Diskretne strukture UNI
Vaje 9

1. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo relacijo R:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ deli } x + 4y.$$

   Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

2. Na množici $A = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ definiramo relacijo

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| \in \{2, 4\}$$

   (a) Nariši grafe relacije R, R^2 in R^+
   (b) Katere izmed relacij so refleksivne, simetrične, tranzitivne?
   (c) Določi ekvivalenčne razrede tistih od relacij R, R^2 in R^+, ki so ekvivalenčne.

3. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = \mathsf{b}_n \cdots \mathsf{b}_2\mathsf{b}_1$, kjer so števke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\preceq$ z

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad \forall i\, (\mathsf{a}_i \leq \mathsf{b}_i).$$

   (a) Ali velja: $2 \preceq 3$, $5 \preceq 8$, $4 \preceq 5$?
   (b) Prepričaj se, da je $\preceq$ relacija delne urejenosti.
   (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
   (d) Ali je $\preceq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?
   (e) Preveri, da velja implikacija: Če $a \preceq b$, potem $a \leq b$.

4. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \gcd(a, b) > 3.$$

   (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
   (b) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
   (c) Ali je relacija R^2 refleksivna, simetrična ali tranzitivna?

5. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

   (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
   (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
   (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.

6. Na množici $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ je dana relacija:

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ deli } b^2.$$

   (a) Dokaži, da je relacija R refleksivna.
   (b) Ali je R tranzitivna? Dokaži ali pa poišči protiprimer!
   (c) Dokaži implikacijo: Če obstaja $k \in \mathbb{N}$, da a deli b^{2^k}, potem velja aR^*b.