# OSNOVE UMETNE INTELIGENCE 2022/23

neinformirani preiskovalni algoritmi (ID, BS, UCS) informirani preiskovalni algoritmi (A\*)

# Pridobljeno znanje s prejšnjih predavanj

#### strojno učenje

nenadzorovano učenje: metoda k-voditeljev

#### preiskovanje

- definicija in cilji področja
- primeri umetnih in realnih problemov
- iskanje v širino
  - strategija: razvij najbolj plitvo še nerazvito vozlišče (FIFO)
  - možnosti za detekcijo ciljnega vozlišča (ob generiranju, ob razvijanju)
  - pomen preprečevanja ciklov in zaznavanje že obiskanih vozlišč
  - popoln, optimalen, časovna zahtevnost  $O(b^d)$ , prostorska zahtevnost  $O(b^d)$

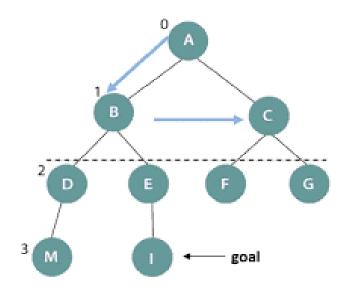
#### iskanje v globino

- strategija: najprej razvij najglobje še nerazvito vozlišče (LIFO)
- nepopoln, neoptimalen, časovna zahtevnost  $O(b^{max})$ , prostorska zahtevnost O(bm)

# Iskanje v globino - izboljšave

- iskanje s sestopanjem (backtracking search):
  - namesto vseh naslednikov generiramo samo enega po enega
  - $\rightarrow$  prostorska zahtevnost O(m)
- iskanje z omejitvijo globine (*depth-limited search*):
  - vnaprej definiramo mejo globine l
  - vozlišča na globini l obravnavamo, kot da nimajo naslednikov
  - če izberemo l < d, je algoritem nepopoln (ne najde rešitve)
  - če izberemo l > d, je algoritem popoln, a neoptimalen
  - časovna zahtevnost je  $O(b^l)$ , prostorska pa O(bl)
  - pri določitvi l pomaga domensko znanje

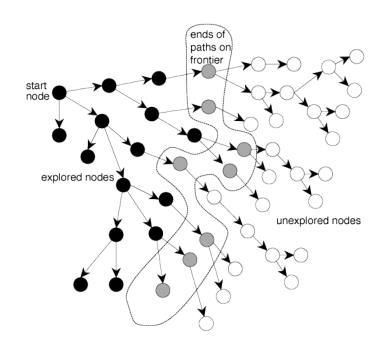
iterativno poglabljanje (angl. Iterative Deepening Search (IDS))



# **Pregled**

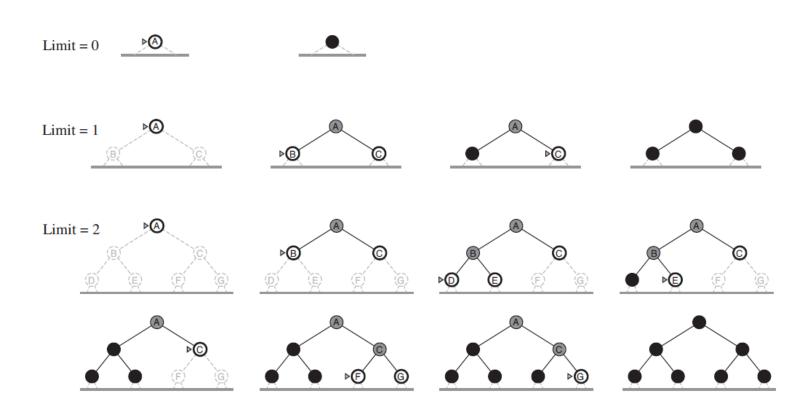
- preiskovanje prostora stanj
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
    - iskanje v širino
    - iskanje v globino
    - iterativno poglabljanje
    - dvosmerno iskanje
    - cenovno optimalno iskanje
  - informirani preiskovalni algoritmi
    - hevristično preiskovanje (primer)
    - požrešno preiskovanje
    - A\*
    - IDA\*
    - kakovost hevrističnih funkcij





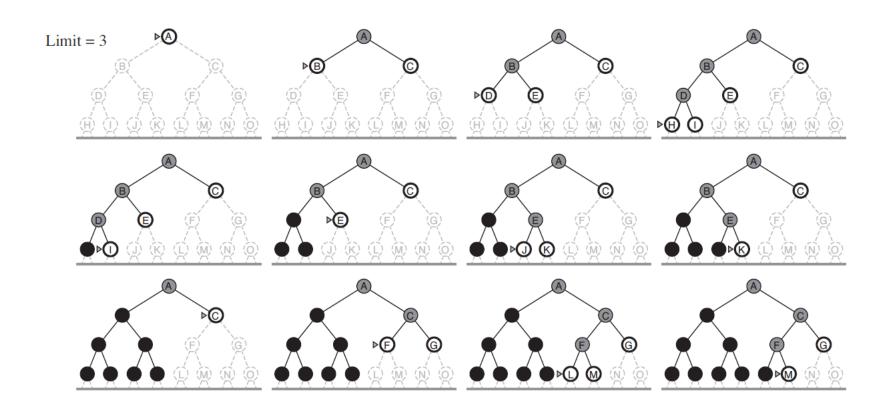
# Iterativno poglabljanje

- problem globinsko omejenega iskanja v globino je nastavitev meje l
- rešitev: iterativno poglabljanje (iterative deepening depth-first search)
- strategija: začnimo z nizko mejo limit in jo povečujmo za 1, dokler ne najdemo rešitve. Na vsakem koraku poženimo iskanje v globino.



# Iterativno poglabljanje

- problem globinsko omejenega iskanja v globino je nastavitev meje l
- rešitev: iterativno poglabljanje (iterative deepening depth-first search)
- strategija: začnimo z nizko mejo *limit* in jo povečujmo za 1, dokler ne najdemo rešitve. Na vsakem koraku poženimo iskanje v globino.



# Učinkovitost iterativnega poglabljanja

- POPOLNOST (angl. completeness):
  - Da.
- **OPTIMALNOST** (angl. *optimality*):
  - Da (v kolikor iščemo najkrajšo rešitev).
- ČASOVNA ZAHTEVNOST:
  - v iteracijah se ponavlja generiranje istih vozlišč znova
  - asimptotično gledano, je generirano število vozlišč enako kot pri iskanju v širino:

[b] + 
$$[b + b^2] + \cdots [b + b^2 + \cdots + b^d]$$
  
=  $db + (d-1)b^2 + \cdots + 2b^{d-1} + b^d = O(b^d)$ 

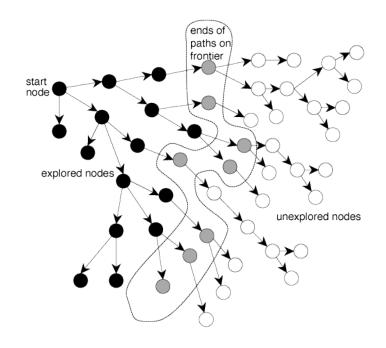
- kljub višji ceni pa je ta cena še vedno sprejemljiva, ker se največ vozlišč generira na zadnjem nivoju (npr. za b = 10, d = 5, velja: N(IDS) = 123.450, N(BFS) = 111.110)
- PROSTORSKA ZAHTEVNOST:
  - hraniti mora samo O(bd) razvitih vozlišč (linearna prostorska zahtevnost!)
- metoda torej kombinira prednosti iskanja v širino (popolnost, optimalnost) in iskanja v globino (linearna prostorska zahtevnost)



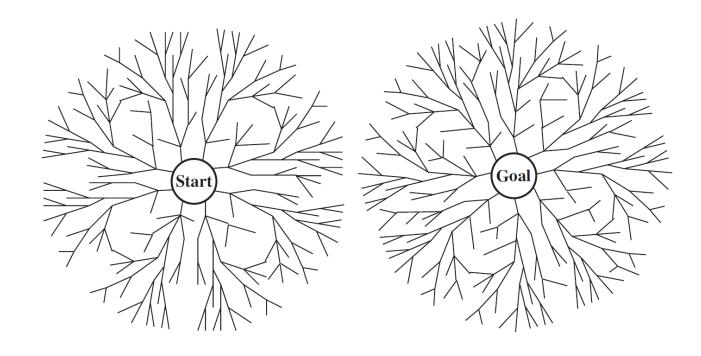
# **Pregled**

- preiskovanje prostora stanj
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
    - iskanje v širino
    - iskanje v globino
    - iterativno poglabljanje
    - dvosmerno iskanje
    - cenovno optimalno iskanje
  - informirani preiskovalni algoritmi
    - hevristično preiskovanje (primer)
    - požrešno preiskovanje
    - A\*
    - IDA\*
    - kakovost hevrističnih funkcij





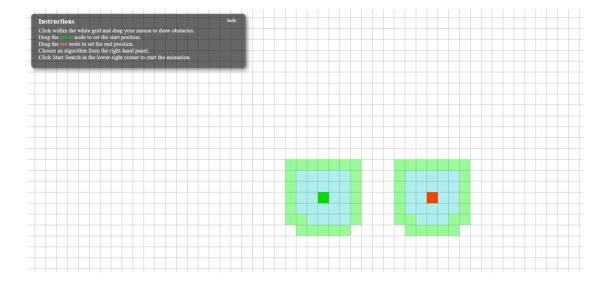
# **Dvosmerno iskanje**



- ideja: pognati vzporedni iskanji od začetnega vozlišča proti cilju in vzvratno od cilja proti začetnemu vozlišču z upanjem, da se iskanji "srečata" na polovici poti
- motivacija: zaradi znižanja globine iskanja želimo doseči časovno zahtevnost  $b^{d/2} + b^{d/2} = O(b^{d/2})$ , kar je manj kot  $O(b^d)$

### Demo

 PathFinding <a href="https://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/">https://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/</a>



# Implementacija dvosmernega iskanja

- za izvedbo vzvratnega iskanja morajo vozlišča imeti kazalec na predhodnika
- ciljno vozlišče mora biti znano
  - pri igri 8 ploščic je npr. znano, pri uganki Sudoku pa ne
- uporabimo lahko poljuben preiskovalni algoritem
  - če uporabimo iskanje v širino, najde algoritem optimalno rešitev
- cilj iskanja preverja, ali obstaja med frontama obeh iskanj presečišče
- problemski prostor lahko redefiniramo tako, da en korak iskanja v "dvosmernem" prostoru predstavlja dva koraka (od začetka proti cilju in od cilja proti začetku) v originalnem prostoru
  - če v originalnem prostoru velja



potem definiramo v novem prostoru novi vozlišči (S,E) in (S1, E1)

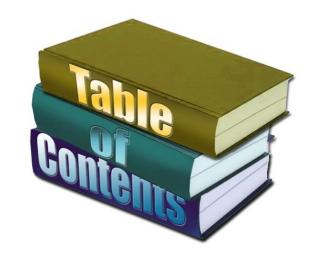
- v "dvosmernem" prostoru velja (S,E) → (S1, E1), če obstaja v "enosmernem" prostoru povezava med S → S1 in med E1 → E
- vozlišče (S,E) je v "dvosmernem" prostoru ciljno vozlišče, če velja E=S ali S → E

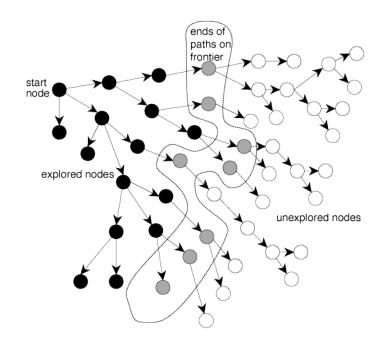
# Primerjava časovnih zahtevnosti

Kriterij	lskanje v širino	lskanje v globino	Iskanje z omejitvijo globine	lterativno poglabljanje	Dvosmerno iskanje
Popolnost	Da (če je b končen)	Ne	Ne	Da (če je b končen)	Da
Optimalnost	Da (če so cene enake)	Ne	Ne	Da (če so cene enake)	Da
Čas. zahtevnost	$\mathit{O} \big( b^d \big)$	$O(b^m)$	$O(b^l)$	$\mathit{O} \big( b^d \big)$	$O\!\left(b^{d/2}\right)$
Prost. zahtevnost	$\mathit{O} \big( b^d \big)$	O(bm)	O(bl)	O(bd)	$O\!\left(b^{d/2}\right)$

# **Pregled**

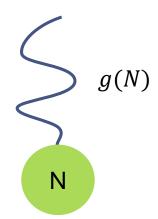
- preiskovanje prostora stanj
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
    - iskanje v širino
    - iskanje v globino
    - iterativno poglabljanje
    - dvosmerno iskanje
    - cenovno optimalno iskanje
  - informirani preiskovalni algoritmi
    - hevristično preiskovanje (primer)
    - požrešno preiskovanje
    - A\*
    - IDA\*
    - kakovost hevrističnih funkcij





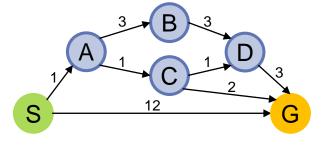
# Cenovno-optimalno iskanje

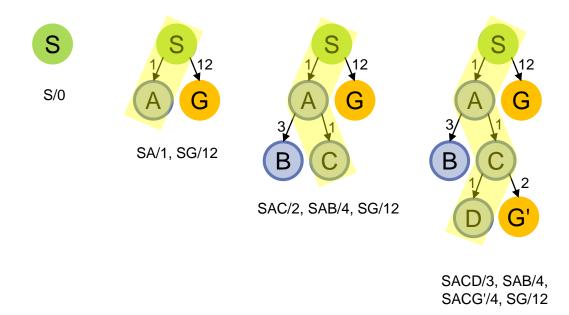
- angl. uniform-cost search (best-first search with no heuristic)
- posplošitev iskanja v širino
  - iskanje v širino je optimalno, če so cene vseh povezav enake 1
- če cene vseh povezav <u>niso enake</u>, je optimalno razviti vozlišče, ki ima najmanjšo skupno ceno dosedanje poti -g(n)
- fronta je urejena kot prioritetna vrsta
- test, ali je vozlišče ciljno, opravimo šele, ko je vozlišče na vrsti za razvijanje in ne ob generiranju vozlišča
  - zakaj?
  - ciljno vozlišče morda ni optimalno (obstaja boljša rešitev)
  - morda do najdenega optimalnega cilja vodi krajša pot



# Cenovno-optimalno iskanje







SAB/4, SACG'/4, SACDG''/6, SG/12

SAB/7, SG/12

SAB/7, SG/12

SAB/7, SG/12

rešitev: najboljša pot: SACG'/4

# Učinkovitost iskanja

- za potrebe analize predpostavimo, da je prostor stanj drevo:
  - globina ( $\underline{depth}$ ) optimalne rešitve naj bo d
  - stopnja vejanja ( $\underline{b}$ ranching factor) naj bo  $\boldsymbol{b}$ , na nivoju  $\boldsymbol{d}$  imamo torej  $b^d$  vozlišč največja globina drevesa naj bo  $\boldsymbol{max}$

  - *C*\* naj bo cena optimalne rešitve
  - $\epsilon$  naj bo najmanjša cena povezave
- **POPOLNOST** (angl. completeness):
  - Da, za cene povezav > 0.
- **OPTIMALNOST** (angl. *optimality*):
  - Da.
- **ČASOVNA in PROSTORSKA ZAHTEVNOST:** 

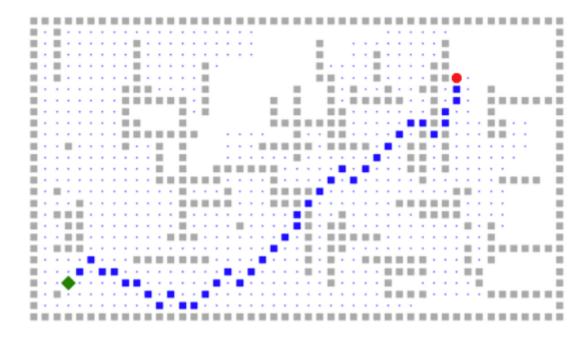
  - odvisni sta od cen poti in ne samo od globine d in vejanja b zahtevnost  $O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon\rfloor})$ , kar je lahko veliko več kot  $O(b^d)$  če so vse cene poti enake, se zahtevnost poenostavi v  $O(b^{1+d})$  zakaj  $O(b^{d+1})$  in ne  $O(b^d)$ ?



#### **Demo**

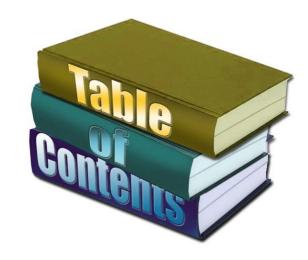
• Searching in Al <a href="https://medium.com/analytics-vidhya/searching-in-ai-e05973068c8e">https://medium.com/analytics-vidhya/searching-in-ai-e05973068c8e</a>

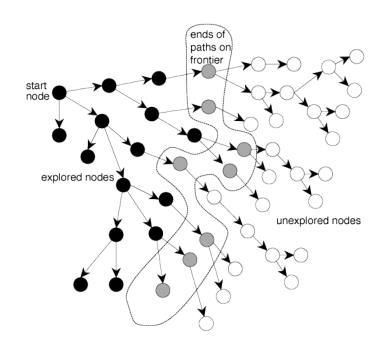
Explored: 661, Path Cost: 218, Memory: 70.148096MiB Solver: astar



# **Pregled**

- preiskovanje prostora stanj
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
    - iskanje v širino
    - iskanje v globino
    - iterativno poglabljanje
    - dvosmerno iskanje
    - cenovno optimalno iskanje
  - informirani preiskovalni algoritmi
    - hevristično preiskovanje (primer)
    - požrešno preiskovanje
    - A\*
    - IDA\*
    - kakovost hevrističnih funkcij



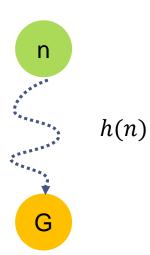


# Hevristično preiskovanje

- potreba po usmerjanju iskanja z motivacijo, da hitreje/lažje najde optimalno rešitev
- ideja: uporabimo oceno vozlišč (stanj), ki ocenjujejo obetavnost za doseganje do cilja
- hevristika (ali hevristična ocena, ugibanje) je ocenitvena funkcija za obetavnost vozlišča (najcenejše poti iz vozlišča do najbližjega cilja)

 $h: vozlišče \rightarrow \mathbb{R}$ 

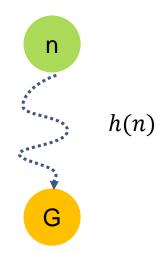
- izberemo in razvijemo vozlišče glede na najboljšo vrednost hevristike
  - nizek h nakazuje bolj obetavno vozlišče, višji h pa manj obetavno (težji problem)
  - fronta hrani vozlišča, urejena v prioritetni vrsti po obetavnosti
- primeri hevrističnih preiskovalnih algoritmov:
  - A\*
  - IDA\* (iterative deepening A\*)
  - RBFS (recursive best-first search)
  - iskanje v snopu (beam search)
  - plezanje na hrib (hill climbing)

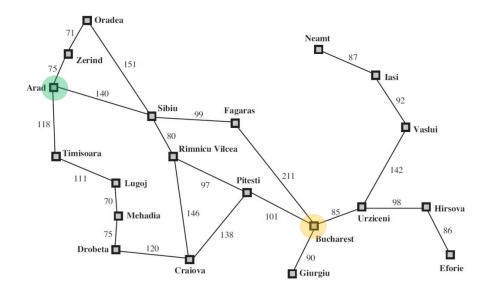


# Požrešno iskanje

- angl. greedy best-first search
- vedno razvijemo najbolj obetavno vozlišče glede na hevristično oceno
- vrednotenje vozlišča: f(n) = h(n)
- primer: iskanje optimalne poti z upoštevanjem najkrajše zračne razdalje
- zračne razdalje do cilja (Bukarešta) lahko uporabimo kot hevristične ocene:

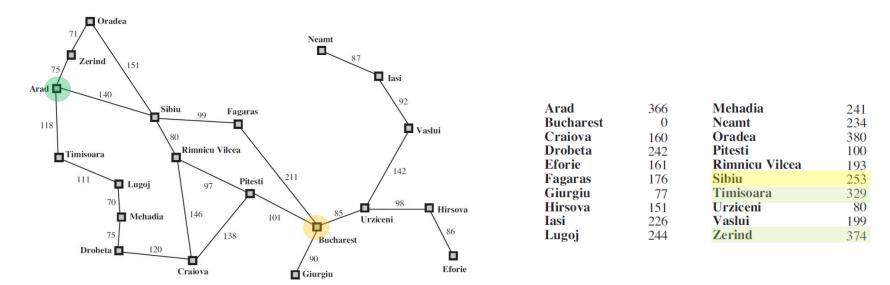
Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

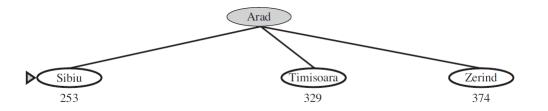


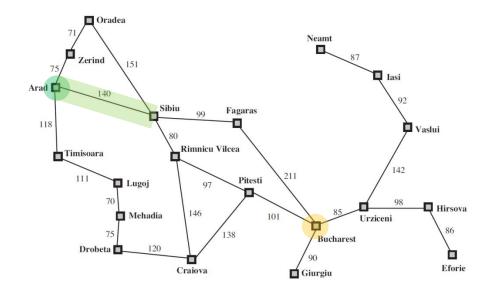


Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374



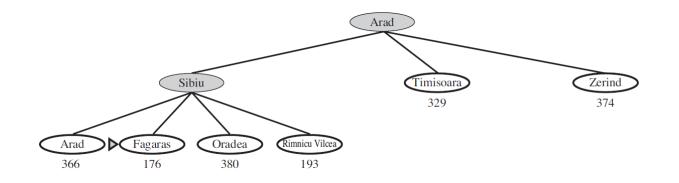


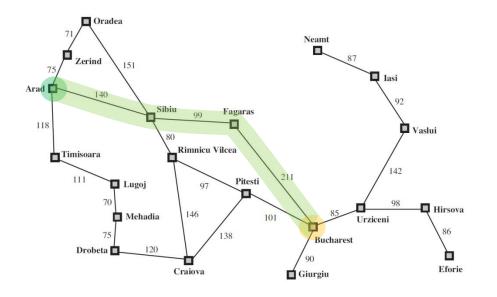




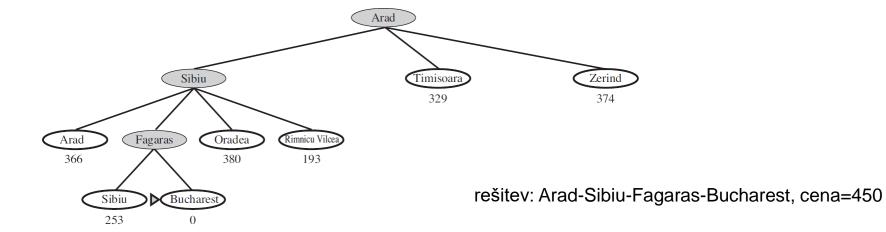
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Drobeta	242
Eforie	161
Fagaras	176
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244

Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	100
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

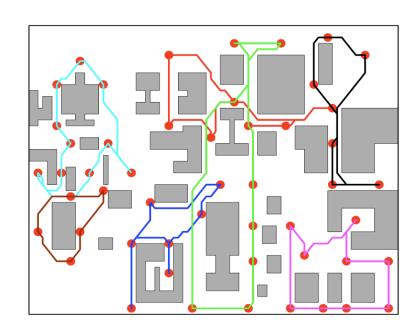


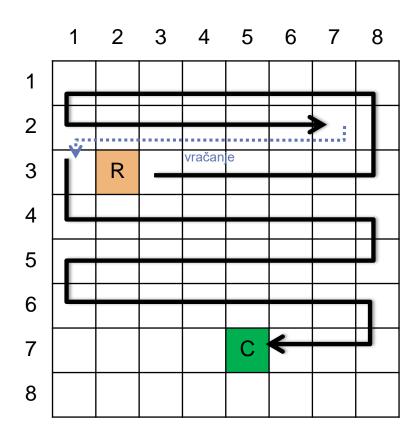


Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

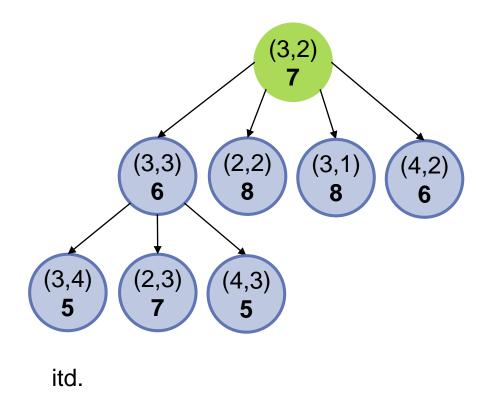


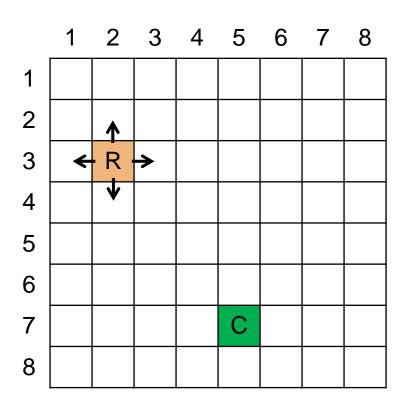
- primer 2: robotovo iskanje ciljne lokacije (Bratko, OUI, 2016/17)
- R možni premiki: 1 → , 2 ↑, 3 ← , 4 ↓
- dolžina rešitve pri **preiskovanju v globino** je: 45
- optimalna dolžina rešitve: 7





- ideja: uporabimo hevristiko, ki ocenjuje obetavnost koordinate za doseganje do cilja npr. manhattanska razdalja
- izberemo in razvijemo vozlišče glede na najmanjšo ocenjeno oceno (hevristiko)





# Učinkovitost požrešnega iskanja

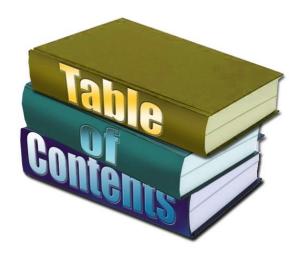
- POPOLNOST (angl. completeness):
  - Ne.
  - Možnost ciklanja v lokalnih delih grafa (primer: pri iskanju poti lasi->Fagaras se lahko zaciklamo med lasi⇔Neamt).
- OPTIMALNOST (angl. optimality):
  - Ne.
  - Ali obstaja v našem primeru iskanja najkrajše poti bolj optimalna pot do cilja?

#### ČASOVNA in PROSTORSKA ZAHTEVNOST:

- $O(b^m)$ , kjer je m največja globina drevesa
- vsa vozlišča moramo hraniti v spominu, ker so kandidati za razvijanje nadaljnje poti
- pomembnost ustrezne hevristične ocene (!)

# **Pregled**

- preiskovanje prostora stanj
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
    - iskanje v širino
    - iskanje v globino
    - iterativno poglabljanje
    - dvosmerno iskanje
    - cenovno optimalno iskanje
  - informirani preiskovalni algoritmi
    - hevristično preiskovanje (primer)
    - požrešno preiskovanje
    - A\*
    - IDA\*
    - kakovost hevrističnih funkcij

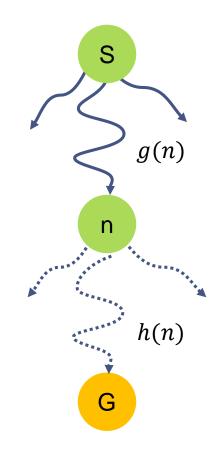


# **Algoritem A\***

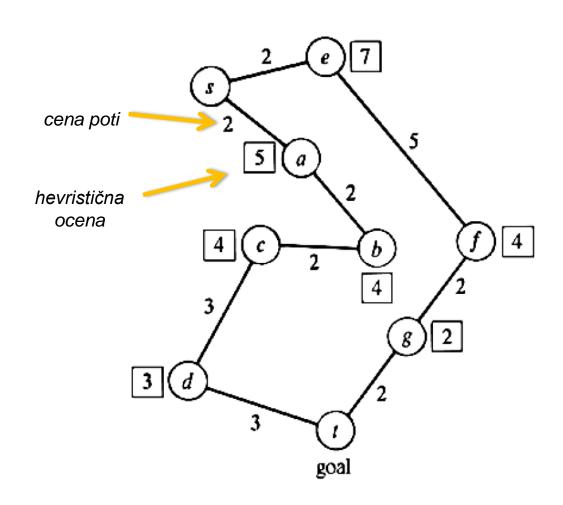
- ideja: izboljšajmo hevristično funkcijo, ker so od nje očitno odvisni uspešnost iskanja in poraba časa/prostora
- vozlišča vrednotimo glede na ceno najboljše poti skozi vozlišče n:

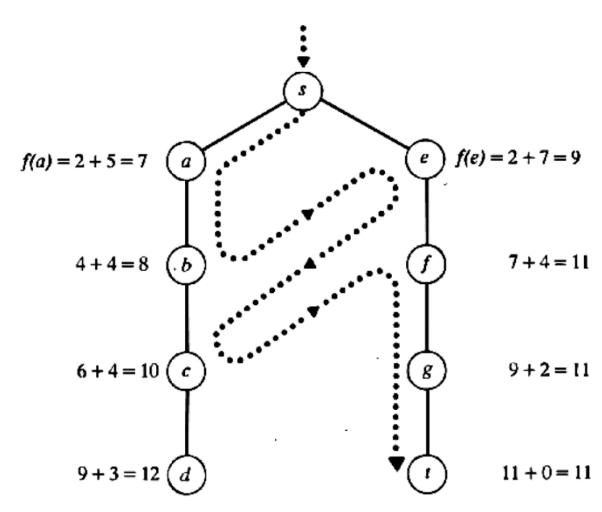
$$f(n) = g(n) + h(n)$$
  
 $g(n)$  – cena poti do  $n$  (znano)  
 $h(n)$  – cena od  $n$  do najbližjega cilja (ocena)

- vozlišča v fronti hranimo v **prioritetni vrsti**, ki je urejena naraščajoče glede na funkcijo f(n)
- pri preiskovanju lahko ponovno generiramo vozlišče n, ki je že med razvitimi vozlišči (n')
  - če je g(n') < g(n), smo našli boljšo pot do n, vozlišče dodamo v fronto
  - če je  $g(n') \ge g(n)$ , lahko ponovno generirano vozlišče n ignoriramo

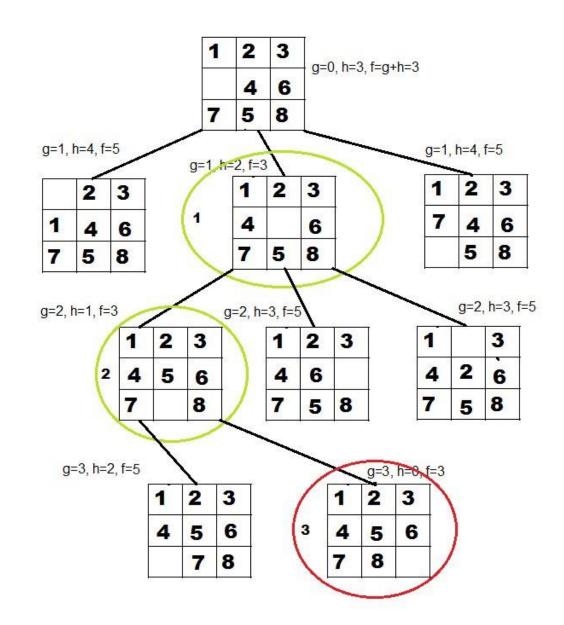


primer 1: preiskovanje manjšega grafa

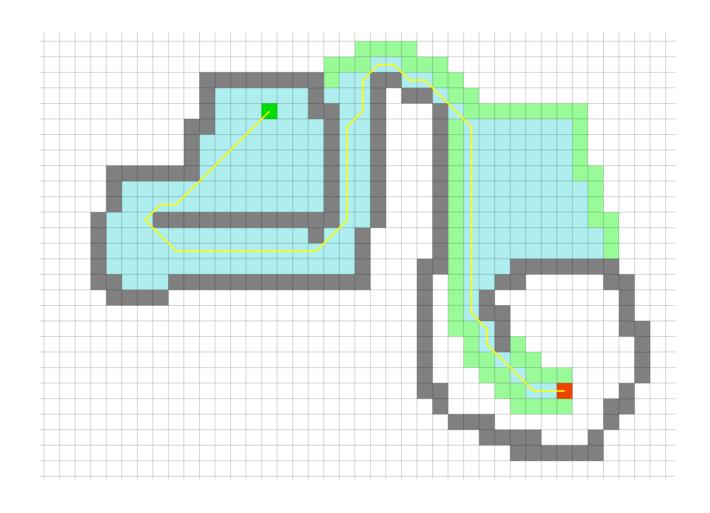


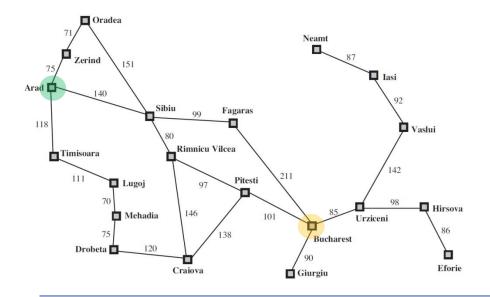


- primer 2: igra 8 ploščic
- hevristika: koliko ploščic ni na pravem mestu



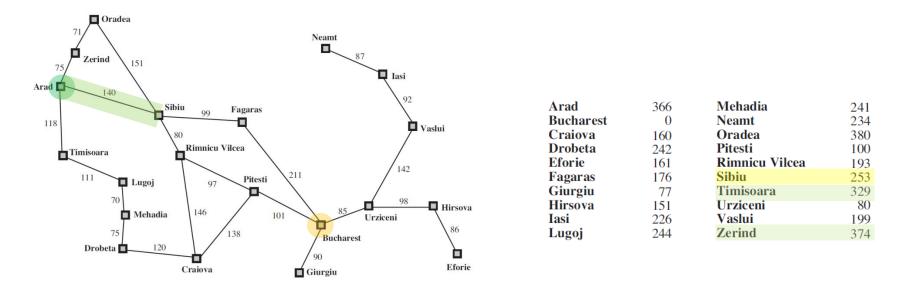
primer 3: <a href="https://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/">https://qiao.github.io/PathFinding.js/visual/</a>

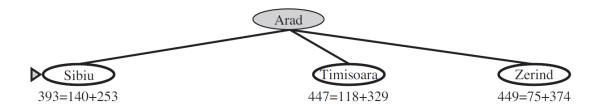


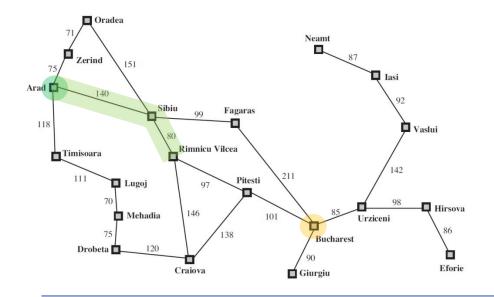


Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

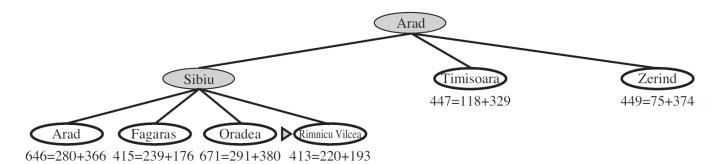


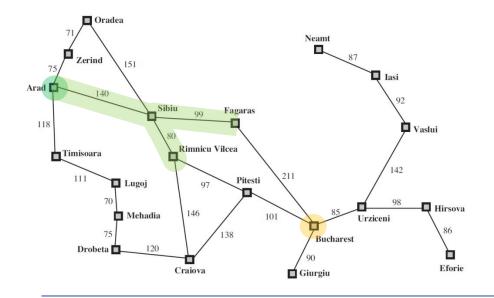






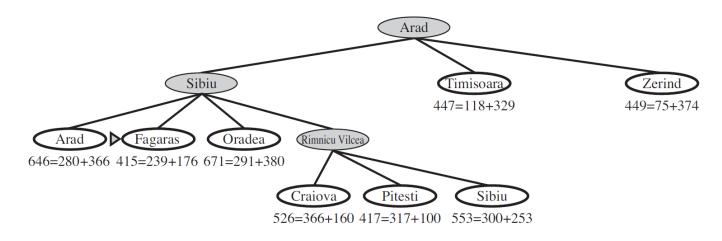
Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

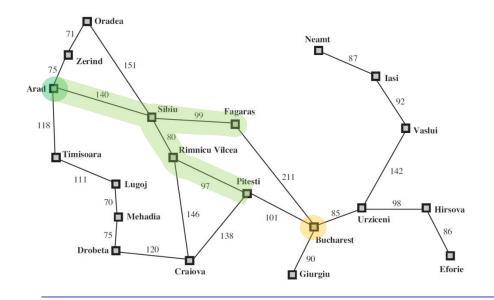




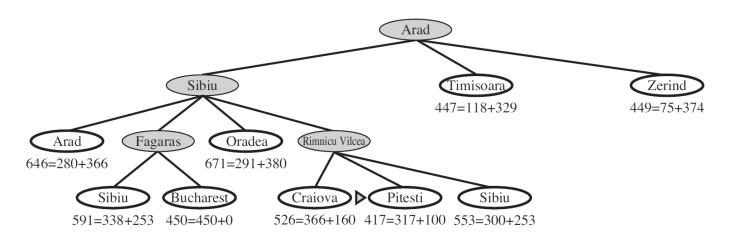
Arad	36
Bucharest	
Craiova	160
Drobeta	24
Eforie	16
Fagaras	17
Giurgiu	7'
Hirsova	15
Iasi	22
Lugoj	24

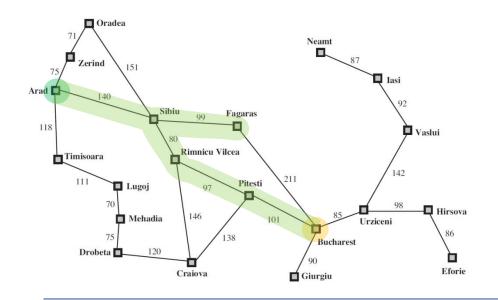
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	100
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374



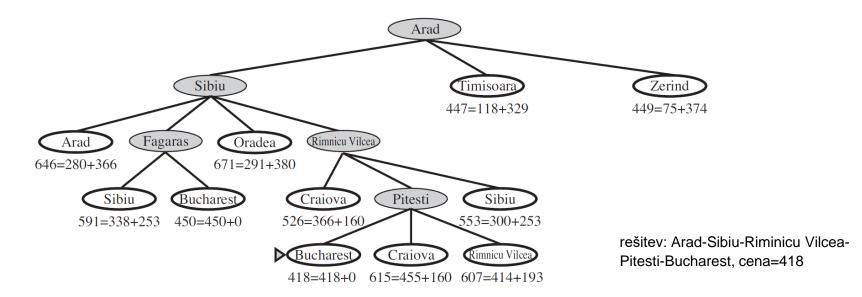


Arad	366	Mehadia
Bucharest	0	Neamt
Craiova	160	Oradea
Drobeta	242	Pitesti
Eforie	161	Rimnicu Vilce
Fagaras	176	Sibiu
Giurgiu	77	Timisoara
Hirsova	151	Urziceni
Iasi	226	Vaslui
Lugoj	244	Zerind



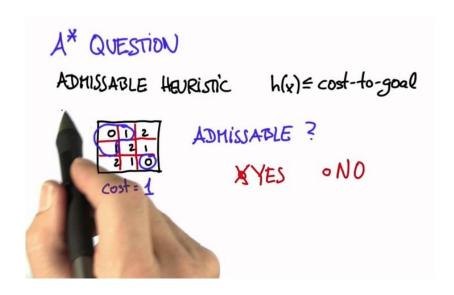


Arad	366	Mehadia	241
Bucharest	0	Neamt	234
Craiova	160	Oradea	380
Drobeta	242	Pitesti	100
Eforie	161	Rimnicu Vilcea	193
Fagaras	176	Sibiu	253
Giurgiu	77	Timisoara	329
Hirsova	151	Urziceni	80
Iasi	226	Vaslui	199
Lugoj	244	Zerind	374

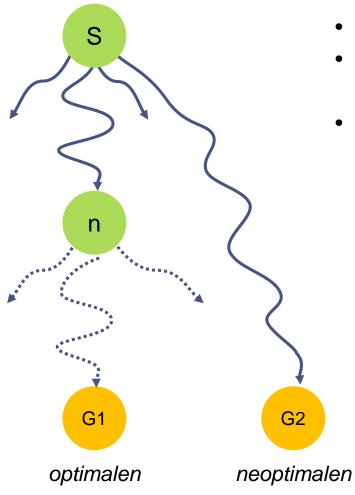


# **Popolnost in optimalnost A\***

- algoritem A\* je popoln in optimalen, če ustreza pogoju dopustnosti (angl. admissibility)
- za hevristiko h(n) pravimo, da je dopustna, če nikoli ne precenjuje cene do cilja
  - formalno: hevristika h(n) je dopustna, če za vsako vozlišče n velja  $h(n) <= h^*(n)$ , kjer je  $h^*(n)$  dejanska cena optimalne poti do cilja za vozlišče n
  - zgornje pomeni, da je hevristika h(n) "**optimistična**" (= predvideva, da je do cilja manj, kot dejansko je)
  - posledično tudi f(n) ne precenjuje cene do cilja, saj je g(n) znan, velja pa f(n) = g(n) + h(n)
  - ali je lahko h(n) = 0
    (to je tudi optimistična cenilka)?
    Da, vendar... ?
  - idealno velja  $h(n) = h^*(n)$



# Skica dokaza optimalnosti A\*



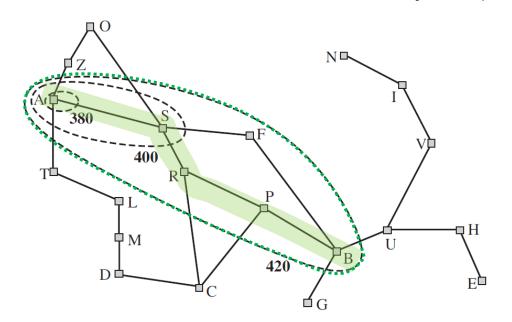
- denimo, da je G1 je optimalen cilj, G2 neoptimalen (g(G1) < g(G2))
- denimo, da je h(n) dopustna cenilka  $(h(n) \le h^*(n))$
- velja:
  - f(G2) = g(G2) + h(G2) = g(G2) + 0 = g(G2), ker je G2 cilj
  - f(G1) = g(G1), ker je G1 tudi cilj
  - velja g(G2) > g(G1), ker je G1 optimalen cilj, G2 pa neoptimalen
  - n naj bo neko vmesno vozlišče na poti do optimalnega cilja G1
  - ker je h(n) dopustna cenilka, mora veljati:

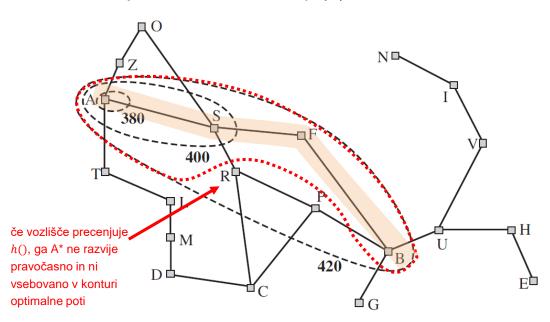
$$g(n) < g(G1) < g(G2)$$
, ker je n na poti do G1 in ker je G1 optimalen  $g(n) < f(G1) < f(G2)$ , zaradi zgornjih enakosti  $f(n) \le f(G1) < f(G2)$ , ker  $h(n) \le h^*(n) = g(G1) - g(n)$ 

 zato algoritem A\* nikoli ne bo izbral cilja G2 za razvijanje (kot končni cilj), torej bo A\* vrnil kot rešitev optimalni cilj G1

# Skica dokaza optimalnosti A\*

- še drugačen premislek o optimalnosti
- algoritem A\* razvija vozlišča glede na naraščajočo oceno vozlišč f(n). Pri tem povečuje "raziskanost" prostora v obliki **reliefnih kontur** (vsaka kontura predstavlja večjo vrednost f(n))
- če hevristika ne bi bila dopustna (in bi v nekem vozlišču precenjevala ceno do cilja), to vozlišče ne bi bilo vsebovano v konturi, ki predstavlja vrednost optimalne poti do cilja
- primer prikazuje:
  - levo: optimalna pot
  - desno: A\* bi zaobšel vozlišče R, ki je na optimalni poti, če bi imel preveliko vrednost f(n)





# Učinkovitost algoritma A\*

#### POPOLNOST in OPTIMALNOST:

Da, če je hevristika dopustna.



- odvisni sta od kakovosti hevristike h(n) (boljša hevristika manjša poraba časa in prostora)
- definirajmo:
  - h\* naj bo dejanska cena do optimalne rešitve
  - relativna napaka hevristike  $\epsilon = (h^* h)/h^*$
- zahtevnost je eksponentna glede na funkcijo relativne napake in globino rešitve:  $O(b^{f(\epsilon)\cdot d})$

#### PROSTORSKA ZAHTEVNOST:

- večji problem kot časovna zahtevnost, ker mora A\* hraniti vsa vozlišča v spominu
- nepraktično za velike probleme
- boljše alternative glede porabe prostora: algoritem IDA\* (*iterative deepening A\**), RBFS (*recursive best-first search*), MA\* (*memory-bounded A\**), SMA\* (*simplified A\**), LRTA\* (*learning real-time A\**)

