=1,\ f(-\tfrac{1}{1})=2,\ f(\tfrac{2}{1})=3,\ f(-\tfrac{2}{1})=4, \dots$$

To je injektivna funkcija iz $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{N}$.

★ Ponovitev ni treba odstraniti, če zahtevamo, da je $f(\frac{p}{q})$ indeks, ki predstavlja prvo pojavitev razreda $[\frac{p}{q}] \in \mathbb{Q}$ na seznamu. Dobljena funkcija bo še vedno injektivna, ampak ne bo surjektivna. Brez zahteve, da preslikamo predstavnike $\frac{p}{q}$ v najmanjši indeks, pa definicija ne bi bila dobra, ker bi imel ulomek $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$ več različnih slik!

b) Ker je funkcija $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, ki smo jo definirali v a), surjektivna in injektivna, je bijekcija, in zato je tudi $f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijektivna. Posebej je $f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surjektivna.

4. (a) Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva z vsaj enim od števil 6, 10 in 21?
(b) Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 6 ali 8, niso pa deljiva z 10?
(c) Koliko je števil med 1001 in 2000, ki so deljiva z vsaj enim od števil 5, 6 in 14?

$A = \{1, 2, \dots, n\}$

$A_k = \{a \in A \,;\, k \text{ deli } a\}$

$|A_k| = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

$A_k \cap A_l = A_{lcm(k,l)}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$\vdots$

načelo vključitev - izključitev

* lcm = najmanjši skupni večkratnik

(a) Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva z vsaj enim od števil 6, 10 in 21?

$$|A_6 \cup A_{10} \cup A_{21}| = ? = |A_6| + |A_{10}| + |A_{21}| - |\underbrace{A_6 \cap A_{10}}_{A_{30}}| - |\underbrace{A_6 \cap A_{21}}_{A_{42}}| - |\underbrace{A_{10} \cap A_{21}}_{A_{210}}| + |\underbrace{A_6 \cap A_{10} \cap A_{21}}_{A_{210}}| =$$

$lcm(6,10) = 30$, $lcm(6,21) = 42$, $lcm(10,21) = 210$, $lcm(6,10,21) = 210$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor =$$

$$= \lfloor 166.\bar{6} \rfloor + \lfloor 100 \rfloor + \lfloor 47.6 \rfloor - \lfloor 33.3 \rfloor - \lfloor 23.8 \rfloor =$$

$$= 166 + 100 + 47 - 33 - 23 = \underline{\underline{257}}$$

(b) Koliko je števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 6 ali 8, niso pa deljiva z 10?

$$|(A_6 \cup A_8) \setminus A_{10}| = |(A_6 \cup A_8) \cap A_{10}^c| = |A_6 \cup A_8| - |(A_6 \cup A_8) \cap A_{10}| =$$

$lcm(6,10) = 30$, $lcm(8,10) = 40$

$$= |A_6 \cup A_8| - |\underbrace{A_6 \cap A_{10}}_{A_{30}} \cup \underbrace{A_8 \cap A_{10}}_{A_{40}}| =$$

$$= |A_6 \cup A_8| - |A_{30} \cup A_{40}| =$$

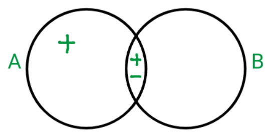
$lcm(6,8) = 24$, $lcm(30,40) = 120$

$$= |A_6| + |A_8| - |\underbrace{A_6 \cap A_8}_{A_{24}}| - \left(|A_{30}| + |A_{40}| - |\underbrace{A_{30} \cap A_{40}}_{A_{120}}|\right)$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor =$$

$$= 166 + 125 - 41 - 33 - 25 + 8 = \underline{\underline{200}}$$

$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$



*

30	2
15	3
5	5
1	

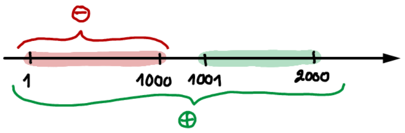
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$40 = 2^3 \cdot 5$

$lcm(30,40) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

(c) Koliko je števil med 1001 in 2000, ki so deljiva z vsaj enim od števil 5, 6 in 14?



$lcm(5,6) = 30$, $lcm(5,14) = 70$, $lcm(6,14) = 42$, $lcm(5,6,14) = 210$

$$|A_5 \cup A_6 \cup A_{14}| = |A_5| + |A_6| + |A_{14}| - |\underbrace{A_5 \cap A_6}_{A_{30}}| - |\underbrace{A_5 \cap A_{14}}_{A_{70}}| - |\underbrace{A_6 \cap A_{14}}_{A_{42}}| + |\underbrace{A_5 \cap A_6 \cap A_{14}}_{A_{210}}| =$$

$$= |A_5| + |A_6| + |A_{14}| - |A_{30}| - |A_{70}| - |A_{42}| + |A_{210}| =$$

$$= \left\lfloor \frac{2000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{210} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{210} \right\rfloor \right) =$$

$$= 400 + 333 + 142 - 66 - 28 - 47 + 9 - (200 + 166 + 71 - 33 - 14 - 23 + 4) = 743 - 371 = \underline{\underline{372}}$$

5. Založba je v lanskem letu ponujala naročnino na tri tedenske publikacije: časopis, strokovno revijo in kratkočasnik. Na časopis je bilo naročenih 630 bralcev, na strokovno revijo 520 in na kratkočasnik 487 bralcev. Časopis in strokovno revijo je naročalo 125 bralcev, časopis in kratkočasnik 150 bralcev, strokovno revijo in kratkočasnik pa 112 bralcev. Vse tri tednike je naročalo 50 bralcev.

   (a) Koliko je vseh naročnikov tedenskih publikacij?

   (b) Koliko bralcev je naročalo zgolj časopis (strokovno revijo, kratkočasnik)?

$|A| = 630$ $\quad |A \cap B| = 125$ $\quad |A \cap B \cap C| = 50$

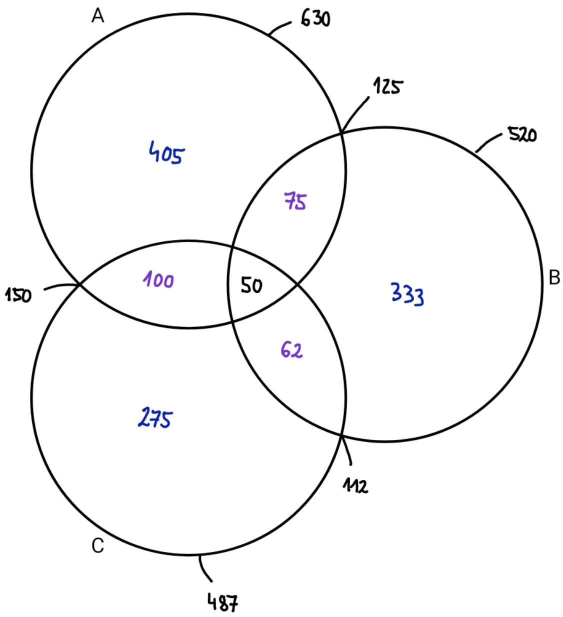
$|B| = 520$ $\quad |A \cap C| = 150$

$|C| = 487$ $\quad |B \cap C| = 112$

(a) Koliko je vseh naročnikov tedenskih publikacij?

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 630 + 520 + 487 - 125 - 150 - 112 + 50 = \underline{\underline{1300}}$$

(b) Koliko bralcev je naročalo zgolj časopis (strokovno revijo, kratkočasnik)?



$125 - 50 = 75$

$112 - 50 = 62$

$150 - 50 = 100$

$630 - 75 - 50 - 100 = 630 - 125 - 100 = 405$

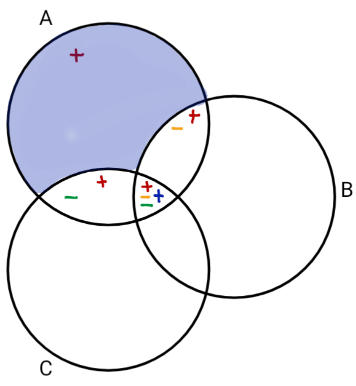
$520 - 125 - 62 = 333$

$487 - 150 - 62 = 275$

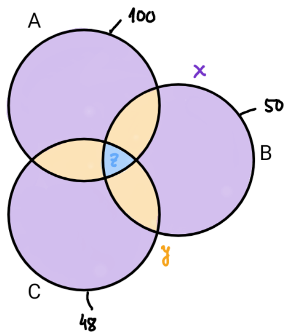
2. način:

$$|A \setminus (B \cup C)| = |A \cap B^c \cap C^c| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 630 - 125 - 150 + 50 = \underline{\underline{405}}$$



6. V neki občini se je 100 učencev udeležilo tekmovanja iz matematike, 50 tekmovanja iz računalništva in 48 tekmovanja iz fizike. Število učencev, ki so se udeležili natanko enega tekmovanja, je dvakrat večje od števila učencev, ki so šli na natanko dve tekmovanji, in trikrat večje od števila učencev, ki so šli na vsa tri tekmovanja. Koliko učencev je šlo na vsa tri tekmovanja?



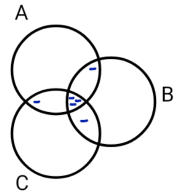
$|A| = 100$

$|B| = 50$

$|C| = 48$

$x = 2y \rightsquigarrow y = \frac{x}{2} = \frac{3z}{2}$

$x = 3z$



$$x+y+z = |A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| \underbrace{-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|}_{-y-3z} + \underbrace{|A\cap B\cap C|}_{z}$$

$$3z + \frac{3z}{2} + z = 100+50+48 - \frac{3z}{2} - 3z + z$$

$$9z = 198$$

$$z = 22$$

7. V anketi 27 študentov vprašamo, v katerih programskih jezikih znajo programirati. V jeziku C zna programirati 13 študentov, v Javi 13 in v Pythonu 16. V jezikih C in Java zna programirati 7 študentov, v jezikih Python in Java 8 študentov in v jezikih C in Python 9 študentov. Takih, ki ne znajo programirati v nobenem od teh jezikov, je dvakrat toliko kot študentov, ki znajo programirati v vseh treh jezikih.

(a) Koliko študentov zna programirati v vseh treh jezikih?

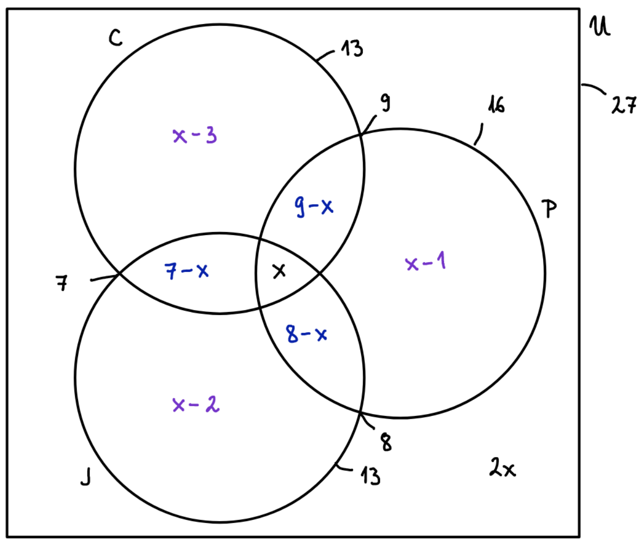
(b) Koliko študentov zna programirati v Javi in vsaj enem od ostalih dveh jezikov?

$|\mathcal{U}| = 27$ $\quad |C| = 13$ $\quad |C \cap P| = 9$ $\quad |C \cap P \cap J| = x$

$|P| = 16$ $\quad |C \cap J| = 7$ $\quad |\mathcal{U} \setminus (C \cup P \cup J)| = 2x$

$|J| = 13$ $\quad |P \cap J| = 8$

(a) Koliko študentov zna programirati v vseh treh jezikih?



$8-x,\ 9-x,\ 7-x$

$16 - 9 - (8-x) = x - 1$

$13 - 9 - (7-x) = x - 3$

$13 - 8 - (7-x) = x - 2$

$27 = |\mathcal{U}| = 2x + |C \cup P \cup J| =$

$= 2x + 13 + x - 2 + 8 - x + x - 1 =$

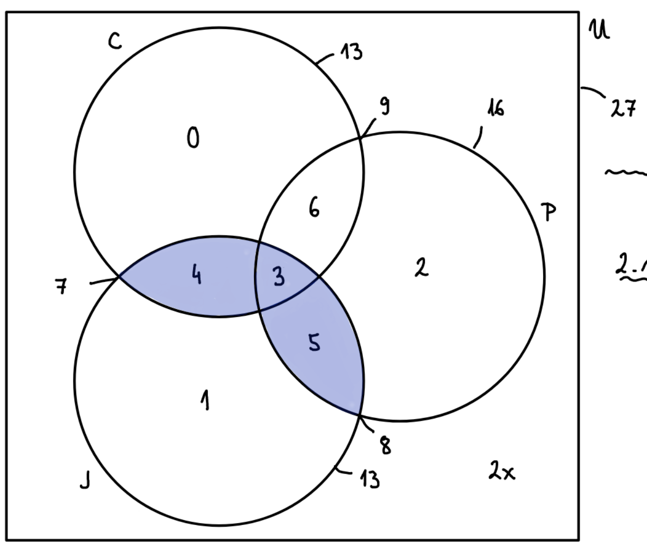
$= 3x + 18$

$3x = 27 - 18$

$3x = 9$

$\underline{\underline{x = 3}}$

(b) Koliko študentov zna programirati v Javi in vsaj enem od ostalih dveh jezikov?



$\rightsquigarrow \underline{\underline{12}}$

2. način: $|J \cap (C \cup P)| = |J \cap C \cup J \cap P| = |J \cap C| + |J \cap P| - |J \cap C \cap J \cap P| =$

$= |J \cap C| + |J \cap P| - |J \cap C \cap P| =$

$= 7 + 8 - x = 15 - 3 = \underline{\underline{12}}$