

**Osnove matematične analize: predrok**

8. januar 2021

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov (kalkulator, telefon) ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

**Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!**

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
$\Sigma$	

**1. naloga (30 točk)**

Naj bo zaporedje  $(a_n)$  podano z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

z začetnim členom  $a_1 = 1$ .

**a) (20 točk)** Grafično predstavi člene danega zaporedja s pomočjo grafa funkcij  $f(x) = x$  in  $g(x) = \frac{x-1}{x+3}$ , pri čemer natančno nariši presečišče teh dveh krivulj. Ali je zaporedje omejeno? Ali je monotono? Odgovora dokaži z uporabo indukcije.

**b) (10 točk)** Ali je dano zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj njegovo limto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Na kratko argumentiraj, če se odgovor na zadnje vprašanje kaj spremeni, če je začetni člen  $a_1$  poljubno nenegativno število. Kaj pa, če je  $a_1 = -2$ ? (Namig glede čisto zadnjega vprašanja: izračunaj prvih par členov zaporedja.)

**2. naloga (30 točk)**

Temperatura v ravnini je podana s funkcijo  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$T(x, y) = e^{-3x^2 - 6y^2 + 6}.$$

**a) (15 točk)** Zapiši enačbi nivojnic za nivoja  $c = 1$  in  $c = e^3$  ter obe nariši v isti koordinatni sistem.

**b) (5 točk)** Izračunaj temperaturni gradient  $(\text{grad}T)(x, y)$ .

**c) (10 točk)** Iz točke  $P(1, 1)$  se malo premaknemo v smeri vektorja  $(4, -3)$ . Bo pri tem temperatura narasla ali padla?

### 3. naloga (30 točk)

Dani sta funkciji  $f$  in  $g$

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2}) \\g(x) &= \cos(x)e^{\sin(x)}\end{aligned}$$

a) (8 točk) Izračunaj nedoločeni integral funkcije  $f$ .

b) (14 točk) Izračunaj nedoločeni integral funkcije  $g$ .

c) (8 točk) Izračunaj ploščino omejena lika, ki ga omejujeta funkciji  $f$  in  $g$ . Če v rezultatu nastopa recimo  $e$  ali  $\pi$ , ga pusti v taki obliki.

*Nasvet: Pri določanju mej za ustrezní integral oziroma reševanju enačbe  $f(x) = g(x)$  je dovolj pogledati, kje so ničle funkcij  $f$  in  $g$ .*