

Diskretne strukture UNI

Vaje 4

1. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo pogojnega sklepa.

- (a) $p \Rightarrow (q \vee r), \neg r \models p \Rightarrow q$
- (b) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, r \vee t \Rightarrow u \models p \Rightarrow u$
- (c) $p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow \neg p, \neg(s \wedge r) \models p \Rightarrow \neg s$
- (d) $s \wedge (p \Rightarrow t), t \Rightarrow (q \vee r) \models p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$
- (e) $\models (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(a) $p \Rightarrow (q \vee r), \neg r \models p \Rightarrow q$

1. $p \Rightarrow q \vee r$
2. $\neg r$
- 3.1. p predp. PS
- 3.2. $q \vee r$ $\text{MP}(1, 3.1)$
- 3.3. q $\text{DS}(3.2, 2)$
3. $p \Rightarrow q$ $\text{PS}(3.1, 3.3)$

Burz PS:

1. $p \Rightarrow q \vee r$
2. $\neg r$
3. $\neg p \vee (q \vee r)$ $\sim 1.$
4. $(\neg p \vee q) \vee r$ $\sim 3.$
5. $\neg p \vee q$ $\text{DS}(4, 2)$
6. $p \Rightarrow q$ $\sim 5.$

(b) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, r \vee t \Rightarrow u \models p \Rightarrow u$

1. $p \vee q \Rightarrow r \wedge s$
2. $r \vee t \Rightarrow u$
- 3.1. p predp. PS
- 3.2. $p \vee q$ $\text{Pr}(3.1, q)$
- 3.3. $r \wedge s$ $\text{MP}(1, 3.2)$
- 3.4. r $\text{Po}(3.3)$
- 3.5. $r \vee t$ $\text{Pr}(3.4, t)$
- 3.6. u $\text{MP}(2, 3.5)$
3. $p \Rightarrow u$ $\text{PS}(3.1, 3.6)$

Burz PS:

1. $p \vee q \Rightarrow r \wedge s$
2. $r \vee t \Rightarrow u$
3. $\neg(p \vee q) \vee r \wedge s$ $\sim 1.$
4. $\neg(r \vee t) \vee u$ $\sim 2.$
5. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$ $\sim 3.$
6. $(\neg r \wedge \neg t) \vee u$ $\sim 4.$
7. $(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee t \vee u)$ $\sim 5, 6.$
8. $(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \vee s) \wedge (r \vee t) \wedge (r \vee u)$ $\sim 7.$
9. $\neg p \vee r$ $\text{Po}(8.)$
10. $\neg r \vee u$ $\text{Po}(7.)$
11. $p \Rightarrow r$ $\sim 9.$
12. $r \Rightarrow u$ $\sim 10.$
13. $p \Rightarrow u$ $\text{HS}(11, 12)$

(c) $p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow \neg p, \neg(s \wedge r) \models p \Rightarrow \neg s$

1. $p \Rightarrow q \vee r$
2. $q \Rightarrow \neg p$
3. $\neg(s \wedge r)$
- 4.1. p predp. PS
- 4.2. q $\text{MT}(2, 4.1)$
- 4.3. $q \vee r$ $\text{MP}(1, 4.1)$
- 4.4. r $\text{DS}(4.3, 4.2)$
- 4.5. $\neg s \vee \neg r$ ~ 3
- 4.6. $\neg s$ $\text{DS}(4.5, 4.4)$
4. $p \Rightarrow \neg s$ $\text{PS}(4.1, 4.6)$

$$(d) \quad s \wedge (p \Rightarrow t), t \Rightarrow (q \vee r) \models p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$$

1. $s \wedge (p \Rightarrow t)$
2. $t \Rightarrow q \vee r$
- 3.1. p prudp. PS
- 3.2. $p \Rightarrow t$ Po(1)
- 3.3. t MP(3.2, 3.1)
- 3.4. $q \vee r$ MP(2, 3.3)
- 3.5. $\neg q \Rightarrow r$ $\sim 3.4.$
3. $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$ PS(3.1, 3.5)

$$(e) \quad \models (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

- 1.1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ prudp. PS1
- 1.1.1. $p \Rightarrow q$ prudp. PS2
- 1.1.1.1. p prudp. PS3
- 1.1.1.2. $q \Rightarrow r$ MP(1.1, 1.1.1.1)
- 1.1.1.3. q $\text{MP(1.1.1, 1.1.1.1)}$
- 1.1.1.4. r $\text{MP(1.1.1.2, 1.1.1.3)}$
- 1.1.2. $p \Rightarrow r$ $\text{PS3(1.1.1.1, 1.1.1.4)}$
- 1.2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ PS2(1.1.1, 1.1.2)
1. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ PS1(1.1, 1.2)

2. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo dokaza s protislovjem (*reductio ad absurdum*).

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), s \wedge q \Rightarrow t, \neg t \models \neg(p \wedge r)$

(b) $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \models r \vee s$

(c) $p \vee q, p \vee r, r \Rightarrow s, \neg(q \wedge s) \models p$

(d) $p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \models \neg(p \wedge q)$

(e) $p \Leftrightarrow q, r \vee s \Rightarrow p, s \vee t, \neg t \vee r \models q$

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), s \wedge q \Rightarrow t, \neg t \models \neg(p \wedge r)$

Brz RA:

$$\left. \begin{array}{l} 1. (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \\ 2. s \wedge q \Rightarrow t \\ 3. \neg t \end{array} \right\} \text{prudp.}$$

$$\begin{array}{ll} 4.1 \neg \neg(p \wedge r) & \text{prudp. RA} \\ 4.2 p \wedge r & \sim 4.1. \\ 4.3. p & \text{Po}(4.2) \\ 4.4. r & \text{Po}(4.2) \\ 4.5. \neg(s \wedge q) & \text{MT}(2, 3) \\ 4.6. \neg s \vee \neg q & \sim 4.5 \\ 4.7. p \Rightarrow q & \text{Po}(1) \\ 4.8. r \Rightarrow s & \text{Po}(1) \\ 4.9. q & \text{MP}(4.7, 4.3) \\ 4.10. s & \text{MP}(4.8, 4.4) \\ 4.11. \neg s & \text{DS}(4.6, 4.9) \\ 4.12. s \wedge \neg s \sim 0 & \text{Zd}(4.10, 4.11) \\ 4. \neg(p \wedge r) & \text{RA}(4.1, 4.12) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \\ 2. s \wedge q \Rightarrow t \\ 3. \neg t \end{array} \right\} \text{prudp.}$$

$$\begin{array}{ll} 4. \neg(s \wedge q) & \text{MT}(2, 3) \\ 5. \neg s \vee \neg q & \sim 4. \\ 6. p \Rightarrow q & \text{Po}(1) \\ 7. r \Rightarrow s & \text{Po}(1) \\ 8. q \Rightarrow \neg r & \sim 5. \\ 9. p \Rightarrow \neg s & \text{HS}(6, 8) \\ 10. \neg s \Rightarrow \neg r & \sim 7. \\ 11. p \Rightarrow \neg r & \text{HS}(9, 10) \\ 12. \neg p \vee \neg r & \sim 11. \\ 13. \neg(p \wedge r) & \sim 12. \end{array}$$

(b) $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \models r \vee s$

(c) $p \vee q, p \vee r, r \Rightarrow s, \neg(q \wedge s) \models p$

$$\left. \begin{array}{l} 1. p \vee q \\ 2. p \Rightarrow r \\ 3. q \Rightarrow s \end{array} \right\} \text{prudp.}$$

$$\begin{array}{ll} 4.1 \neg(r \vee s) & \text{prudp. RA} \\ 4.2. \neg r \wedge \neg s & \sim 4.1 \\ 4.3. \neg r & \text{Po}(4.2) \\ 4.4. \neg s & \text{Po}(4.2) \\ 4.5. \neg p & \text{MT}(2, 4.3) \\ 4.6. \neg q & \text{MT}(3, 4.4) \\ 4.7. q & \text{DS}(1, 4.5) \\ 4.8. q \wedge \neg q \sim 0 & \text{Zd}(4.7, 4.6) \\ 4. r \vee s & \text{RA}(4.1, 4.8) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. p \vee q \\ 2. p \vee r \\ 3. r \Rightarrow s \end{array} \right\} \text{prudp.}$$

$$\begin{array}{ll} 4. \neg(q \wedge s) & \\ 5.1. \neg p & \text{prudp. RA} \\ 5.2. r & \text{DS}(2, 5.1) \\ 5.3. s & \text{MP}(3, 5.2) \\ 5.4. \neg q \vee \neg s & \sim 4. \\ 5.5. \neg q & \text{DS}(5.4, 5.3) \\ 5.6. (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) & \sim 1. \\ 5.7. p \vee q & \text{Po}(5.6) \\ 5.8. q & \text{DS}(5.7, 5.1) \\ 5.9. q \wedge \neg q \sim 0 & \text{Zd}(5.8, 5.5) \\ 5. p & \text{RA}(5.1, 5.9) \end{array}$$

(d) $p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \models \neg(p \wedge q)$

1. $p \Rightarrow r \wedge t$	} prup.
2. $t \vee s \Rightarrow \neg q$	
3.1. $\neg \neg(p \wedge q)$	prup. RA
3.2. $p \wedge q$	~ 3.1
3.3. p	PO(3.2)
3.4. q	PO(3.2)
3.5. $r \wedge t$	MP(1,3.3)
3.6. $\neg(t \vee s)$	MT(2,3.4)
3.7. $\neg t \wedge \neg s$	~ 3.6
3.8. t	PO(3.5)
3.9. $\neg t$	PO(3.7)
3.10. $t \wedge \neg t \sim 0$	Zd(3.8,3.9)
3. $\neg(p \wedge q)$	RA(3.1,3.10)

(e) $p \Leftrightarrow q, r \vee s \Rightarrow p, s \vee t, \neg t \vee r \models q$

1. $p \Leftrightarrow q$	} prup.
2. $r \vee s \Rightarrow p$	
3. $s \vee t$	
4. $\neg t \vee r$	
5.1. $\neg q$	prup. RA
5.2. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$\sim 1.$
5.3. $p \Rightarrow q$	PO(5.2)
5.4. $\neg p$	MT(5.3,5.1)
5.5. $\neg(r \vee s)$	MT(2,5.4)
5.6. $\neg r \wedge \neg s$	~ 5.5
5.7. $\neg r$	PO(5.6)
5.8. $\neg t$	DS(4,5.7)
5.9. $\neg s$	PO(5.6)
5.10. t	DS(3,5.9)
5.11. $t \wedge \neg t \sim 0$	Zd(5.10,5.8)
5. q	RA(5.1,5.11)

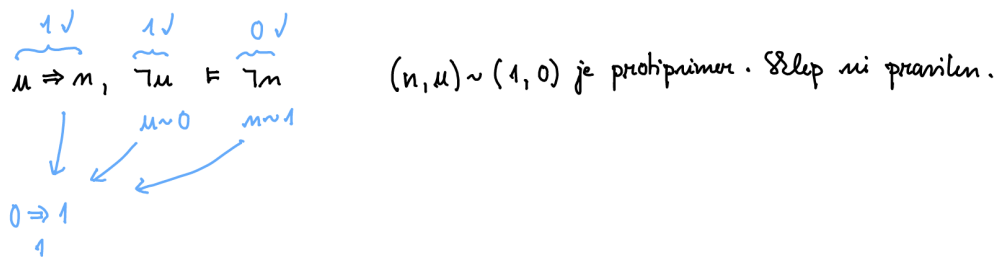
Brux RA:

1. $p \Leftrightarrow q$	} prup.
2. $r \vee s \Rightarrow p$	
3. $s \vee t$	
4. $\neg t \vee r$	
5. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$\sim 1.$
6. $p \Rightarrow q$	PO(5)
7. $q \Rightarrow p$	PO(5)
8. $r \vee s \Rightarrow q$	HS(2,6)
9. $\neg s \Rightarrow t$	$\sim 3.$
10. $t \Rightarrow r$	$\sim 4.$
11. $\neg s \Rightarrow r$	HS(9,10)
12. $s \vee r$	$\sim 11.$
13. $r \vee s$	$\sim 12.$
14. q	MP(8,13)

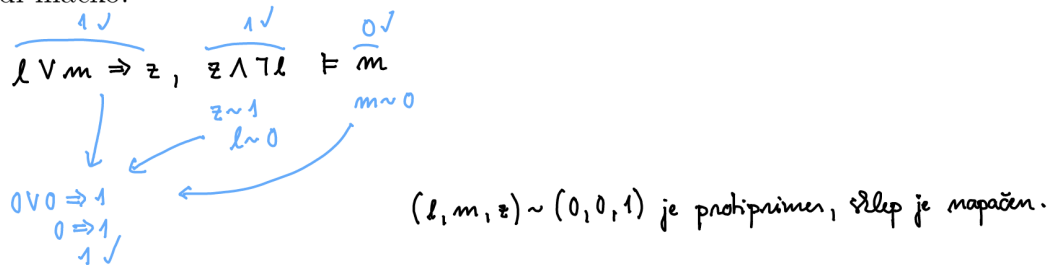
3. Prevedi spodnje sklepe v simbolični zapis in ugotovi, ali so pravilni.

- (a) Če se učim za izpit, potem ga naredim. Za izpit se nisem učil. Torej ne bom naredil.
- (b) Če pes vidi lopova ali mačko, bo zalajal. Pes zalaja, a lopova ni na spregled. Torej pes vidi mačko.
- (c) Če ni petek, grem na predavanje. Danes je petek. Torej ne grem na predavanje.
- (d) Če grem z avtobusom ali vlakom, bom zamudil na sestanek. Če grem s taksijem, bom prišel pravočasno, ampak bom bankrotiral. Če ne grem niti z avtobusom niti z vlakom, bom šel s taksijem. Ne bom zamudil na sestanek. Torej bom bankrotiral.
- (e) Če sije sonce, grem na sprehod. Če je mrzlo, pečem piškote. Če pečem piškote, potem ne grem na sprehod. Danes je mrzlo. Torej ne sije sonce.

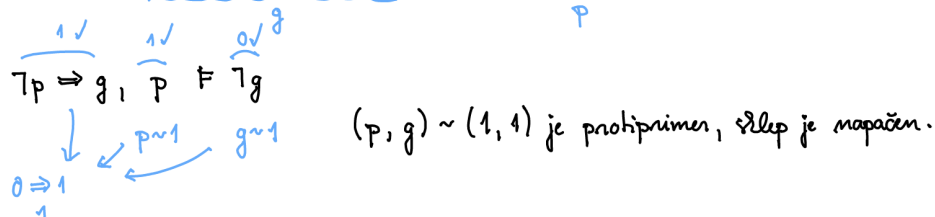
a) Če se učim za izpit, potem ga naredim. Za izpit se nisem učil. Torej ne bom naredil.



b) Če pes vidi lopova ali mačko, bo zalajal. Pes zalaja, a lopova ni na spregled. Torej pes vidi mačko.



c) Če ni petek, grem na predavanje. Danes je petek. Torej ne grem na predavanje.



d) Če grem z avtobusom ali vlakom, bom zamudil na sestanek. Če grem s taksijem, bom prišel pravočasno, ampak bom bankrotiral. Če ne grem niti z avtobusom niti z vlakom, bom šel s taksijem. Ne bom zamudil na sestanek. Torej bom bankrotiral.

$$a \vee v \Rightarrow z, t \Rightarrow \neg z \wedge b, \neg a \wedge \neg v \Rightarrow t, \neg z \models b$$

- | | |
|---|----------|
| 1. $a \vee v \Rightarrow z$ | } predp. |
| 2. $t \Rightarrow \neg z \wedge b$ | |
| 3. $\neg a \wedge \neg v \Rightarrow t$ | |
| 4. $\neg z$ | |

5. $\neg(a \vee v)$ MT(1,4)

6. $\neg a \wedge \neg v$ \sim 5.

7. t MP(3,6)

8. $\neg z \wedge b$ MP(2,7)

9. b Po(8)

Sklep je pravilen :)

e) Če sije sonce, grem na sprehod. Če je mrzlo, pečem piškote. Če pečem piškote, potem ne grem na sprehod. Danes je mrzlo. Torej ne sije sonce.

$$s \Rightarrow g, m \Rightarrow p, p \Rightarrow \neg s, m \models \neg s$$

- | | |
|---------------------------|----------|
| 1. $s \Rightarrow g$ | } predp. |
| 2. $m \Rightarrow p$ | |
| 3. $p \Rightarrow \neg s$ | |
| 4. m | |

5. p MP(2,4)

6. $\neg s$ MP(3,5)

Sklep je pravilen.

4. Preveri pravilnost sklepov.

- (a) $p \vee s \Rightarrow \neg t \wedge u, t \vee (u \Rightarrow p), p \wedge q \Rightarrow r \vee \neg u \models q \Rightarrow p \wedge r$
 (b) $p \Rightarrow t \vee r, q \Rightarrow t \vee s, r \Rightarrow \neg s \models p \wedge q \Rightarrow t$
 (c) $r \vee t \Rightarrow q \wedge s, \neg t \vee u \Rightarrow r, s \Leftrightarrow p \models \neg r \Rightarrow p$
 (d) $p \vee t, t \vee u \Rightarrow r \vee s, t \Rightarrow \neg s \models p$
 (e) $\neg p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \models p \vee \neg q$
 (f) $p \wedge q \Rightarrow \neg t, s \vee t, q \wedge r \models p \Rightarrow r \wedge s$
 (g) $p \Rightarrow (q \Rightarrow s), p \Rightarrow (r \Rightarrow t), \neg t \vee \neg s \models p \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$
 (h) $(r \wedge t) \vee q, r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s \models q$
 (i) $(r \wedge t) \vee q, r \vee \neg t \Rightarrow \neg p \wedge s \models p \Rightarrow q$
 (j) $t \Rightarrow p, t \vee q \vee r, r \Rightarrow (p \vee t) \models p \vee q$
 (k) $t \Rightarrow p, t \vee q \vee r, r \Rightarrow (p \vee t) \models p$
 (l) $p \vee t, t \vee u \Rightarrow r \vee s, t \Rightarrow \neg s \models p \vee r$
 (m) $p \vee t, t \vee u \Rightarrow r \vee s, t \Rightarrow \neg s \models p$

(a) $p \vee s \Rightarrow \neg t \wedge u, t \vee (u \Rightarrow p), p \wedge q \Rightarrow r \vee \neg u \models q \Rightarrow p \wedge r$

Handwritten analysis for (a):

- Truth values: $p \sim 0, s \sim 0, t \sim 1, u \sim 0$ (from $s \Rightarrow \neg t \wedge u$ and $t \vee (u \Rightarrow p)$)
- From $t \vee (u \Rightarrow p)$: $t \sim 1, u \sim 0 \mid 1$ ali $t \sim 0, u \sim 0$
- From $p \wedge q \Rightarrow r \vee \neg u$: $0 \Rightarrow \checkmark$
- From $q \Rightarrow p \wedge r$: $1 \Rightarrow 0$ (since $q \sim 1, p \sim 0, r \sim 0$)
- Conclusion: $(p, q, r, s, t, u) \sim (0, 1, 0, 0, 1, 0)$ je protiprimer, sklep je napačen.

(b) $p \Rightarrow t \vee r, q \Rightarrow t \vee s, r \Rightarrow \neg s \models p \wedge q \Rightarrow t$

1. $p \Rightarrow t \vee r$
 2. $q \Rightarrow t \vee s$
 3. $r \Rightarrow \neg s$

predp.

4.1. $p \wedge q$ predp. PS
 4.2. p Po(4.1)
 4.3. q Po(4.1)
 4.4. $t \vee r$ MP(4.1, 4.2)
 4.5. $t \vee s$ MP(2, 4.3)
 4.6. $\neg r \vee \neg s$ $\sim 3.$
 4.7. $(t \vee r) \wedge (t \vee s)$ Zd(4.5, 4.6)
 4.8. $t \vee (r \wedge s)$ ~ 4.7
 4.9. $\neg (r \wedge s)$ ~ 4.6
 4.10. t DS(4.8, 4.9)

4. $p \wedge q \Rightarrow t$ PS(4.1, 4.10)

(c) $r \vee t \Rightarrow q \wedge s, \neg t \vee u \Rightarrow r, s \Leftrightarrow p \models \neg r \Rightarrow p$

1. $r \vee t \Rightarrow q \wedge s$
 2. $\neg t \vee u \Rightarrow r$
 3. $s \Leftrightarrow p$

predp.

4.1. $\neg r$ predp. PS
 4.2. $\neg (\neg t \vee u)$ MT(2, 4.1)
 4.3. $t \wedge \neg u$ ~ 4.2
 4.4. t Po(4.3)
 4.5. $r \vee t$ Pn(4.4, r)
 4.6. $q \wedge s$ MP(4.1, 4.5)
 4.7. s Po(4.6)
 4.8. $(s \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow s)$ $\sim 3.$
 4.9. $s \Rightarrow p$ Po(4.8)
 4.10. p MP(4.9, 4.7)

4. $\neg r \Rightarrow p$ PS(4.1, 4.10)

(d) $p \vee t, t \vee u \Rightarrow r \vee s, t \Rightarrow \neg s \models p$

$t \sim 1$
 $p \sim 0$
 $1 \vee u \Rightarrow r \vee 0$
 $1 \Rightarrow r$
 $r \sim 1$
 $s \sim 0$
 $p \sim 0$
 $\mu \sim 0/1$

Obstaja protiprimer, sklep je napačen.

$(p, r, s, t, u) \sim (0, 1, 0, 1, 0)$

(e) $\neg p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \models p \vee \neg q$

1. $\neg p \Rightarrow r \wedge t$
 2. $t \vee s \Rightarrow \neg q$ } predp.
 3.1. $\neg(p \vee \neg q)$ predp. RA
 3.2. $\neg p \wedge q$ ~ 3.1.
 3.3. $\neg p$ Po(3.2)
 3.4. q Po(3.2)
 3.5. $r \wedge t$ MP(1, 3.3)
 3.6. $\neg(t \vee s)$ MT(2, 3.4)
 3.7. $\neg t \wedge \neg s$ ~ 3.6
 3.8. t Po(3.5)
 3.9. $\neg t$ Po(3.7)
 3.10. $t \wedge \neg t \sim 0$ Zd(3.8, 3.9)
 3. $p \vee \neg q$ RA(3.1, 3.10)

(j) $t \Rightarrow p, t \vee q \vee r, r \Rightarrow (p \vee t) \models p \vee q$

1. $t \Rightarrow p$
 2. $t \vee q \vee r$ } predp.
 3. $r \Rightarrow p \vee t$
 4.1. $\neg(p \vee q)$ predp. RA
 4.2. $\neg p \wedge \neg q$ ~ 4.1
 4.3. $\neg p$ Po(4.2)
 4.4. $\neg q$ Po(4.2)
 4.5. $\neg t$ MT(1, 4.3)
 4.6. $(t \vee r) \vee q$ ~ 2.
 4.7. $t \vee r$ DS(4.6, 4.4)
 4.8. $\neg t \Rightarrow r$ ~ 4.7.
 4.9. $\neg t \Rightarrow p \vee t$ HS(4.8, 3)
 4.10. $p \vee t$ MP(4.9, 4.5)
 4.11. t DS(4.10, 4.3)
 4.12. $t \wedge \neg t \sim 0$ Zd(4.11, 4.5)
 4. $p \vee q$ RA(4.1, 4.12)