Diskretne strukture UNI
Vaje 7

1. Ali velja
   (a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$,
   (b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$,
   (c) $(A + B) \times (C + D) = (A \times C) + (B \times D)$,
   (d) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$,
   (e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$?

2. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1), (4,1)\}.$$
   (a) Nariši grafe relacij R, $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.
   (b) Katere izmed zgornjih relacij so refleksivne, simetrične in/ali tranzitivne?

3. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,1)\}.$$
   (a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1,3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.
   (b) Pokaži, da je $S^{2019} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).
   (c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a, b)\}$, kjer je (a, b) poljuben urejen par, ki *ni* v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2019} = U_A$.

4. Na množici $A = \{1, 2, \ldots, 18\}$ definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ je praštevilo.}$$
   (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.
   (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$.

5. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na $\mathbb{N}$ je podana s predpisom
$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [2] in [2016].
   (c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

6. Na $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom
$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$
   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [4].
   (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

7. Naj bo $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.
   (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.
   (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
   (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
   (d) Je relacija $\leq$ simetrična?