Diskretne strukture UNI
Vaje 5

1. Naj bo področje pogovora naravna števila. Dana sta predikata

$$\begin{aligned} P(x):&\quad x \text{ je praštevilo.}\\ D(x,y):&\quad \text{število } x \text{ deli število } y \end{aligned}$$

Določi logične vrednosti formul

(a) $A = \forall x(P(x) \vee D(2,x))$,

(b) $B = \exists x(P(x) \wedge D(2,x))$,

(c) $C = \exists x(P(x) \wedge D(5,x))$,

(d) $D = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg D(10,x))$,

(e) $E = \forall x(D(4,x) \Rightarrow D(2,x))$,

(f) $F = \forall x \exists y(P(y) \wedge D(y,x))$,

(g) $G = \exists x \forall y(D(x,y) \Rightarrow \neg P(y))$,

(h) $H = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y,x))$.

Zapiši še negacije formul.

(a) $A = \forall x(P(x) \vee D(2,x))$ = Za vsako naravno število x velja, da je praštevilo ali sodo. ~ 0 → protiprimer

npr. $x = 9$ ni niti praštevilo niti sodo

$\neg A = \neg \forall x (P(x) \vee D(2,x)) \sim \exists x \neg (P(x) \vee D(2,x)) = \exists x (\neg P(x) \wedge \neg D(2,x))$

= Obstaja $x \in \mathbb{N}$, ki ni niti praštevilo niti sodo. ~ 1 → primer

npr. $x = 9$

(b) $B = \exists x(P(x) \wedge D(2,x))$ = Obstaja $x \in \mathbb{N}$, ki je praštevilo in deljivo z 2. = Obstaja sodo praštevilo. ~ 1

primer ← npr. $x = 2$

$\neg B = \neg \exists x (P(x) \wedge D(2,x)) \sim \forall x \neg (P(x) \wedge D(2,x)) \sim \forall x (\neg P(x) \vee \neg D(2,x)) \sim \forall x (P(x) \Rightarrow \neg D(2,x))$

= Vsak $x \in \mathbb{N}$ ni praštevilo ali pa ni sodo. = Če je $x \in \mathbb{N}$ praštevilo, potem ni sodo.

= Vsa praštevila so liha. ~ 0 → protiprimer

npr. $x = 2$

(c) $C = \exists x(P(x) \wedge D(5,x))$ = Obstaja praštevilo, ki je deljivo s 5. ~ 1

npr. $x = 5$

$\neg C = \forall x (\neg P(x) \vee \neg D(5,x)) \sim \forall x (P(x) \Rightarrow \neg D(5,x))$ = Praštevila niso deljiva s 5. ~ 0

npr. $x = 5$

(d) $D = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg D(10,x))$ ~ Če je $x \in \mathbb{N}$ praštevilo, potem ni deljivo z 10. ~ 1

$\sim \forall x (D(10,x) \Rightarrow \neg P(x))$

$\neg D \sim \neg \forall x (\neg P(x) \vee \neg D(10,x)) \sim \exists x (P(x) \wedge D(10,x))$ =

= Obstaja praštevilo, ki je deljivo z 10. ~ 0 → DOKAZ.

★ Naj bo $x \in \mathbb{N}$ in 10 deli x. Potem je $x = 10k = 2 \cdot 5 \cdot k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Zato $2 \mid x$ in $5 \mid x$. Ker ima x vsaj 3 delitelje (1, 2 in 5), ni praštevilo. ■

(e) $E = \forall x(D(4,x) \Rightarrow D(2,x)) \sim$ Vsak večkratnik 4 je sodo število. ~ 1

$\neg E \sim \neg \forall x(\neg D(4,x) \vee D(2,x)) \sim \exists x(D(4,x) \wedge \neg D(2,x)) =$

$=$ Obstaja večkratnik 4, ki ni sodo število. ~ 0

DOKAZ.
Naj bo $x \in \mathbb{N}$ poljuben večkratnik 4. Potem je $x = 4 \cdot k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$ in zato $x = 2 \cdot (2k) =$ $= 2l$ za nek $l \in \mathbb{Z}$. Torej je x sodo. ■

(f) $F = \forall x \exists y(P(y) \wedge D(y,x)) =$ Za vsak $x \in \mathbb{N}$ obstaja $y \in \mathbb{N}$, ki je praštevilo in deli x.

$=$ Vsako naravno število ima praštevilski delitelj. ~ 0

npr. $x = 1$ nima praštevilskih deliteljev

$\neg F = \neg \forall x \exists y(P(y) \wedge D(y,x)) \sim \exists x \neg \exists y(P(y) \wedge D(y,x)) \sim$

$\sim \exists x \forall y \neg(P(y) \wedge D(y,x)) \sim \exists x \forall y(\neg P(y) \vee \neg D(y,x)) \sim 1$

(g) $G = \exists x \forall y(D(x,y) \Rightarrow \neg P(y)) \sim$ Obstaja $x \in \mathbb{N}$, tako da za vse $y \in \mathbb{N}$ velja: če x deli y, potem y ni praštevilo. ~ 1

npr. $x = 10$

$\neg G \sim \forall x \exists y \neg(\neg D(x,y) \vee \neg P(y)) \sim \forall x \exists y(D(x,y) \wedge P(y)) \sim 0$

DOKAZ.
glej ★.

(h) $H = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y,x)) \sim \forall x \exists y(\neg P(x) \vee P(y) \wedge D(y,x)) =$

$=$ Za vse $x \in \mathbb{N}$ obstaja $y \in \mathbb{N}$, da velja: če je x praštevilo, potem je y praštevilo, ki deli x. ~ 1

DOKAZ.
Naj bo x poljuben. Če je $x \in \mathbb{P}$, potem za $y = x$ velja, da je $y \in \mathbb{P}$ in y deli x.
Če $x \notin \mathbb{P}$, je avtomatično $H \sim 1$. ■

$\neg H \sim \exists x \forall y(P(x) \wedge \neg(P(y) \wedge D(y,x)) \sim 0$

2. Na otoku ljudje živijo v Severni vasi in Južni vasi. Otočani imajo črne in bele ovce. Zapiši s formulami naslednje izjave.

   (a) Vsak prebivalec Severne vasi ima vsaj eno črno ovco.
   (b) Vsak prebivalec Južne vasi ima vsaj eno črno ovco in eno belo ovco.
   (c) Obstaja prebivalec Severne vasi, ki nima črne ovce.
   (d) Vsak prebivalec Severne vasi pozna prebivalca Južne vasi, ki ima belo ovco.
   (e) Neki prebivalec Južne vasi pozna prebivalca Severne vasi, ki ima črno ovco.
   (f) Neki prebivalec Južne vasi pozna vse prebivalce Severne vasi, ki imajo črno ovco.

$\mathcal{D} = \{x\ ;\ x$ je prebivalec otoka$\}$

$S(x)$ ... x živi v Severni vasi
$J(x)$ ... x živi v Južni vasi
$\check{C}(x)$ ... x ima (vsaj eno) črno ovco
$B(x)$ ... x ima (vsaj eno) belo ovco

$P(x,y)$ ... x pozna y

(a) Vsak prebivalec Severne vasi ima vsaj eno črno ovco.

$$\forall x : (S(x) \Rightarrow \check{C}(x))$$

(b) Vsak prebivalec Južne vasi ima vsaj eno črno ovco in eno belo ovco.

$$\forall x : (J(x) \Rightarrow \check{C}(x) \land B(x))$$

(c) Obstaja prebivalec Severne vasi, ki nima črne ovce.

$$\exists x : (S(x) \land \neg \check{C}(x))$$

(d) Vsak prebivalec Severne vasi pozna prebivalca Južne vasi, ki ima belo ovco.

$$\forall x : (S(x) \Rightarrow \exists y : (J(y) \land P(x,y) \land B(y)))$$

(e) Neki prebivalec Južne vasi pozna prebivalca Severne vasi, ki ima črno ovco.

$$\exists x : (J(x) \land \exists y : (S(y) \land P(x,y) \land \check{C}(y)))$$

(f) Neki prebivalec Južne vasi pozna vse prebivalce Severne vasi, ki imajo črno ovco.

$$\exists x : (J(x) \land \forall y : (S(y) \land \check{C}(y) \Rightarrow P(x,y)))$$

3. Katere izmed formul so med sabo enakovredne in katere ne? Odgovore dobro utemelji!

$$A = \forall y \exists x (P(x) \vee \neg Q(y)), \qquad C = \exists x (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)),$$
$$B = \forall y (\exists x \neg P(x) \vee Q(y)), \qquad D = \exists y (P(y) \vee \forall x \neg Q(x)).$$

$$B = \forall y (\exists x \neg P(x) \vee \underbrace{Q(y)}_{\text{ni prostih } x}) \sim \forall y \exists x (\neg P(x) \vee Q(y))$$

$$C = \exists x (\neg P(x) \vee \underbrace{\forall y Q(y)}_{\text{ni prostih } x}) \sim \underbrace{\exists x \neg P(x)}_{\text{ni prostih } y} \vee \forall y Q(y) \sim \forall y (\exists x \neg P(x) \vee Q(y)) = B$$

$$D = \exists \underset{x}{y} (P(\underset{x}{y}) \vee \forall \underset{y}{x} \neg Q(\underset{y}{x})) \sim \exists x (P(x) \vee \underbrace{\forall y \neg Q(y)}_{\text{ni prostih } x}) \sim \underbrace{\exists x P(x)}_{\text{ni prostih } y} \vee \forall y \neg Q(y) \sim \forall y (\exists x P(x) \vee \underbrace{\neg Q(y)}_{\text{ni prostih } x}) \sim$$

$$\sim \forall y \exists x (P(x) \vee \neg Q(y)) \sim A$$

$\Rightarrow A = D$ in $B = C$. Še $A \neq B$ (poiščemo interpretacijo, v kateri imata različno vrednost):

$\mathcal{D} = \mathbb{N}$

$1 \sim P(x) =$ x je pozitivno število.

$0 \sim Q(x) =$ x ni deljiv z 1.

$$A = \forall y \exists x (\overbrace{P(x)}^{1} \vee \overbrace{\neg Q(y)}^{1}) \sim 1$$

$$B = \forall y \exists x (\underbrace{\neg P(x)}_{0} \vee \underbrace{Q(y)}_{0}) \sim 0$$

4. Katere izmed spodnjih formul so enakovredne?

$$\begin{aligned} A &= \exists x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y R(x,y)), \\ B &= \exists x(\forall y P(y,x) \Rightarrow \forall y R(x,y)), \\ C &= \exists x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y R(y,x)). \end{aligned}$$

$A = \exists x\,(\neg \forall y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \sim \exists x\,(\exists y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \sim \exists x \exists y\, P(x,y) \vee \exists x \forall y\, R(x,y)$

$B = \exists x\,(\neg \forall y\, P(y,x) \vee \forall y\, R(x,y)) \sim \exists x\,(\exists y\, P(y,x) \vee \forall y\, R(x,y)) \sim \exists x \exists y\, P(y,x) \vee \exists x \forall y\, R(x,y)$

$\sim \exists y \exists x\, P(y,x) \vee \exists x \forall y\, R(x,y) \sim \exists x \exists y\, P(x,y) \vee \exists x \forall y\, R(x,y)$

$C = \exists x\,(\neg \forall y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(y,x)) \sim \exists x\,(\exists y\, P(x,y) \vee \forall y\, R(y,x)) \sim \exists x \exists y\, P(x,y) \vee \exists x \forall y\, R(y,x)$

$\boxed{\begin{aligned} &\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \sim \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \\ &\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \sim \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \end{aligned}}$

$\boxed{\begin{aligned} &\exists x \exists y : P(x,y) \sim \exists y \exists x : P(x,y) \\ &\forall x \forall y : P(x,y) \sim \forall y \forall x : P(x,y) \end{aligned}}$

$\exists x \forall y : P(x,y) \not\sim \forall y \exists x : P(x,y) \leftarrow$!

$\Rightarrow A = B.$

Za dokaz $A \neq C$ poiščemo interpretacijo, v kateri se razlikujeta.

$\mathcal{D} = \mathbb{N}$

$P(x,y) = 0$

$R(x,y) =$ x je manjši ali enak y

$A = \underbrace{\exists x \exists y : 0}_{0} \vee \exists x \forall y : x \leq y \sim \exists x \forall y : x \leq y$

$C = \exists x \forall y : y \leq x$

$A =$ Obstaja $x \in \mathbb{N}$, tak da za vse $y \in \mathbb{N}$ velja, da je $x \leq y$.

$\sim$ Obstaja najmanjše naravno število. ~ 1 $(x = 0)$

$C =$ Obstaja $x \in \mathbb{N}$, tak da za vse $y \in \mathbb{N}$ velja, da je $y \leq x$.

$\sim$ Obstaja največje naravno število. ~ 0

DOKAZ. Denimo, da je x največje naravno število. Ampak $x+1 > x$ in $x+1 \in \mathbb{N}$. Protislovje. $\Rightarrow$ Tak x ne obstaja. ∎

V tej interpretaciji je $A \sim 1$, $C \sim 0$, zato A in C nista enakovredni.

5. Poišči interpretacije, v katerih imajo naslednji pari izjavnih formul nasprotno logično vrednost.

(a) $F_1 = \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ in $F_2 = \exists x(P(x) \Rightarrow R(x))$,

(b) $F_1 = \forall x(P(x) \Leftrightarrow R(x))$ in $F_2 = \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$,

(c) $F_1 = \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$ in $F_2 = 0$,

(d) $F_1 = \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$ in $F_2 = 1$.

(a) $F_1 = \forall x(\underbrace{P(x)}_{1} \Rightarrow \underbrace{R(x)}_{0})$ in $F_2 = \exists x(\underbrace{P(x)}_{1} \Rightarrow \underbrace{R(x)}_{1})$,

za nek x za nek x

$\mathcal{D} = \mathbb{N}$

$P(x) =$ x je naravno število ~ 1

$R(x) =$ x je liho

$F_1 = \forall x(1 \Rightarrow R(x)) \sim \forall x : R(x) =$ Vsako nar. število je liho. ~ 0 npr. $x=2$

$F_2 = \exists x(1 \Rightarrow R(x)) \sim \exists x : R(x) =$ Obstaja liho naravno število. ~ 1 npr. $x=1$

(b) $F_1 = \forall x(\underbrace{P(x)}_{0} \Leftrightarrow \underbrace{R(x)}_{\text{vsaj } 1\times 1})$ in $F_2 = \forall x(\underbrace{P(x)}_{0} \Rightarrow \underbrace{R(x)}_{0 \text{ ali } 1})$,

$* \; 0 \Leftrightarrow p \sim \neg p$

$\mathcal{D} = \mathbb{N}$

$P(x) =$ x je negativno

$R(x) =$ x je sodo

$F_1 \sim \forall x(0 \Leftrightarrow R(x)) \overset{*}{\sim} \forall x(\neg R(x)) \sim \neg \exists x(R(x)) \sim$ Ne obstaja sodo nar. število. ~ 0 npr. $x=2$

$F_2 \sim \forall x(0 \Rightarrow R(x)) \sim \forall x : 1 \sim 1$

(c) $F_1 = \forall x \forall y(\underbrace{\underbrace{P(x)}_{1} \Rightarrow \underbrace{P(y)}_{0}}_{\text{možemo}})$ in $F_2 = 0$,

$\mathcal{D} = \{a, b, c\}$

$P(a) = P(b) = P(c) = 0$

$F_1 = \forall x \forall y : (0 \Rightarrow 0) \sim \forall x \forall y : 1 \sim 1$

$\mathcal{D} = \{a\}$

$P(a) = 0$

$F_1 = \forall x \forall y(0 \Rightarrow 0) \sim \forall x \forall y : 1 \sim 1$

$\mathcal{D} = \{a, b\}$

$P(a) = P(b) = 1$

$F_1 = \forall x \forall y(1 \Rightarrow 1) \sim \forall x \forall y : 1 \sim 1$

(d) $F_1 = \forall x \forall y(\underbrace{\underbrace{P(x)}_{1} \Rightarrow \underbrace{P(y)}_{0}}_{\text{za neka } x,y})$ in $F_2 = 1$.

- $\mathcal{D} = \{a, b\}$

  $P(a) = 1$, $P(b) = 0$

  Za $x = a, y = b$ je $P(x) \Rightarrow P(y) \sim P(a) \Rightarrow P(b) \sim 1 \Rightarrow 0 \sim 0 \Rightarrow \neg \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y)) \Rightarrow F_1 \sim 0$

- $\mathcal{D} = \mathbb{N}$

  $P(x) =$ x je praštevilo

  $F_1 =$ Za vse $x, y \in \mathbb{N}$ velja: če je x praštevilo, je y praštevilo. ~ 0 npr. $x = 2, y = 9$

6. Pokaži, da sta F_1 in F_2 enakovredni:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \neg\exists x((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x))), \\
F_2 &= \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\exists y R(y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1 &\sim \forall x\,(\neg(\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \vee \neg(Q(x) \Rightarrow R(x))) \sim \\
&\sim \forall x\,(\neg(R(x) \vee P(x)) \vee \neg(\neg Q(x) \vee R(x))) \sim \\
&\sim \forall x\,((\neg R(x) \wedge \neg P(x)) \vee (\neg R(x) \wedge Q(x))) \sim \\
&\sim \forall x\,(\neg R(x) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x))) \sim \\
&\sim \forall x\,(\neg R(x) \wedge (P(x) \Rightarrow Q(x))) \\
&\overset{\star}{\sim} \forall x \neg R(x) \wedge \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2 &\sim \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall y \neg R(y) \sim \\
&\sim \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \neg R(x) \sim \\
&\sim \forall x \neg R(x) \wedge \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \sim F_1
\end{aligned}
$$

vedno velja:

$\star$
$$
\boxed{
\begin{aligned}
\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) &\sim \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \\
\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) &\sim \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)
\end{aligned}
}
$$

ni pa nujno:

$$
\begin{aligned}
\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) &\not\sim \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \\
\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) &\not\sim \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)
\end{aligned}
$$

7. Na množici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definiran predikat $P(m, n)$. Zanj vemo, da so za vsak par celih števil m in n resnične naslednje izjave:

P0. $P(0,0)$,

P1. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m,n+2)$,

P2. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m+2,n-1)$,

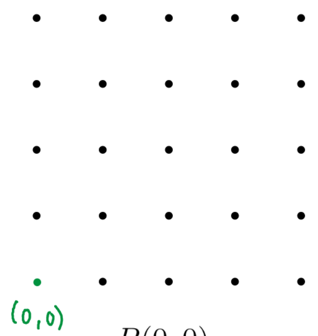
P3. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m-1,n-1)$.

Katere od naslednjih izjav so resnične?

(a) $P(1,1)$,

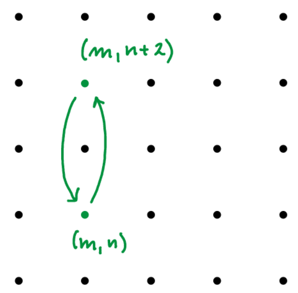
(b) $P(2,5)$,

(c) $\forall m \forall n\, P(m,n)$



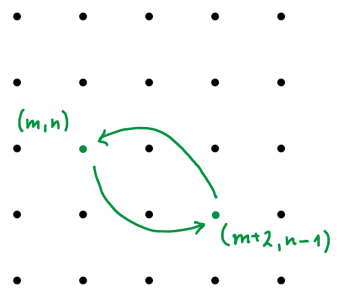
$P(0,0)$

za (0,0) je P resničen



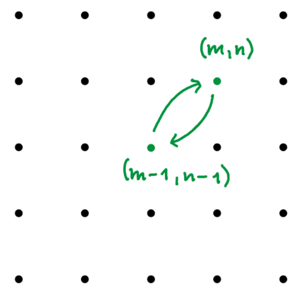
$P(m,n) \Leftrightarrow P(m,n+2)$

če je za nek par P res, je res tudi 2 višje ali nižje



$P(m,n) \Leftrightarrow P(m+2,n-1)$

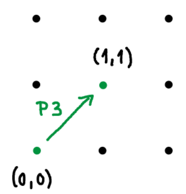
če je za nek par P resničen, je res tudi 2 desno in 1 dol ali 2 levo in 1 gor



$P(m,n) \Leftrightarrow P(m-1,n-1)$

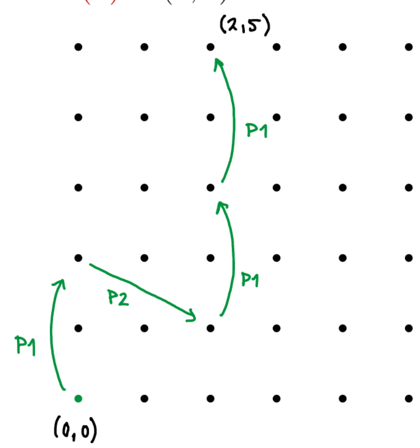
če je za nek par P resničen, je res tudi 1 desno in 1 gor ali 1 levo in 1 dol

(a) $P(1,1)$



Ker je P(0,0) ~ 1, je po P3 tudi P(1,1) ~ 1.

(b) $P(2,5)$

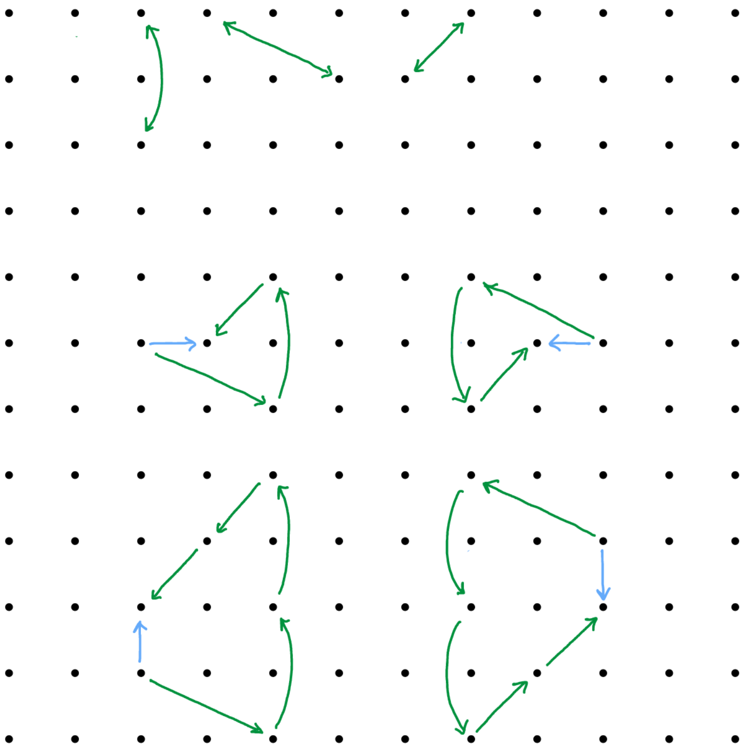


(c) $\forall m \forall n \, P(m,n)$

Začnemo v $(0,0)$. Lahko se premaknemo

- 2 gor,
- 2 dol, } P1
- 2 desno in 1 dol,
- 2 levo in 1 gor, } P2
- 1 desno in 1 gor,
- 1 levo in 1 dol. } P3

Ali lahko dosežemo vse $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?



dovoljeni premiki

s kombinacijo dovoljenih korakov se lahko premaknemo 1 gor, 1 desno, 1 levo ali 1 dol, zato lahko iz $(0,0)$ dosežemo (m,n) za vse $m,n \in \mathbb{Z}$.