Diskretne strukture UNI
Vaje 2

1. Prepričaj se, da so spodnji pari izjavnih izrazov enakovredni. Nalogo reši s pomočjo resničnostne tabele in s poenostavljanjem.

   (a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ in $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

   (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ in $\neg p$

   (c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow (p \wedge q)))$ in 1

   (d) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg(q \vee r))$ in 0

1: $A \Leftrightarrow B \sim A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$

2: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$

3: $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \sim A \vee (B \wedge C)$

$A \wedge (B \vee C) \sim A \wedge B \vee A \wedge C$

4: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

5: $A \wedge B \wedge C \sim (A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$

6: $A \wedge B \sim B \wedge A$ $\quad$ $A \vee B \sim B \vee A$

7: $A \wedge A \sim A$ $\quad$ $A \vee A \sim A$

8: $A \vee B \vee C \sim A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$

9: $1 \wedge A \sim A$

10: $A \vee \neg A \sim 1$

11: $A \vee (A \wedge B) \sim A$

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \overset{1}{\sim} (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \vee \neg(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow r) \sim$

$\overset{2}{\sim} (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \vee \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee r) \sim$

$\overset{3,4,5}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r \sim$

$\overset{6}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee \underbrace{p \wedge p}_{p} \wedge \neg q \wedge \neg r \sim$

$\overset{7,4}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee p \wedge \neg(q \vee r)$

$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \overset{2}{\sim} \neg p \vee (q \Leftrightarrow r) \sim$

$\overset{1}{\sim} \neg p \vee ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r))$

$\overset{8}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee \neg(q \vee r)$

$\overset{9}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee 1 \wedge \neg(q \vee r)$

$\overset{10}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee (p \vee \neg p) \wedge \neg(q \vee r) \sim$

$\overset{3}{\sim} \neg p \vee (q \wedge r) \vee p \wedge \neg(q \vee r) \vee \neg p \wedge \neg(q \vee r)$

$\overset{6}{\sim} \neg p \vee \neg p \wedge \neg(q \vee r) \vee (q \wedge r) \vee p \wedge \neg(q \vee r)$

$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee p \wedge \neg(q \vee r)$

✓

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$			$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$	
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
			1.	3.	2.	2.	1.

✓

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q) \sim (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \Rightarrow \neg q) \sim$

$$\sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q) \sim$$

$$\sim \neg p \vee \underbrace{(q \wedge \neg q)}_{0} \vee p \wedge \neg q \wedge p \wedge q \sim$$

$$\sim (\underbrace{\neg p \vee 0}_{\neg p}) \vee (\underbrace{p \wedge p}_{p} \wedge \underbrace{q \wedge \neg q}_{0}) \sim \neg p \vee (\underbrace{p \wedge 0}_{0}) \sim \neg p \vee 0 \sim \neg p$$ ✓

c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow (p \wedge q))) \sim p \Rightarrow (q \Rightarrow (\neg r \vee (p \wedge q))) \sim p \Rightarrow (\neg q \vee (\neg r \vee (p \wedge q))) \sim$

$$\sim \neg p \vee (\neg q \vee \neg r \vee (p \wedge q)) \sim \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee (p \wedge q) \sim$$

$$\sim \underbrace{\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q)}_{1} \vee \neg r \sim 1 \vee \neg r \sim 1$$ ✓

p	q	r	$p \Rightarrow (q \Rightarrow (r \Rightarrow (p \wedge q)))$					
0	0	0	1					
0	0	1	1					
0	1	0	1					
0	1	1	1					
1	0	0	1	1				
1	0	1	1	1				
1	1	0	1	1		1		
1	1	1	1	1	1	1	1	1
			6.	4.	5.	2.	3.	1.

d) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg(q \vee r)) \sim p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg(q \vee r) \sim$

$$\sim p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (q \vee r)) \sim 0$$ ✓

$\boxed{A \Leftrightarrow \neg A \sim 0}$

2. S poenostavljanjem izrazov pokaži, da sta izraza enakovredna:

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r)$ in 1,

(b) $p \veebar (p \wedge q)$ in $\neg(p \Rightarrow q)$,

(c) $(p \wedge q) \veebar (\neg p \wedge r)$ in $(\neg r \vee p) \Rightarrow q \wedge p$.

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \vee r) \sim (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee r \sim$

$\sim \neg((\neg p \vee q) \wedge (p \vee r)) \vee q \vee r \sim$

$\sim \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee r) \vee q \vee r \sim$

$\sim p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge \neg r \vee q \vee r \sim$

$\sim (p \wedge \neg q) \vee q \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r \sim$

$\sim (p \vee q) \wedge \underbrace{(\neg q \vee q)}_{1} \vee (\neg p \vee r) \wedge \underbrace{(\neg r \vee r)}_{1} \sim$

$\sim (p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \sim p \vee q \vee \neg p \vee r \sim \underbrace{p \vee \neg p}_{1} \vee q \vee r \sim$

$\sim 1 \vee q \vee r \sim 1$ ✓

b) $p \veebar (p \wedge q) \sim p \wedge \neg(p \wedge q) \vee \neg p \wedge (p \wedge q) \sim p \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee \underbrace{(\neg p \wedge p)}_{0} \wedge q \sim$

$\boxed{A \veebar B \sim A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B}$

$\sim p \wedge (\neg p \vee \neg q) \sim \underbrace{p \wedge \neg p}_{0} \vee p \wedge \neg q \sim p \wedge \neg q$

$\neg(p \Rightarrow q) \sim \neg(\neg p \vee q) \sim p \wedge \neg q$ ✓

c) $(p \wedge q) \veebar (\neg p \wedge r) \sim (p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge r) \vee \neg(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge r) \sim$

$\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge r) \sim$

$\sim p \wedge q \wedge p \vee p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge \neg p \wedge r \vee \neg q \wedge \neg p \wedge r \sim$

$\sim p \wedge q \vee p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge r \vee \neg p \wedge r \wedge \neg q \sim$

$\sim p \wedge q \vee \neg p \wedge r$

✓

$(\neg r \vee p) \Rightarrow q \wedge p \sim \neg(\neg r \vee p) \vee q \wedge p \sim (r \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \sim p \wedge q \vee \neg p \wedge r$

3. Ali obstaja tak izraz I, odvisen le od spremenljivk p in q, da bo

(a) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$ protislovje?

(b) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$ tavtologija?

Za vsako možno rešitev poišči vsaj en izraz I.

a) $I = I(p,q)$

p,q	p	q	I	$(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$				
0,0	0	0	0	1	0	1	0	1
	0	0	1	1	0	1	0	1
0,1	0	1	0	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1	1	1	1
1,0	1	0	0	0	0	1	1	0
	1	0	1	0	0	0	1	1
1,1	1	1	0	0	0	1	1	0
	1	1	1	1	1	1	1	1
				2.	1.	5.	3.	4.

p	q	I
0	0	niti 0 niti 1
0	1	0
1	0	1
1	1	niti 0 niti 1

Tak izraz I ne obstaja.

b)

p	q	I	$(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

p	q	I	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0 ali 1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	0 ali 1	0	0	1	1

$I_1 \sim \neg(q \Rightarrow p)$

$I_2 \sim \neg p$

$I_3 \sim q$

$I_4 \sim p \Rightarrow q$

4. Ali obstaja tak izraz I, v katerem nastopajo spremenljivke p, q in r, da bo

(a) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \vee \neg r) \Rightarrow I)$ tavtologija?

(b) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \vee \neg r) \Rightarrow I)$ nevtralen?

a)

p	q	r	I	$(p \Rightarrow$	$(I \wedge r))$	$\Leftrightarrow$	$((q \vee$	$\neg r)$	$\Rightarrow I)$
0	0	0	0	1		0	1	1	0
0	0	0	1	1		1	0	0	1
0	0	1	0	1		0	1	1	0
0	0	1	1	1		1	0	0	1
0	1	0	0	1		0	1	1	0
0	1	0	1	1		1	1	0	1
0	1	1	0	1		0	1	1	0
0	1	1	1	1		1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
				2.	1.		4.	3.	5.

p	q	r	I	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0 ali 1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0 ali 1	0	0	1	1

Tak I obstaja. (Obstajajo 4 različni (= logično neenakovredni) izrazi, za katere dobimo tavtologijo.)

p	q	r	I	$(p \Rightarrow$	$(I \wedge r))$	$\Leftrightarrow$	$((q \vee$	$\neg r)$	$\Rightarrow I)$
0	0	0	0	1		0	1	1	0
0	0	0	1	1		1	0	0	1
0	0	1	0	1		0	1	1	0
0	0	1	1	1		1	0	0	1
0	1	0	0	1		0	1	1	0
0	1	0	1	1		1	1	0	1
0	1	1	0	1		0	1	1	0
0	1	1	1	1		1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
				2.	1.		4.	3.	5.

Protislovja ne moremo dobiti zaradi □.

Tavtologijo dobimo v 4 primerih.

Nevtralni izraz dobimo v $\underbrace{2^8}_{\text{Število vseh možnih tabel za } I = I(p,q,r)} - 4 = 256 - 4 = 252$ primerih.

p	q	$p\uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

p	q	$p\veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

p	q	$p\downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

5. Določi izjavo I tako, da bo izjava

$$(p \Rightarrow (q \downarrow r)) \veebar (I \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \uparrow p)$$

tavtologija. Dobljeno izjavo čimbolj poenostavi.

p	q	r	I	$(p \Rightarrow (q \downarrow r)) \veebar (I \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \uparrow p)$					
0	0	0	$\boxed{0}$	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	$\boxed{0}$	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	$\boxed{0}$	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	$\boxed{0}$	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1	0	1
1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
				2.	1.	6.	5.	3.	4.

p	q	r	I
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

p∧

$\wedge\neg(q\wedge r)$

$\mathrm{DNO}(I) = (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \sim$

$\sim (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge\neg q\wedge r) \vee (p\wedge q\wedge\neg r) \sim$

$\sim p\wedge\neg q\wedge\underbrace{\cancel{(\neg r\vee r)}}_{1} \vee p\wedge\neg r\wedge\underbrace{\cancel{(q\vee\neg q)}}_{1} \sim$

$\sim p\wedge\neg q \vee p\wedge\neg r \sim p\wedge(\neg q\vee\neg r) \sim p\wedge\neg(q\wedge r) \sim p\wedge(q\uparrow r)$

ali pa uganemo: $I = p\wedge\neg(q\wedge r) \sim \underline{\underline{p\wedge(q\uparrow r)}}$

6. Poišči izjavni izraz X, ki ima v resničnostni tabeli tak stolpec logičnih vrednosti:

   (a) 01000111,

   (b) 01010000.

   Dobljena izraza poenostavi.

8 vrstic → 3 spremenljivke

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\mathrm{DNO}(A) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \sim$$

$$\sim \cancel{\underbrace{(\neg p \vee p)}_{1}} \wedge (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \wedge \cancel{\underbrace{(\neg r \vee r)}_{1}} \sim$$

$$\sim \underline{\underline{(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q)}}$$

$$\mathrm{KNO}(A) \sim (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \sim$$

$$\sim (\cancel{\underbrace{(p \wedge \neg p)}_{0}} \vee (q \vee r)) \wedge (p \vee \neg q \vee \cancel{\underbrace{(r \wedge \neg r)}_{0}}) \sim$$

$$\sim (q \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \sim p \wedge q \vee \cancel{\underbrace{q \wedge \neg q}_{0}} \vee p \wedge r \vee \neg q \wedge r \sim$$

$$\sim (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \sim$$

$$\sim (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \sim \underline{\underline{(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q)}}$$

ni q ⇝ dodamo q in $\neg q$

$$\boxed{p \wedge r \sim (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)}$$

$$\boxed{A \vee (A \wedge B) \sim A}$$

p	q	r	B
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\mathrm{DNO}(B) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \sim \neg p \wedge r \wedge \cancel{\underbrace{(\neg q \vee q)}_{1}} \sim \underline{\underline{\neg p \wedge r}}$$

KNO(B) = domača naloga :)

7. Kateri izmed spodaj naštetih naborov izjavnih veznikov so polni?

(a) $\{\Rightarrow, \wedge\}$
(b) $\{\Leftrightarrow, \wedge\}$
(c) $\{\Leftrightarrow, \wedge, 0\}$
(d) $\{\uparrow\}$
(e) $\{\downarrow\}$
(f) $\{A\}$, kjer je $A(p,q,r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$
(g) $\{A, 1\}$, kjer je $A(p,q,r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$

Znani polni nabori: $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$

Če je $\mathcal{P}$ poln nabor in lahko vse veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$, je $\mathcal{N}$ poln.

(a) $\{\Rightarrow, \wedge\}$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$
0	0	1	0
1	1	1	1

Nabor ni poln, ker ohranja enice.

(b) $\{\Leftrightarrow, \wedge\}$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$
0	0	1	0
1	1	1	1

Nabor ni poln, ker ohranja enice.

(c) $\{\Leftrightarrow, \wedge, 0\}$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Ne ohranja konstant, morda je poln.

$\mathcal{P} = \{\neg, \wedge\}$ znan poln nabor

$\mathcal{N} = \{\Leftrightarrow, \wedge, 0\}$ naš nabor

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\neg p \sim p \Leftrightarrow 0$ ✓ $\qquad p \Leftrightarrow 0 \sim p \wedge 0 \vee \neg p \wedge \neg 0 \sim 0 \vee \neg p \wedge 1 \sim 0 \vee \neg p \sim \neg p$
- $\underset{v\ \mathcal{P}}{p \wedge q} \sim \underset{v\ \mathcal{N}}{p \wedge q}$ ✓ $\qquad \Rightarrow \{\Leftrightarrow, \wedge, 0\}$ je poln.

(d) $\{\uparrow\}$

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
1	1	0

Ne ohranja konstant, morda je poln.

$\mathcal{P} = \{\neg, \wedge\}$ znan poln nabor

$\mathcal{N} = \{\uparrow\}$ naš nabor

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\neg p \sim p \uparrow p$ ✓ $\qquad p \uparrow p \sim \neg(p \wedge p) \sim \neg p$
- $p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(p \uparrow q) \sim (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$ ✓ $\qquad \Rightarrow \{\uparrow\}$ je poln.

(e) $\{\downarrow\}$

p	q	$p\downarrow q$
0	0	1
1	1	0

Ne ohranja konstant, morda je poln.

$\mathcal{P} = \{\neg, \vee\}$ znan poln nabor

$\mathcal{N} = \{\downarrow\}$ naš nabor

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\neg p \sim p \downarrow p$ ✓ $\qquad p\downarrow p \sim \neg(p \vee p) \sim \neg p$
- $p \vee q \sim \neg\neg(p \vee q) \sim \neg(p\downarrow q) \sim (p\downarrow q)\downarrow(p \downarrow q)$ ✓ $\Rightarrow$ $\{\downarrow\}$ je poln.

(f) $\{A\}$, kjer je $A(p,q,r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$

$A(0,0,0) = 0 \Leftrightarrow (\neg 0 \vee \neg 0) \sim 0 \Leftrightarrow \neg 0 \sim 0 \Leftrightarrow 1 \sim 0$ Ohranja ničle, zato ni poln.

(g) $\{A, 1\}$, kjer je $A(p,q,r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$

$A(1,1,1) = 1 \Leftrightarrow (\neg 1 \vee \neg 1) \sim 1 \Leftrightarrow 0 \sim 0$

Veznik A ne ohranja enic, veznik 1 ne ohranja ničel. Torej $\{A,1\}$ ne ohranja konstant in je morda poln.

$\mathcal{P} = \{\neg, \vee\}$ znan poln nabor

$\mathcal{N} = \{A, 1\}$

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\neg p \sim A(1,p,p)$ ✓
- $p \vee q \sim A(1, \underbrace{A(1,p,p)}_{\neg p}, \underbrace{A(1,q,q)}_{\neg q})$ ✓

$\Rightarrow \{A,1\}$ je poln.

$A(p,p,p) \sim p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg p) \sim p \Leftrightarrow \neg p \sim 0$

$1 \Leftrightarrow p \sim p$

$A(1,p,p) \sim 1 \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg p) \sim \neg p \vee \neg p \sim \neg p$

$A(1,p,q) \sim 1 \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \sim \neg p \vee \neg q$

$A(1,\neg p,\neg q) \sim \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q) \sim p \vee q$

8. Za tromestni veznik V naj ima $V(p, q, r)$ nasprotno vrednost kot večina od argumentov p, q, r.

(a) Sestavi resničnostno tabelo za veznik V.

(b) Poenostavi izraze $V(p, p, p)$, $V(p, p, q)$, in $V(p, q, \neg q)$.

(c) Pokaži, da samo z veznikoma V in $\neg$ ne moremo izraziti izraza $p \wedge q$ (torej da $\{V, \neg\}$ ni poln nabor).

a)

p	q	r	$V(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

b)

p	$V(p,p,p)$
0	1
1	0

$V(p,p,p) \sim \neg p$

p	q	$V(p,p,q)$	
0	0	1	$(0,0,0)$
0	1	1	$(0,0,1)$
1	0	0	$(1,1,0)$
1	1	0	$(1,1,1)$

$V(p,p,q) \sim \neg p$

p	q	$V(p,q,\neg q)$	
0	0	1	$(0,0,1)$
0	1	1	$(0,1,0)$
1	0	0	$(1,0,1)$
1	1	0	$(1,1,0)$

$V(p,q,\neg q) \sim \neg p$

c) $\neg, V(\cdot,\cdot,\cdot), p, q \rightsquigarrow p \wedge q$?

Za $p \wedge q$ moramo uporabiti vsaj en p in vsaj en q, lahko z $\neg$. Vrstni red ni pomemben:

$$V(x,y,z) = V(x,z,y) = V(y,x,z) = \cdots$$

$x, y \in \{p, q, \neg p, \neg q\}$. $\quad 2x, y \rightsquigarrow \neg x$

$x, \neg x, y \rightsquigarrow \neg y$

npr. $V(\neg p, \neg p, q)$

$\Rightarrow$ Vsi izrazi iz $\neg, V, p, q$ ekvivalentni $\neg p$ ali $\neg q$ ali p ali q. $\Rightarrow$ Ne moremo dobiti $p \wedge q$.

2. način. $i, j, k \in \{0,1\} \Rightarrow V(i,j,k) \sim \neg V(\neg i, \neg j, \neg k) \Rightarrow$ v tabeli poljubnega izraza iz $\neg$ in V bo vedno sodo 0 in sodo 1. Ker ima $p \wedge q$ 3×0 in 1×1, ga na ta način ne moremo dobiti.

9. Veznik A je definiran s predpisom $A(p,q,r) \sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$.

(a) Samo z veznikom A zapiši izraze 1, $p \wedge q$ in $p \Rightarrow q$.

(b) Kateri izmed naborov $\{A\}$, $\{A,1\}$, $\{A,0\}$, $\{A,\Rightarrow\}$, $\{A,\veebar\}$ so polni?

a) $A(p,p,p) \sim (p\wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg p) \sim p \vee \neg p \sim 1$ $\qquad \underline{\underline{1 \sim A(p,p,p)}}$

$A(p,q,1) \sim (p\wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg 1) \sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge 0) \sim (p\wedge q) \vee 0 \sim p \wedge q$ $\qquad \underline{\underline{p\wedge q \sim A(p,q,A(p,p,p))}}$

$A(p,q,r) \sim (p \wedge q) \vee \neg(p \vee r) \sim \overbrace{p \vee r}^{p} \Rightarrow \overbrace{p \wedge q}^{q}$

$A(p,q,p) \sim p \vee p \Rightarrow p \wedge q \sim p \Rightarrow p \wedge q \sim \neg p \vee (p \wedge q) \sim \underbrace{\cancel{(\neg p \vee p)}}_{1} \wedge (\neg p \vee q) \sim \neg p \vee q \sim p \Rightarrow q$

$\underline{\underline{p \Rightarrow q \sim A(p,q,p)}}$

b) $A(1,1,1) = 1 \Rightarrow \{A\}, \{A,1\}, \{A,\Rightarrow\}$ niso polni, ker ohranjajo enice

$1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$\mathcal{N} = \{A,0\}$ ne ohranja enic (ker 0 ne ohranja enic)

$A(0,0,0) = 1 \Rightarrow \mathcal{N}$ ne ohranja ničel

} morda poln

$\mathcal{P} = \{\neg, \Rightarrow\}$

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\underline{\underline{\neg p}} \sim p \Rightarrow 0 \sim \underline{\underline{A(p,0,p)}}$
- $\underline{\underline{p \Rightarrow q \sim A(p,q,p)}}$ $\qquad \Rightarrow \{A,0\}$ je poln

$\mathcal{N} = \{A,\veebar\}$

$A(0,0,0) \sim 1 \Rightarrow \mathcal{N}$ ne ohranja ničel

$1 \veebar 1 \sim 0 \Rightarrow \mathcal{N}$ ne ohranja enic

} morda poln

$\mathcal{P} = \{\neg, \Rightarrow\}$

Veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$:

- $\underline{\underline{p \Rightarrow q \sim A(p,q,p)}}$
- $\underline{\underline{\neg p}} \sim A(p,0,p) \sim \underline{\underline{A(p, p\veebar p, p)}}$ $\qquad \Rightarrow \{A,\veebar\}$ je poln.