# Nedoločenost

**Naloga 1**
Na igralni ruleti (37 polj) je pod poljem številka 5 postavljen magnet. Verjetnost, da se kroglica ustavi na tem mestu, je dvakratnik verjetnosti za ostala mesta. Opazujemo, na katerem polju se ustavi kroglica. Koliko bitov informacije prejmemo potem, ko se v drugem poskusu kroglica ustavi na polju s številko 2?

**Rešitev**
Prejeto informacijo $I$ izračunamo po enačbi za lastno informacijo $I = -\log_2 p$, kjer je $p$ verjetnost, da se kroglica ustavi na polju s številko 2. Podatek o drugem poskusu je tukaj nepomemben, saj so meti med sabo neodvisni. $p$ izračunamo na podlagi dejstva, da je vsota verjetnosti vseh možnih izidov meta enaka 1:

$$\begin{aligned} 2p + 36p =& 1 \\ p =& \frac{1}{38} \end{aligned}$$

Uporabimo enačbo za lastno informacijo $I = -\log_2 \frac{1}{38}$ in dobimo $I = 5,2479$ bitov.

---

**Naloga 2**
Imamo pošten kovanec. Za koliko se spremeni nedoločenost meta kovanca, če predpostavimo, da v povprečju na vsakih sto metov enkrat ostane na robu?

**Rešitev**
Najprej izračunajmo nedoločenost meta kovanca, pri katerem ne predpostavimo možnosti, da lahko ostane na robu. Za ta primer uvedemo diskretno naključno spremnljivko $X_1$ in definiramo njeno diskretno verjetnostno porazdelitev $p_{X_1}$:

$$X_1 = \begin{cases} 0, & \text{če pade glava} \\ 1, & \text{če pade cifra} \end{cases}, \tag{1}$$

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{če je } x = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{če je } x = 1 \end{cases}. \tag{2}$$

Izračunajmo nedoločenost spremenljivke $X_1$:

$$\begin{aligned} H(X_1) =& -\sum_{i=1}^{2} p_{X_1}(x_i) \log_2 p_{X_1}(x_i) \\ =& -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} \\ =& 1 \text{ bit} \end{aligned}$$

Ponovimo isto še za naključno spremenljivko $X_2$, ki predstavlja met kovanca s tremi možnimi izidi: pade cifra, pade glava, ostane na robu. Verjetnost, da ostane na robu je $\frac{1}{100}$, kar pomeni, da sta verjetnosti za cifro in glavo enaki $\frac{495}{1000}$.

$$X_2 = \begin{cases} 0, & \text{če pade glava} \\ 1, & \text{če pade cifra} \\ 2, & \text{če ostane na robu} \end{cases}, \tag{3}$$

$$p_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{495}{1000}, & \text{če je } x = 0 \\ \frac{495}{1000}, & \text{če je } x = 1 \\ \frac{10}{1000}, & \text{če je } x = 2 \end{cases}. \tag{4}$$

Izračunajmo nedoločenost spremenljivke $X_2$:

$$\begin{aligned} H(X_2) &= -\sum_{i=1}^{3} p_{X_2}(x_i) \log_2 p_{X_2}(x_i) \\ &= -\frac{495}{1000}\log_2\frac{495}{1000} - \frac{495}{1000}\log_2\frac{495}{1000} - \frac{10}{1000}\log_2\frac{10}{1000} \\ &= 1,0708 \text{ bita} \end{aligned}$$

Pri nalogi nas zanima sprememba nedoločenosti $\Delta H = H_2 - H_1 = 0,0708$ bita.

---

**Naloga 3**
Metka meče dve navadni igralni kocki. Koliko manj informacije prejme Janko o izidu meta obeh kock, če mu Metka pove le vsoto pik in ne točno katere pike so padle?

**Rešitev**
Definirajmo diskretne verjetnostne porazdelitve nastopajočih naključnih spremenljivk. V tem primeru imamo dve naključni spremenljivki, ki ju opazujemo. $X_1$ naj predstavlja izid meta dveh kock, kjer opazujemo število pik na obeh kockah; $X_2$ pa naj predstavlja izid meta dveh kock, kjer opazujemo samo seštevek pik obeh kock.
Verjetnosti za posemezen izid meta za spremenljivko $X_1$ določimo preprosto: če sta kocki pošteni, so vsi izidi enako verjetni, imamo pa $6 \cdot 6 = 36$ možnih izzidov

$$p_{X_1}(x) = \left\{ \frac{1}{36};\ x \in \{1, ..., 36\} \right\}.$$

Izračunajmo nedoločenost spremenljivke $X_1$:

$$\begin{aligned} H(X_1) &= -\sum_{i=1}^{36} p_{X_1}(x_i)\log_2 p_{X_1}(x_i) \\ &= -36\frac{1}{36}\log_2\frac{1}{36} \\ &= \log_2 36 = 5,17\,\text{bita} \end{aligned}$$

Pri spremenljivki $X_2$ moramo prešteti, kolikokrat se lahko pojavi vsaka vsota pik, ko vržemo dve kocki. Možne vsote pik so $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

$$p_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}, & \text{če je } x = 2 \\ \frac{2}{36}, & \text{če je } x = 3 \\ \frac{3}{36}, & \text{če je } x = 4 \\ \frac{4}{36}, & \text{če je } x = 5 \\ \frac{5}{36}, & \text{če je } x = 6 \\ \frac{6}{36}, & \text{če je } x = 7 \\ \frac{5}{36}, & \text{če je } x = 8 \\ \frac{4}{36}, & \text{če je } x = 9 \\ \frac{3}{36}, & \text{če je } x = 10 \\ \frac{2}{36}, & \text{če je } x = 11 \\ \frac{1}{36}, & \text{če je } x = 12 \end{cases} . \tag{5}$$

*Kdor je že igral igro "Naseljenci otoka Katan", to verjetnostno porazdelitev zelo dobro pozna :)*

Izračunajmo nedoločenost spremenljivke $X_2$:

$$\begin{aligned} H(X_2) &= -\sum_{i=1}^{11} p_{X_2}(x_i)\log_2 p_{X_2}(x_i) \\ &= -\frac{1}{36}\log_2\frac{1}{36} - \frac{2}{36}\log_2\frac{2}{36} - \frac{3}{36}\log_2\frac{3}{36}\cdots \\ &= 3,27\,\text{bita} \end{aligned}$$

Razlika v prejeti informaciji je enaka razliki nedoločenosti med obema spremenljivkama $\Delta I = H_1 - H_2 = 1,9$ bita.

---

**Naloga 4**

V vreči so tri karte, prva je pobarvana črno na obeh straneh, druga je na eni strani bela na drugi črna, tretja pa je na obeh straneh bele barve. Iz vreče naključno potegnemo karto in jo postavimo na mizo. Kakšna je nedoločenost barve spodnje strani karte, če je zgornja stran karte črne barve (spodnje strani ne vidimo)?

**Rešitev**
Najprej moramo določiti verjetnosti barv na spodnji strani karte, če vemo, da je zgornja stran karte črna. Imamo tri karte:

$$\blacksquare\blacksquare \quad \blacksquare\square \quad \square\square$$

Karte z obema belima stranema ne upoštevamo, ker vemo, da je zgornja stran karte, ki je na mizi, črna. Možni sta torej dve karti: $\blacksquare\blacksquare$ in $\blacksquare\square$. Ker je zgornja stran karte črna, ostanejo naslednje možnosti za barvo spodnje strani: $\blacksquare$, $\blacksquare$ in $\square$. Diskretna verjetnostna porazdelitev barve spodnje strani je torej $p_B(x) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Sedaj lahko izračunamo nedoločenost barve spodnje strani karte:

$$\begin{aligned} H(B) &= -\sum_{i=1}^{2} p_B(x_i) \log_2 p_B(x_i) \\ &= -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} \\ &= 0,92 \text{ bita} \end{aligned}$$

---

**Naloga 5**
V baru gledate tekmo 1. slovenske nogometne lige med NK Maribor in NK Olimpija in opazite, da je nekdo zagret navijač Maribora. Kolikšna je nedoločenost kraja bivanja omenjenega navijača? Predpostavite naslednje: verjetnost, da je naključna oseba v baru Mariborčan, je 1/20; verjetnost, da je naključen Mariborčan zagret navijač NK Maribor, je 7/10; verjetnost, da naključna oseba, ki ni Mariborčan, navija za NK Maribor, je 1/10.

**Rešitev**
Podane imamo naslednje verjetnosti (oznake: M – Mariborčan, NNKM – navijač NK Maribor):

$$\begin{aligned} p(M) &= \frac{1}{20}, \\ p(NNKM|M) &= \frac{7}{10}, \\ p(NNKM|\neg M) &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Zanima nas nedoločenost kraja bivanja nekoga, ki je navijač NK Maribor. Najprej moramo izračunati verjetnosti $p(M|NNKM)$ in $p(\neg M|NNKM)$. Tukaj lahko uporabimo Bayesov teorem:

$$
\begin{aligned}
p(M|NNKM) =& \frac{p(NNKM|M)p(M)}{p(NNKM)} \\
=& \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{20}}{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \cdot \frac{19}{20}} = \frac{7}{26} \\
p(\neg M|NNKM) =& 1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}
\end{aligned}
$$

Izračunamo nedoločenost:

$$
\begin{aligned}
H(kraj|NNKM) =& -\frac{7}{26}\log_2\frac{7}{26} - \frac{19}{26}\log_2\frac{19}{26} \\
=& 0,84 \text{ bita}
\end{aligned}
$$

---