UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE
V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI
LABORATORIJ ZA KRIPTOGRAFIJO
IN RAČUNALNIŠKO VARNOST

Aleksandra Franc, Kristina Veljković, Martin Vuk

NALOGE IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2020

Naloge iz verjetnosti in statistike
Študijsko gradivo pri predmetih *Verjetnost in statistika* in *Osnove verjetnosti in statistike*
Aleksandra Franc, Kristina Veljković, Martin Vuk
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Izvorna koda je na voljo na https://gitlab.com/ul-fri/ovs/skripta
Pripombe in predloge pošljite na ta naslov.
Ljubljana, 20. maj 2021

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so prirejene iz nalog, ki jih rešujemo na vajah pri predmetih *Verjetnost in statistika* za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike in *Osnove verjetnosti in statistike* za študente visokega strokovnega študija na FRI.

Pri sestavljanju nalog so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ali še poučujejo ta predmet, za kar se jim iskreno zahvaljujemo. Posebej so k nalogam prispevali Martin Raič, Gregor Šega, Leon Lampret in Peter Kink.

To študijsko gradivo ni recenzirano in gotovo so se v rešitve nalog prikradle napake. Če mislite, da je kakšna rešitev napačna, ste vabljeni, da se oglasite na govorilnih urah.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⬇ ob nalogi, boste skočili do rezultata (na voljo za vse naloge), ⇩ pelje do rešitve (za izbrane naloge). Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi ali rezultatu, se boste vrnili k besedilu naloge. Vseeno priporočamo, da nalogi posvetite nekaj časa, preden se lotite branja rešitve.

Oznake

$\mathbb{N}$	...	naravna števila
$\mathbb{R}$	...	realna števila
$\mathbb{C}$	...	kompleksna števila
Ω	...	verjetnosti prostor (prostor vseh izidov)
A, B, C	...	dogodki
G	...	gotov dogodek
N	...	nemogoč dogodek
$P(A)$	...	verjetnost dogodka A
$P(A\|B)$	...	pogojna verjetnost dogodka A pogojno na dogodek B
X, Y, Z	...	slučajne spremenljivke
$X \sim R$	...	slučajna spremenljivka X je porazdeljena s porazdelitvijo R
$N(\mu, \sigma)$	...	normalna porazdelitev s parametri μ in σ
$E(X)$	...	pričakovana vrednost(matematično upanje) spremenljivke X
$D(X)$	...	disperzija(varianca) spremenljivke X
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	...	kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y

Kazalo

Del 1

Verjetnost

POGLAVJE 1

Kombinatorika

Pravilo produkta: Denimo, da izbiranje poteka v k zaporednih korakih. Na prvem koraku izbiramo med n_1 možnostmi, in nato na drugem med n_2 možnostmi, ..., in nato na k-tem koraku med n_k možnostmi. Na vsakem koraku izbiranja naj bo število možnosti neodvisno od izbranih možnosti na prejšnjih korakih. Število vseh možnih izborov je tedaj enako

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

NALOGA 1.
Koliko je

a. vseh trimestnih števil,
b. vseh sodih trimestnih števil,
c. vseh trimestnih števil s sodo prvo števko,
d. vseh trimestnih števil s samimi enakimi števkami,
e. vseh trimestnih števil s samimi različnimi števkami,
f. vseh trimestnih števil, ki so palindromi?

Palindrom je niz, ki se enako bere naprej in nazaj.

NALOGA 2.
Koliko deliteljev ima število 2520 (vključno z 1 in 2520)?

Pravilo vsote: Kadar se pri izbiranju odločamo za eno od n_1 možnosti iz prve množice, ali za eno od n_2 možnosti iz druge množice, ..., ali za eno od n_k možnosti iz k-te množice, in so te množice paroma disjunktne, je število vseh možnih izborov enako

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

NALOGA 3. VAJE
Z Ajdove gore do Brežic vodi 5 poti, iz Brežic do Cvetočega dola pa 4. Na koliko načinov lahko pridemo z Ajdove gore do Cvetočega dola, če imamo med njima še 3 direktne poti?

NALOGA 4.
Babica mora z Viča v Moste. Lahko gre z avtobusom 1 ali 6 najprej do centra, potem pa z enim izmed treh avtobusov naprej, ali pa pokliče enega izmed štirih taksijev. Na koliko načinov lahko pride na svoj cilj?

Pravilo komplementa: Če je vseh možnosti n in je s takih, ki ne ustrezajo pogojem (slabe možnosti), potem je dobrih možnosti

$$d = n - s.$$

NALOGA 5. VAJE
Dani sta množici števk $A = \{3, 4, 5\}$ in $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

a. Koliko štirimestnih števil lahko sestavimo iz števk množice A?
b. Koliko štirimestnih števil iz števk množice A se začne s 5?
c. Koliko štirimestnih števil lahko sestavimo iz števk množice B?
d. Koliko štirimestnih števil iz števk množice B se ne konča na 24?

e. Koliko petmestnih števil iz števk množice B se ne začne niti z 2 niti z 8?

Permutacije brez ponavljanja so razporeditve n različnih elementov na n prostih mest. Vrstni red elementov je pomemben. Število vseh takih razporeditev je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Variacije brez ponavljanja so razporeditve n različnih elementov na k ($k \leq n$) prostih mest. Vrstni red elementov je pomemben. Število vseh takih razporeditev je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Naloga 6.

Koliko možnih besed dolžine 5 (smiselnih ali nesmiselnih) lahko sestavimo iz črk besede GALEB? Koliko od teh je takih, ki se začnejo na B? Koliko pa je besed dolžine 4?

Naloga 7. vaje

Števila $1, 2, \ldots, n$ postavimo naključno drugo ob drugo. Koliko je takšnih vrstnih redov, kjer števili 1 in 2 stojita skupaj?

Naloga 8.

Šestčlanska družina gre v kino. Na koliko načinov se lahko posedejo v vrsto, če

a. sedita starša skupaj in otroci skupaj?
b. sedita starša vsak na enem koncu, otroci pa vmes?

Permutacije s ponavljanjem so razporeditve n ne nujno različnih elementov na n prostih mest. Vrstni red je pomemben. Če lahko elemente razdelimo v m skupin med sabo enakih elementov, in če je v prvi taki skupini k_1 enakih elementov, v drugi k_2 enakih elementov, $\ldots$, v m-ti pa k_m enakih elementov, potem je število vseh takih razporeditev

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Variacije s ponavljanjem so razporeditve n različnih elementov na k prostih mest. Vrstni red je pomemben. Pri tem se lahko element določene vrste v razporeditvi pojavi poljubno mnogokrat. Število vseh takih razporeditev je

$$n^k = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n.$$

Naloga 9. vaje

Na koliko načinov lahko razporedimo na polici 3 romane, 4 učbenike in 2 vodiča, če

a. vse knjige med seboj razlikujemo,
b. vse knjige med seboj razlikujemo, vendar morajo prve v vrsti stati romani, nato učbeniki in za njimi vodiča,
c. vse knjige med seboj razlikujemo in knjige iste vrste morajo stati skupaj,
d. knjig iste vrste ne razlikujemo?

Naloga 10.

Na koliko načinov lahko na okensko polico v vrsto postavimo 3 begonije in 4 marjetice, če:

a. cvetlice razlikujemo?
b. cvetlic iste vrste ne razločimo?
c. cvetlice razlikujemo, vendar cvetlice iste vrste ne smejo biti sosednje?
d. cvetlice razlikujemo in cvetlice iste vrste morajo stati skupaj?

NALOGA 11.
Koliko različnih nizov lahko tvorimo iz:

a. ANA,
b. KROKAR,
c. FILOZOFIJA,
d. BARBARA,

če moramo v vsakem primeru uporabiti vse črke?

NALOGA 12.
Štirje pari gredo v kino. Vsi dobijo karte skupaj v isti vrsti. Na koliko načinov se lahko posedejo, če

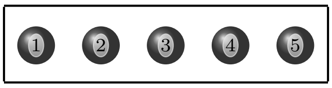
a. pari sedijo skupaj?
b. vsaj en par ne sedi skupaj?
c. sedijo moški in ženske izmenično?
d. sedijo pari skupaj in Ana in Maja skupaj?

Kombinacije brez ponavljanja so izbire k elementov izmed n različnih elementov, kjer lahko vsak element izberemo le enkrat. Vrstni red izbir ni pomemben. Število kombinacij brez ponavljanja je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1}.$$

NALOGA 13.
Dijak ima 18 sošolcev, kot kapetan pa potrebuje 4 soigralce za nogomet. Na koliko različnih načinov lahko sestavi ekipo?

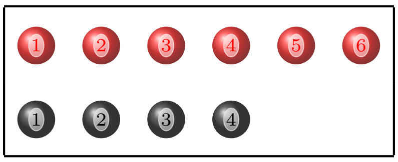
NALOGA 14. VAJE
Na koliko načinov lahko iz škatle s petimi različnimi kroglicami vzamemo dve kroglici? Pri tem loči primer, ko kroglice vračamo, in primer, ko jih ne vračamo. Poleg tega loči primer, ko je vrstni red jemanja pomemben, in primer, ko ni pomemben.



NALOGA 15. VAJE
V škatli se nahaja 10 oštevilčenih kroglic: 6 rdečih in 4 črne. Na koliko načinov lahko ven vzamemo

a. 3 rdeče in 3 črne kroglice,
b. 4 kroglice, med katerimi je vsaj ena rdeča in ena črna?

Vrstni red jemanja ni pomemben.



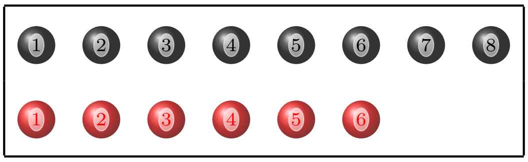
NALOGA 16. VAJE
Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto r rdečih in c črnih kroglic, če

a. ni nobenih omejitev?
b. zahtevamo, da ni dveh zaporednih rdečih kroglic?

NALOGA 17.
V ravnini je 10 točk $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$, razporejenih tako, da nobene tri ne ležijo na isti premici.

a. Koliko različnih premic določajo te točke?
b. Koliko izmed teh premic ne poteka niti skozi A_1 niti skozi A_2?
c. Koliko različnih trikotnikov določajo te točke?
d. Koliko izmed teh trikotnikov ima za eno od oglišč točko A_1?
e. Koliko izmed teh trikotnikov ima za stranico daljico A_1A_2?

NALOGA 18.
V škatli se nahaja 14 oštevilčenih kroglic: 8 črnih in 6 rdečih. Na koliko načinov lahko izberemo 5 kroglic tako, da imamo vsaj po eno kroglico vsake barve?



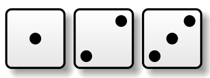
NALOGA 19.
Koliko nizov dolžine 4 lahko sestavimo iz črk A in B, če se lahko A pojavi največ dvakrat?

NALOGA 20.
Imamo 11 dobrih prijateljev. Na koliko načinov lahko na večerjo povabimo 5 ljudi če:

a. ni omejitev?
b. je med njimi poročen par in ju moramo povabiti skupaj?
c. sta dva skregana in nočeta priti skupaj?

NALOGA 21.
Vržemo tri igralne kocke.

a. Koliko je vseh možnih izidov?
b. Koliko je vseh izidov, pri katerih natanko ena kocka pokaže šest pik?
c. Koliko je vseh izidov, pri katerih vsaj ena kocka pokaže 6 pik?



NALOGA 22.
Študent mora pozitivno odgovoriti na deset vprašanj od trinajstih. Na koliko načinov lahko izbere vprašanja, na katera bo odgovoril, če:

a. ni nobenih omejitev?
b. mora odgovoriti na prvi dve vprašanji?
c. mora odgovoriti na prvo ali drugo vprašanje, ne pa na obe?
d. mora odgovoriti na točno tri od prvih petih?
e. mora odgovoriti na vsaj tri od prvih petih?

NALOGA 23.
Skupina 7 moških in 5 žensk se odpravlja na taborjenje. Imajo dva šotora za tri osebe in tri šotore za dve osebi.

a. Na koliko načinov se lahko razdelijo v šotore?
b. Kaj pa, če naj bo v vsakem šotoru vsaj en moški in vsaj ena ženska?
c. Kaj pa, če morajo biti v istem šotoru le osebe istega spola?

Ljudi in šotore ločimo.

Pravilo kvocienta Če imamo n objektov, ki jih grupiramo v skupine velikosti k, za katere velja, da objektov znotraj iste skupine ne ločimo, objekte iz dveh različnih skupin pa razlikujemo, potem je različnih razredov objektov $\frac{n}{k}$.

Naloga 24.
Na koliko načinov lahko razvrstimo 6 otrok:

a. v vrsto?
b. na vrtiljak s 6 sedeži?
c. na vrtiljak z 10 sedeži?

Naloga 25.
Na večerjo smo povabili tri ženske in tri moške.

a. Na koliko načinov se lahko gostje posedejo za okroglo mizo s 6 sedeži?
b. Kaj pa če zahtevamo, da nobena soseda nista istega spola?
c. Kaj pa če je pride na večerjo n žensk in n moških in morajo za mizo z $2n$ sedeži sedeti izmenično?

Naloga 26.
Koliko je vseh permutacij brez fiksnih točk na n elementih za $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Če naloge ne želiš reševati z naštevanjem vseh možnosti, si lahko ogledaš tale članek o permutacijah brez fiksnih točk. Pomagaš si lahko še z naslednjima dejstvoma:

- vsako permutacijo lahko enolično zapišemo kot produkt disjunktih ciklov (do vrstnega reda ciklov in zapisa ciklov natančno),
- fiksne točke ustrezajo ciklom dolžine 1.

Kombinacije s ponavljanjem so izbire k elementov izmed n različnih elementov (vrstni red ni pomemben), kjer lahko vsak element izberemo poljubnokrat. Število kombinacij s ponavljanjem je

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

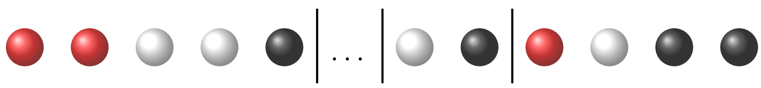
Naloga 27. vaje
V čokoladnici imajo 5 vrst čokoladnih bonbonov, ki jih prodajajo v vrečkah po 20, pri čemer lahko kupec izbere, koliko bonbonov vsake vrste želi. Koliko različnih vrečk lahko sestavimo?

Naloga 28.
Na koliko načinov lahko razdelimo 20 enakih bonbonov in 15 enakih čokolad petim otrokom?

Naloga 29. vaje
Na koliko načinov lahko b belih, r rdečih in c črnih kroglic razdelimo v s škatel, če

a. gre v vsako škatlo poljubno mnogo kroglic?
b. gre v vsako škatlo največ ena kroglica?

Kroglic med seboj ne ločimo, škatle ločimo. Pri drugem vprašanju predpostavi, da je škatel več kot kroglic.



POGLAVJE 2

Verjetnost

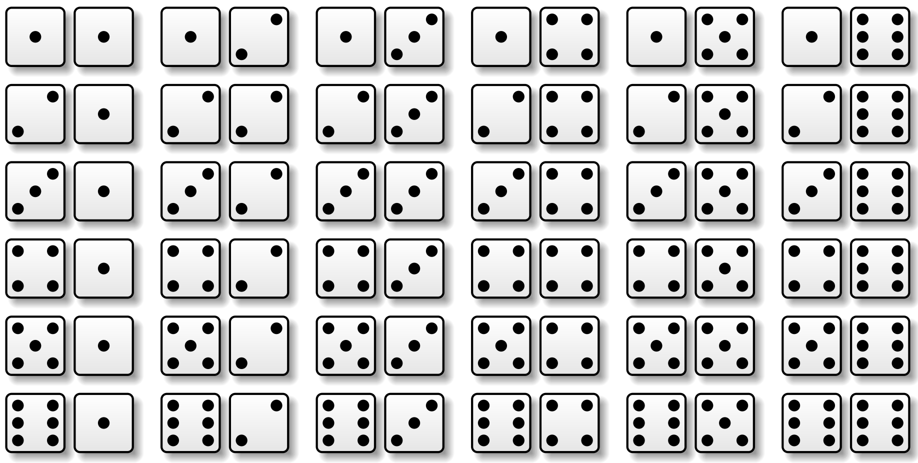
Elementarna verjetnost: Izid iz dane množice izidov je izbran **na slepo**, če so vsi izidi iz te množice enako verjetni. Takrat se **dogodek** A (podmnožica vseh izidov) zgodi z verjetnostjo

$$P(A) = \frac{\text{število izidov, ki so v } A}{\text{število vseh izidov}} .$$

Naloga 30. vaje

Hkrati vržemo dve igralni kocki.

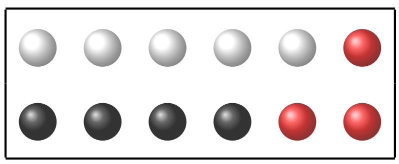
a. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da na prvi kocki padejo 4 pike?
b. Kolikšna je verjetnost dogodka B, da je vsota pik enaka 6?
c. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da je vsota pik manjša od 4?



Naloga 31. vaje

V posodi je 5 belih, 4 črne in 3 rdeče kroglice. Iz posode potegnemo tri kroglice.

a. Kolikšna je verjetnost, da bo med njimi po ena kroglica vsake barve, če izvlečeno kroglico vsakič sproti vrnemo v posodo?
b. Kolikšna je verjetnost, da bo med njimi po ena kroglica vsake barve, če kroglic ne vračamo?



Naloga 32.

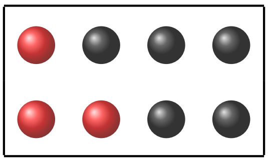
Zakonca načrtujeta štiri otroke. Kaj je verjetneje: da bosta oba spola enako zastopana (dogodek A) ali da bodo trije enega, eden pa nasprotnega spola (dogodek B)? Vsak otrok je z enako verjetnostjo deček ali deklica neodvisno od prejšnjih.

Naloga 33. vaje

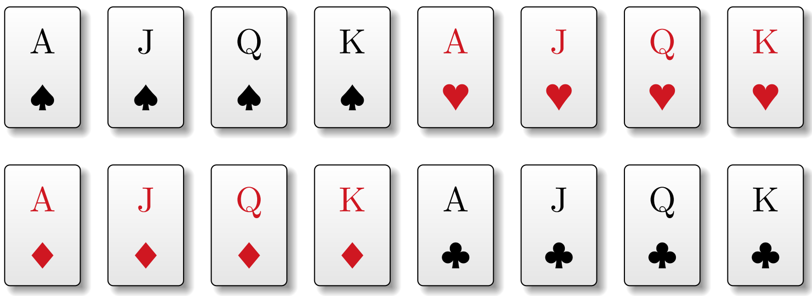
V posodi so 3 rdeče in 5 črnih kroglic. Iz posode na slepo izvlečemo dve kroglici. Definiramo dogodka

$$\begin{aligned} A &= \text{obe izvlečeni kroglici sta črni,} \\ B &= \text{izvlečeni kroglici sta različnih barv.} \end{aligned}$$

a. Izračunaj $P(A)$ in $P(B)$, če kroglic ne vračamo.
b. Izračunaj $P(A)$ in $P(B)$, če kroglice vračamo.



NALOGA 34. VAJE
Dan je dobro premešan kup 16 kart, med katerimi so štirje piki. Kolikšna je verjetnost, da sta med prvimi osmimi kartami natanko dva pika?



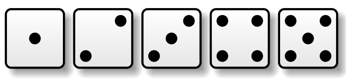
NALOGA 35.
Iz cifer 2,3,5 in 6 sestavljamo trimestna števila, pri čemer se cifre lahko ponavljajo.

a. Določi verjetnost, da je tako sestavljeno število manjše od 400.
b. Določi verjetnost, da je tako sestavljeno število manjše od 355.
c. Določi verjetnost, da je tako sestavljeno število sodo.

NALOGA 36.
Pri Lotu imajo 39 številk, žrebajo pa jih sedem. Recimo, da izpolnimo en sam listek z eno samo kombinacijo sedmih številk. Kolikšna je verjetnost, da smo zadeli pravih sedem številk? Kaj pa šest? Pet? Štiri?

Verjetnost nasprotnega dogodka: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

NALOGA 37.
Vržemo pet neodvisnih standardnih kock. Kolikšna je verjetnost, da bo vsaj na eni kocki padla šestica?

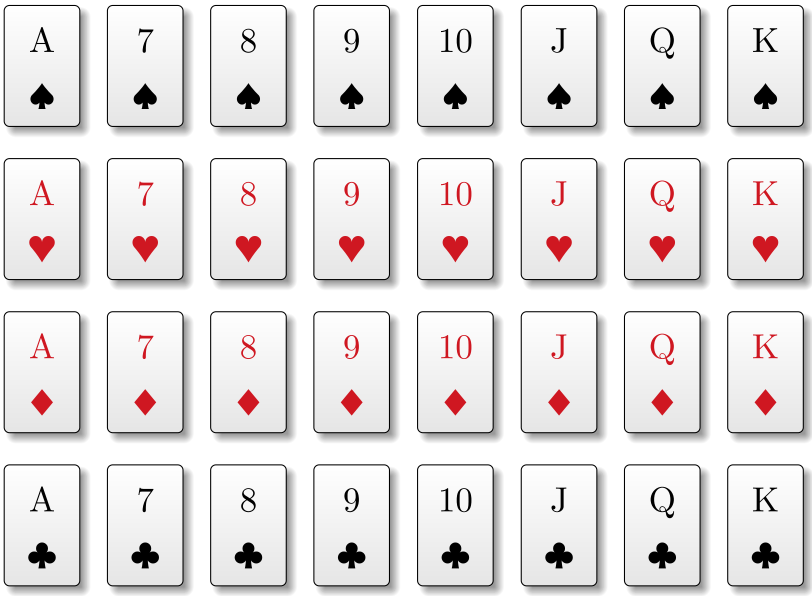


NALOGA 38.
Pri igri 'Človek ne jezi se' otroci na začetku mečejo kocko dokler ne pade šestica, a največ trikrat. Kolikšna je verjetnost uspešnega poskusa?

NALOGA 39. VAJE
Iz kupa 32 igralnih kart naključno izvlečemo 3 karte. Kolikšna je verjetnost naslednjih dogodkov:

a. $A =$ vse tri karte so dame,
b. $B =$ natanko dve karti sta pika,
c. $C =$ vse tri karte so iste barve,

d. $D =$ vsaj ena karta je dama.

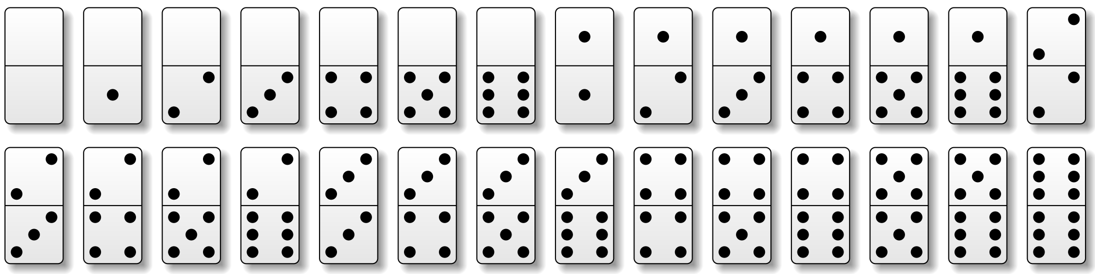


Naloga 40.
V kompletu 28 domin naključno izberemo 6 domin. Kolikšna je verjetnost, da je vsaj na eni 6 pik?

Na vsaki domini sta označeni dve polovici, vsaka ima svoje število pik (0-6), 7 domin pa ima na obeh polovicah isto število pik. Torej domine ustrezajo parom

$$\{(i,j)\in\{0,1,\ldots,6\}^2;\ i\leq j\}$$

oziroma 2-elementnim podmnožicam s ponavljanjem.



Naloga 41.
Loterija je dala v prodajo 1000 srečk, od tega jih zadane 50. Kolikšna je verjetnost, da

a. naključno izbrana srečka zadene?
b. zadenemo vsaj enkrat, če kupimo tri srečke?

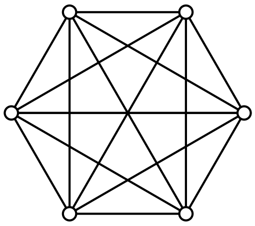
Naloga 42.
Kolikšna je verjetnost, da v skupini n ljudi obstajata dva, ki imata rojstni dan na isti dan? Prestopna leta zanemari.

Naloga 43.
Mama napiše n različnih pisem in pripravi n kuvert za ta pisma s samimi različnimi naslovi. Mimo pride navihani Petrček in povsem slučajno vtakne pisma v kuverte, v vsako kuverto po eno pismo. Kolikšna je verjetnost, da je vsaj eno pismo v pravi kuverti, če je

a. $n = 4$?
b. $n = 5$?

Naloga 44. vaje
Na slepo izberemo 3 oglišča v pravilnem šestkotniku. Izračunaj verjetnost, da

a. izbrana oglišča določajo enakokrak trikotnik.
b. izbrana oglišča niso oglišča enakostraničnega trikotnika.



Geometrijska verjetnost: Točka je izbrana **na slepo** iz intervala, lika, telesa, ipd., če za vsak dogodek A velja

$$P(A) = \frac{\text{mera izidov, ki so v } A}{\text{mera vseh izidov}} .$$

Pri tem je mera lahko dolžina, ploščina, volumen, itd.

NALOGA 45.
Do šole je 4 minute hoje, vmes pa je semafor, na katerem 2 minuti gori zelena, 2 minuti pa rdeča luč. Od doma se odpravim 5 minut pred začetkom pouka.

a. Kolikšna je verjetnost, da pridem še pravočasno, če se držim predpisov?
b. Kaj pa, če sta na poti dva semaforja?

Pri tem predpostavi, da je ob našem prihodu vsak semafor v naključnem stanju in semaforji med seboj niso usklajeni.

NALOGA 46.
Dekle in fant se želita srečati na določenem mestu med 20:00 in 21:00. Vsak od njiju je pripravljen čakati drugega 10 minut in nič dlje. Kolikšna je verjetnost, da se srečata, če vsak izmed njiju pride na dogovorjeno mesto slučajno med 20:00 in 21:00?

NALOGA 47.
Palico slučajno prelomimo na dveh mestih. Koliko verjetno lahko iz dobljenih kosov sestavimo trikotnik (tj. noben od kosov ni daljši od skupne dolžine preostalih dveh)?

NALOGA 48. VAJE
Starejši brat preteče 100 metrov v 15 sekundah, mlajši pa v 30 sekundah. Vsak teče s konstantno hitrostjo. Na začetku si vsak na 100 metrov dolgi stezi naključno izbere štartni položaj.

a. Kakšna je verjetnost, da bo mlajši do cilja potreboval več kot 15 sekund?
b. Kakšna je verjetnost, da bo mlajši na cilj prišel za starejšim?

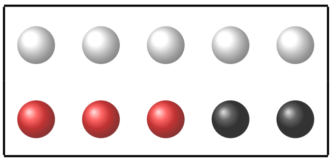
NALOGA 49. VAJE
Avtobus se ustavi na postaji na slepo med 6:55 in 7:05. Študent pa je nagnjen k zamujanju in pride na postajo na slepo med 7:00 in 7:07, neodvisno od avtobusa.

a. Kolikšna je verjetnost, da ujame ta avtobus?
b. Če želi študent še pravočasno priti na predavanje, mora biti na tem avtobusu najkasneje ob 7:02. Kolikšna je verjetnost, da se to zgodi?

Načelo vključitev in izključitev:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = {} & P(A_1) + \dots + P(A_n) \\ & - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \dots - P(A_{n-1}A_n) \\ & + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) \\ & - \cdots \\ & + (-1)^{n+1}P(A_1 \cdots A_n) \end{aligned}$$

Naloga 50.
V posodi so 3 rdeče, 2 črni in 5 belih kroglic. Na slepo izvlečemo dve kroglici (ki jih ne vračamo). Kolikšna je verjetnost, da je prva kroglica rdeča ali pa druga črna?



Naloga 51.
Verjetnost, da študent opravi Diskretne strukture je $\frac{2}{3}$, verjetnost, da opravi Matematiko, pa $\frac{5}{9}$. Verjetnost, da opravi vsaj enega od obeh predmetov, je $\frac{4}{5}$. Kolikšna je verjetnost, da naredi oba?

Naloga 52.
Na študentsko tekmovanje v programiranju se je prijavilo 5 matematikov, 7 fizikov in 11 računalničarjev. Med vsemi prijavljenimi kandidati je nato komisija slučajno izbrala skupino štirih tekmovalcev, ki bo Slovenijo zastopala na mednarodnem tekmovanju. Kolikšna je verjetnost, da skupino sestavljajo vsaj en matematik, vsaj en fizik in vsaj en računalničar?

Naloga 53. vaje
V posodi so listki, ki so oštevilčeni od 1 do 1000. Kolikšna je verjetnost, da pri izbiranju na slepo

a. izberemo listek, na katerem je število, deljivo s 3 in 4?
b. izberemo listek, na katerem je število, deljivo s 3 ali 4?
c. izberemo dva listka, na katerem sta števili z enakim številom števk?

Naloga 54.
Koliko je verjetno, da je naključno število med 1 in 1000 deljivo z 2 ali 3 ali 5?

Neodvisni dogodki: Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja

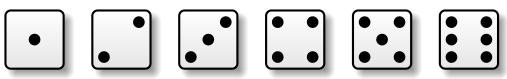
$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Dogodki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so **neodvisni**, če za poljubne različne indekse $i_1, \ldots, i_k$ velja

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

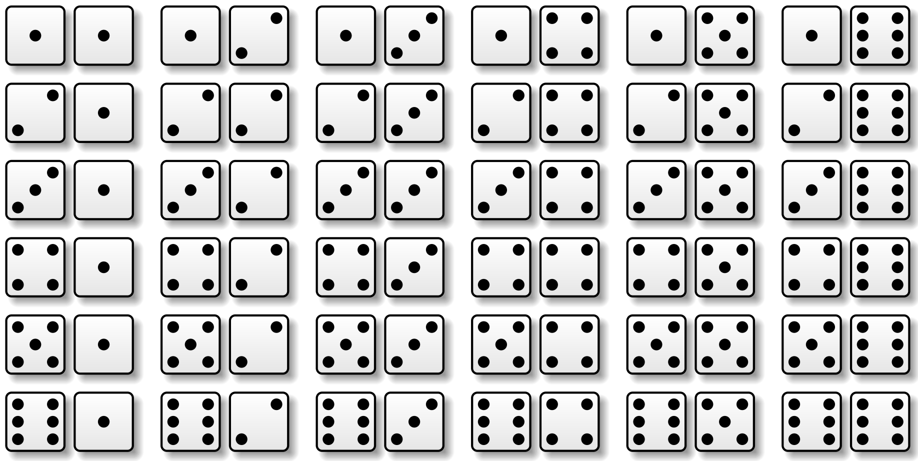
Naloga 55.
Vržemo standardno pošteno kocko. Naj bo A dogodek, da je padlo liho število pik, B dogodek, da padejo več kot tri pike in C dogodek, da padejo več kot štiri pike.

a. Ali sta dogodka A in B neodvisna?
b. Ali sta dogodka A in C neodvisna?



Naloga 56. vaje
Vržemo dve standardni kocki. Ali je dogodek, da pade skupaj liho mnogo pik, neodvisen od

a. dogodka, da na prvi kocki pade sodo pik?
b. dogodka, da na prvi kocki pade več pik kot na drugi?



NALOGA 57.

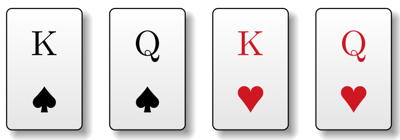
Na kupu so štiri karte: pikov kralj, pikova dama, srčev kralj in srčeva dama. Na slepo izvlečemo eno izmed kart. Definirajmo naslednje dogodke:

A ... izvlekli smo pika,

B ... izvlekli smo damo,

C ... izvlekli smo srčevega kralja ali pikovo damo.

a. Sta dogodka A in B neodvisna?
b. Sta dogodka A in C neodvisna?
c. Sta dogodka B in C neodvisna?
d. So dogodki A, B, C neodvisni?



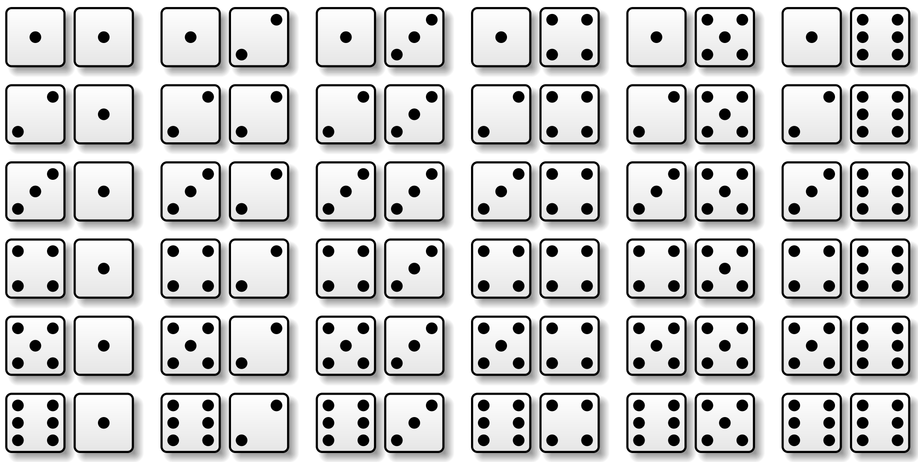
POGLAVJE 3

Pogojna verjetnost

Pogojna verjetnost: Verjetnost, da se zgodi dogodek A, če vemo, da se zgodi dogodek B, je
$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ .$$
Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja
$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \text{ oziroma } P(A\,|\,B) = P(A).$$

Naloga 58.

Vržemo dve pošteni kocki. Naj bo A dogodek, da je na prvi kocki padlo 6 pik in B dogodek, da je vsota pik na obeh kockah 8 pik. Izračunaj $P(A\,|\,B)$ in $P(B\,|\,A)$.

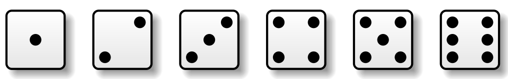


Naloga 59. vaje

Vržemo standardno kocko. Naj bo A dogodek, da padejo vsaj štiri pike, B dogodek, da pade šest pik, L pa dogodek, da pade liho mnogo pik.

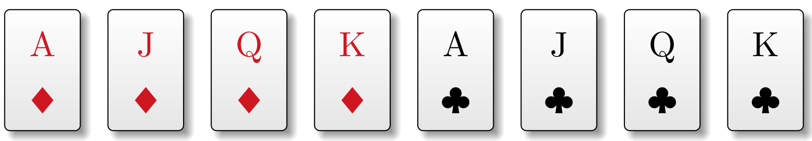
a. Izračunaj $P(A\,|\,L)$ in $P(B\,|\,L)$.
b. Kaj pa, če kocka ni poštena, tako da ena pika pade z verjetnostjo 0.3, šest pik pade z verjetnostjo 0.1, izidi z dvema, tremi, štirimi in petimi pikami pa so enako verjetni?

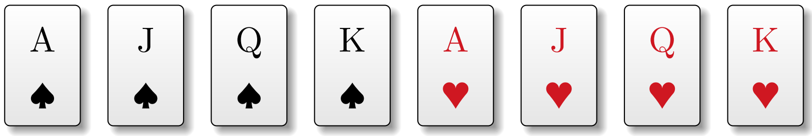
Ali so dogodki A, B in L paroma neodvisni?



Naloga 60.

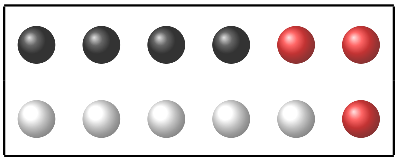
Iz premešanega kupa 16 kart, med katerimi so 4 piki, izvlečemo 4 karte. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je prva med njimi pik, če vemo, da sta med njimi natanko 2 pika?



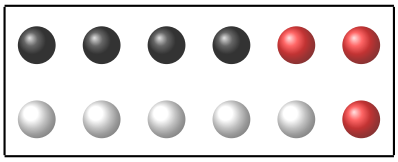


NALOGA 61.
V posodi imamo 3 rdeče, 4 črne in 5 belih kroglic. Iz posode izvlečemo dve kroglici (kroglic ne vračamo, vsako kroglico izberemo z enako verjetnostjo).

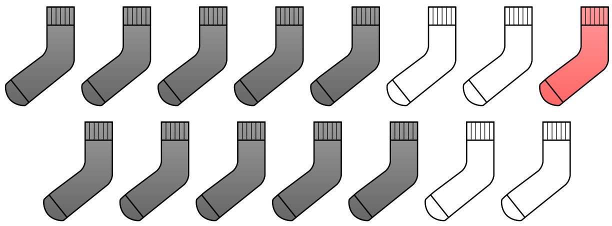
a. Kakšna je verjetnost, da bomo izvlekli dve kroglici enakih barv?
b. Kakšna je verjetnost, da bomo izvlekli dve kroglici različnih barv?
c. Kakšna je verjetnost, da bomo izvlekli dve kroglici enakih barv, če je prva kroglica rdeča?
d. Kakšna je verjetnost, da smo izvlekli dve rdeči kroglici, če vemo, da sta bili izvlečeni kroglici enakih barv?



NALOGA 62. VAJE
Iz posode v kateri so 3 rdeče, 4 črne in 5 belih kroglic slučajno izberemo tri. Koliko verjetno bosta natanko dve kroglici iste barve, če je bila prva rdeča?



NALOGA 63.
Aleš je zjutraj iz predala, v katerem ima 10 črnih, 4 bele in 1 rdečo nogavico (ta je brez para), na slepo vzel dve nogavici in ugotovil, da nima para iste barve. Kolikšna je verjetnost, da bo v rokah držal par, če iz predala vzame še tretjo nogavico?



NALOGA 64.
Ana in Brane se ob istem času odpravita na kraj zmenka. Ana ima do tja 4, Brane pa 5 minut hoje. Vsak od njiju ima na poti semafor, na katerem tri minute gori rdeča, dve minuti pa zelena luč. Semaforja sta med seboj neodvisna, drugih ovir pa na poti ni.

a. Kolikšna je verjetnost, da pride Ana pred Branetom?
b. Recimo, da je Ana res prišla pred Branetom. Kolikšna je verjetnost, da je vsaj nekaj časa čakala pred semaforjem?

NALOGA 65.
Verjetnost, da študent opravi DS je $\frac{2}{3}$, verjetnost, da opravi OMA pa $\frac{5}{9}$. Verjetnost, da opravi vsaj enega od obeh predmetov, je $\frac{4}{5}$. Kolikšna je verjetnost, da opravi OMA, če je že opravil DS?

Popolni sistem dogodkov: Dogodki $H_1, H_2, H_3, \ldots$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**, če je $H_i \neq N$ za vse i, $H_i \cap H_j = N$ za vse $i \neq j$ (nobena dva se ne moreta zgoditi hkrati) in $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = G$ (vedno se zgodi vsaj eden od njih).

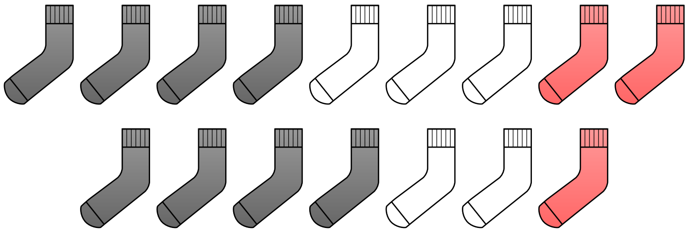
Izrek o popolni verjetnosti: Če $H_1, H_2, H_3, \ldots,$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**, potem po načelu vključitev/izključitev velja

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

NALOGA 66.

V predalu je 8 enakih črnih, 5 enakih belih in 3 enake rdeče nogavice. Nogavice izbiramo iz predala na slepo, eno za drugo in brez vračanja, dokler ne dobimo enega para katerekoli barve. Kolikšna je verjetnost, da

a. bomo par dobili že ko izvlečemo drugo nogavico?
b. je izvlečen par črn, če vemo, da smo dobili par ko smo drugič izvlekli?



NALOGA 67. VAJE

Dva topa izstrelita vsak po eno zrno na sovražni cilj. Verjetnost, da zadene prvi top, je 0.2, verjetnost, da zadene drugi top, pa 0.6. Topova cilj zadeneta neodvisno drug od drugega. Sovražni cilj bo gotovo uničen, če padeta nanj dve zrni, če pa ga zadene le eno, je verjetnost uničenja enaka 0.3. Kolikšna je verjetnost, da je cilj po obeh strelih uničen?

NALOGA 68.

Asistent razdeli 12 študentom naloge, vsakemu eno. Naloge so 4 različnih tipov, tako da po 3 študentje dobijo enako. Andrej pozna sošolca Boštjana in Cirila. Vsak od njih zna rešiti nalogo z verjetnostjo 0.7, neodvisno od ostalih dveh. Andrej odda nalogo, če jo bodisi zna rešiti sam bodisi jo prepiše od Boštjana ali Cirila v primeru, ko kateri od njiju dobi enako nalogo in jo zna rešiti. Kolikšna je verjetnost, da Andrej odda nalogo?

NALOGA 69.

Študent se od 50 izpitnih vprašanj nauči le 30. Za vsako vprašanje, ki se ga nauči, je potem še 30% verjetnosti, da pozabi odgovor, za vsako vprašanje, ki se ga ne nauči, pa je še 10% verjetnosti, da odgovor ugane. Privzamemo, da so dogodki, da študent posamezen odgovor pozabi/ugane, neodvisni. Na izpitu dobi tri na slepo izbrana vprašanja in izpit naredi, če pravilno odgovori na vsaj dve. Kolikšna je verjetnost, da bo naredil izpit?

NALOGA 70.

Za neko bolezen, ki jo dobi 2% vseh ljudi, obstajata dva testa, ki neodvisno testirata prisotnost bolezni. Pri nekom, ki ima to bolezen, je verjetnost, da je prvi test pozitiven 0.97, da je drugi test pozitiven pa 0.99. Pri nekom, ki bolezni nima, je verjetnost, da je test pozitiven, za prvi test enaka 0.01, za drugi test pa 0.02.

a. Kolikšna je verjetnost, da ima oseba to bolezen, če je prvi test pozitiven?
b. Kolikšna je verjetnost, da ima oseba to bolezen, če je drugi test pozitiven?
c. Kolikšna je verjetnost, da bo tudi drugi test pozitiven, če je prvi test pozitiven?
d. Kolikšna je verjetnost, da ima oseba to bolezen, če sta oba testa pozitivna?

Predpostavi, da sta izida testov neodvisna pogojno na dogodek, da ima oseba bolezen in na dogodek, da nima bolezni. Dogodka A in B sta neodvisna pogojno na C, če velja

$$P(AB|C) = P(A|C)P(B|C).$$

Unija hipotez: Če $H_1, H_2, H_3, \dots H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, je

$$P(A \mid H_1 \cup H_2) = \frac{P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2)}{P(H_1) + P(H_2)} \,.$$

Naloga 71.

Gospodinje Ana, Beti in Cvetka kupujejo marmelado. Ana z verjetnostjo 70% kupi slivovo, s 30% pa marelično. Beti z verjetnostjo 60% kupi marelično, s 40% pa jagodno. Cvetka z verjetnostjo 80% kupi jagodno, z 20% pa slivovo. Kupujejo neodvisno druga od druge. Ko nakupijo, na polici manjka natanko ena marmelada vsake vrste. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Beti kupila marelično marmelado?

Bayesova formula: Če $H_1, H_2, H_3, \dots H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, velja

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A \mid H_k)} \,.$$

Naloga 72. vaje

Miha se odpravi na obisk k vinogradnikoma Janezu in Lojzu. Vsak mu ponudi kozarec vina. Janez mu ponudi šmarnico z verjetnostjo 60%, Lojz pa neodvisno od Janeza z verjetnostjo 30%. Verjetnost, da Miho boli glava, ne da bi pil šmarnico, je 40%, verjetnost, da ga boli po kozarcu šmarnice (ne glede na to, čigave), 80%, po dveh kozarcih pa 100%. Naslednji dan Miho boli glava in prijatelj Tone mu pravi: “Janez ti je gotovo dal šmarnico!” Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima prav?

Naloga 73. vaje

V tovarni stroj $\mathcal{A}$ izdela 20% vseh izdelkov, stroj $\mathcal{B}$ 30% in stroj $\mathcal{C}$ 50%. Verjetnost, da ima izdelek s stroja $\mathcal{A}$ napako, je 5%, za stroj $\mathcal{B}$ je ta verjetnost 3%, za stroj $\mathcal{C}$ pa 1%. Denimo, da ima naključno izbrani izdelek napako. Kolikšna je verjetnost, da je bil izdelan na stroju $\mathcal{C}$?

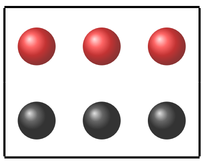
Naloga 74.

Matičnemu podjetju dobavljajo trije kooperanti. Alfa Deli dobavlja 20%, Bobo Deli 50%, Centro Deli pa 30% vseh delov. Alfa ima 5%, Bobo 1%, Centro pa 2% okvarjenih delov. Kontrolor v matičnem podjetju testira na slepo izbran del in izkaže se, da je okvarjen, zato zavzdihne: “Oh, že spet ti Alfa Deli!”. Koliko verjetno je del res dobavil Alfa?

Naloga 75.

Dva igralca imata v žari tri rdeče in tri črne kroglice. Najprej prvi vrže kovanec. Če pade grb, odstrani eno črno kroglico, če pade cifra, pa doda eno črno kroglico. Nato drugi igralec na slepo izvleče eno kroglico.

a. Kakšna je verjetnost, da bo drugi igralec iz žare izvlekel črno kroglico?
b. Kakšna je verjetnost, da je na kovancu padla cifra, če vemo, da je drugi igralec izvlekel črno kroglico?

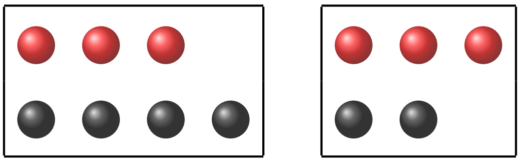


Naloga 76. vaje

Dva igralca imata v žari tri rdeče in tri črne kroglice. Najprej prvi vrže kovanec. Če pade grb, odstrani eno črno kroglico, če pade cifra, pa doda eno črno kroglico. Nato drugi igralec na slepo izbere dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da

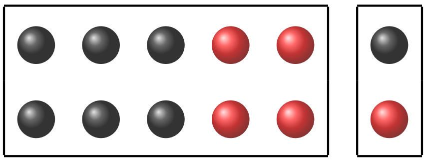
a. drugi igralec iz žare izbere dve črni kroglici?
b. drugi igralec iz žare izbere vsaj eno črno kroglico?
c. da drugi igralec izbere vsaj eno črno, če vemo, da je padla cifra?

d. da je padla cifra, če vemo, da je drugi igralec izbral vsaj eno črno?



NALOGA 77.

V prvi posodi je 6 črnih in 4 rdeče kroglice, v drugi pa ena črna in ena rdeča. Najprej na slepo premestimo 3 kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici (na slepo in brez vračanja). Obe sta rdeči. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice rdeče?



NALOGA 78. VAJE

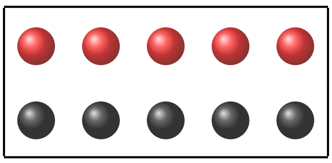
Po podatkih poročila ISTR[1] je 53% vse elektronske pošte nezaželene (spam). Med nezaželeno pošto 26% sporočil v naslovu vsebuje besedo *invoice*.

a. Med vsemi sporočili (spam in ham) je 14% sporočil z besedo *invoice* v naslovu. Kolikšna je verjetnost, da je sporočilo, ki ima v naslovu besedo *invoice*, nezaželeno?
b. Nabavni referent v nekem podjetju dobi 10% vseh legitimnih (ham) sporočil z besedo *invoice* v naslovu. Kolikšna je verjetnost, da je pošta, ki jo dobi in vsebuje besedo *invoice* v naslovu, nezaželena? Predpostavimo, da je v njegovem predalu delež nezaželenih sporočil ravno tako enak 53%, delež nezaželenih sporočil z besedo *invoice* v naslovu pa 26%.

NALOGA 79.

V škatli imamo 5 rdečih in 5 črnih kroglic. Igralec vrže kocko, nato pa iz škatle na slepo (brez vračanja) potegne toliko kroglic, kolikor je padlo pik na kocki. Izračunaj verjetnost, da

a. potegne toliko rdečih kroglic kot črnih, če vemo, da je padla šestica.
b. potegne toliko rdečih kroglic kot črnih.
c. je padla šestica, če vemo, da je potegnil toliko rdečih kot črnih.



NALOGA 80.

Vržemo pošten kovanec. Če pade cifra, vržemo eno kocko, če pade grb pa dve kocki.

a. Kolikšna je verjetnost, da je število pik manj kot 5, če pade cifra?
b. Kolikšna je verjetnost, da je število pik manj kot 5, če pade grb?
c. Kolikšna je verjetnost, da je število pik manj kot 5?
d. Kolikšna je verjetnost, da je padla cifra, če je število pik manj kot 5?

NALOGA 81.

Ahura Mazda in Brahma Svayambhu izmenično mečeta kocko. Kdor prvi vrže šest, postane lastnik ustvarjenega vesolja. Metati začne Brahma. Kolikšna je verjetnost, da

a. dobi vesolje Ahura?
b. je vesolje dobil Ahura, če je šestica padla v enem izmed prvih treh metov?

[1] Internet Security Threat Report, April 2017

c. je Ahura v prvem svojem metu vrgel štiri, če je vesolje dobil Ahura?

Naloga 82.
Žena pošlje moža na trg po solato, ki jo prodajata branjevki Pepca in Micka. Verjetnost, da kupi solato pri Pepci je 40%, verjetnost, da kupi pri Micki pa 60%. Pepca ima 10%, Micka pa 20% gnile solate. Mož prinese domov gnilo solato in žena ga nahruli: "Drugič raje glej solato, ne pa Micke!" Katero branjevko lahko žena bolj upravičeno sumi, da mu je prodala gnilo solato? Izračunaj verjetnost, da je mož gnilo solato res kupil pri Micki. Privzamemo, da branjevki solato izbirata na slepo.

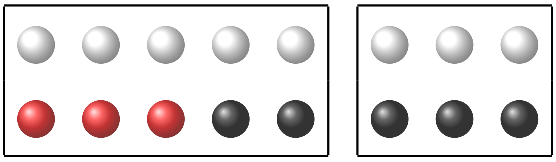
Naloga 83.
Na predavanja hodi 60% študentov. Če študent hodi na predavanja, naredi izpit v 90% primerov, če ne hodi, pa samo v 20% primerov. Kolikšna je verjetnost, da je slučajno izbrani pozitivni študent hodil na predavanja?

Naloga 84.
Na sodišču laže 1% vseh prič. Vse priklopimo na detektor laži. Če priča laže, detektor to zazna v 98% primerov. Če priča govori resnico, detektor ugotovi laž v 1% primerov. Kolikšna je verjetnost, da

a. naključno izbrana priča laže in da detektor to zazna?
b. detektor za naključno izbrano pričo zazna laž?
c. naključno izbrana priča laže, če detektor to zazna?

Naloga 85.
V prvi posodi je 5 belih, 3 rdeče in 2 črni kroglici, v drugi posodi pa so 3 bele in 3 črne kroglice. Iz prve posode v drugo na slepo premestimo eno kroglico, nato pa iz druge na slepo in brez vračanja izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da

a. sta bili izvlečeni bela in črna kroglica?
b. je bila premeščena bela, če vemo, da sta bili izvlečeni bela in črna?

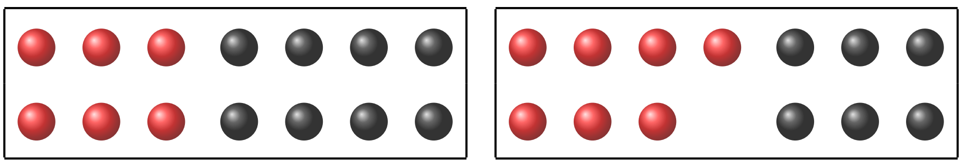


Naloga 86.
V laboratoriju na belih miškah proučujemo dedovanje gena JAA7. V prvi generaciji ima gen petina vseh mišk. Če imata gen oba starša, ga ima potomec v 80% primerov, če ga ima samo eden od staršev, ga ima potomec v 30% primerov, če gena nima nihče od staršev, pa ga tudi potomec nima. Določi verjetnost, da

a. imata oba starša opazovani gen, če smo pare oblikovali naključno.
b. ima naključno izbrana miška iz druge generacije gen.
c. če je imela miška iz druge generacije gen, sta ga imela tudi oba starša?

Naloga 87.
Na mizi sta dve posodi. V prvi posodi je 6 rdečih in 8 črnih kroglic, v drugi pa 7 rdečih in 6 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo 1 kroglico in jo prestavimo v drugo posodo. Nato iz druge posode izvlečemo dve kroglici.

a. Kolikšna je verjetnost, da smo prestavili črno kroglico?
b. Kolikšna je verjetnost, da sta izvlečeni kroglici črni?
c. Kolikšna je verjetnost, da smo prestavili črno kroglico, če sta obe izvlečeni črni?



Naloga 88.

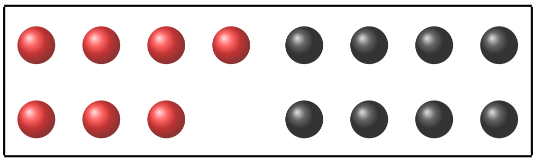
Med vso pošto je 40 procentov nezaželene. Med nezaželeno pošto vsako četrto sporočilo vsebuje besedo invoice. Delež sporočil z besedo invoice med zaželeno pošto je 0.03. Dobimo novo sporočilo.

a. Kolikšna je verjetnost, da sporočilo vsebuje besedo invoice?
b. Kolikšna je verjetnost, da je sporočilo zaželeno in vsebuje besedo invoice?
c. Opazimo, da sporočilo vsebuje besedo invoice. Kolikšna je verjetnost, da je sporočilo nezaželeno?

Naloga 89.

V posodi je 7 rdečih in 8 črnih kroglic. Vržemo kocko in, če je število pik manjše od 5, v posodo dodamo 4 rdeče, sicer pa 4 črne kroglice. Iz posode nato na slepo izberemo 1 kroglico.

a. Kolikšna je verjetnost, da smo izvlekli rdečo kroglico?
b. Kolikšna je verjetnost, da smo v posodo dodali rdeče kroglice?
c. Kolikšna je verjetnost, da je padla 6, če je bila izvlečena kroglica črna?



Naloga 90.

CIA izve, da se dva terorista skrivata na petih možnih lokacijah, vendar gotovo ne skupaj. Vse razporeditve po lokacijah so enako verjetne. Verjetnost, da se na lokaciji nahajajo civilisti, je 30%, če se tam nahaja terorist, sicer pa 60%. Vojska lahko vrže eno bombo (ki ubije vse), preden terorista pobegneta in se za njima izgubi vsaka sled. Kolikšna je verjetnost, da:

a. ubijejo terorista, ne da bi pri tem ubili kakšnega civilista?
b. so ubili terorista, če vemo, da so med žrtvami napada civilisti?

Naloga 91.

Arne, Bine in Cene gredo streljat zajce. Njihove verjetnosti zadetka so $0.1, 0.2, 0.3$, neodvisno drug od drugega. Vsi ustrelijo in zajec je zadet.

a. Koliko verjetno ga je zadel Arne?
b. V zajcu je le ena krogla. Koliko verjetno je Arnetova?

Naloga 92.

Letalska družba ima na voljo tri letala. Letalo a leti iz Ljubljane do Moskve, letali b in c pa od tam naprej do Arhangelska. Drugih povezav ni. Zaradi vremena polet za a, b, c odpovedo z verjetnostjo 30%, 25%, 20%. Odpovedi so med seboj neodvisne.

a. S kakšno verjetnostjo bo potnik iz Ljubljane prispel do Arhangelska?
b. Tja vendarle ni mogel. Koliko verjetno je moralo letalo b ostati na tleh?

Naloga 93.

Alpske smučarke Tina, Ana in Ilka se želijo pomeriti v smuku. Tina pri vožnji naredi napako in odstopi z verjetnostjo 10%, medtem ko za Ano in Ilko velja, da vsaka odstopi z verjetnostjo 20%. Če nobena smučarka ne odstopi, Tina zmaga v 70% primerih. Ta delež se poveča na 90%, če natanko ena njena tekmica naredi napako in odstopi. Privzamemo, da so dogodki, da posamezna smučarka odstopi, neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da

a. Tina zmaga v smuku?
b. je vsaj ena njena tekmica odstopila, če je Tina zmagala?

Pri tem upoštevaj, da smučarka, ki odstopi, ne more zmagati tekme. Lahko se torej zgodi, da vse tri smučarke odstopijo in tako nimamo nobene zmagovalke.

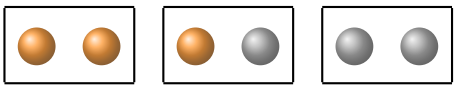
Naloga 94.
Verjetnost, da ženska zanosi, če ima prejšnji mesec nezaščiten spolni odnos, je 20 procentov. Test nosečnosti je pozitiven za 97 procentov žensk, ki so noseče. Poleg tega je test pozitiven za 4 procente žensk, ki niso noseče. Mlad par se trudi zanositi in dekle opravi nosečniški test.

a. Kolikšna je verjetnost, da je test pozitiven?
b. Kolikšna je verjetnost, da je dekle zanosilo in test ni pozitiven?
c. Kolikšna je verjetnost, da je dekle zanosilo, če je test pozitiven?

Naloga 95.
V skladišču je 20 procentov jabolk iz Poljske, 15 procentov iz Hrvaške, ostala pa so iz Slovenije. Delež jabolk vrste zlati delišes je med jabolki iz Poljske enak 0.15, med jabolki iz Hrvaške in Slovenije pa je delež vrste zlati delišes enak 0.35. Naključno izberemo en zaboj jabolk.

a. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali zlati delišes iz Slovenije?
b. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali zlati delišes?
c. Kolikšna je verjetnost, da so jabolka slovenska, če smo izbrali zlati delišes?

Naloga 96.
Imamo tri škatle. V eni sta dva zlata kovanca, v drugi en zlat in en srebrn, v tretji pa dva srebrna. Dovoljeno nam je, da na slepo izberemo iz ene od škatel izvlečemo en kovanec (tj. vseh šest z enako verjetnostjo). Denimo, da smo izvlekli zlat kovanec. Kolikšna je verjetnost, da je tudi drugi kovanec v tisti škatli zlat?



Naloga 97.
Ana, Bojan, Cvetka in Dejan želijo sesti na sedeže, ki so označeni z njihovimi imeni, vendar pred tem en naključno izbrani sedež zasede Emil. Za njim vstopi Ana. Če je njen sedež prost, sede nanj, sicer pa naključno izbere enega izmed preostalih. Nato isto naredita še Bojan in Cvetka.

a. Kolikšna je za vsakega od njih verjetnost, da bo sedel/a na svojem sedežu?
b. Kolikšna je verjetnost, da bosta Ana in Cvetka sedeli na svojih sedežih?

Naloga 98.
V gledališču so sedeži oštevilčeni od 1 do 100. Za predstavo so prodali vseh 100 oštevilčenih kart. Prvi v gledališče vstopi neolikan gost, ki sploh ni kupil karte, in sede na naključen sedež. Gostje s kartami nato vstopajo v gledališče po vrstnem redu, ki ga določajo številke na kartah. Usedejo se na svoj sedež, če je le-ta prost, sicer pa naključno izberejo en sedež med prostimi. Kolikšna je verjetnost, da bo sedež gosta, ki ima karto številka 3, ob njegovem prihodu prost?

Naloga 99. vaje
Aleš in Bojan igrata namizni tenis. Aleš dobi posamezen niz z verjetnostjo $\frac{1}{3}$, vsi nizi so med seboj neodvisni, igrata pa na dve točki razlike. Kolikšna je verjetnost, da bo Aleš na koncu zmagal?

Naloga 100.
Naj bosta dogodka B in C neodvisna pogojno na A. To pomeni, da je

$$P(B \cap C|A) = P(B|A) \cdot P(C|A).$$

Ali velja $P(B|A, C) = P(B|A)$? Dokaži!

POGLAVJE 4

Diskretne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Diskretna slučajna spremenljivka X je realna funkcija s končno ali števno zalogo vrednosti $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Verjetnost, da X zavzame vrednost $a_i \in \mathbb{R}$, označimo s $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer

- s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix},$$

pri čemer je $0 \leq p_i \leq 1$ in $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$ ali

- s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_X(x) := P(X \leq x).$$

Velja

$$F_X(x) = p_1 \cdot I_{[a_1,\infty)}(x) + p_2 \cdot I_{[a_2,\infty)}(x) + p_3 \cdot I_{[a_3,\infty)}(x) + \cdots,$$

kjer je

$$I_{[a_i,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & a_i \leq x, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

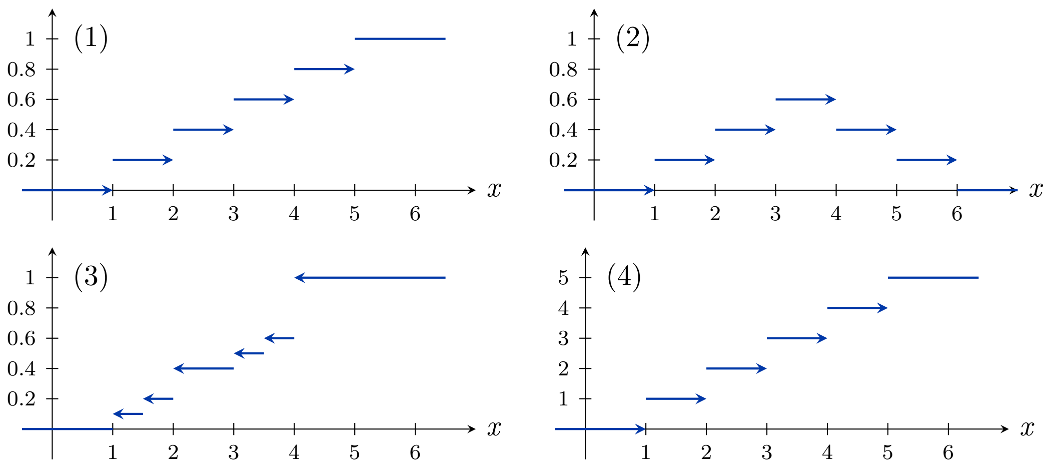
NALOGA 101. VAJE

Pri metu dveh kock naj bo X vsota padlih pik. Zapiši porazdelitveno shemo in nariši F_X.

NALOGA 102. VAJE

Na spodnji sliki so prikazani štirje grafi funkcije $F_X(x)$.

a. Kateri graf predstavlja porazdelitveno funkcijo za nek X?
b. Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.
c. Izračunaj verjetnosti $P(X \leq 2)$, $P(-3 < X < 4)$, $P(2.3 \leq X \leq 10)$.



NALOGA 103.

Neodvisno vržemo dva poštena kovanca in standardno kocko. Za vsako piko dobimo 1 evro, za vsako padlo cifro pa 2 evra. Slučajna spremenljivka S naj predstavlja skupni znesek. Zapiši njeno porazdelitev.

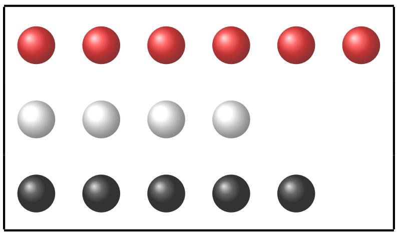
NALOGA 104. VAJE

Za diskretno slučajno spremenljivko X z zalogo vrednosti $\{1,2,3,4\}$ velja $P(X=k)=ck^2$. Določi

a. konstanto $c\in\mathbb{R}$,
b. verjetnost $P(X>2)$,
c. funkcijo $F_X(x)=P(X\leq x)$.

NALOGA 105.

V posodi je 6 rdečih, 4 bele in 5 črnih kroglic. Na slepo izvlečemo dve kroglici in z X označimo število izvlečenih črnih kroglic. Določite porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.



Bernoullijeva slučajna spremenljivka $X \sim B(p)$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p, X pa ima vrednost 1, če se je zgodil dogodek A, in 0 sicer.
- $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$.

Binomska slučajna spremenljivka $X \sim B(n,p)$

- X je število pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa[a].
- $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ za $k=0,1,\ldots,n$.
- R: $P(X=k)=\mathrm{dbinom}(k,n,p), F_X(k)=\mathrm{pbinom}(k,n,p)$.

[a] Pri vsaki ponovitvi poskusa ima izid A verjetnost p

Geometrijska slučajna spremenljivka $X \sim G(p)$

- X je število ponovitev poskusa do (vključno) prve pojavitve izida A.[a]
- $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ in $P(X\leq k)=1-(1-p)^k$ za $k=1,2,\ldots$
- R: $P(X=k)=\mathrm{dgeom}(k-1,p), F_X(k)=\mathrm{pgeom}(k-1,p)$.

Pascalova oziroma **negativna binomska** slučajna spremenljivka $X \sim P(n,p)$

- X je število ponovitev poskusa do (vključno) n-te pojavitve izida A.[a]
- $P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$ za $k=n,n+1,n+2,\ldots$
- R: $P(X=k)=\mathrm{dnbinom}(k-n,n,p), F_X(k)=\mathrm{pnbinom}(k-n,n,p)$.

Hipergeometrijska slučajna spremenljivka $X \sim H(R,B,n)$

- X je število rdečih kroglic med izbranimi n kroglicami[a].
- $P(X=k)=\dfrac{\binom{R}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{R+B}{n}}$ za $k=0,1,2,\ldots,\min\{n,R\}$.
- R: $P(X=k)=\mathrm{dhyper}(k,R,B,n), F_X(k)=\mathrm{phyper}(k,R,B,n)$.

[a] V posodi imamo R rdečih in B belih kroglic. Iz posode izvlečemo n kroglic

Poissonova slučajna spremenljivka $X \sim P(\lambda)$

- X pa je število ponovitev dogodka A na danem intervalu[a]
- $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$
- R: $P(X = k) = \text{dpois}(k, \lambda), F_X(k) = \text{ppois}(k, \lambda)$.

[a] V povprečju imamo na nekem intervalu λ ponovitev dogodka A. Če interval spremenimo, moramo ustrezno popraviti tudi λ

Naloga 106. vaje

Poimenuj porazdelitve in zapiši porazdelitvene sheme naslednjih slučajnih spremenljivk:

a. X_1 pove, kolikokrat v 4 metih kocke pade liho mnogo pik,
b. X_2 pove, koliko metov standardne kocke je potrebnih do prve šestice (pri tem so meti so med seboj neodvisni),
c. X_3 pove, koliko metov kocke je potrebnih, dokler šestica ne pade desetkrat (meti so med seboj neodvisni),
d. X_4 pove število pikov med 7 kartami, ki smo jih izbrali na slepo izmed 16 kart, kjer so bili štirje piki.

Naloga 107. vaje

Cesto pred vrtcem v povprečju prevozi 100 avtomobilov na uro.

a. Koliko verjetno v treh minutah cesto prevozita manj kot 2 avtomobila?
b. Koliko verjetno v treh minutah cesto prevozi več kot 5 avtomobilov.
c. Skupina iz vrtca potrebuje eno minuto, da prečka cesto. Koliko verjetno v času, ko ta skupina prečka cesto, mimo ne pripelje noben avtomobil?

Naloga 108.

Naj bo X število metov poštenega kovanca, ki ga mečemo, dokler ne pade cifra in takoj nato grb. Meti so med seboj neodvisni. Zapiši in poimenuj porazdelitev za X.

Naloga 109.

Naj bo X število metov poštenega kovanca, ki ga mečemo, dokler ne pade tako cifra kot tudi grb. Meti so med seboj neodvisni. Zapiši in prepoznaj porazdelitev za X.

Naloga 110.

V ribniku je N rib. Ribič prvi dan ulovi R rib, jih označi in vrne v ribnik. Drugi dan ulovi n rib. Naj bo X število označenih med njimi. Kako je porazdeljen X?

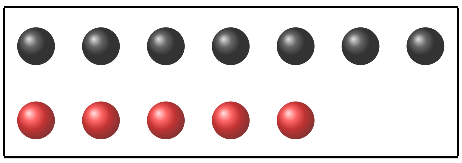
Naloga 111.

Izbruhnila je neka nova bolezen, za katero smo ugotovili, da je verjetnost okužbe enaka 0.15. V razredu je 20 učencev. Kolikšna je verjetnost, da

a. se ni okužil noben učenec?
b. so okuženi natanko trije učenci?
c. so okuženi manj kot trije učenci?
d. so okuženi vsaj trije učenci?

Naloga 112.

V posodi imamo 5 rdečih in 7 črnih kroglic. Naključno izvlečemo eno kroglico, zapišemo njeno barvo in jo vrnemo. Ta poskus ponovimo 20 krat. Kolikšna je verjetnost, da smo rdečo kroglico izvlekli v največ petih poskusih?



Naloga 113.
V nekem podjetju imajo 500 računalnikov. Verjetnost okvare posameznega računalnika je 0.08. Naključno izberemo 10 računalnikov. Kolikšna je verjetnost, da

a. so trije izbrani računalniki pokvarjeni?
b. bodo vsi izbrani računalniki delujoči?

Naloga 114.
Proizvajalec mikročipov razpošilja čipe v ogromnih škatlah. V povprečju je 5% mikročipov v škatli defektnih. Prejemnik jemlje čipe enega iz škatle enega za drugim in jih testira.

a. Kolikšna je verjetnost, da bo prvi defektni čip med prvimi desetimi testiranimi?
b. Vsaj koliko čipov moramo izbrati, da bo z verjetnostjo 90% vsaj en defekten?

Naloga 115.
Telefonske linije pri neki službi za pomoč uporabnikom so 20% časa zasedene. Predpostavimo, da kličemo to službo, in da so klici med seboj neodvisni.

a. dobimo operaterja šele, ko kličemo desetič?
b. bomo morali klicati več kot petkrat?

Naloga 116.
Raziskovalci so ugotovili, da je pri neki vrsti ovc verjetnost okužbe z nekim parazitom enaka 0.2. Za testiranje novega cepiva morajo iz črede poiskati 5 okuženih ovc. Kolikšna je verjetnost, da morajo pregledati vsaj 10 ovc preden najdejo 5 okuženih?

Naloga 117.
Nek igralec košarke zadane prosti met z verjetnostjo 0.85. Kolikšna je verjetnost, da bo na eni tekmi zadel svoj peti prosti met v sedmem poskusu?

Naloga 118.
Iz kupa 52 kart jih naključno izberemo 5 brez vračanja.

a. Koliko verjetno so med njimi tri karte črne barve?
b. Koliko verjetno sta med njimi dve kraljevski (fant, dama, kralj)?
c. Koliko verjetno so med njimi štirje piki?

Naloga 119.
V nekem podjetju je zaposlenih 800 ljudi, od tega je 240 vegetarijancev. Naključno izberemo 10 ljudi. Kolikšna je verjetnost, da je med njimi

a. natanko en vegetarijanec?
b. več kot en vegetarijanec?

Naloga 120.
Število strank, ki vstopijo v eni uri, lahko modeliramo s Poissonovo porazdelitvijo.

a. Določi λ, če veš, da je $P(X=0)=0.05$.
b. Koliko verjetno imamo v eni uri vsaj dve stranki?
c. Prišlo je do nepričakovanega izpada elektrike, ki je trajal 20 minut. Koliko verjetno v tem času ni bilo nobene stranke?

Naloga 121. vaje
Trije lokostrelci streljajo na tarčo. Verjetnost, da jo zadene prvi, je $\frac{1}{2}$, verjetnost, da jo zadene drugi, je $\frac{1}{4}$ in verjetnost, da jo zadene zadnji, je $\frac{1}{6}$. Z X označimo število zadetkov tarče po tem, ko vsi sprožijo svoj strel. Določi

a. porazdelitev slučajne spremenljivke X,
b. verjetnost dogodka, da bosta tarčo zadela vsaj dva strela.

Naloga 122.
Dve kocki mečemo, dokler skupaj ne vržemo vsaj 10 pik. Kolikšna je verjetnost, da bomo

a. vsaj 10 pik vrgli prej kot v 4 metih?
b. potrebovali vsaj 6 metov?
c. Vsaj koliko metov moramo vreči, da bomo z 99 procentno verjetnostjo končali?

Pri tem upoštevajte, da opravimo dva meta, ko hkrati vržemo dve kocki.

Naloga 123.
Na avtocestnem odseku se v povprečju zgodi ena nesreča na dan. Kolikšna je verjetnost, da

a. se bodo v 7 dneh zgodile manj kot 3 nesreče?
b. se bo zgodilo vsaj 10 nesreč?

Kaj je potrebno pri izračunih predpostaviti?

Naloga 124.
Med dvajsetimi izdelki v zaboju je pet pokvarjenih. Iz zaboja naključno izbiramo izdelke, dokler ne izberemo delujočega. Pri tem početju izbranih izdelkov ne vračamo nazaj v zaboj. Označimo z X število potrebnih izbiranj, dokler v rokah ne držimo izpravnega izdelka. Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.

Naloga 125. vaje
Vržemo dve igralni kocki. Naj bo X_1 število pik na prvi kocki in X_2 število pik na drugi kocki. Označimo z Y maksimalno videno število pik na obeh kockah, torej $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke Y.

Naloga 126.
Računalniški hrošč programu zagode v povprečju vsake pol ure. Kolikšna je verjetnost, da

a. ne bo napake po eni uri?
b. ne bo napake po dveh urah?
c. bo v uri in pol več kot ena napaka?

Kaj je potrebno pri izračunih predpostaviti?

Naloga 127.
Na avtobusno postajo v povprečju vsako minuto pride en potnik. Vsakih 6 minut pripelje avtobus. Tedaj vsi čakajoči vstopijo nanj in postaja se izprazni. Kolikšna je verjetnost, da

a. je ob prihodu avtobusa postaja prazna?
b. na avtobus vstopijo vsaj trije potniki?

Kaj je potrebno pri izračunih predpostaviti?

Naloga 128.
V galaksiji kot je naša je v povprečju 5 supernov na stoletje. Zadnjo, za katero obstajajo zgodovinski dokazi, je leta 1604 opazoval Kepler.

a. Kolikšna je verjetnost, da od Keplerjevega opažanja dalje v Rimski cesti res ni bilo nobene eksplozije supernove?
b. Kolikšna je verjetnost, da bomo pojav supernove znotraj Rimske ceste dočakali v naslednjih 30 letih?

Naloga 129.
Neka rokometna ekipa da v povprečju 30 golov na tekmo (tekma traja 60 minut).

a. Koliko verjetno ekipa na naslednji tekmi v prvi minuti doseže vsaj en gol?
b. Koliko verjetno ekipa v zadnjih 3min tekme doseže natanko dva gola?

Naloga 130.
Na vaškem sejmu imajo stojnico s srečkami, verjetnost posameznega dobitka je p.

a. Kupimo 10 srečk. Pri katerih vrednostih p je verjetnost, da je med temi 10 srečkami vsaj ena dobitna, večja od 90%?
b. Proti koncu dne Janko izve, da imajo v prodajalni samo še 6 srečk, od teh pa je k dobitnih. Izračuna, da mora kupiti samo 2 srečki, pa bo imel 60% možnosti za natanko en dobitek. Določi k!

NALOGA 131.
Petkrat vržemo pošteno kocko. Označimo s S število šestic, ki padejo. Določi

a. porazdelitev slučajne spremenljivke S,
b. $P(S \text{ sodo})$,
c. $P(S \geq 3)$,
d. $P(S \text{ sodo} \mid S \geq 3)$.

NALOGA 132.
Kocko mečemo, dokler trikrat ne pade 6 pik. Izračunaj verjetnost, da

a. bomo morali kocko vreči vsaj 15 krat.
b. bomo morali kocko vreči med 10 in 20 krat (vključno).

NALOGA 133.
Naj bo X število avtomobilov, ki v nekem časovnem intervalu na prehodu prečkajo železniško progo. Progo v povprečju prečka en avto na 10 minut. Kolikšna je verjetnost, da

a. v 10 minutah prečkajo vsaj 3 avtomobili?
b. v 2 minutah, ko se zapornice spustijo, ne pripelje noben avtomobil?

POGLAVJE 5

Zvezne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Zvezna slučajna spremenljivka X je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, tako da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\mathrm{d}t.$$

Funkciji p_X pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji F_X pa **porazdelitvena funkcija**. Množici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka X, pravimo **zaloga vrednosti** in jo označimo z Z_X. Velja še

- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$,
- če je p_X zvezna v x, potem je $F'(x) = p(x)$.

NALOGA 134. VAJE

Zvezna slučajna spremenljivka X ima zalogo vrednosti $[0, 1]$ in gostoto $p_X(x) = cx(1-x)$. Določi:

a. $c \in \mathbb{R}$,
b. $F_X(x)$,
c. $P(0 < X < \frac{1}{4})$,
d. $P(\frac{1}{4} < X < 3)$.

NALOGA 135. VAJE

Vsaka paleta paketov riža vsebuje 100kg. Slučajna spremenljivka, ki šteje količino prodanih palet riža, ima gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & x \in [0, 1), \\ -\frac{x}{3} + 1, & x \in [1, 3], \\ 0 & x \notin [0, 3]. \end{cases}$$

S kakšno verjetnostjo bodo na naključni dan prodali več kot 0.5 in manj kot 1.5 palet riža?

NALOGA 136.

Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka na intervalu $[-1, 1]$ z gostoto $p_X(x) = c(1 - x^2)$. Določi konstanto $c \in \mathbb{R}$, da bo p_X res gostota, in izračunaj $P(|X| > \frac{1}{2})$.

NALOGA 137.

Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti $[0, \pi]$ in gostoto $p_X(x) = c \sin x$. Določi

a. $c \in \mathbb{R}$,
b. $F_X(x)$,
c. $P(0 < X < \frac{\pi}{4})$.

NALOGA 138.

Zvezna slučajna spremenljivka X na intervalu $[-1, 1]$ ima gostoto $p_X(x) = c|x|$.

a. Določi $c \in \mathbb{R}$ in skiciraj graf za p_X.
b. Izračunaj $P(|X| > \frac{1}{2})$.

NALOGA 139.
Zvezna slučajna spremenljivka X ima gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in (0, \sqrt{2}), \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poišči $c \in \mathbb{R}$ in $F_X(x)$ ter izračunaj $P(X > 1)$.

NALOGA 140.
Zvezna slučajna spremenljivka X ima gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} c - \frac{x}{2}, & x \in (0, 2], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi

a. $c \in \mathbb{R}$,
b. $F_X(x)$,
c. $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$.

NALOGA 141. VAJE
Na bencinski črpalki je količina goriva v litrih, ki ga natočijo vozniki v enem dnevu, zvezna slučajna spremenljivka X z zalogo vrednosti $[250, 1250]$ in porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \frac{x}{1000} - \frac{1}{4}.$$

a. Koliko verjetno bo dostavljenih 950 litrov goriva pošlo do konca dneva?
b. Določi gostoto verjetnosti p_X.

NALOGA 142. VAJE
Zvezna slučajna spremenljivka X ima porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx, & x \in [0, 2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Določi

a. $c \in \mathbb{R}$,
b. $p_X(x)$,
c. $P(|X| < 1)$.

NALOGA 143. VAJE
V kvadratu s stranico dolžine 2 slučajno izberemo točko. Naj bo X oddaljenost do najbližje stranice. Določi

a. $F_X(x)$,
b. $p_X(x)$,
c. $P(X < \frac{1}{2})$.

Enakomerna zvezna slučajna spremenljivka $X \sim U[a,b]$

- V poskusu so vsi izidi na intervalu $[a,b]$ enako verjetni.
- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$
- R: $p_X(x) = \text{dunif}(x,a,b), F_X(x) = \text{punif}(x,a,b)$.

Eksponentna slučajna spremenljivka $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

- V povprečju imamo na časovno enoto λ ponovitev dogodka A, X pa je čas med dvema zaporednima dogodkoma.
- $p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$
- R: $p_X(x) = \text{dexp}(x,\lambda), F_X(x) = \text{pexp}(x,\lambda)$.

Normalna slučajna spremenljivka $X \sim N(\mu,\sigma)$

- Je najpomembnejša zvezna porazdelitev v statistiki, saj sta vsota in povprečje veliko (ponavadi zadošča 30) neodvisnih, enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, normalno porazdeljeni (centralni limitni izrek).
- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ za $x \in \mathbb{R}$.
- V primeru $\mu = 0$ in $\sigma = 1$ dobimo *standardno normalno porazdelitev.*
- Za $F_X(x)$ ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.
- R: $p_X(x) = \text{dnorm}(x,\mu,\sigma), F_X(x) = \text{pnorm}(x,\mu,\sigma)$.

Gamma slučajna spremenljivka $X \sim \Gamma(n,\lambda)$

- V povprečju imamo na časovno enoto λ ponovitev dogodka A, X pa je čas med prvo in $(n+1)$. ponovitvijo dogodka A.
- $p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}, & x > 0. \end{cases}$
- R: $p_X(x) = \text{dgamma}(x,n,\lambda), F_X(x) = \text{pgamma}(x,n,\lambda)$.

Hi kvadrat slučajna spremenljivka $X \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- Je vsota kvadratov n neodvisnih standardnih normalnih slučajnih spremenljivk.
- $p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0. \end{cases}$
- R: $p_X(x) = \text{dchisq}(x,n), F_X(x) = \text{pchisq}(x,n)$.

Naloga 144. vaje

Predavanja iz verjetnosti so ob 12:15. Profesor prispe med 12:00 in 12:15. Naj X predstavlja, koliko časa (v minutah) pred začetkom predavanj je profesor prišel na fakulteto. Določi gostoto $p_X(x)$ in porazdelitev $F_X(x)$ ter nariši njuna grafa.

Naloga 145.
Navadna žarnica v povprečju sveti eno leto. Denimo, da je njena življenjska doba (merjena v letih) eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka s parametrom 1. V hiši je 20 takih žarnic.

a. Koliko verjetno bo ena nova žarnica svetila vsaj 1 leto?
b. Koliko verjetno bo žarnica, ki sveti že 1 leto, svetila vsaj še 1 leto?
c. Naj bo X število žarnic, ki pregorijo v enem letu. Kako je porazdeljen X.
d. Naj bo T čas med trenutkom, ko odpove ena žarnica in trenutkom, ko odpove naslednja žarnica. Kako je porazdeljen T? Kako verjetno je, da vsaj en mesec ne bo potrebno zamenjati žarnice?

Naloga 146. vaje
Anže in Brina sta zmenjena na določenem mestu ob 18:00, prideta pa enkrat med 18:00 in 18:10, z enakomerno porazdelitvijo neodvisno drug od drugega. Ljubosumni Maks vse od 18:00 opreza za vogalom, dokler ne prideta oba. Slučajna spremenljivka M predstavlja, koliko časa je čakal Maks. Določi porazdelitev $F_M(x)$ in gostoto $p_M(x)$.

Naloga 147.
Avtobus vozi na 10 minut, na postajo pridemo naključno. Naj bo X čas čakanja na avtobus.

a. Določi Z_X, $F_X(x)$, $p_X(x)$.
b. Koliko verjetno bomo čakali manj kot 5 minut?
c. Koliko verjetno bomo čakali več kot 7 minut?

Naloga 148.
Na štoparici imamo oznake za natančnost 0.2 sekunde. Pri merjenju čas zaokrožimo na najbližjo oznako. Naj bo X absolutna napaka izmerjenega časa v sekundah.

a. Določi porazdelitev $F_X(x)$.
b. Koliko verjetno bomo naredili napako vsaj 0.05 sekund?

Naloga 149. vaje
Na bankomatu dvigne denar v povprečju 15 ljudi na uro.

a. Kako je porazdeljen čas med dvema zaporednima dvigoma?
b. Koliko verjetno med zaporednima dvigoma preteče manj kot 2 minuti?
c. Kako dolg je interval, da z verjetnostjo 75% ni dviga v tem času?
d. V času razprodaj povprečno število dvigov na uro naraste na 40. Koliko verjetno bo med dvema zaporednima dvigoma preteklo manj kot 2 minuti?

Naloga 150. vaje
Življenjska doba nekega avtomobilskega motorja znaša v povprečju 15 let. Naj bo slučajna spremenljivka X življenjska doba motorja, ki je porazdeljena eksponentno.

a. Koliko verjetno motor deluje vsaj 10 let?
b. Kako dolgo deluje 80% teh motorjev?
c. Koliko verjetno motor deluje med 15 in 20 let?

Naloga 151.
Stranka v povprečju ostane v trgovini 25 minut. Koliko verjetno stranka ostane v trgovini več kot 30 minut?

POGLAVJE 6

Sredine

Matematično upanje

Matematično upanje diskretne slučajne spremenljivke $X \sim \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ oziroma zvezne slučajne spremenljivke z gostoto p_X je

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, p_k \qquad \text{oziroma} \qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Matematično upanje funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slučajne spremenljivke X je

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k)\, p_k \qquad \text{oziroma} \qquad E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; p_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

NALOGA 152.
Neodvisno vržemo 2 kovanca in standardno kocko. Za vsako piko dobimo 1 evro, za vsako padlo cifro pa 2 evra. Slučajna spremenljivka S naj predstavlja skupni dobljeni znesek v evrih. Izračunaj $E(S)$.

NALOGA 153. VAJE
Slučajna spremenljivka X ima diskretno porazdelitev, podano s predpisom $P(X = k) = \frac{k}{45}$ za $k = 1, \dots, 9$. Izračunaj $E(X)$.

NALOGA 154.
Koliko je pričakovana oddaljenost naključne točke iz kvadrata s stranico 2 do roba kvadrata?

NALOGA 155. VAJE
Za $X \sim \begin{pmatrix} -\pi & 0 & \pi \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ izračunaj $E(\cos(X))$.

NALOGA 156. VAJE
Naj bo $X \sim U[-\pi/2, \pi/2]$. Izračunaj $E(X)$ in $E(\cos(X))$.

NALOGA 157.
Slučajna spremenljivka X ima zalogo vrednosti $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, velja pa $P(X = k) = \frac{1}{5^k}$ za $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

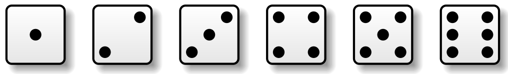
a. Določi $P(X = 0)$.
b. Izračunaj $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X^3)$, $E(\cos(\frac{\pi X}{3}))$.

Za vsaki slučajni spremenljivki X in Y (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Naloga 158. vaje

V skupini n ljudi vsak vrže igralno kocko. Naj bo X število parov ljudi, ki so dobili enak izid. Koliko je $E(X)$?



Naloga 159. vaje

Stavba ima nivoje 1 do 8. V pritličju v dvigalo vstopi n ljudi. Vsak si slučajno izbere nivo, neodvisno od ostalih. Kolikšno je pričakovano število postankov dvigala?

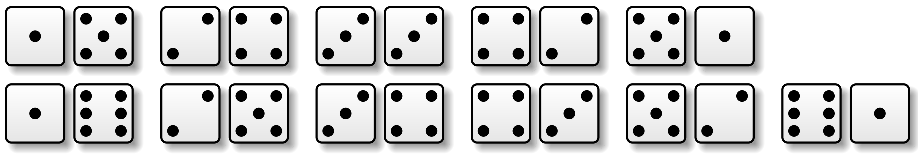
Matematična upanja standardnih diskretnih in zveznih slučajnih spremenljivk so podana v naslednjih tabelah:

porazdelitev	$B(p)$	$B(n,p)$	$G(p)$	$P(n,p)$	$H(R,B,n)$	$P(\lambda)$
$E(X)$	p	np	$\frac{1}{p}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{nR}{R+B}$	λ

porazdelitev	$E([a,b])$	$\text{Exp}(\lambda)$	$N(\mu,\sigma)$	$\chi^2(n)$
$E(X)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ	n

Naloga 160. vaje

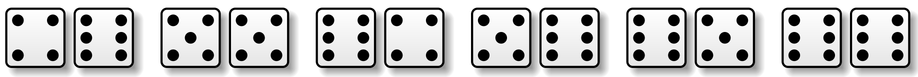
Janez in Meta igrata modificirano verzijo igre človek ne jezi se, pri kateri namesto ene igralne kocke mečeta dve. Janez lahko začne igro, če je vsota pik na obeh kockah pri njegovem metu enaka 6, Metka pa, če je vsota pik pri njenem metu enaka 7. Z X označimo število metov, ki jih za začetek potrebuje Janez in z Y število metov, ki jih potrebuje Metka. Izračunaj porazdelitvi teh dveh slučajnih spremenljivk in povej, koliko metov bo v povprečju za začetek igre potreboval Janez in koliko Metka.



Naloga 161.

Dve kocki mečemo, dokler ne vržemo skupaj več kot 9 pik.

a. Koliko je pričakovano število metov?
b. Kolikšna je verjetnost, da bomo potrebovali manj metov kot je pričakovano?
c. Kolikšna je verjetnost, da bomo kocki morali vreči vsaj dvakrat več od pričakovanega števila metov?



Naloga 162. vaje

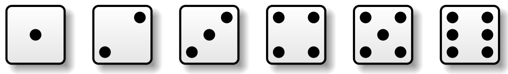
Tajnica dobi v 8-urnem delavniku v povprečju 96 klicev.

a. Kakšno porazdelitev ima čas T med dvema klicema?
b. Koliko verjetno lahko zjutraj v miru spije kavo, če zanjo rabi 5 minut?
c. Predpostavimo, da je tajnici uspelo spiti kavo. Koliko verjetno lahko v miru poje še rogljiček, za katerega tudi potrebuje 5 minut?
d. Koliko zamujenih klicev lahko pričakuje, če si opoldne vzame pol ure za kosilo?

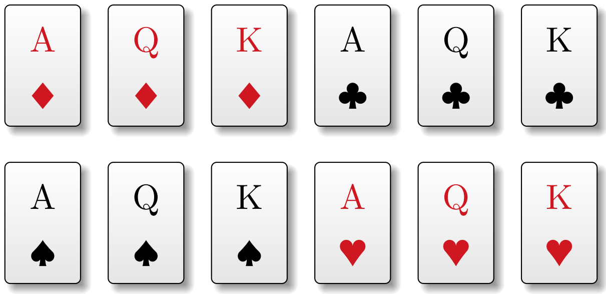
Naloga 163. vaje

Za stavo je treba plačati a evrov. Pri njej vržemo kovanec. Če pade cifra, dobimo 4 evre, sicer pa 0 evrov. Koliko naj bo a, da bo pričakovan dobiček igralnice na igro 1 evro?

Naloga 164.
Naj bo X slučajna spremenljivka, ki nam pove, kolikokrat v štirih neodvisnih metih standardne kocke pade liho mnogo pik. Zapiši in poimenuj porazdelitev te slučajne spremenljivke. Koliko je $E(X)$?



Naloga 165.
Med 12 kartami so 4 piki. Na slepo in brez vračanja izvlečemo 3 karte. Naj bo X število pikov med njimi. Zapiši in poimenuj porazdelitev slučajne spremenljivke X. Koliko je $E(X)$?



Naloga 166.
Na prvem tradicionalnem FRI teku sodeluje 10 žensk in 15 moških. Pred štartom študentka izbere 3 tekmovalce za intervju.

a. Kolikšna je verjetnost, da bo izbranih več žensk kot moških?
b. Koliko žensk pričakujemo, da bo izbranih za intervju?
c. Kolikšna je verjetnost, da se dejansko število žensk od pričakovanega razlikuje za kvečjemu 1?

Naloga 167.
V ribniku plava 10 rib. Ribič prvi dan ulovi 2 ribi, ju označi in ju vrne nazaj v ribnik. Drugi dan se ribič zopet poda na lov, vendar tokrat ulovi 5 rib. Naj bo X število označenih med njimi.

a. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X?
b. Koliko označenih rib pričakujemo v ulovu drugega dne?
c. Kolikšna je verjetnost, da jih bo več kot pričakovano?

Naloga 168.
Mečemo pošteno kocko. Če pade šestica, končamo s poskusom, sicer pa vržemo še pošten kovanec. Če pade cifra, končamo s poskusom, sicer pa celoten postopek ponovimo. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki šteje, kolikokrat smo vrgli kocko.

a. Kako je porazdeljen X?
b. Izračunaj $P(X \leq 2)$.
c. Izračunaj $E(X)$.

Naloga 169.
Vržemo dve standardni kocki in z X označimo skupno število pik.

a. Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.
b. Določi $E(X)$.
c. Določi verjetnost, da se X od pričakovane vrednosti razlikuje za več kot 3.

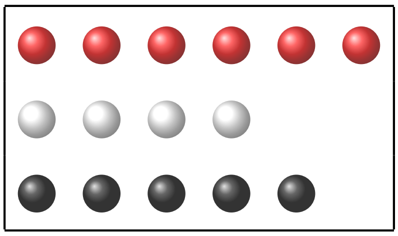
Naloga 170.
Torpedo izstreljen iz podmornice zadene ladjo z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Ta se potopi že, ko jo zadene prvi torpedo. Naj bo X število torpedov, ki jih podmornica izstreli dokler ne potopi ladje (tj. število izstreljenih torpedov do vključno prvega zadetka).

a. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X.

b. Kako verjetno podmornica ne potopi ladje, če ima na voljo 5 torpedov.
c. Določi pričakovano število izstreljenih torpedov, potrebnih za potopitev ladje.

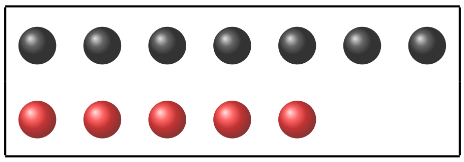
Naloga 171.
V posodi je 6 rdečih, 4 bele in 5 črnih kroglic. Na slepo izvlečemo dve kroglici in z X označimo število izvlečenih črnih kroglic.

a. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.
b. Koliko je $E(X)$?



Naloga 172. vaje
Na maratonu sodeluje 500 žensk in 750 moških. Novinar izbere 20 tekmovalcev za intervju. Koliko je pričakovano število izbranih žensk?

Naloga 173. vaje
V posodi imamo 5 rdečih in 7 črnih kroglic. Naključno izvlečemo eno kroglico, zapišemo njeno barvo in jo vrnemo. Ta poskus ponovimo 20 krat. Izračunaj pričakovano število izvlečenih rdečih kroglic.



Naloga 174.
Bankomat je deloma pokvarjen, saj pravilno PIN kodo sprejme le v 80% primerov. Če kodo zavrne 3-krat, potem kartico zadrži. Bankomat na dan uporabi 100 ljudi. Koliko pritožb lahko pričakujejo na banki vsak dan?

Naloga 175.
Med 20 izdelki v zaboju je 5 pokvarjenih. Iz zaboja naključno (brez vračanja) izbiramo izdelke, dokler ne izberemo delujočega. Označimo z X število potrebnih izbiranj, dokler v rokah ne držimo izpravnega izdelka. Zapiši porazdelitev za X. Kolikokrat lahko pričakujemo, da bomo morali seči v zaboj?

Naloga 176. vaje
Igralec vrže tri poštene kovance. Za 3 grbe dobi 10 evrov, za 2 grba 5 evrov, za 1 grb 3 eure, če padejo 3 cifre pa izgubi 2 evra. Koliko mora plačati za igro, da bo le ta poštena?

Naloga 177.
V igralnici je igra, pri kateri vsaka srečka stane 1 evro. Polovica srečk je praznih, šestina pa jih prinese dobitek 3 evre. Koliko srečk z dobitkom 1 evro in koliko z dobitkom 6 evrov naj natisnejo, da bo igra poštena?

Naloga 178.
Odpira se poštena igralnica. Njen cilj je narediti igre na srečo kar čimbolj poštene. Zato si želijo sestaviti takšne igre, pri katerih bi bil pričakovan dobiček enak 0. Ena izmed takšnih iger je met

igralne kocke. Pri njej igralec vloži 1 evro in vrže igralno kocko. Igralec pri tej igri zmaga, če je število pik pri metu deljivo s 3. Če zmaga, mu igralnica izplača 2 evra.

a. Ali je ta igra poštena?
b. Za kocko, obteženo s

$$p_k = \begin{cases} \frac{5ak}{3}, & k \text{ lih}, \\ \frac{bk}{6}, & k \text{ sod}, \end{cases}$$

določi a in b, da bo igra poštena.

NALOGA 179.
Igralnica ponudi naslednjo igro. Igralec trikrat vrže kocko, in če je zaporedje pik naraščajoče (npr. 1-5-6 ali 3-4-5 ali 2-3-5 ali ...), igralnica izplača toliko evrov, kot je vsota vseh pik v treh metih, sicer pa ne izplača nič. Kolikšen mora biti igralčev vložek, da bo igra poštena? Kolikšen mora biti igralčev vložek, da bo igralnica v povprečju zaslužila $\frac{1}{3}$ evra na igro?

NALOGA 180.
Imamo 8 nepoštenih kovancev s porazdelitvijo $\begin{pmatrix} \mathrm{G} & \mathrm{C} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Hkrati jih mečemo, dokler skupaj ne pade vsaj 5 grbov.

a. Koliko je pričakovano število metov?
b. Koliko verjetno rabimo manj metov od pričakovane vrednosti?
c. Koliko verjetno rabimo 2-krat več metov od pričakovane vrednosti?

NALOGA 181. VAJE
Z avtomobilom se peljemo mimo štirih semaforjev. Na vsakem semaforju gori rdeča z verjetnostjo $\frac{1}{3}$. Brez postankov je do cilja 15 minut vožnje, vsak postanek pa pomeni minuto čakanja. Označimo z X čas, ki ga potrebujemo za pot do cilja. Določi porazdelitev za X ter njeno pričakovano vrednost.

NALOGA 182.
Na malo obiskanem spletnem strežniku je v povprečju 5 obiskov na uro. Administrator se loti vzdrževalnih del.

a. Koliko je pričakovan čas do naslednjega obiska?
b. Največ koliko časa je lahko strežnik nedosegljiv, da z verjetnostjo več kot 90% v tem času ne bo nobenega obiska?

Disperzija in standardni odklon

Disperzija ali **varianca** slučajne spremenljivke X je definirana kot

$$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Za $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Standardni odklon slučajne spremenljivke X je enak $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Če sta X in Y *neodvisni*, je

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{in} \quad D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Disperzije standardnih diskretnih oziroma zveznih slučajnih spremenljivk so podane v naslednjih tabelah:

porazdelitev	$B(p)$	$B(n,p)$	$G(p)$	$P(n,p)$	$H(R,B,n)$	$P(\lambda)$
$D(X)$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\frac{nRB(R+B-n)}{(R+B)^2(R+B-1)}$	λ

porazdelitev	$E[a,b]$	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$N(\mu,\sigma)$	$\chi^2(n)$
$D(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2	$2n$

Naloga 183.
Slučajna spremenljivka X ima zalogo vrednosti $\{1,\ldots,10\}$. Verjetnost, da X zavzame vrednost k, je enaka $c\cdot k$.

a. Izračunaj konstanto c.
b. Izračunaj $P(X\leq 5)$.
c. Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X.
d. Izračunaj disperzijo $D(X)$ in standardni odklon $\sigma(X)$.

Naloga 184. vaje
Dana je slučajna spremenljivka

$$X\sim\begin{pmatrix}2 & 7 & 9 & 10\\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$$

a. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.
b. Izračunaj $E(4X+2)$ in $D(4X+2)$.

Naloga 185. vaje
Naj bo

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3x^2+2x, & x\in[0,\frac{1}{3}],\\ 1, & x>\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Izračunaj $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Naloga 186.
Naj bosta $X,Y\sim\mathrm{U}[0,1]$ neodvisni. Določi $D(3X), D(X+Y), E((X+Y)^2)$.

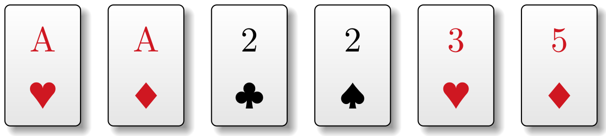
Naloga 187.
Naj bo $p_X(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)^2}$. Izračunaj $E(1+X^2)$ in $D(X)$.

Naloga 188.
Naj bo $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$. Izračunaj $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Naloga 189. vaje
Naj bosta $X\sim\chi^2(3)$ in $Y\sim\chi^2(5)$ neodvisni. Izračunaj $D(3X-Y)$ in $E((X+2Y)^2)$.

Naloga 190.
Ko n ljudi vrže kocko, naj bo X število parov z istim izidom. Izračunaj $D(X)$.

NALOGA 191.
V škatli imamo 6 kart (glej sliko). Izvlečemo dve karti (brez vračanja). Naj bo X največje izmed izvlečenih števil. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.



NALOGA 192.
Na krožnici s polmerom 1 naključno izberemo dve točki. Koliko sta pričakovana vrednost in disperzija za razdaljo med točkama?

NALOGA 193.
Koliko sta pričakovana vrednost in standardni odklon za oddaljenost R naključne točke iz kvadrata s stranico 2 do roba kvadrata?

NALOGA 194.
Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj matematična upanja in disperzije naslednjih spremenljivk:

(a) X, (b) Y, (c) $4X-2$, (d) $-2X+3Y$.

NALOGA 195.
Na bencinski črpalki je količina goriva (v litrih), ki ga natočijo vozniki v enem dnevu, zvezna slučajna spremenljivka X z zalogo vrednosti $[250, 1250]$ in porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = \frac{x}{1000} - \frac{1}{4}$.

a. Zjutraj dostavijo 950 litrov goriva. Koliko verjetno bo do večera pošlo?
b. Izračunaj $p_X(x)$.
c. Bencinska črpalka ima v povprečju 50 kupcev goriva na dan. Koliko litrov goriva v povprečju natoči kupec?
d. Izračunaj $D(X)$ in $\sigma(X)$.

NALOGA 196.
Za

$$p_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

določi c, $P(|X| > \frac{1}{2})$, $E(X)$, $D(X)$.

NALOGA 197.
Za

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y = 3X+2$$

izračunaj $E(Y)$ in $D(Y)$.

NALOGA 198.
Za

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 48 & 98 \\ 0.980 & 0.011 & 0.006 & 0.002 & 0.001 \end{pmatrix}$$

izračunaj $E(X)$, $D(X)$.

NALOGA 199.
Za $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 10 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$ na dva načina izračunaj $E(2X+3)$ in $D(2X+3)$.

NALOGA 200. VAJE
Na tekmovanju streljajo v okroglo tarčo z radijem r. Recimo, da so koordinate zadetka porazdeljene enakomerno po celotni tarči. Slučajna spremenljivka X naj meri razdaljo zadetka od središča tarče.

a. Izračunaj porazdelitveno funkcijo F_X in gostoto verjetnosti p_X.
b. Naj bo $T = 10(r - X)$ število točk, ki jih dobimo za vsak strel. Koliko je $E(T)$ in koliko $D(T)$?

NALOGA 201.
Za neodvisni slučajni spremenljivki

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

izračunaj $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$.

NALOGA 202. VAJE
Za neodvisni slučajni spremenljivki

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

določi porazdelitev za $Z = X + Y$ in izračunaj $E(Z)$, $D(Z)$.

NALOGA 203.
Za

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & x \in [0, 2], \\ 1, & 2 < x, \end{cases}$$

izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.

NALOGA 204.
Za

$$p_X(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \sqrt{2}], \\ 0, & x \notin [0, \sqrt{2}], \end{cases}$$

določi $F_X(x)$, $E(X)$, $D(X)$.

NALOGA 205.
Za neodvisni slučajni spremenljivki X in Y velja

$$E(X) = 2, \ D(X) = 1, \ E(Y) = 1, \ D(Y) = 4.$$

Za $Z = 2X - 3Y + 5$ izračunaj $E(Z)$ in $D(Z)$.

NALOGA 206.
Vržemo dve igralni kocki. Naj bo X število pik na prvi kocki, Y število pik na drugi kocki ter $Z = \max(X, Y)$.

a. Izračunaj $E(Z)$ in $D(Z)$.
b. Izračunaj pričakovano število metov, dokler vsaj na eni ne pade šestica.

Naloga 207. vaje

V kvadratu $[0,1]^2$ naključno izberemo točko na spodnji stranici in točko na levi stranici. Naj bo X razdalja med točkama. Za $t \in [0,1]$ določi $F_X(t)$ in $p_X(t)$. Za $Y = X|(X \leq 1)$, torej $P(Y \leq t) = P(X \leq t \mid X \leq 1)$, izračunaj $E(Y)$ in $D(Y)$.

POGLAVJE 7

Slučajni vektorji in kovarianca

Diskretni slučajni spremenljivki X in Y, ki izpolnjujeta določene pogoje, določata **(dvorazsežni) diskretni slučajni vektor** (X,Y). Verjetnost, da (X,Y) zavzame vrednost $(x_i,y_j)\in\mathbb{R}$, označimo s $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$. Porazdelitev (X,Y) lahko podamo na dva enakovredna načina, in sicer

- s **porazdelitveno tabelo**

$$(X,Y)\sim\begin{array}{|c|cccccc|c|}\hline X\backslash Y & y_1 & y_2 & \dots & y_m & \dots & & X\\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} & \dots & & p_1\\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} & \dots & & p_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} & \dots & & p_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline Y & q_1 & q_2 & \dots & q_m & \dots & & 1\\ \hline\end{array}$$

  pri čemer je $0\le p_{ij}\le 1$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$, $\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_i$ za vsak $i\in\mathbb{N}$ in $\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=q_j$ za vsak $j\in\mathbb{N}$, ali

- s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y).$$

  Velja $F_X(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\cdot I_{[x_i,\infty)}(x)I_{[y_j,\infty)}(y)$, kjer je

$$I_{[x_i,\infty)}(x)=\begin{cases}1, & x_i\le x,\\ 0, & \text{sicer},\end{cases}\qquad I_{[y_j,\infty)}(y)=\begin{cases}1, & y_j\le y,\\ 0, & \text{sicer}.\end{cases}$$

Robne porazdelitve so porazdelitve komponent

$$p_i=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\quad\text{in}\quad q_j=P(Y=y)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

Pravimo, da sta slučajni spremenljivki X in Y **neodvisni**, če za poljubni števili $x,y\in\mathbb{R}$ velja, da sta dogodka $X=x$ in $Y=y$ neodvisna. To pa je ekvivalentno dejstvu, da za poljubni števili $x,y\in\mathbb{R}$ velja

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$

NALOGA 208.
Iz

$Y\backslash X$	1	2	3
-1	0	0	$1/6$
0	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

določi c. Ali sta X in Y neodvisni?

NALOGA 209. VAJE
Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen po shemi

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0.04	0.04	0.02
1	0.12	d	e
2	a	b	c

.

a. Dopolni tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni in določi obe robni porazdelitvi.
b. Določi porazdelitvi za $Z=X^2$ in $W=X+Y$.
c. Izračunaj $F_{X,Y}(1,1)$.

NALOGA 210. VAJE
Iz kupa 16 kart izberemo 2 karti. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki je enaka številu pikov in Y slučajna spremenljivka, ki je enaka številu črnih kart (pikov ali križev).

a. Določi porazdelitev vektorja (X,Y). Izračunaj $P(X \leq 1, Y \geq 1)$.
b. Določi robni porazdelitvi.
c. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

NALOGA 211.
Slučajni spremenljivki X in Y sta podani s porazdelitveno shemo

$X\backslash Y$	0	1	3
0	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	0
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	c

.

a. Določi konstanto c.
b. Določi porazdelitvi za X in Y.
c. Ali sta X in Y neodvisni?

NALOGA 212.
Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen po shemi

$X\backslash Y$	1	2
1	$\frac{5}{6}-\frac{a}{6}-\frac{a^2}{3}$	$\frac{a^2}{3}$
2	$\frac{a}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

a. Določi, katere vrednosti lahko zavzame a.
b. Za katere a sta X in Y enako porazdeljeni?
c. Za katere a sta X in Y neodvisni?

Naj bosta X, Y zvezni slučajni spremenljivki. Par (X, Y) je **zvezni slučajni vektor**, če obstaja integrabilna funkcija $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tako da za vsak par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ velja

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Funkciji $p_{X,Y}$ pravimo **(dvorazsežna) gostota verjetnosti**, funkciji $F_{X,Y}$ pa **porazdelitvena funkcija**. Velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1.$$

Robni gostoti sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}y \quad \text{in} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

Zvezni slučajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, če sta za vsaki realni števili $x, y \in \mathbb{R}$ dogodka $X \leq x$ in $Y \leq y$ neodvisna. To je ekvivalentno dejstvu, da za vsaki realni števili $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y).$$

Naloga 213. vaje

Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, obe z zalogo vrednosti $[0, 2]$. Naj bo

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{4}.$$

Izračunaj

a. $P(X > 1)$,
b. $P(X \leq \frac{1}{2}, Y > \frac{3}{4})$,
c. $P(X + Y > 2)$.

Naloga 214. vaje

Za zvezni slučajni spremenljivki $X \in [0, 2]$ in $Y \in [0, 1]$ je porazdelitvena funkcija enaka

$$F_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2 y}{4}.$$

Izračunaj

a. $P(X < 1)$,
b. $P(Y > \frac{1}{2})$,
c. $P(X < 1, Y > \frac{1}{2})$,
d. $P(X > 1, Y > \frac{1}{2})$.

Naloga 215.

Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

a. Poišči $c \in \mathbb{R}$ ter robni gostoti.
b. Sta X in Y neodvisni?
c. Izračunaj $P(Y < 1 - X)$.

Matematično upanje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvorazsežnega slučajnega vektorja (X, Y) je za diskretni slučajni vektor definirano s predpisom

$$E(f(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j)\ P(X=x_i, Y=y_j),$$

za zvezni slučajni vektor pa s predpisom

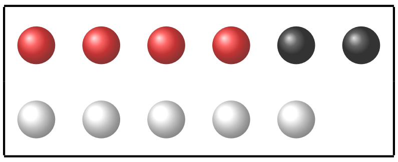
$$E(f(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Če sta X in Y neodvisni, je $E(XY)=E(X)E(Y)$.

NALOGA 216. VAJE

Iz posode, v kateri so 4 rdeče, 2 črni in 5 belih kroglic, na slepo in brez vračanja izvlečemo tri kroglice. Naj bo X število rdečih, Y pa število črnih med njimi.

a. Določi porazdelitev za (X, Y) in robni porazdelitvi.
b. Sta X in Y neodvisni?
c. Določi porazdelitev za $X+Y$.
d. Koliko je $F_{X,Y}(1, 2)$?
e. Izračunaj $E(X + Y)$ in $E(XY)$.



NALOGA 217.

Pošteno kocko vržemo dvakrat. Naj X pove, kolikokrat je padlo sodo število pik, in naj Y pove, kolikokrat je padlo 6 pik.

a. Določi porazdelitveno shemo za (X, Y) in robni porazdelitvi.
b. Sta X in Y neodvisni?
c. Izračunaj $E(XY^2)$.

NALOGA 218.

Vržemo dve pošteni kocki. Naj X šteje pike na tisti kocki, kjer je padlo več (ali enako) pik kot na drugi kocki, Y pa naj bo vsota pik na obeh kockah.

a. Napiši porazdelitveno tabelo vektorja (X, Y) ter robni porazdelitvi.
b. Izračunaj $P(X=6)$.
c. Izračunaj $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$, $E(XY)$, $E(2X^2Y)$.

NALOGA 219.

Slučajni spremenljivki X in Y sta podani s porazdelitveno shemo

$X\backslash Y$	a	4
-2	p	$\frac{1}{8}$
2	q	$\frac{2}{8}$

.

a. Določi a tako, da bo $E(Y)=\frac{7}{8}$.
b. Določi p, q tako, da bo $E(X)=0$.
c. Ali sta za p, q iz prejšnje točke X in Y neodvisni?

NALOGA 220.

Na kupu imamo vseh 16 kraljevskih kart (kralj, dama, fant, kaval). Na slepo in brez vračanja izberemo 2 karti. Naj bo X število izbranih pikov in Y število izbranih kraljev.

a. Zapiši porazdelitev za (X, Y).

b. Za $W = X - 1$ izračunaj $D(W)$.

NALOGA 221.
Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po shemi

$X\backslash Y$	-10	0	10
1	c	0.3	$3c$
3	$3c$	0.2	0.15

Določi $c \in \mathbb{R}$ in izračunaj $D(X)$, $E(XY^2)$.

NALOGA 222. VAJE
Imamo slučajni spremenljivki $X \in \{1, 2\}$ in $Y \in \{1, 2, 3\}$ z verjetnostno funkcijo

$$P(X = x, Y = y) = \frac{xy}{18}.$$

a. Določi porazdelitveno tabelo slučajnega vektorja (X, Y).
b. Določi porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.
c. Določi porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke Y.
d. Izračunaj verjetnost $P(XY \geq 4)$.
e. Ali sta X in Y neodvisni?
f. Izračunaj $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

NALOGA 223.
Neodvisni diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni po predpisu:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

a. Poišči porazdelitveno shemo za slučajni vektor $(Z, W) = (X + Y, XY)$.
b. Ali sta spremenljivki Z in W neodvisni?
c. Izračunaj $\mathrm{E}(Z), \mathrm{E}(W)$.

Kovarianca slučajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Za disperzijo velja $D(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$.
Za slučajne spremenljivke X, Y, Z, ter $a, b \in \mathbb{R}$ velja:

- $\mathrm{Cov}(X + a, Y + b) = \mathrm{Cov}(X, Y)$,
- $\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{Cov}(X, Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y, Z)$,
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$,
- $|\,\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$.

Poleg tega je

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 = \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) = \\ &= (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) = \\ &= D(X) + D(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Korelacijski koeficient izračunamo po formuli

$$r(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

Vedno je $-1 \le r(X,Y) \le 1$. Za $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ter $a,c>0$ velja $r(aX+b,cY+d)=r(X,Y)$.
Pravimo, da sta X in Y **nekorelirani**, če velja $r(X,Y)=0$.
Če je $|\,\mathrm{Cov}(X,Y)| = \sqrt{D(X)D(Y)}$, tj. $r(X,Y)=\pm 1$, potem sta X in Y v **linearni zvezi**

$$Y = \pm\frac{D(Y)}{D(X)}(X - E(X)) + E(Y).$$

Ker iz neodvisnosti sledi $E(XY) = E(X)E(Y)$, sta neodvisni slučajni spremenljivki tudi nekorelirani. Obratno pa ne velja.

Naloga 224.

Božičkove sani vleče 9 jelenov. Na čelu je Rudolf, za njim pa so v dveh kolonah naključno razporejeni Tresko, Plesač, Skakač, Hudko, Komet, Kupid, Plamenko, Bliskač. Naj bo X število jelenov na levi, katerih ime se začne s K, in Y število jelenov na desni, katerih ime se začne s P.

a. Poišči porazdelitev za (X,Y) in robni porazdelitvi.
b. Sta X in Y neodvisni?
c. Izračunaj $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $r(X,Y)$.

Naloga 225. vaje

Naj ima (X,Y) porazdelitev

$X\backslash Y$	0	1	3
0	0.05	0.1	0.2
1	0.15	0	0.15
4	0.2	0.1	0.05

.

Izračunaj $\mathrm{Cov}(X,Y)$ in $r(X,Y)$.

Naloga 226.

Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen diskretno z naslednjo porazdelitveno tabelo:

$X\backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0.2	0
0	0	0.2	0.2
1	0.1	0.1	0

.

Izračunaj $\mathrm{Cov}(X,Y)$ in r(X,Y).

Naloga 227. vaje

Naj velja

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 4, \quad \mathrm{Cov}(X,Z) = 1, \quad \mathrm{Cov}(Y,Z) = -\frac{9}{4}, \quad \mathrm{Cov}(Y,Y) = \frac{1}{6}.$$

Določi a tako, da bosta slučajni spremenljivki

$$U = aX + 4Y \quad \text{in} \quad V = 3Y + aZ$$

nekorelirani.

Naloga 228.

Slučajni spremenljivki $X, Y \sim U[0,1]$ sta porazdeljeni enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$.

Naj bo $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{24}$. Izračunaj $D(3X+2Y)$.

NALOGA 229.
Za slučajne spremenljivke X, Y, Z velja

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 1, \quad \mathrm{Cov}(X,Z) = 4, \quad \mathrm{Cov}(Y,Z) = -2,$$
$$E(X) = 0,\ D(X) = 2, \quad E(Y) = -1,\ D(Y) = 3, \quad E(Z) = 5,\ D(Z) = 9.$$

Naj bo

$$L = \frac{1}{2}X - Y + 2Z.$$

Izračunaj $E(L)$ in $D(L)$.

NALOGA 230.
Slučajni spremenljivki $X, Y \sim N(0,1)$ sta standardno normalno porazdeljeni in neodvisni. Izračunaj $\mathrm{Cov}(X+Y, X)$.

NALOGA 231.
Trikrat vržemo standardno pošteno kocko. Naj bo X število lihih izidov, Y pa število sodih izidov. Koliko je $\mathrm{Cov}(X,Y)$?

NALOGA 232. VAJE
Slučajni vektor (X,Y) je porazdeljen po shemi

$X\backslash Y$	-1	1
-1	0	0.25
0	0.5	0
1	0	0.25

.

Prepričaj se, da sta X in Y nekorelirani, toda odvisni spremenljivki.

POGLAVJE 8

Aproksimacija binomske porazdelitve

Naj bo dano zaporedje števil $p_n \in (0,1)$, ki zadošča $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in (0,\infty)$. Naj bo $X_n \sim B(n, p_n)$ zaporedje binomsko porazdeljenih slučajnih spremenljivk in $X_P \sim P(\lambda)$ Poissonovo porazdeljena slučajna spremenljivka. Za $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X_P = k).$$

Poissonov približek. Naj bo

$$X \sim B(n,p) \quad \text{in} \quad X_P \sim P(np).$$

Če je

- $n \geq 20$ in $p \in (0, 0.05)$ ali pa
- $n \geq 100$ in $np \in (0, 10]$,

ponavadi velja

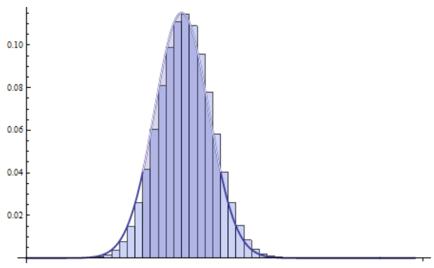
$$P(X = k) \approx P(X_P = k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

Naj bo $X \sim B(n,p)$ in naj bo

$$X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Za velike n velja

$$P(X = k) \approx P(X_N = k).$$



Laplaceov približek. Naj bo

$$X \sim B(n,p) \quad \text{in} \quad X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Če je $np \geq 10$ in $n(1-p) \geq 10$, potem za k dovolj blizu np velja

$$P(X = k) \approx P(X_N = k) = \frac{e^{-(k-np)^2/(2np(1-p))}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$

NALOGA 233. VAJE

Nepošten kovanec, pri katerem je verjetnost grba 0.4, vržemo 50-krat. Meti so neodvisni. Koliko verjetno je, da pade natanko 20 grbov? Primerjaj točen rezultat s Poissonovom in Laplaceovim približkom ter komentiraj približke.

NALOGA 234. VAJE

Verjetnost, da pri odhodu od doma zaklenemo stanovanje, je 0.99. Koliko verjetno pri 1000 odhodih zaklenemo stanovanje 990-krat? Kaj pa, če je verjetnost, da zaklenemo, enaka 0.98?

Naloga 235.

Zavarovalnica je nezgodno zavarovala 1000 oseb. Vsako od njih doleti nezgoda z verjetnostjo 0.0015 in ti dogodki so med seboj neodvisni.

a. Kolikšna je verjetnost, da se noben ne ponesreči? Primerjaj točen rezultat s Poissonovim in Laplaceovim približkom ter komentiraj približke.
b. Kolikšna je verjetnost, da se ponesrečita več kot dva? Primerjaj točen rezultat s smiselnim približkom glede na prejšnje vprašanje.

Primerjaj točen rezultat s Poissonovim in Laplaceovim približkom ter komentiraj približke.

Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$ normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. **Standardizacija** spremenljivke X je slučajna spremenljivka

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Porazdelitvena funkcija F standardne normalne porazdelitve je enaka

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t.$$

in zato je

$$P(a \leq Z \leq b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Za nestandardizirano normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko X_N, ki aproksimira binomsko porazdelitev $X_B \sim B(n, p)$, velja $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$,

$$P(a \leq X_B \leq b) \approx P(a - \tfrac{1}{2} \leq X_N \leq b + \tfrac{1}{2}) = \mathrm{F}\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{a - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right)$$

in posebej

$$P(X_B \leq b) \approx P(X_N \leq b + \tfrac{1}{2}) = \mathrm{F}\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right).$$

Pri ostalih dogodkih si pomagamo z

- $P(X_B < k) = P(X_B \leq k - 1)$ in
- $P(X_B > k) = P(X_B \geq k + 1) = 1 - P(X_B \leq k)$.

Opomba: V rezultatih spodnjih nalog so vrednosti $\mathrm{F}(x)$ pridobljene iz tabele za standardno normalno porazdelitev, vrednost x pa je zaokrožena na dve decimalni mesti. Zato se lahko rezultati malo razlikujejo od tistih, ki jih dobimo, če računamo v programu *R*.

Naloga 236. vaje

Čarovniku se trik posreči z verjetnostjo 90%. Naj bo X število uspešnih poskusov. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da čarovniku v 800 poskusih trik uspe vsaj 700-krat.

Naloga 237. vaje

Podjetje Sam Šum je izdelalo serijo integriranih vezij, za katere se je izkazalo, da 5% čipov vsebuje napako. Distributer proda 200 procesorjev, ki vsebujejo omenjene čipe. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da je distributer prodal manj kot 4% procesorjev z napako.

Naloga 238.

V tovarni vsak dan proizvedejo 1750 izdelkov. Za vsakega je verjetnost okvare 10%. Pokvarjene izdelke zjutraj dajo v servis, zvečer pa so popravljeni in gredo nazaj na police. S primernim obrazcem oceni naslednje verjetnosti.

a. Verjetnost, da bo okvarjenih natanko 175 izdelkov.
b. Verjetnost, da bo okvarjenih več kot 180 izdelkov.
c. Velikost servisa (tj. največje število izdelkov, ki so hkrati na popravilu), pri kateri je verjetnost maksimalne obremenjenosti servisa brez izdelkov v čakalni vrsti najbližje 0.03?
d. Najmanjšo velikost servisa, pri kateri je verjetnost, da bodo nekateri izdelki v čakalni vrsti, največ 0.05?

Naloga 239. vaje

Verjetnost, da je izdelek prvovrsten, je 10%. S pomočjo Laplaceovega približka oceni najmanjše število izdelkov, ki jih moramo naročiti, tako da bo med njimi z verjetnostjo najmanj 0.95 vsaj 100 prvovrstnih.

Naloga 240. vaje

Verjetnost, da je izdelek prvovrsten, je 60%. S pomočjo Laplaceovega približka oceni najmanjše število izdelkov, ki jih moramo naročiti, tako da bo med njimi v verjetnostjo najmanj 0.99 vsaj 59% prvovrstnih?

Naloga 241.

Standardni kocki vržemo 500-krat in opazujemo, kolikokrat vržemo dve šestici. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da se to zgodi med (vključno) 10-krat in 20-krat.

Naloga 242.

Verjetnost, da bo pri vezavi knjige prišlo do napake je 2%. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnosti, da

a. bo med 5000 knjigami več kot 90 knjig z napako,
b. bo vsaka izmed 5 pošiljk po 5000 knjig vsebovala manj kot 105 knjig z napako,
c. bomo v 5 pošiljkah po 5000 knjig skupaj imeli manj kot 525 knjig z napako.

Naloga 243.

Delež levičarjev v populaciji je $\frac{1}{8}$. Na šoli je 900 učencev. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da je več kot petina levičarjev.

Naloga 244.

V filmu *Rosenkrantz in Guildenstern sta mrtva* eden od junakov meče kovanec in v 100 zaporednih metih vedno pade glava.

a. Koliko je verjetnost, da se to zgodi?
b. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da bo glava padla natanko 75-krat.
c. S pomočjo Laplaceovega približka oceni verjetnost, da glava pade manj ali enako 70 krat.
d. Pri katerem številu $q_{0,25}$, bo verjetnost, da pade glava največ $q_{0,25}$-krat, vsaj 25%?

POGLAVJE 9

Centralni limitni izrek

NALOGA 245.

Upokojeni profesor matematike redno hodi na predavanja na matematičnih seminarjih. V zadnjih letih je trajanje njegove koncentracije normalno porazdeljeno s pričakovano vrednostjo 40 minut in standardnim odklonom 20 minut. Kolikšna je verjetnost, da bo profesor pri 60 minutnem seminarju sledil predavanju do konca?

NALOGA 246.

Vojska poroča, da je porazdelitev obsega glav vojakov približno normalna s pričakovano vrednostjo $\mu = 56$ cm in standardnim odklonom $\sigma = 2$ cm.

a. Kolikšen delež vojakov ima obseg glave večji od 64 cm?
b. Vojska želi čelade pripraviti vnaprej in hoče, da bi se prilegale sredinskim 95 odstotkom vojakov. Preostalim vojakom bodo izdelali čelade posebej. Kateri obsegi so dovolj majhni ali pa dovolj veliki, da bodo dobili čelade po naročilu?

NALOGA 247. VAJE

Telesna višina neke populacije je porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo μ in standardnim odklonom σ.

a. Kolikšen delež populacije ima višino na intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$?
b. Določi δ tako, da bo 50% populacije imelo višino na intervalu $[\mu - \delta, \mu + \delta]$.
c. Kakšna je zveza med δ in kvartili?
d. Podobno določi interval okrog μ v katerem bo 90% populacije. Kateri kvantili ga določajo?

NALOGA 248.

Zaradi slabe kalibracije avtomatski merilnik pri merjenju razdalje 100 m naredi sistemsko napako +2 m. Poleg tega avtomatski merilnik naredi naključno napako, ki je normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 0 m in standardnim odklonom 0.3 m.

a. Določi porazdelitev napake pri merjenju.
b. Določi verjetnost, da je pri merjenju nastala napaka (po absolutni vrednosti) manjša od 3 m.

NALOGA 249.

Starost prebivalcev neke pokrajine je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 40 let in standardnim odklonom 25 let.

a. Kolikšna je verjetnost, da je je naključno izbran prebivalec mlajši od 14 let?
b. Kolikšna je verjetnost, da je je naključno izbran prebivalec starejši od 77 let?
c. Kolikšna je verjetnost, da je je naključno izbran prebivalec star med 25 in 55 let?

NALOGA 250.

Dolžina vezalk, ki jih izdelujejo v neki tovarni, je porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo 100 cm in standardnim odklonom 0.5 cm. Kupci so z vezalko zadovoljni če se njena dolžina od pričakovane razlikuje za največ 8 mm.

a. Kupec vezalko zavrže, če je prekratka za več kot 8 milimetrov. Kolikšna je verjetnost, da bo kupljeno vezalko obdržal?

b. Kolikšna je verjetnost, da bo kupec zadovoljen z vezalko, ki jo kupi (tj. ne bo niti predolga niti prekratka)?

NALOGA 251.

Električni tok v bakreni žici je porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo 10 mA in varianco 4 $(\mathrm{mA})^2$.

a. Kolikšna je verjetnost, da izmerimo več kot 13 mA?
b. Kolikšna je verjetnost, da izmerimo tok med 9 in 11 mA?

NALOGA 252.

Zgornji krvni pritisk pri ženskah v starosti 18 do 25 let je porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo 115 in standardnim odklonom 14.

a. Kolikšen odstotek žensk v tej starosti ima zgornji krvni pritisk nižji od 90?
b. Kje postavimo mejo, če hočemo najti 5% žensk z najvišjim zgornjim krvnim pritiskom?

NALOGA 253.

Uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri slovenščini je bil porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo 65.7 točk in standardnim odklonom 11.9 točk.

a. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran maturant pisal pozitivno, tj. zbral vsaj 48 točk?
b. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran maturant dosegel med 60 in 70 točk?
c. Koliko točk je moral maturant zbrati pri slovenščini, da ga to uvršča med zgornjih 5% generacije?

NALOGA 254.

Trajanje nosečnosti v dnevih lahko aproksimiramo z normalno porazdelitvijo s pričakovano vrednostjo 266 dni in standardnim odklonom 16 dni.

a. Kolikšna je verjetnost, da nosečnost traja manj kot 250 dni?
b. Kolikšna je verjetnost, da nosečnost traja med 241 in 286 dnevi?
c. Poišči mejo za zgornja 2% trajanja nosečnosti. To je zadnja meja, pri kateri zdravniki sprožijo porod.

NALOGA 255.

Telesni višini (v centimetrih) žensk in moških v neki populaciji sta porazdeljeni zaporedoma z $N(165, 7.5)$ in $N(178, 9.2)$.

a. Kolikšen delež žensk je višjih od povprečne višine moških?
b. Kolikšen delež moških je nižji od povprečne višine žensk?
c. Kakšno je razmerje med številom moških, ki so visoki vsaj 185 cm in številom žensk, ki so vsaj toliko visoke (če predpostavimo, da je število vseh moških in žensk približno enako)?

Normalne spremenljivke: Naj bosta $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Posledica: Naj bodo

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1),\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2),\ \ldots,\ X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

neodvisne, normalno porazdeljene slučajne spremenljivke. Potem velja

$$X_1 + X_2 \ldots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right).$$

Naloga 256.

Teža jabolka X je porazdeljena normalno z $\mu_X = 180$ g in $\sigma_X = 15$ g, teža pomaranče Y pa normalno z $\mu_Y = 160$ g in $\sigma_Y = 12$ g. Kupimo 6 pomaranč in 6 jabolk. Kolikšna je verjetnost, da smo kupili manj kot 2 kg sadja?

Naloga 257.

V trgovini prodajajo vrvi dolžine 10 m in vrvi dolžine 3 m. Dolžina vrvi z oznako 10 m je porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo 10 m in standardnim odklonom 2 cm, dolžina vrvi z oznako 3 m pa normalno s pričakovano vrednostjo 3 m in standardnim odklonom 1 cm. Kupimo eno vrv z oznako 10 m in eno vrv z oznako 3 m. Kolikšna je verjetnost, da bomo skupaj imeli manj kot 12.9 m vrvi?

Naloga 258. vaje

Prestrašeni kenguru skače v ravni črti proti cesti širine 4 m, od katere je oddaljen 1760 m. Dolžina skoka je normalna slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 3.5 m in standardnim odklonom 0.5 m. Skoki so medseboj neodvisni. Kako verjetno se po 500 skokih ustavi ravno na cesti?

Centralni limitni izrek. Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s pričakovano vrednostjo μ in končno disperzijo σ^2. Potem za dovolj velik n velja, da je porazdelitev vsote $S = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ približno normalna,

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}).$$

Za večino porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, 2, \ldots n$ velja, da je aproksimacija porazdelitve vsote z normalno porazdelitvijo dobra že za $n \geq 30$.

Primer diskretne porazdelitve. Naj bo porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, 2, \ldots n$, diskretna in $Y \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$. Pri aproksimaciji diskretne porazdelitve vsote $S = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ z normalno porazdelitvijo uporabljamo popravek za zveznost (vrednost 0.5).

$$P(a \leq S \leq b) \approx P\left(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5\right) = \mathrm{F}\left(\frac{b + 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Naloga 259. vaje

Diskretne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene takole:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $S = X_1 + \cdots + X_{100}$. Oceni $P(170 \leq S \leq 210)$.

Naloga 260.

Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_{100}$ so neodvisne s porazdelitvijo $X_i \sim \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{smallmatrix}\right)$. Oceni $P(50 < X_1 + \ldots + X_{100})$.

Naloga 261. vaje

Pošteno kocko vržemo 100-krat. Označimo z X_i število pik v i-tem metu, $i = 1, \ldots, 100$ in s $S = X_1 + \ldots + X_{100}$ vsoto vseh pik po 100 metih.

a. Izračunaj pričakovano vrednost $E(X_i)$ in disperzijo $D(X_i)$.
b. S pomočjo centralnega limitnega izreka oceni porazdelitev sločajne spremenljivke S.
c. Kako verjetno je, da bo S manjša od 320 ali večja od 370?

Naloga 262. vaje

Potapljač se potaplja, dokler ne nabere 80 biserov. Pri vsakem potopu nabere največ en biser, pa še tega le z verjetnostjo 20%. Potopi so med seboj neodvisni.

a. Izračunaj pričakovano vrednost števila potopov.
b. Oceni verjetnost, da se bo moral potopiti več kot 450-krat. Možni sta dve uporabi centralnega limitnega izreka.

NALOGA 263.
Smrtnost piščancev na piščančji farmi je 5%. S smrtjo vsakega piščanca ima farma 5 evrov izgube.

a. Kako verjetno je, da bodo imeli v skupini 200 piščancev zaradi smrti živali manj kot 30 evrov izgube?
b. Kolikšna je ta verjetnost, če jim uspe smrtnost zmanjšati za 1%?
c. Na koliko morajo zmanjšati smrtnost, če želijo imeti z verjetnostjo 90% manj kot 30 evrov izgube?

NALOGA 264.
Pri metu goljufive igralne kocke pade 6 pik z verjetnostjo 0.4. Kocko vržemo 10000-krat in z S označimo število šestic v teh metih.

a. Kolikšna je pričakovana vrednost S?
b. Kako verjetno bo padlo za več kot 100 šestic več kot je pričakovano?
c. Kako verjetno bo S med (vključno) 3900 in 4500?

NALOGA 265. VAJE
Pri francoski ruleti je dobiček igralnice v eni stavi enak $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 18/37 & 19/37 \end{pmatrix}$.

a. Oceni verjetnost, da pri 20 in 10^4 stavah dobimo več, kot vložimo.
b. Oceni razpon dobitka igralca pri 20 stavah, ki se zgodi z 90% verjetnostjo.

NALOGA 266. VAJE
Na dobrodelno prireditev je bilo povabljenih 100 gostov. Vsak od njih donira 20 evrov z verjetnostjo 25%, 50 evrov z verjetnostjo 60% in 100 evrov z verjetnostjo 15%. Dobrodelni prispevki gostov so med seboj neodvisni.

a. Kolikšna je pričakovana vrednost vsote doniranih sredstev?
b. Kolikšna je verjetnost, da bodo gostje skupaj donirali med (vključno) 4500 in 5500 evrov?
c. Najmanj koliko gostov bi morali povabiti, da z verjetnostjo vsaj 95% zberejo več kot 6000 evrov?

NALOGA 267. VAJE
Letalski prevoznik prodaja vozovnice za let na letalu, ki ima 200 sedežev. Vemo, da v povprečju 4% ljudi, ki kupi letalsko vozovnico, v zadnjem hipu odpove let.

a. Recimo, da letalski prevoznik proda 200 vozovnic. Kolikšna je verjetnost, da bo vsaj 5 sedežev na letalu praznih?
b. Letalska družba hoče čim manj praznih sedežev na letalu, zato se odloči prodati več kot 200 vozovnic. Seveda pa noče, da bi potniki prišli na letališče in ne bi imeli prostora na letalu. Največ koliko vozovnic lahko prodajo, da bo z verjetnostjo vsaj 95% dovolj sedežev za potnike?

NALOGA 268.
Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov. Naj bo X_i enak 1, če i-ti zavarovanec uveljavi zavarovanje, in 0 sicer, ter Y_i - višina zahtevka.

a. Strošek, ki ga ima zavarovalnica zaradi i-te stranke zapišemo kot $Z_i = X_i Y_i$. Izračunaj $E(Z_i)$ in $\sigma(Z_i)$. Pri tem upoštevaj neodvisnost X_i in Y_i.

b. Naj bo $n = 10\,000$ in višina zavarovalne premije 45 evrov. Koliko je verjetnost, da bodo premije pokrile stroške zaradi izplačil?
c. Zavarovalnica hoče ponuditi premijo višine 43 evrov. Najmanj koliko zavarovancev bi morala imeti, da z verjetnostjo vsaj 95% lahko pokrije stroške?

Naloga 269. vaje

Banka bo 100 podjetjem ponudila po 10 milijonov evrov kredita. Podjetja se strinjajo, da bodo v danem časovnem obdobju z obrestmi vred vrnila po x evrov (seveda je $x > 10^7$). Vendar pa se banka zaveda, da bodo lahko podjetja v tem času imela finančne težave in ne bodo mogla vrniti celotnega dolga temveč le (neznan) delež dogovorjenega zneska x. Dejanski znesek, ki ga bo lahko banka na koncu izterjala od i-tega podjetja oz. stečajnega upravitelja, opišemo s slučajno spremenljivko $Z_i = xY_i$, kjer je Y_i slučajna spremenljivka z $0 \leq Y_i \leq 1$ in $i = 1, \ldots, 100$. Predpostavimo, da so Y_i neodvisne z gostoto verjetnosti $p_{Y_i}(y) = 2y$ za $y \in [0, 1]$ (ter 0 sicer).

a. Izračunaj $E(Z_i)$ in $\sigma(Z_i)$.
b. Približno kako je porazdeljen celotni znesek $S = Z_1 + \ldots + Z_{100}$, ki ga bo banka dobila od vseh podjetij, izraženo z x?
c. Če je $x = 14$ milijonov, koliko verjetno banka nima izgube?
d. Koliko naj bo x, da ima banka z verjetnostjo 99% dobiček?

Naloga 270.

Za $X \sim \chi^2(100)$ oceni $P(90 < X < 110)$.

Naloga 271.

Jasna in Marko imata hčerko Živo, ki hodi na gimnastiko v vrtcu dvakrat tedensko. Gimnastika se začne ob 16.00 in traja eno uro. Ker sta Jasna in Marko precej zaposlena, prideta pogosto do vrtca prepozno. Učiteljica gimnastike uveljavlja strogo politiko točnosti tako, da zaračunava za zamudo, sorazmerno z dolžino zamude in sicer 1 EUR na minuto. Predpostavimo, da zamuda v minutah za vsako uro gimnastike sledi eksponentni porazdelitvi s pričakovano vrednostjo 6 (tj. $\mathcal{E}\left(\frac{1}{6}\right)$). Živa je prijavljena na gimnastiko 50 tednov v naslednjem letu. Oceni verjetnost, da bodo njeni starši za zamude plačali več kot 630 EUR.

Naloga 272.

Policisti vsak dan ustavijo nekaj pijanih voznikov. Njihova statistika kaže, da je en od 20 ustavljenih voznikov pijan. Policija je imela veliko tedensko akcijo, v kateri je poostreno nadzirala psihofizično stanje voznikov na slovenskih cestah. V akciji so ustavili 10000 voznikov. Kolikšna je verjetnost, da je pijanih več kot pričakovano število?

Naloga 273.

Majhen trajekt odpelje, ko se nabere 30 potnikov. V povprečju pride en potnik na minuto, neodvisno od ostalih potnikov, čas med prihodi potnikov pa je porazdeljen eksponentno. Kolikšna je verjetnost, da bo trajekt čakal več kot 40 minut preden odpelje?

Enostavni slučajni vzorec. Naj bo X slučajna spremenljivka. Enostavni slučajni vzorec je slučajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, za katerega velja

- vsi členi vektorja X_i imajo isto porazdelitev kot spremenljivka X in
- členi X_i so med seboj neodvisni.

Vzorčno povprečje normalno porazdeljenega vzorca. Naj bo $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ normalno porazdeljen enostavni slučajni vzorec, $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Potem je porazdelitev vzorčnega povprečja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tudi normalna:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}).$$

Naloga 274. vaje

Uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri matematiki je bil porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo 59.1 in standardnim odklonom 19.1. Iz te populacije vzamemo naključni vzorec velikosti $n = 80$.

a. Zapiši porazdelitev za vzorčno povprečje $\overline{X}$.
b. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje manjše od 60?
c. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje med 50 in 65?
d. Kolikšna je verjetnost, da se vzorčno povprečje od povprečja celotne mature razlikuje za največ 3 točke?

Naloga 275. vaje

Populacija šteje 3000 študentov (moških). Telesna višina študentov je porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo 175 cm in standardnim odklonom 7 cm. Naključno izberemo vzorec 49 študentov.

a. Izračunaj pričakovano vrednost in standardni odklon vzorčnega povprečja višin.
b. Oceni verjetnost, da je vzorčno povprečje višin
   - med 173 cm in 177 cm,
   - več kot 178 cm,
   - manj kot 170 cm.

Naloga 276. vaje

Vrtnar je zgodaj spomladi v 1000 lončkov posadil semena paprike. Babica se je odločila, da bo nakupila sadike paprike zase in za svoje tri prijateljice. V začetku junija, ko se babica odpravi k vrtnarju, so sadike v povprečju visoke 40 cm s standardnim odklonom 4 cm in njihova višina je normalno porazdeljena.

a. Babica naključno izbere eno sadiko. Če je le-ta nižja od 35 cm, bo paprike kupila pri drugem vrtnarju. Kolikšna je verjetnost, da bo babica zadovoljna, in sadike kupila tukaj?
b. Babica je s sadikami zadovoljna, zato zase in za svoje prijateljice nakupi 50 (naključno izbranih) sadik. Kolikšna je verjetnost, da bo povprečna višina tega vzorca večja od 38 cm in manjša od 41 cm?
c. Kolikšna je verjetnost, da se bo višina naključno izbrane sadike od povprečja razlikovala za kvečjemu 2 cm?

Centralni limitni izrek za vzorčno povprečje. Naj bo $(X_1, X_2, \dots X_n)$ enostavni slučajni vzorec in

$$E(X_i) = \mu,\ D(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Za dovolj veliki vzorec ($n \geq 30$) je porazdelitev vzorčnega povprečja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ približno normalna

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Naloga 277.

Pričakovana vrednost napake laserskega merilca je $\mu = 0$ cm, standardni odklon pa je $\sigma = 1$ cm.

a. Meritev ponovimo 30 krat. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje napake manjše od 0.5 cm.
b. Koliko meritev bi morali izvesti, da bi bila verjetnost, da je vzorčno povprečje napake manjše od 1 mm, vsaj 90%?

Naloga 278.

Pričakovana vrednost vsebine nikotina v cigaretah nekega proizvajalca je $\mu = 2.4$ mg, standardni odklon pa je $\sigma = 0.2$ mg. Vzamemo naključni vzorec $n = 100$ cigaret.

a. Zapiši porazdelitev za vzorčno povprečje $\overline{X}$.
b. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje večje od 2.5 mg?
c. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje manjše od 2.25 mg?

Naloga 279. vaje

Pričakovana vrednost upornosti 100-ohmskih uporov nekega proizvajalca je $\mu = 100\ \Omega$, standardni odklon pa je $\sigma = 10\ \Omega$. Naključno izberemo vzorec 60 uporov.

a. Koliko verjetno bo povprečna upornost vzorca manjša od 97 Ω?
b. Koliko verjetno se bo povprečna upornost vzorca od pričakovane upornosti μ razlikovala za kvečjemu 1 Ω?

Naloga 280.

Z računalnikom naključno generiramo kvadrate tako, da je dolžina stranice X enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1]$.

a. Kolikšna sta pričakovana vrednost μ in standardni odklon σ obsega takih kvadratov?
b. Recimo, da generiramo $n = 10000$ takih kvadratov. Kolikšna je verjetnost, da se povprečni obseg na tem vzorcu razlikuje od pričakovane vrednosti μ za manj kot 0.01?

Naloga 281.

Pričakovana vrednost življenjske dobe ene vrste električnih žarnic je $\mu = 500$ ur, standardni odklon pa je $\sigma = 60$ ur. Naključno izberemo vzorec 100 žarnic. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje življenjske dobe večje od 510 ur?

Del 2

Statistika

POGLAVJE 10

Intervali zaupanja

Interval zaupanja za neznani parameter porazdelitve Naj bo θ neznani parameter porazdelitve slučajne spremenljivke X in $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slučajni vzorec. Iščemo interval vrednosti, v katerem se, z veliko verjetnostjo, nahaja neznani parameter θ.
Na osnovi vzorca se definirata statistiki (funkciji vzorca) L in U tako da velja

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha.$$

Potem rečemo, da je $I_\theta = [L,\ U]$ interval zaupanja za neznani parameter θ s *stopnjo zaupanja* $1-\alpha$. Število α se imenuje *stopnja tveganja*.
Običajno se računa 90%, 95% ali 99% interval zaupanja ($1-\alpha$ je enako 0.9, 0.95 ali 0.99).

Interval zaupanja za pričakovano vrednost μ
Naj bo X normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, \sigma)$ in naj bo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slučajni vzorec.
Pričakovana vrednost μ se ocenjuje z vzorčnim povprečjem $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
1. slučaj: standardni odklon σ je znan Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je enak

$$I_\mu = \left[\overline{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

kjer je $c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ kvantil standardne normalne porazdelitve.
2. slučaj: standardni odklon σ ni znan Standardni odklon se ocenjuje s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$.
Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je enak

$$I_\mu = \left[\overline{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

kjer je $c = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantil Studentove porazdelitve z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

Opomba Opažene vrednosti vzorca označimo z $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, dobljene vrednosti vzorčnega povprečja z $\overline{x}$ in vzorčnega standardnega odklona s s. Na ta način razlikujemo, kaj je slučajna spremenljivka (velika črka) in kaj je njena vrednost (mala črka).

Naloga 282. vaje

Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno, $X \sim N(\mu, 5)$. Dobili smo slučajni vzorec $101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95$.

a. Določi 95% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ.
b. Določi stopnjo zaupanja, pri kateri bo interval zaupanja za μ dolg 10.

Naloga 283.

Signal intenzitete μ je poslan z lokacije A. Na lokaciji B se beleži sprejet signal. Zaradi šumenja signal zaznamo z naključno napako. Intenziteta signala na lokaciji B je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo μ in standardnim odklonom 3. Da bi zmanjšali napako, isti signal neodvisno beležimo 10-krat. Dobili smo naslednje vrednosti intenzitete signala na lokaciji B: $17, 21, 20, 18, 19, 22, 20, 21, 16, 19$. Določi 95% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ.

NALOGA 284. VAJE
Za $X \sim N(\mu, 2)$, določi najmanjšo velikost vzorca, pri kateri bo 99% interval zaupanja za μ dolg največ 0.1.

NALOGA 285.
Iz prejšnjih izkušenj vemo, da je teža lososov, gojenih v komercialni ribogojnici normalno porazdeljena s povprečjem, ki varira od sezone do sezone in konstantnim standardnim odklonom 140 g. Kako veliki vzorec potrebujemo, če želimo biti 90% prepričani, da je ocena povprečne teže lososov natančna na ± 50 g?

NALOGA 286.
Standardni odklon življenjske dobe določene vrste žarnic je enak 120 ur. Na naključnem vzorcu 100 žarnic smo izračunali povprečje 1350 ur. Določi 95% interval zaupanja za povprečno življensko dobo μ.

NALOGA 287. VAJE
Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Dobili smo slučajni vzorec $-0.3, 1.4, 0.5, 0.9, 1.2, -0.4, 0.2, -0.2, 1.5, 0.6, -0.4, 1$.

a. Izračunaj vzorčno povprečje in popravljeni vzorčni standardni odklon.
b. Izračunaj 95% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ.

NALOGA 288.
Ameriška agencija za zaščito okolja je zaskrbljena zaradi količine polikloriranih bifenilov (PCB), ki so strupene kemikalije, v mleku doječih mater. Na vzorcu 50 žensk so dobili povprečje 6 in popravljeni standardni odklon 5 količine PCB-jev, merjeno v delcih na milijon (ppm). Določi 99% interval zaupanja za povprečno količino PCB-jev v mleku populacije doječih mater.

NALOGA 289.
Zanima nas povprečna vsebnost nikotina μ v novi znamki cigaret. Naključno smo izbrali vzorec 40 cigaret in izmerili vsebnost nikotina. Izračunali smo vzorčno povprečje 1.74 mg in popravljeni vzorčni standardni odklon 0.7 mg. Določi 95% interval zaupanja za povprečno vsebnost nikotina.

NALOGA 290.
Ravnatelj šole želi določiti povprečno število dni odsotnosti dijakov s pouka prejšnjega leta. Namesto, da bi pogledal podatke za vse dijake, se je odločil naključno izbrati vzorec 50 imen dijakov in zabeležiti njihovo število dni odsotnosti. Izračunal je, da je vzorčno povprečje 8.4 dni in popravljeni vzorčni standardni odklon 5.1 dni. Določi 95% interval zaupanja za povprečno število dni odsotnosti vseh dijakov šole.

Interval zaupanja za standardni odklon σ (pričakovana vrednost μ ni znana) Naj bo X normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, \sigma)$ in naj bo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slučajni vzorec.
Standardni odklon se ocenjuje s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$. Interval zaupanja za σ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je enak

$$I_\sigma = \left[S\sqrt{\frac{n-1}{c_2}},\ S\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}\right],$$

kjer sta $c_1 = \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$, $c_2 = \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantila χ^2 porazdelitve z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

NALOGA 291. VAJE
Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Izbrali smo slučajni vzorec

velikosti $n = 20$ in smo izračunali popravljeni vzorčni standardni odklon $s = 0.7$. Poišči interval zaupanja za standardni odklon σ pri stopnji zaupanja 0.95, nato pa še pri stopnji zaupanja 0.99. Kaj opaziš?

NALOGA 292. VAJE

Telesna teža slučajnega vzorca 75 učenk 7. razreda osnovne šole ima naslednjo frekvenčno porazdelitev.

teža $[kg]$	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	59
št. učencev	1	3	5	8	8	7	9	8	6	6	4	3	2	2	1	1	1

Poišči 95% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ in standardni odklon σ teže učenk 7. razreda.

NALOGA 293.

Izbrali smo slučajni vzorec 30 radio sprejemnikov General Electric (GE) in zabeležili njihovo življenjsko dobo (v h). Izračunali smo vzorčno povprečje 1210 ur in popravljeni vzorčni standardni odklon 92 ur. Izračunaj 90% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ in standardni odklon σ življenske dobe populacije GE radio sprejemnikov.

NALOGA 294.

Antropologinja je izmerila višine naključnega vzorca 60 moških perujskega plemena. Izračunala je vzorčno povprečje 165 cm in popravljeni vzorčni standardni odklon 4.6 cm. Izračunaj 99% interval zaupanja za pričakovano vrednost μ in standardni odklon σ višine vseh moških tega plemena.

Interval zaupanja za delež p Naj bo p delež populacije z določeno lastnostjo in naj bo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slučajni vzorec, pri čemer $X_i = 1$ z verjetnostjo p in $X_i = 0$ z verjetnostjo $1 - p$.
Neznani delež p ocenjujemo z vzorčnim deležem $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Interval zaupanja za delež p s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ je enak

$$I_p = \left[\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

kjer je $c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ kvantil standardne normalne porazdelitve.
Za uporabo zgornjega izraza za interval zaupanja za p potrebujemo dovolj veliki vzorec, za aproksimacijo porazdelitve vzorčnega deleža z normalno porazdelitvijo.

NALOGA 295. VAJE

V slučajnem vzorcu 500 državljanov RS je bilo 452 desničarjev in 48 levičarjev. Izračunaj 95% interval zaupanja za delež levičarjev.

NALOGA 296.

V anketi je sodelovalo 1112 ljudi. Od teh jih je 701 menilo, da predsednik dobro opravlja svoje delo. Poišči 99% interval zaupanja za delež ljudi, ki menijo, da predsednik dela dobro.

NALOGA 297.

Uvoznik vina je dobil priložnost poceni nakupa velike količine vina Chateau Lafite Rothschild letnik 1947. Zaradi starosti vina so se nekatere buteljke vina spremenile v kis (po videzu buteljke se ne more zaključiti, katere so pokvarjene). Uvoznik se je odločil pri nakupu naključno izbrati 200 buteljk. Od teh je bilo 18 pokvarjenih. Izračunaj 90% interval zaupanja za delež pokvarjenih buteljk vina.

NALOGA 298. VAJE

Podjetje za raziskovanje trga želi ugotoviti delež gospodinjstev, ki gledajo ameriški nogomet. Po načrtu bodo uporabili telefonsko anketo naključno izbranih gospodinjstev. Koliko velik vzorec potrebujejo, če želijo biti 95% prepričani, da je dobljena ocena deleža natančna na ± 0.02?

POGLAVJE 11

Testiranje domnev

Statistični test Želimo testirati *ničelno domnevo* H_0 proti *alternativni domnevi* H_1 s *testno statistiko*. Pri pogoju, da je H_0 točna, ima testna statistika določeno porazdelitev.
Za izbrano *stopnjo značilnosti* α, alternativno domnevo in na osnovi porazdelitve testne statistike, najdemo *kritično območje* za ničelno domnevo. Če vrednost testne statistike pade v kritično območje, ničelno domnevo zavrnemo in sprejmemo alternativno domnevo.

1. Statistični testi za en vzorec

Testiranje domneve o pričakovani vrednosti μ Naj bo X normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, \sigma)$ in $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ enostavni slučajni vzorec.
Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da se pričakovana vrednost μ ne razlikuje od predpostavljene vrednosti μ_0, $H_0 : \mu = \mu_0$ proti eni od alternativnih domnev

a. $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
b. $H_1 : \mu < \mu_0$,
c. $H_1 : \mu > \mu_0$.

Neznano pričakovano vrednost μ ocenjujemo z vzorčnim povprečjem $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
1. slučaj: standardni odklon σ je znan Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

ki ima standardno normalno porazdelitev, $Z \sim N(0,1)$. Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $|Z| \geq \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
b. $Z \leq \mathrm{F}^{-1}(\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu < \mu_0$,
c. $Z \geq \mathrm{F}^{-1}(1-\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu > \mu_0$.

2. slučaj: standardni odklon σ ni znan Standardni odklon ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$. Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

ki ima Studentovo porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami, $T \sim t_{n-1}$.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $|T| \geq t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
b. $T \leq t_{n-1;\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu < \mu_0$,
c. $T \geq t_{n-1;1-\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu > \mu_0$.

Naloga 299. vaje

Meritve za $X \sim \mathrm{N}(\mu, 5)$ dajo vrednosti $101, 91, 93, 103, 91, 101, 103, 95, 95$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da je $\mu = 100$, proti alternativni domnevi, da je $\mu \neq 100$.

Naloga 300.

Vsebina nikotina v cigaretah je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, 0.7)$. Povprečna vsebina nikotina v cigaretah, ki so zdaj na trgu, je 1.5 mg. Podjetje za proizvodnjo cigaret trdi, da je odkrilo novo metodo sušenja listov tobaka, ki daje kot rezultat povprečno vsebino nikotina manjšo od 1.5 mg. Da bi testirali njihovo trditev, smo zbrali naključni vzorec 20 njihovih cigaret in jih analizirali. Dobili smo vzorčno povprečje vsebine nikotina 1.42 mg. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Naloga 301.

Teža lososov, gojenih v komercialni ribogojnici, je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, 0.5)$. Ribogojnica trdi, da je povprečna teža letošnjih lososov večja kot 3.5 kg. Da bi testirali njihovo trditev, smo zbrali naključni vzorec 16 lososov. Dobili smo vzorčno povprečje 3.8 kg. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 302.

Višine študentov so porazdeljene normalno. Izmerjene višine (v cm) 9 slučajno izbranih študentov so $181, 177, 166, 184, 163, 181, 184, 170, 170$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da je $\mu = 175$ proti alternativni domnevi, da je $\mu \neq 175$.

Naloga 303. vaje

Povprečna življenjska doba žarnic je 1600 ur. V tovarni so začeli proizvajati žarnice z uporabo novih strojev. Naključno smo izbrali 100 novoproizvedenih žarnic in zabeležili njihovo življenjsko dobo. Dobili smo vzorčno povprečje 1640 ur in popravljeni vzorčni standardni odklon 120 ur. Vodstvo trdi, da so novi stroji bolj učinkoviti, oziroma da je povprečna življenjska doba novoproizvedenih žarnic v celotni proizvodnji večja od 1600 ur. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 304. vaje

Pekarno so tožili, da prodaja štruce kruha, ki so pod reklamirano težo 700 g. V svojo obrambo je pekarna trdila, da reklamirana teža ne pomeni, da vsaka štruca tehta 700 g, temveč, da je povprečna teža vseh štruc 700 g. Tožilstvo je naročilo, da se izbere naključni vzorec 30 štruc. Dobljena sta vzorčno povprečje 665.1 g in popravljeni vzorčni standardni odklon 40.8 g. Kakšno odločitev bo sodnik sprejel, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 305.

Oceanograf dvomi, da je povprečna globina oceana v določeni regiji enaka 99 m, kakor je objavljeno v eni študiji. Meritve 30 slučajno izbranih lokacij v tej regiji so dale vzorčno povprečje 101.5 m in popravljeni vzorčni standardni odklon 9.2 m. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Naloga 306.

Dvajset let nazaj so dijaki prvega letnika srednje šole v povprečju naredili 24 sklec v minuti. Raziskovalec trdi, da današnji dijaki prvega letnika ne morejo narediti toliko sklec v minuti. Da bi preveril svojo trditev, je zbral slučajni vzorec 40 učencev prvega letnika. Dobil je vzorčno povprečje 22.5 in popravljeni vzorčni standardni odklon 3.1. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 307.

Podjetje proizvaja plastične plošče za industrijsko porabo. Proizvedli so novo vrsto plastike in želijo pokazati, da je natezna trdnost (največji stres, kateremu je material lahko podvržen, dokler se ne zlomi) novih plošč večja kot 210 000 $\mathrm{N/m^2}$. Natezna trdnost plastičnih plošč je normalno porazdeljena. Na slučajnem vzorcu 12 plastičnih plošč so izmerili naslednje vrednosti natezne trdnosti (v 1000 $\mathrm{N/m^2}$) $224.1, 231.0, 212.6, 237.1, 224.6, 204.9, 216.1, 212.7, 226.6, 215.4, 217.4, 218.9$. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Testiranje domneve o standardnem odklonu σ (pričakovana vrednost ni znana) Naj bo X normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(\mu, \sigma)$ in $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ enostavni slučajni vzorec.
Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da se standardni odklon σ ne razlikuje od predpostavljene vrednosti σ_0, $H_0 : \sigma = \sigma_0$ proti eni od alternativnih domnev

a. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$,
b. $H_1 : \sigma < \sigma_0$
c. $H_1 : \sigma > \sigma_0$.

Standardni odklon populacije ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$. Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

ki ima χ^2 porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ ali $\chi^2 \geq \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$,
b. $\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \sigma < \sigma_0$,
c. $\chi^2 \geq \chi^2_{n-1;1-\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \sigma > \sigma_0$.

Za testiranje domneve o varianci σ^2 uporabljamo isti test, samo drugače zapišemo ničelno in alternativno domnevo.

Naloga 308. vaje

Meritve za $X \sim N(\mu, \sigma)$ dajo vrednosti $99, 90, 108, 111, 97, 93, 90, 106, 104, 102$. Pri $\alpha = 0.05$ testiraj $H_0 : \sigma = 5$, proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma \neq 5$.

Naloga 309. vaje

Preveriti želimo delovanje stroja za polnjenje steklenic. Volumen napolnjenih steklenic je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Če varianca volumna presega 0.01, bo nesprejemljiva količina steklenic preveč ali premalo napolnjena. Iz vzorca naključno izbranih 20 steklenic dobimo $s^2 = 0.0153$. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 310.

V tovarni proizvajajo cevi izbrane dolžine. Trdijo, da je standardna napaka dolžine izdelane cevi manjša od 1.5 cm. Dolžina cevi je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Na naključnem vzorcu 25 ceveh dobimo popravljeni vzorčni standardni odklon 1.2 cm. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 311.

V priročniku za uporabo določenega modela baterije za slušne aparate piše, da je povprečna življenjska doba baterije 7 ur s standardnim odklonom 2 uri. Življenjska doba baterij je približno normalno porazdeljena. Uporabnik teh baterij verjame, da je navedena vrednost standardnega odklona prenizka. Da bi testiral svojo trditev, je uporabnik zabeležil naslednjo življenjsko dobo 10 baterij, kupljenih tekom enega meseca $5, 6, 4, 3, 11, 12, 9, 13, 5, 8$. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Testiranje domneve o deležu p Naj bo p delež populacije z določeno lastnostjo in naj bo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slučajni vzorec, pri čemer $X_i = 1$ z verjetnostjo p in $X_i = 0$ z verjetnostjo $1-p$.
Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da se delež p ne razlikuje od predpostavljene vrednosti p_0, $H_0 : p = p_0$ proti eni od alternativnih domnev

a. $H_1 : p \neq p_0$,
b. $H_1 : p < p_0$,
c. $H_1 : p > p_0$.

Neznani delež p ocenjujemo z vzorčnim deležem $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

ki ima standardno normalno porazdelitev, $Z \sim N(0,1)$.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $|Z| \geq \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p \neq p_0$,
b. $Z \leq \mathrm{F}^{-1}(\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p < p_0$,
c. $Z \geq \mathrm{F}^{-1}(1-\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p > p_0$.

Naloga 312. vaje
Sumimo, da kovanec ni pošten. Vržemo kovanec 300 krat, cifra pade 138 krat. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Naloga 313. vaje
Prag, da stranka pride v parlament, je 4% podpore na volitvah. Tik pred volitvami so v anketi, kjer je sodelovalo 723 ljudi, namerili 4.2% podpore za določeno stranko. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 314.
Proizvajalec računalniških čipov trdi, da je največ 2% proizvedenih čipov defektnih. Da bi preverili trditev proizvajalca, smo zbrali slučajni vzorec 800 čipov. Med njimi je bilo 12 defektivnih čipov. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 315.
Z dosedanjo metodo zdravljenja se pri 60% vseh bolnikov določene bolezni stanje izboljša. Trdimo, da je nova metoda učinkovitejša. Na kliniki z 52 bolniki s to boleznijo preizkusijo novo metodo in pri 40 njih se stanje izboljša. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 316.
Generator naključnih bitov je zgeneriral zaporedje
1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1.
Testiraj ničelno domnevo, da generator zgenerira slučajno bit 0 in bit 1, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$.

Naloga 317.
Kandidat A je samozavesten, da bo zmagal na naslednjih volitvah za župana občine. Za zmago mora prejeti več kot 50% glasov volilcev. Med volilci te občine smo naključno izbrali 100 ljudi in jih anketirali. Kandidata A je izbralo 55% anketiranih. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Naloga 318. vaje
Po podatkih iz leta 2010 je bilo v Ugandi nepismenih 22 % oseb, starih 15 let in več. Humanitarna organizacija je prepričana, da so metode, ki so jih uporabljali zadnjih 10 let, vplivale na zmanjšanje nepismenosti v tej državi. Naključno so zbrali vzorec 100 oseb in 14 njih je nepismenih. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

2. Statistični testi za dva vzorca

Naj bosta X slučajna spremenljivka na prvi populaciji in Y slučajna spremenljivka na drugi populaciji. Spremenljivki sta neodvisni in normalno porazdeljeni, $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ in $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Iz prve populacije je pridobljen slučajni vzorec $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ in iz druge populacije slučajni vzorec $(Y_1, Y_2, \ldots Y_m)$.
Izračunamo vzorčni povprečji $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ in $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$ in popravljeni vzorčni varianci $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2$.
Testiranje domneve o enakosti pričakovanih vrednosti μ_1 in μ_2 (standardna odklona σ_1 in σ_2 nista znana) Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da ni razlike med povprečjema dveh populacij, $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti eni od alternativnih domnev

a. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, obstaja razlika med povprečjema
b. $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, povprečje prve populacije je manjše,
c. $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, povprečje prve populacije je večje,

Če sta varianci slučajne spremenljivke na dveh populacijah enaki, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}},$$

kjer je $S^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ združena vzorčna varianca. Če je ničelna domneva točna, ima testna statistika Studentovo porazdelitev z $\nu = n + m - 2$ prostostnimi stopnjami.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $|T| \geq t_{\nu;1-\frac{\alpha}{2}}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,
b. $T \leq t_{\nu;\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,
c. $T \geq t_{\nu;1-\alpha}$ za alternativno domnevo: $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Testiranje domneve o enakosti varianc σ_1^2 in σ_2^2 (pričakovani vrednosti μ_1 in μ_2 nista znani) Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da ni razlike med variancama dveh populacij, $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, da obstaja razlika med variancama.
Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2},$$

ki ima, pri točni ničelni domnevi, Fisherjevo porazdelitev z $n-1$ in $m-1$ prostostnimi stopnjami.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

$$F \leq F_{n-1,m-1;\frac{\alpha}{2}} \text{ ali } F \geq F_{n-1,m-1;1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Naloga 319. vaje

Stroja izdelujeta klobase, katerih dolžina je normalno porazdeljena. Iz strojev smo dobili slučajna vzorca klobas dolžin (v cm)

dolžina klobas (1. vzorec)	19.2	14.8	21.9	15.2	17.0	15.3	18.9	16.1	21.6	16.5
dolžina klobas (2. vzorec)	12.8	15.9	17.0	15.1	11.8	16.7	13.9	15.8	13.2	13.4

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci dolžin klobas proizvedenih na dveh strojih enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$.
b. Testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni dolžini klobas proizvedenih na dveh strojih enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.

Naloga 320.

Tovarna baterij začne prodajati nov tip baterij. Trdijo, da nove baterije v povprečju delujejo dlje kot baterije starega tipa. Vzamemo slučajna vzorca 100 baterij novega tipa in 100 baterij starega tipa. Vzorčno povprečje časa delovanja baterij novega tipa je 251 minut s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 38 minut, vzorčno povprečje časa delovanja baterij starega tipa pa 240 minut s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 32 minut.

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci časa delovanja starih in novih baterij enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.
b. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$, testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni vrednosti delovanja starih in novih baterij enaki, proti alternativni domnevi, da je povprečna vrednost delovanja novih baterij daljša.

Naloga 321. vaje

Na inštitutu za raziskovanje virusov prehlada se je prijavilo 60 prostovoljcev, ki so bili izpostavljeni različnim virusom prehlada, dokler se niso okužili. Raziskovalci so bili mnenja, da redno jemanje 1 g vitamina C večkrat na dan skrajša povprečni čas ozdravljenja. Da bi testirali svojo trditev, so slučajno razdelili prostovoljce v dve skupini: prva skupina je jemala tablete z 1 g vitamina C 4-krat dnevno, druga skupina je jemala placebo 4-krat na dan, ki je izgledal in bil enakega okusa kot tablete vitamina C. Prostovoljci v skupinah niso vedeli, ali dobivajo vitamin C ali placebo. Postopek so ponavljali, dokler se zdravnik, ki ni vedel, kateri skupini vsak prostovoljec pripada, ni odločil, da se je oseba pozdravila. Na inštitutu so merili čas, v dnevih, dokler se oseba ni pozdravila. Dobili so vzorčno povprečje časa ozdravljenja vitamin C skupine enako 6.5 dni s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 0.8, in za placebo skupino vzorčno povprečje časa ozdravljenja 7.5 dni s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 0.9.

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci časa ozdravljenja obeh skupin enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.
b. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$, testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni vrednosti časa ozdravljenja obeh skupin enaki, proti alternativni domnevi, da je povprečna vrednost časa ozdravljenja vitamin C skupine manjša.

Naloga 322.

Na slučajnem vzorcu 100 učencev in 120 učenk testiramo, ali spol vpliva na število dni odsotnosti v šoli. Za učence dobimo vzorčno povprečje 15 dni in popravljeni vzorčni standardni odklon 7 dni, za učenke pa vzorčno povprečje 10 dni in popravljeni vzorčni standardni odklon 6 dni.

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci števila dni odsotnosti učencev in učenk enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$.
b. Testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni vrednosti števila dni odsotnosti učencev in učenk enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.

Naloga 323.

Vrsta paradižnika A se reklamira, da ima večji donos od dosedanjega rekorderja - vrste B. Obe vrsti se vzgajata na isti način, na palicah. Slučajno smo izbrali vzorca po 30 rastlin paradižnika obeh vrst. Za vrsto A smo dobili vzorčno povprečje 13.0 kg na rastlino in popravljeni vzorčni standardni odklon 1.8 kg, za vrsto B pa vzorčno povprečje 12.4 kg na rastlino in popravljeni vzorčni standardni odklon 1.6 kg.

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci donosov obeh vrst paradižnikov enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.1$.
b. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$, testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni vrednosti donosa obeh vrst paradižnikov enaki, proti alternativni domnevi, da je povprečni donos vrste A večji.

Naloga 324.

Raziskovalci se želeli ugotoviti, kakšen je vpliv določenega antidepresiva na zmanjšanje nivoja depresije. Osemdeset klinično depresivnih bolnikov je slučajno razporejenih v dve skupini: 40

bolnikov v skupino 1, ki je jemala 6 mesecev antidepresive in 40 bolnikov v skupino 2, ki je isto obdobje jemala placebo. Bolniki niso vedeli, ali dobivajo antidepresiv ali placebo. Preden so dobili terapijo, je raziskovalec ugotovil, da je nivo depresije enak v obeh skupinah. Po 6 mesecih zdravljenja je psihiater, ki ni vedel, kateri skupini pripada vsak bolnik, ocenil njihov nivo depresije s pomočjo Hamiltonove lestvice depresivnosti HAM-D (17 vprašanj, razpon vsote točk 0–52). Večje število točk na tem vprašalniku pomeni višji nivo depresije. Vzorčno povprečje nivoja depresije prve skupine bolnikov je 8.4 s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 4.3, in vzorčno povprečje druge skupine bolnikov je 13.5 s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 5.6.

a. Testiraj ničelno domnevo, da sta varianci nivoja depresije obeh skupin enaki, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.
b. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$, testiraj ničelno domnevo, da sta povprečni vrednosti nivoja depresije obeh skupin enaki, proti alternativni domnevi, da je povprečna vrednost nivoja depresije prve skupine manjša.

Testiranje domneve o enakosti deležev p_1 in p_2 Naj bosta p_1 in p_2 deleža prve in druge populacije z določeno lastnostjo. Iz prve populacije je pridobljen enostavni slučajni vzorec $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ in iz druge populacije enostavni slučajni vzorec $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, kjer so X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ in Y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ indikatorske slučajne spremenljivke. Za izbrano stopnjo značilnosti α, testiramo ničelno domnevo, da ni razlike med deležema, $H_0 : p_1 = p_2$ proti eni od alternativnih domnev

a. $H_1 : p_1 \neq p_2$, obstaja razlika med deležema
b. $H_1 : p_1 < p_2$, delež prve populacije je manjši,
c. $H_1 : p_1 > p_2$, delež prve populacije je večji.

Neznan delež p_1 ocenjujemo z vzorčnim deležem $\hat{p}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ in delež p_2 z vzorčnim deležem $\hat{p}_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j$

Za testiranje ničelne domneve uporabljamo testno statistiko

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

kjer je $\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}$ ocena združenega deleža. Če je točna ničelna domneva, ima testna statistika standardno normalno porazdelitev.

Ničelno domnevo zavrnemo, če velja

a. $|Z| \geq \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p_1 \neq p_2$,
b. $Z \leq \mathrm{F}^{-1}(\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p_1 < p_2$,
c. $Z \geq \mathrm{F}^{-1}(1-\alpha)$ za alternativno domnevo: $H_1 : p_1 > p_2$.

Naloga 325. vaje

Raziskovalci so mnenja, da je delež kadilcev v mestih različen od deleža kadilcev na podeželju. V anketi sodeluje 125 prebivalcev mest in 153 prebivalcev s podeželja. Od tega je 47 prebivalcev iz mesta kadilcev, s podeželja pa 52. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 326.

Raziskovalec je mnenja, da je med osebami, ki pijejo kavo, večji delež žensk, ki pijejo brezkofeinsko kavo od moških. Da bi preveril svojo trditev, zbral je slučajni vzorec 220 ženskih in slučajni vzorec 210 moških, ki pijejo kavo. Med njimi, je bilo 71 ženskih in 58 moških, ki pijejo brezkofeinsko kavo. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 327. vaje

Proizvajalec računalniških čipov je zasnoval novo metodo proizvodnje in trdi, da bo nova metoda vplivala na zmanjšanje deleža defektnih čipov. Da bi preveril svojo trditev, je proizvedel 320 čipov po novi metodi in 360 čipov po stari metodi. Dobil je, da je število defektnih čipov 10 za novo metodo in 20 za staro metodo. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$?

Naloga 328.
Raziskovalci so mnenja, da obstaja razlika med moškimi in ženskimi študenti, ki bivajo v študenstem domu v času študija. Izbrali so slučajni vzorec 120 študentov in slučajni vzorec 140 študentk. Od tega je 74 študentov in 68 študentk odgovorilo, da živijo v študentskem domu v času študija. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 329.
Raziskovalci so želeli preveriti učinkovitost novo razvitega cepiva proti navadnemu prehladu, oziroma, da novo cepivo vpliva na zmanjšanje okuženih. Slučajno so razporedili 204 delavcev na smučarskem središču v dve skupini, po 102 oseb. Člani prve skupine so dobili tekom zime cepivo, člani druge skupine pa so dobili placebo. Oseba ni vedela, ali dobiva cepivo ali placebo. Na koncu zime so prešteli osebe, ki so se vsaj enkrat okužile s prehladom: 29 oseb iz prve skupine in 34 oseb iz druge skupine. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

Naloga 330.
Na univerzi organizirajo različna predavanja za nove starše, za več skupin tekom tedna. Nedavno so dodali predavanje o pomembnosti uporabe avto sedežev za otroke. Raziskovalci so bili mnenja, da bodo ta predavanja vplivala na povečanje deleža staršev, ki uporabljajo te avto sedeže. Skupine staršev, ki hodijo na ta predavanja so slučajno razdelili na tiste, ki so jim predavali to snov, in tiste ki jim niso predavali te snovi. Po enem letu so intervjuvali 100 parov, ki so poslušali predavanje in 120 njih, ki niso. Število staršev, ki vedno uporablja otroški avto sedež je 89 parov, ki so poslušali predavanje in 90 parov, ki niso poslušali predavanja. Kakšne zaključke lahko potegnemo, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$?

3. Pearsonov χ^2 test

Pearsonov χ^2 test skladnosti z določeno porazdelitvijo Želimo testirati ničelno domnevo, da ima opazovana slučajna spremenljivka X določeno funkcijo porazdelitve F_0 proti alternativni domnevi, da je njena funkcija porazdelitve različna od F_0.
Zbrali smo enostavni slučajni vzorec velikosti n. Vrednosti slučajne spremenljivke X razdelimo na k različnih disjunktnih kategorij ali razredov, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ in za vsako od njih zabeležimo število ponavljanj v vzorcu, oziroma empirične frekvence $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Pri točni ničelni domnevi, izračunamo verjetnosti $p_1, p_2, \ldots p_k$, kjer je $p_i = P(X \in S_i)$. Teoretične ali pričakovane frekvence so enake $f_i' = np_i$.
S testno statistiko primerjamo empirične in teoretične frekvence

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}.$$

Če je točna ničelna domneva, ima testna statistika χ^2 porazdelitev s $k - s - 1$ prostostnimi stopnjami, kjer je s število neznanih parametrov predpostavljene porazdelitve.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja $\chi^2 \geq \chi_{k-s-1;1-\alpha}$.
Za uporabo χ^2 testa mora veljati $f_i' \geq 5$. Če ta pogoj ni izpolnjen, se sosednje kategorije združujejo.

Naloga 331.

Kocko vržemo 300-krat in rezultate vpišemo v naslednjo tabelo:

št. pik	1	2	3	4	5	6
frekvenca	39	53	49	68	48	43

Ali lahko pri $\alpha = 0.05$ trdimo, da kocka ni poštena?

Naloga 332.

Pri kvizu 'Lepo je biti milijonar' od 22.11. do 28.12.2003 je bil 21-krat pravilen odgovor A, 42-krat B, 77-krat C ter 116-krat D. Pri $\alpha = 0.01$ testiraj ničelno domnevo, da so odgovori diskretno enakomerno porazdeljeni, proti alternativni domnevi, da niso.

Naloga 333. vaje

Kovanec mečemo toliko časa, da prvič pade grb, in pri tem zabeležimo potrebno število metov. V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben 1 met, 30-krat 2 meta, 15-krat 3 meti, 6-krat 4 meti, 2-krat 5 metov, in 2-krat 6 ali več metov. S testom χ^2 pri $\alpha = 0.05$ testiraj domnevo, da je porazdelitev potrebnih metov geometrijska ($p_k = 2^{-k}$ za $k = 1, 2, \ldots$) in je tako kovanec simetričen.

Naloga 334.

Pri igri rulete je verjetnost, da se kroglica ustavi na črnem polju $\frac{18}{37}$, na rdečem polju prav tako $\frac{18}{37}$ in na zelenem polju $\frac{1}{37}$. Če je ta pogoj izpolnjen, igro imenujemo pravična ruleta. Igralnica je zelo zainteresirana, da je ruleta pravična, saj lahko le tako prepreči, da bi se kakšen pozorno opazujoč igralec okoristil z načrtnimi stavami. Zato v igralnici beležijo izide naključno izbranih iger. V bazi imamo 222 iger, od katerih se je pri 111 kroglica ustavila na rdečem, pri 96 na črnem in pri 15 na zelenem polju. Ali lahko pri $\alpha = 0.01$ trdimo, da njihova ruleta ni pravična?

Naloga 335. vaje

V naslednjo tabelo smo vpisali število golov v finalu Svetovnega prvenstva v nogometu, zadetih v prvih 90 minutah igre (manjkajoča leta se nanašajo na obdobje okoli Druge svetovne vojne).

leto	1930	1934	1938	1954	1958	1962	1966	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998	2002	2006	2010	2014	2018
št.	6	2	6	5	7	4	4	5	3	2	4	5	1	0	3	2	2	0	0	6

Pri $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da je število zadetih golov v finalu Svetovnega prvenstva v nogometu porazdeljeno po Poissonu.

Pearsonov χ^2 test neodvisnosti Želimo testirati ničelno domnevo, da sta opazovani slučajni spremenljivki X in Y neodvisni, proti alternativni domnevi, da sta odvisni.
Zbrali smo enostavna slučajna vzorca velikosti n obeh spremenljivk. Vrednosti slučajne spremenljivke X razdelimo na s različnih disjunktnih kategorij $S_1, S_2, \dots S_s$ in vrednosti slučajne spremenljivke Y na v različnih disjunktnih kategorij $Q_1, Q_2, \dots Q_v$. Dobljeni podatki se predstavijo v ti. *kontingenčni tabeli*

X	Y				
	Q_1	Q_2	$\dots$	Q_v	Vsota
S_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1v}	$n(S_1)$
S_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2v}	$n(S_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_s	f_{s1}	f_{s2}	$\dots$	f_{sv}	$n(S_s)$
Vsota	$n(Q_1)$	$n(Q_2)$	$\dots$	$n(Q_v)$	n

kjer so f_{ij} empirične frekvence, oziroma število elementov vzorca, ki pripada kategorijama S_i in Q_j, $n(S_i)$ je vsota i-te vrstice in $n(Q_j)$ vsota j-tega stolpca.
Teoretične frekvence so enake $f'_{ij} = \frac{n(S_i) \cdot n(Q_j)}{n}$.
S testno statistiko primerjamo empirične in teoretične frekvence

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{v} \frac{(f_{ij} - f'_{ij})^2}{f'_{ij}}.$$

Če je točna ničelna domneva, ima testna statistika χ^2 porazdelitev s $(s-1)(v-1)$ prostostnimi stopnjami.
Ničelno domnevo zavrnemo, če velja $\chi^2 \geq \chi_{(s-1)(v-1);1-\alpha}$.

Naloga 336.
Raziskovalci so mnenja, da moški in ženski volilci ne ocenjujejo enako učinek predsednika v prvih 100 dneh mandata, oziroma, da je ocena učinka predsednika odvisna od spola volilca. Zbrali so slučajni vzorec 187 volilcev, in jih vprašali, da ocenijo učinek predsednika. Podatke so predstavili v naslednji tabeli

SPOL	OCENA		
	Pozitivna	Negativna	Ne vem
ženski	54	20	23
moški	47	32	11

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da sta ocena učinka predsednika v prvih 100 dneh mandata in spol volilca neodvisna.

Naloga 337. vaje
Raziskovalec javnega zdravja sumi, da sta zakonski stan in stopnja depresije depresivnih bolnikov povezana. Zbral je slučajni vzorec 159 bolnikov, ki se zdravijo za depresijo v kliniki mentalnega zdravja, in zabeležil njihovo stopnjo depresije in zakonski stan. Podatke je predstavil v naslednji

tabeli

STOPNJA DEPRESIJE	ZAKONSKI STAN		
	Poročen/a	Samski/a	Vdovec/a ali ločen/a
Resna	22	16	19
Srednja	33	29	14
Blaga	14	9	3

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da sta zakonski stan in stopnja depresije depresivnih bolnikov neodvisna.

Naloga 338.

Raziskovalci so želeli preveriti, kakšna je povezanost med kajenjem in holesterolom. Zbrali so slučajni vzorec 160 bolnikov zdravstvenega doma in zabeležili njihov kadilski status in stopnjo holesterola v krvi. Podatke so predstavili v naslednji tabeli

KADILSKI STATUS	STOPNJA HOLESTEROLA		
	Nizki	Srednji	Visok
Težki kadilec	6	14	24
Zmerni kadilec	12	23	15
Nekadilec	23	32	11

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da sta kajenje in stopnja holesterola v krvi neodvisna.

Naloga 339. vaje

Za študijo o vplivu fluorirane vode na kvarjenje zob najstnikov smo izbrali dve mesti, približno istega socioekonomskega statusa. V enem mestu je voda fluorirana, v drugem pa ne. Zbrali smo slučajna vzorca po 200 najstnikov iz obeh mest in zabeležili število zob, prizadetih s kariesom. Dobljene podatke smo predstavili v naslednji tabeli

VODA	ŠTEVILO PRIZADETIH ZOB			
	0	1	2	3 +
Fluorirana	154	20	14	12
Nefluorirana	133	18	21	28

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$ testiraj ničelno domnevo, da je število prizadetih zob najstnikov neodvisno od tega, ali pijejo fluorirano vodo.

Naloga 340.

Raziskovalec je mnenja, da sta stopnja izobrazbe in število otrok poročenih moških odvisna. Zbral je slučajni vzorec 159 poročenih moških, starih okoli 50 let, in zabeležil njihovo stopnjo izobrazbe in število otrok. Podatke je predstavil v naslednji tabeli

STOPNJA IZOBRAZBE	ŠTEVILO OTROK		
	0-1	2-3	4+
Osnovna šola	22	16	19
Srednja šola	33	29	14
Fakulteta	14	9	3

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.01$ testiraj ničelno domnevo, da sta stopnja izobrazbe in število otrok poročenih moških neodvisna.

POGLAVJE 12

Linearna regresija

Vzorčni koeficient korelacije. Naj bodo podatki zbrani v parih $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, kjer sta $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ in $(Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$ vzorca vrednosti slučajnih spremenljivk X in Y.
Pearsonov koeficient korelacije je ocena populacijskega koeficienta korelacije med spremenljivkama X in Y in je enak

$$r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}},$$

kjer sta $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ in $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_j$ vzorčni povprečji.

Naloga 341.

V naslednjih parih stavkov izberi pravilen stavek.

a. 1. Pearsonov koeficient korelacije meri povezanost med numeričnima spremenljivkama.
   2. Pearsonov koeficient korelacije meri linearno povezanost med numeričnima spremenljivkama.
b. 1. Čim bližje je Pearsonov koeficient korelacije +1, tem močnejša je linearna zveza med X in Y.
   2. Čim bližje je Pearsonov koeficient korelacije -1 ali +1, tem močnejša je linearna zveza med X in Y.
c. 1. Če je Pearsonov koeficient korelacije blizu 0, sta X in Y nepovezana.
   2. Če je Pearsonov koeficient korelacije blizu 0, sta X in Y linearno nepovezana.
d. 1. Vrednost Pearsonovega koeficienta korelacije se spremeni, ko spremenimo mersko enoto.
   2. Vrednost Pearsonovega koeficienta korelacije se ne spremeni, ko spremenimo mersko enoto.

Naloga 342. vaje

Babico je zanimala povezanost med starostjo otrok in številom izgovorjenih besed. V sosedstvu je izbrala 6 otrok starosti od enega do dveh let. Dobljeni podatki so predstavljeni v naslednji tabeli.

starost (v mesecih)	13	14	15	16	16	18
št. besed	8	10	15	20	27	30

Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije med starostjo otrok in številom besed.

Naloga 343.

V naslednji tabeli so dani podatki o starosti mladoporočencev ob poroki na slučajnem vzorcu 6 oseb.

starost žene	18	24	40	33	30	25
starost moža	21	29	51	30	36	25

Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije med starostjo moža in žene.

Enostavna linearna regresija. Med spremenljivkama obstaja linearna zveza

$$Y = a + bX + e,$$

kjer je e naključna napaka, ki je normalno porazdeljena, $e \sim N(0, \sigma^2)$.
Slučajna spremenljivka X se imenuje *neodvisna spremenljivka* ali *prediktor*, slučajna spremenljivka Y pa *odvisna spremenljivka*. Vrednosti spremenljivke X lahko raziskovalec izbere, oziroma vnaprej fiksira ali kontrolira.

Ocenjevanje parametrov a in b. Naj bodo podatki zbrani v parih $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, kjer sta $(X_1, X_2, \dots X_n)$ in $(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ vzorca vrednosti slučajnih spremenljivk X in Y. Če je zveza med spremenljivkama Y in X linearna, potem lahko slučajno spremenljivko Y_i, $i = 1, 2, \dots n$ zapišemo kot

$$Y_i = E(Y_i) + e_i = a + bX_i + e_i,$$

kjer sta parametra a in b neznana in predstavljata odsek in naklon premice, e_i pa predstavlja naključno napako, ki ni odvisna od X.
Parametra a in b ocenjujemo z metodo najmanjših kvadratov.

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X},$$

$$\hat{b} = r_{X,Y}\frac{S_Y}{S_X},$$

kjer sta $S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ in $S_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$ popravljena vzorčna standardna odklona. Dobili smo enačbo $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}$ vzorčne linearne regresijske premice z najboljšim prileganjem podatkom.
Za določeno vrednost $X = x^*$ najdemo *predvideno vrednost* $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}x^*$.
Vrednosti $\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ se imenujejo *ostanki* (reziduali).

Predpostavke linearnega regresijskega modela

a. Med spremenljivkama X in Y obstaja linearna zveza,

$$Y_i = a + bX_i + e_i,\ \ i = 1, 2, \dots, n,\ \text{ oziroma}, E(Y_i) = a + bX_i,$$

b. Napake $e_1, e_2, \dots, e_n$ so neodvisne,
c. Napake $e_1, e_2, \dots, e_n$ imajo konstantno varianco (homogenost variance),
d. Napake so normalno porazdeljene, $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$.

Naloga 344. vaje

Pri 10 ženskah je merjena višina (v centimetrih) pri 2 letih starosti (X) in višina (v centimetrih) pri 20 letih starosti (Y).

x	79.5	80.5	82.5	85.1	87.4	89.4	90.9	83.1	85.3	88.4
y	154.2	154.9	160.3	163.1	167.4	173.2	171.7	158.2	164.8	169.7

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.

Naloga 345.

V naslednji tabeli sta prikazana kadilski staž (v letih) in kapaciteta pljuč (v litrih) 10 slučajno izbranih kadilcev, starih 30 let.

kadilski staž	1	3	6	4	10	3	15	10	8	10
kapaciteta pljuč	4.9	5.3	4.4	5.1	4.1	4.8	4.0	4.2	4.2	4.1

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.

c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.

NALOGA 346.

Zanima nas, ali obstaja linearna zveza med številom ur, uporabljenih za pripravo na izpit in številom točk na izpitu iz statistike. Izbrali smo slučajni vzorec 10 študentov in v naslednji tabeli predstavili podatke.

število ur	12	31	22	7	11	25	16	26	17	14
število točk	45	70	88	25	42	85	51	80	60	53

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
d. Kolikšno je napovedano število točk na izpitu za študenta, ki se je pripravljal 24 ur?

NALOGA 347. VAJE

V naslednji tabeli sta prikazana razdalja (v kilometrih) in potreben čas potovanja (v urah) avtobusa od avtobusne postaje do 10 slučajno izbranih mest.

razdalja	200	120	175	150	300	320	240	180	210	260
čas potovanja	3.2	2.0	3.0	2.0	4.7	5.5	3.8	2.8	3.4	4.5

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
d. Kolikšen je napovedan čas potovanja do mesta, oddaljenega 250 km od avtobusne postaje?

NALOGA 348. VAJE

Banka želi uvesti za svoje tajnice nov pisarniški program za urejanje besedil. Vodstvo je zanimal odnos števila ur treninga in potrebnega števila ur, da se naredi določeni projekt. Izbrali so 8 tajnic približno istih sposobnosti. Dobljeni podatki so predstavljeni v naslednji tabeli.

št. ur treninga	22	18	30	16	25	20	10	14
št. ur za projekt	18.4	19.2	14.5	19	16.6	17.7	24.4	21

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
d. Kolikšno je napovedano število ur za dokončanje projekta pri 15 urah treninga?

NALOGA 349.

Agencijo za prodajo nepremičnin zanima, kakšna je zveza med površino hiš s tremi spalnicami v določeni soseski in njihovo prodajno ceno. Zbrali so podatke o površini v kvadratnih metrih in prodajno ceno v tisočih dolarjev za 7 hiš.

površina	214	167	242	279	222	214	251
prodajna cena	240	210	254	280	248	230	260

a. Nariši dobljene podatke na razsevnem diagramu.
b. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
c. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
d. Kolikšna je napovedana prodajna cena za hišo površine 200 kvadratnih metrov?

Testiranje linearne zveze med spremenljivkama Testiramo ničelno domnevo $H_0 : b = 0$ proti alternativni domnevi $H_1 : b \neq 0$. Testna statistika je

$$T = \frac{\hat{b}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}S_X}},$$

kjer je $S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2$ ocena variance naključnih napak-
Testna statistika ima Studentovo porazdelitev z $n-2$ prostostnimi stopnjami. Ničelno domnevo zavrnemo, če je

$$|T| \geq t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}},$$

kjer je $t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantil Studentove porazdelitve.

Naloga 350. vaje

V naslednji tabeli so predstavljene meritve temperature (v stopinjah Celzija) in velikosti razpoke (v milimetrih) vzorca 6 eksperimentalnih ploščic

temperatura	-1.5	-1	-0.5	0	1	2
velikost razpoke	0.2	0.4	0.5	0.8	1	1.3

a. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
b. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne regresijske premice.
c. Testiraj validnost linearnega regresijskega modela, pri stopnji značilnosti. $\alpha = 0.05$.

Naloga 351. vaje

Splošno mnenje je, da večji kot je pri osebi nivo alkohola v krvi, počasnejši je njen čas reakcije. Da bi testirali, ali v resnici obstaja takšna zveza, so 7 prostovoljcem dali različne količine alkohola. Nivo alkohola v krvi je izmerjen kod odtisoček njihove telesne teže. Potem so testirali njihov čas reakcije v milisekundah na določeni stimulus. Dobljeni so naslednji podatki.

nivo alkohola	0.8	1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8
čas reakcije	320	380	440	420	470	510	630

a. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
b. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
c. Testiraj validnost linearnega regresijskega modela, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.

Naloga 352.

V naslednji tabeli so prikazane meritve deleža najlona in lomne trdnosti vrvi (v kilogramih).

delež najlona	0	10	20	20	30	40	50	50
lomna trdnost	73	109	148	154	179	204	232	236

a. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
b. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
c. Testiraj validnost linearnega regresijskega modela, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.

Naloga 353.

V naslednji tabeli so prikazane meritve indeksa telesne mase (BMI) in sistoličnega krvnega tlaka 8 slučajno izbranih moških, ki ne jemljejo zdravil za krvni tlak.

BMI	20.3	22.0	26.4	28.2	31	32.6	17.6	19.4
krvni tlak	116	110	131	136	144	138	122	115

a. Izračunaj Pearsonov koeficient korelacije.
b. Izračunaj oceni a in b in določi enačbo vzorčne linearne regresijske premice.
c. Testiraj validnost linearnega regresijskega modela, pri stopnji značilnosti. $\alpha = 0.05$.

Del 3

Rezultati in rešitve

Rezultati

1. Kombinatorika

Rezultati naloge 1. ⇧

a. 900, b. 450, c. 400, d. 9, e. 648, f. 90.

Sporoči napako

Rezultati naloge 2. ⇧

48

Sporoči napako

Rezultati naloge 3. ⇧

23

Sporoči napako

Rezultati naloge 4. ⇧

10

Sporoči napako

Rezultati naloge 5. ⇧

a. 81, b. 27, c. 500, d. 480, e. 1250.

Sporoči napako

Rezultati naloge 6. ⇧

120, 24, 120.

Sporoči napako

Rezultati naloge 7. ⇧

$2(n-1)!$

Sporoči napako

Rezultati naloge 8. ⇧

a. 96, b. 48.

Sporoči napako

Rezultati naloge 9.

a 362880, b. 288, c. 1728, d. 1260.

Sporoči napako

Rezultati naloge 10.

a. 5040, b. 35, c. 144, d. 288.

Sporoči napako

Rezultati naloge 11.

a. 3, b. 180, c. 453600, d. 210.

Sporoči napako

Rezultati naloge 12.

a. 384, b. 39936, c. 1152, d. 48.

Sporoči napako

Rezultati naloge 13.

3060

Sporoči napako

Rezultati naloge 14.

	vračamo	ne vračamo
pomemben	25	20
ni pomemben	15	10

Sporoči napako

Rezultati naloge 15.

a. 80, b. 194.

Sporoči napako

Rezultati naloge 16.

a. $\binom{r+c}{r}$, b.$\binom{c+1}{r}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 17.

a. 45, b. 28, c. 120, d. 36, e. 8.

Sporoči napako

Rezultati naloge 18.

1940

Sporoči napako

Rezultati naloge 19.

11

Sporoči napako

Rezultati naloge 20.

a. 462, b. 210, c. 378.

Sporoči napako

Rezultati naloge 21.

a. 216, b. 75, c. 91

Sporoči napako

Rezultati naloge 22.

a. 286, b. 165, c. 110, d. 80, e. 276.

Sporoči napako

Rezultati naloge 23.

a. 1663200, b. 151200, c. 12600.

Sporoči napako

Rezultati naloge 24.

a. 720, b. 120, c. 15120

Sporoči napako

Rezultati naloge 25.

a. 120, b. 12, c. $n!(n-1)!$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 26.

0, 1, 2, 9, 44, 265

Sporoči napako

Rezultati naloge 27.

10626

Sporoči napako

Rezultati naloge 28.

41186376

Sporoči napako

Rezultati naloge 29.

a. $\binom{b+s-1}{b} \cdot \binom{r+s-1}{r} \cdot \binom{c+s-1}{c}$, b. $\binom{s}{b} \cdot \binom{s-b}{r} \cdot \binom{s-b-r}{c}$

Sporoči napako

2. Verjetnost

Rezultati naloge 30.

a. $\frac{1}{6} = 0.1667$, b. $\frac{5}{36} = 0.1389$, c. $\frac{1}{12} = 0.0833$

Sporoči napako

Rezultati naloge 31.

a. $\frac{5}{24} = 0.2083$, b. $\frac{3}{11} = 0.2727$

Sporoči napako

Rezultati naloge 32.

$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A) < P(B)$

Sporoči napako

Rezultati naloge 33.

a. $P(A) = \frac{5}{14} = 0.3571$, $P(B) = \frac{15}{28} = 0.5357$, b. $P(A) = \frac{25}{64} = 0.3906$, $P(B) = \frac{15}{32} = 0.4688$

Sporoči napako

Rezultati naloge 34.

$\frac{28}{65} = 0.4308$

Sporoči napako

Rezultati naloge 35.

a. $\frac{1}{2} = 0.5$, b. $\frac{13}{32} = 0.4063$, c. $\frac{1}{2} = 0.5$

Sporoči napako

Rezultati naloge 36.

$\frac{1}{15380937}, \frac{224}{15380937}, \frac{10416}{15380937}, \frac{173600}{15380937}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 37.

$\frac{4651}{7776} = 0.5981$

Sporoči napako

Rezultati naloge 38.

$\frac{91}{216}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 39.

a. $P(A) = \frac{1}{1240} = 0.0008$, b. $P(B) = \frac{168}{1240} = 0.1355$, c. $P(C) = \frac{280}{1240} = 0.2258$, d. $P(D) = \frac{421}{1240} = 0.3395$

Sporoči napako

Rezultati naloge 40.

$\frac{3839}{4485} = 0.8560$

Sporoči napako

Rezultati naloge 41.

a. $\frac{1}{20} = 0.05$, b. $\frac{237221}{1661670} \doteq 0.1428$,

Sporoči napako

Rezultati naloge 42.

$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 43.

a. $\frac{5}{8} = 0.6250$, b. $\frac{19}{30} = 0.6333$

Sporoči napako

Rezultati naloge 44.

a. $\frac{2}{5} = 0.4$, b. $\frac{9}{10} = 0.9$

Sporoči napako

Rezultati naloge 45.

a. $\frac{3}{4} = 0.75$, b. $\frac{17}{32} = 0.5313$

Sporoči napako

Rezultati naloge 46.

$\frac{11}{36} = 0.3056$

Sporoči napako

Rezultati naloge 47.

$\frac{1}{4} = 0.25$

Sporoči napako

Rezultati naloge 48.

a. $\frac{1}{2} = 0.5$, b. $\frac{3}{4} = 0.75$

Sporoči napako

Rezultati naloge 49.

a. $\frac{5}{28} = 0.1786$, b. $\frac{1}{35} = 0.0286$

Sporoči napako

Rezultati naloge 50.

$\frac{13}{30} = 0.4333$

Sporoči napako

Rezultati naloge 51.

$\frac{19}{45} = 0.4222$

Sporoči napako

Rezultati naloge 52.

$\frac{10}{23} = 0.4348$

Sporoči napako

Rezultati naloge 53.

a. $\frac{83}{1000} = 0.083$, b. $\frac{1}{2} = 0.5$, c. $\frac{409}{500} = 0.818$

Sporoči napako

Rezultati naloge 54.

$\frac{367}{500} = 0.734$

Sporoči napako

Rezultati naloge 55.

a. ne, b. da

Sporoči napako

Rezultati naloge 56.

a. da, b. ne

Sporoči napako

Rezultati naloge 57.

a. da, b. da, c. da, d. ne

Sporoči napako

3. Pogojna verjetnost

Rezultati naloge 58.

$P(A \mid B) = \frac{1}{5}, P(B \mid A) = \frac{1}{6}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 59.

a. $P(A \mid L) = \frac{1}{3}, P(B \mid L) = 0$, b. $P(A \mid L) = \frac{1}{4}, P(B \mid L) = 0$

Sporoči napako

Rezultati naloge 60.

$\frac{1}{2} = 0.5$

Sporoči napako

Rezultati naloge 61.

a. $\frac{19}{66} = 0.2879$, b. $\frac{47}{66} = 0.7121$, c. $\frac{2}{11} = 0.1818$, d. $\frac{3}{19} = 0.1579$

Sporoči napako

Rezultati naloge 62.

$\frac{34}{55} = 0.6182$

Sporoči napako

Rezultati naloge 63.

$\frac{97}{117} = 0.8291$

Sporoči napako

Rezultati naloge 64.

a. $\frac{19}{25} = 0.76$, b. $\frac{9}{19} = 0.4737$

Sporoči napako

Rezultati naloge 65.

$\frac{19}{30} = 0.6333$

Sporoči napako

Rezultati naloge 66.

a. $\frac{41}{120} = 0.3417$, b. $\frac{28}{41} = 0.6829$

Sporoči napako

Rezultati naloge 67.

0.288

Sporoči napako

Rezultati naloge 68.

0.7737

Sporoči napako

Rezultati naloge 69.

0.4397

Sporoči napako

Rezultati naloge 70.

a. 0.6644, b. 0.5025, c. 0.6645 d. 0.9898

Sporoči napako

Rezultati naloge 71.

0.9333

Sporoči napako

Rezultati naloge 72.

0.7127

Sporoči napako

Rezultati naloge 73.

$\frac{5}{24} = 0.2083$

Sporoči napako

Rezultati naloge 74.

$\frac{10}{21} = 0.4762$

Sporoči napako

Rezultati naloge 75.

a. $\frac{17}{35} = 0.4857$, b. $\frac{10}{17} = 0.5882$

Sporoči napako

Rezultati naloge 76.

a. $\frac{27}{140} = 0.1929$, b. $\frac{109}{140} = 0.7786$, c. $\frac{6}{7} = 0.8571$, d. $\frac{60}{109} = 0.5505$

Sporoči napako

Rezultati naloge 77.

$\frac{1}{8} = 0.125$

Sporoči napako

Rezultati naloge 78.

a. 0.9843, b. 0.7457.

Sporoči napako

Rezultati naloge 79.

a. $\frac{10}{21} = 0.4762$, b. $\frac{95}{378} = 0.2513$, c. $\frac{6}{19} = 0.3158$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 80.

Vržemo pošten kovanec. Če pade cifra, vržemo eno kocko, če pade grb pa dve kocki. a. $\frac{2}{3} = 0.6667$, b. $\frac{1}{6} = 0.1667$, c. $\frac{5}{12} = 0.4167$, d. $\frac{4}{5} = 0.8$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 81.

a. $\frac{5}{11} = 0.4545$, b. $\frac{30}{91} = 0.3297$, c. $\frac{5}{36} = 0.1389$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 82.

$\frac{3}{4} = 0.75$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 83.

0.8710

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 84.

a. 0.0098, b. 0.0197, c. 0.4975

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 85.

a. $\frac{37}{70} = 0.5286$, b. $\frac{20}{37} = 0.5405$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 86.

a. $\frac{1}{25} = 0.04$, b. $\frac{16}{125} = 0.128$, c. $\frac{1}{4} = 0.25$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 87.

a. $\frac{8}{14} = 0.5714$, b. $\frac{129}{637} = 0.2025$, c. $\frac{28}{43} = 0.6512$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 88.

a. 0.118, b. 0.018, c. 0.847

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 89.

a. $\frac{29}{57} = 0.5088$, b. $\frac{2}{3} = 0.6667$, c. $\frac{3}{14} = 0.2143$

Sporoči napako

Rezultati naloge 90.

a. 0.28, b. 0.25

Sporoči napako

Rezultati naloge 91.

a. 0.2016, b. 0.1407

Sporoči napako

Rezultati naloge 92.

a. $\frac{133}{200} = 0.6650$, b. $\frac{22}{67} = 0.3284$

Sporoči napako

Rezultati naloge 93.

a. $\frac{873}{1250} = 0.6984$, b. $\frac{41}{97} = 0.4227$

Sporoči napako

Rezultati naloge 94.

a. 0.226, b. 0.006, c. 0.8584

Sporoči napako

Rezultati naloge 95.

a. 0.2275, b. 0.31, c. 0.7339

Sporoči napako

Rezultati naloge 96.

$\frac{2}{3} = 0.6667$

Sporoči napako

Rezultati naloge 97.

a. $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ in 0, b. $\frac{3}{8} = 0.375$

Sporoči napako

Rezultati naloge 98.

0.9898

Sporoči napako

Rezultati naloge 99.

$\frac{1}{5} = 0.2$

Sporoči napako

4. Diskretne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Rezultati naloge 101.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 102.

a. (1), b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$, c. $0.4, 0.6, 0.6$

Sporoči napako

Rezultati naloge 103.

$S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{3}{24} & \frac{3}{24} & \frac{4}{24} & \frac{4}{24} & \frac{3}{24} & \frac{3}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 104.

a. $c = \frac{1}{30}$, b. $P(X > 2) = \frac{25}{30}$, c. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{30}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{5}{30}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{14}{30}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 105.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{21} & \frac{10}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 106.

a. $X_1 \sim B(4, \frac{1}{2})$, $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$, b. $X_2 \sim G(\frac{1}{6})$, $X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \cdots \end{pmatrix}$, c. $X_3 \sim P(10, \frac{1}{6})$, $X_3 \sim \begin{pmatrix} 10 & 11 & \cdots \\ \frac{1}{6^{10}} & \frac{25}{6^{11}} & \cdots \end{pmatrix}$, d. $X_4 \sim H(4, 12, 7)$, $X_4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{9}{130} & \frac{21}{65} & \frac{27}{65} & \frac{9}{52} & \frac{1}{52} \end{pmatrix}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 107.

a. 0.0404, b. 0.3840, c. 0.1889

Sporoči napako

Rezultati naloge 108.

$X \sim P(2, \frac{1}{2})$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 109.

$P(X=k)=2\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 110.

$X \sim H(R, N-R, n)$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 111.

a. $P(X=0)=0.0388$, b. $P(X=3)=0.2428$, c. $P(X<3)=0.4049$, d. $P(X>2)=0.5951$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 112.

$X \sim B(20, 5/12), P(X \leq 5)=0.0972$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 113.

$P(X=3)=0.034$, $P(X=0)=0.434$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 114.

a. $X \sim G(0.05)$, $P(X \leq 10)=0.401$ ali $X \sim B(10, 0.05)$, $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=0.401$
b. $X \sim G(0.05)$, $P(X \geq k)=0.9$ in izbrati moramo vsaj 45 čipov.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 115.

a. $X \sim G(0.8)$, $P(X=10)=4.096 \cdot 10^{-7}$, b. $P(X>5)=0.00032$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 116.

$X \sim P(5, 0.2), P(X \geq 10)=0.9804$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 117.

$X \sim P(5, 0.85), P(X=7)=0.1498$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 118.

a. $X \sim H(26, 26, 5)$, $P(X=3)=0.325$, b. $X \sim H(12, 40, 5)$, $P(X=2)=0.251$, c. $X \sim H(13, 39, 5)$, $P(X=4)=0.011$

Sporoči napako

Rezultati naloge 119.

$X \sim H(240, 560, 10)$, a. $P(X=1)=0.1201$, b. $P(X\geq 2)=1-P(X\leq 1)=0.8524$

Sporoči napako

Rezultati naloge 120.

a. $\lambda=3$, b. $P(X\geq 2)=0.801$ c. $X\sim P(1), P(X=0)=0.368$

Sporoči napako

Rezultati naloge 121.

a. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{15}{48} & \frac{23}{48} & \frac{9}{48} & \frac{1}{48} \end{pmatrix}$, b. $P(X\geq 2)=\frac{10}{48}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 122.

$X\sim G(\frac{1}{6})$, a. $P(X<4)=0.4213$, b. $P(X\geq 6)=0.4019$, c. vsaj 26.

Sporoči napako

Rezultati naloge 123.

Privzeti je treba, da je število nesreč na dan porazdeljeno po Poissonu.
a. $X\sim P(7)$, $P(X<3)=0.0296$, b. $P(X\geq 10)=0.1695$

Sporoči napako

Rezultati naloge 124.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{15}{20} & \frac{5\cdot 15}{20\cdot 19} & \frac{5\cdot 4\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15} \end{pmatrix}$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 125.

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 126.

Predpostaviti je treba, da je število zagod na uro porazdeljeno po Poissonu.
a. $X_{1h} \sim P(2)$, $P(X_{1h}=0)=0.1353$, b. $X_{2h}\sim P(4)$, $P(X_{2h}=0)=0.0183$, c. $X_{1.5h}\sim P(3)$, $P(X_{1.5h}>1)=0.8009$

Sporoči napako

Rezultati naloge 127.

Predpostaviti je treba, da je število potnikov na minuto porazdeljeno po Poissonu.
a. $X\sim P(6)$, $P(X=0)=0.0025$, b.$X\sim P(6)$, $P(X\geq 3)=0.9380$

Sporoči napako

Rezultati naloge 128.

a. $X \sim P(\lambda)$, kjer je $\lambda = \frac{L-1604}{100} \cdot 5$ in L leto, v katerem smo, $P(X=0) = e^{-\lambda}$, b. $X \sim P(1.5)$, $P(X>0) = 0.7769$

Sporoči napako

Rezultati naloge 129.

a. $X \sim P(0.5)$, $P(X>0) = 0.393$, b. $X \sim P(1.5)$, $P(X=2) = 0.251$

Sporoči napako

Rezultati naloge 130.

a. $X \sim B(10, p)$, $p > 1 - 0.1^{0.1} = 0.206$, b. $X \sim H(k, 6-k, 2)$, $k = 3$

Sporoči napako

Rezultati naloge 131.

a. $S \sim B(5, \frac{1}{6})$, b. 0.566, c. 0.0355, d. 0.0906

Sporoči napako

Rezultati naloge 132.

a. 0.5794, b. 0.493

Sporoči napako

Rezultati naloge 133.

a. $X \sim P(1), P(X \geq 3) = 0.080$, b. $X \sim P(\frac{1}{5}), P(X=0) = 0.819$

Sporoči napako

5. Zvezne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Rezultati naloge 134.

a. 6, b. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & x \in (0,1], \\ 1, & 1 < x, \end{cases}$ c. $\frac{5}{32}$, d. $\frac{27}{32}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 135.

$\frac{13}{24} = 0.5417$

Sporoči napako

Rezultati naloge 136.

$c = \frac{3}{4}$, $P(|X| > \frac{1}{2}) = 0.3125$

Sporoči napako

Rezultati naloge 137.

a. $\frac{1}{2}$, b. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-\cos x}{2}, & x \in [0, \pi], \\ 1 & x > \pi, \end{cases}$ c. 0.1464

Sporoči napako

Rezultati naloge 138.

a. $c = 1$, b. $\frac{3}{4}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 139.

$c = 1$, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{2} & x \in (0, \sqrt{2}], \\ 1, & \sqrt{2} < x, \end{cases}$ $P(X > 1) = 0.5$

Sporoči napako

Rezultati naloge 140.

a. $c = 1$, b. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x - \frac{x^2}{4} & x \in [0, 2], \\ 1 & x > 2, \end{cases}$ c. $\frac{1}{2}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 141.

a. 0.3, b. $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}, & x \in [250, 1250], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 142.

a. $\frac{1}{2}$, b. $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases}$ c. $\frac{1}{2}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 143.

a. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x - x^2, & x \in (0, 1], \\ 1, & 1 < x, \end{cases}$ b. $p_X(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$ c. $\frac{3}{4}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 144.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & x \in [0,15], \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{15}, & x \in [0,15], \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 145.

a. $e^{-1} = 0.3679$, b. $e^{-1} = 0.3679$, c. $X \sim P(20)$, d. $T \sim \text{Exp}(\frac{20}{12})$, $P(T > 1) = 0.1889$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 146.

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{100}, & x \in [0,10], \\ 1, & 10 < x, \end{cases} \quad p_M(x) = \begin{cases} \frac{x}{50}, & x \in [0,10], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 147.

a. $Z_X = [0,10]$ $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{10}, & x \in [0,10], \\ 1, & 10 < x, \end{cases}$ $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in [0,10], \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$ b. $P(X<5)=0.5$, c. $P(X>7)=0.3$

Sporoči napako

Rezultati naloge 148.

a. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 10x, & x \in [0,0.1], \\ 1, & 0.1 < x, \end{cases}$ b. $P(X>0.05)=0.5$

Sporoči napako

Rezultati naloge 149.

a. $X \sim \text{Exp}(\frac{15}{60})$, b. 0.3935, c. 1.15 minute, d. 0.7364

Sporoči napako

Rezultati naloge 150.

a. $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{15})$, $P(X>10)=0.513$, b. $P(X<t)=0.2$, $t=3.35$, c. $P(15<X<20)=0.1043$

Sporoči napako

Rezultati naloge 151.

$X \sim \text{Exp}(\frac{1}{25})$, $P(X>30)=0.301$

Sporoči napako

6. Sredine

Rezultati naloge 152.

$$S \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{3}{24} & \frac{3}{24} & \frac{4}{24} & \frac{4}{24} & \frac{3}{24} & \frac{3}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}, \; E(S) = 5.5$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 153.

$E(X) = \frac{285}{45}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 154.

$\frac{1}{3}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 155.

$E(\cos(X)) = -\frac{1}{3}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 156.

$E(X) = 0$, $E(\cos(X)) = \frac{2}{\pi}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 157.

a. $\frac{2344}{3125}$, b. $\frac{39}{125}, \frac{291}{625}, \frac{549}{625}, \frac{2567}{3125}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 158.

$E(X) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{6}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 159.

$8(1-\left(\frac{7}{8}\right)^n)$

Sporoči napako

Rezultati naloge 160.

$X \sim G(\frac{5}{36})$, $E(X) = \frac{36}{5}$, $Y \sim G(\frac{1}{6})$, $E(Y) = 6$

Sporoči napako

Rezultati naloge 161.

a. 6, b. $P(X < 6) = 0.5981$, c. $P(X \geq 12) = 0.1346$

Sporoči napako

Rezultati naloge 162.

a. $T \sim \mathrm{Exp}(0.2)$, b. e^{-1}, c. e^{-1}, d. 6

Sporoči napako

Rezultati naloge 163.

$X \sim \begin{pmatrix} a-4 & a \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $a = 3$

Sporoči napako

Rezultati naloge 164.

$X \sim B(4, \frac{1}{2})$, $E(X) = 2$

Sporoči napako

Rezultati naloge 165.

$X \sim H(4, 8, 3)$, $E(X) = 1$

Sporoči napako

Rezultati naloge 166.

a. $X \sim H(10, 15, 3)$, $P(X > 1) = 0.346$, b. $E(X) = 1.2$, c. 0.75

Sporoči napako

Rezultati naloge 167.

a. $X \sim H(2, 8, 5)$, b. $E(X) = 1$, c. 0.222

Sporoči napako

Rezultati naloge 168.

a. $X \sim G(\frac{7}{12})$, b. 0.8264, c. $\frac{12}{7}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 169.

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$, b. $E(X) = 7$, c. $\frac{1}{6}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 170.

a. $X \sim G(\frac{1}{3})$, b. 0.1317, c. 3

Sporoči napako

Rezultati naloge 171.

a. $X \sim H(5, 10, 2)$, b. $E(X) = \frac{2}{3}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 172.

$X \sim \mathrm{H}(500, 750, 20),\ E(X) = 8$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 173.

$X \sim \mathrm{B}(20, \frac{5}{12}),\ E(X) = 8.33$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 174.

$X \sim B(100, 0.008),\ E(X) = 0.8$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 175.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{15}{20} & \frac{5\cdot 15}{20\cdot 19} & \frac{5\cdot 4\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16} & \frac{5!\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15} \end{pmatrix},\ E(X) = 1.3125$$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 176.

$$D \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 10 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},\ E(D) = 4$$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 177.

$\frac{3}{10}$ srečk z dobitkom 1 evro in $\frac{1}{30}$ z dobitkom 6 evrov

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 178.

a. $E(\text{dobiček}) = -\frac{1}{3} \neq 0$, b. $a = 0, b = \frac{1}{2}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 179.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \frac{196}{216} & \frac{1}{216} & \frac{1}{216} & \frac{2}{216} & \frac{3}{216} & \frac{3}{216} & \frac{3}{216} & \frac{3}{216} & \frac{2}{216} & \frac{1}{216} & \frac{1}{216} \end{pmatrix},\ E(X) = \frac{35}{36},\ Y = X - v,\ E(Y) =$$
$\frac{35}{36} - v = -\frac{1}{3}$, $v = \frac{35}{36}$ oz. $v = \frac{47}{36}$ evrov

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 180.

a. $X \sim \mathrm{G}\left(\sum_{i=5}^{8} \binom{8}{i} \frac{1}{3}^{i} \frac{2}{3}^{8-i}\right) = \mathrm{G}(\frac{577}{6561})$, $E(X) \doteq 11.4$, b. $P(X \leq 11) = 0.637$, c. $P(X \geq 23) = 0.132$

Sporoči napako

Rezultati naloge 181.

$$X \sim \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \frac{16}{81} & \frac{32}{81} & \frac{24}{81} & \frac{8}{81} & \frac{1}{81} \end{pmatrix},\ E(X) = \frac{49}{3}.$$

Sporoči napako

Rezultati naloge 182.

a. 12 minut, b. $0.021\text{h} \approx 1.26\text{min} \approx 1\text{min } 16\text{s}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 183.

a. $\frac{1}{55}$, b. $\frac{3}{11} = 0.273$, c. 7, d. 6, $\sqrt{6}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 184.

a. 8.1, 5.69, b. 34.4, 91.04

Sporoči napako

Rezultati naloge 185.

$\frac{5}{27}$, $\frac{13}{1458}$, $\frac{\sqrt{13}}{27\sqrt{2}}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 186.

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{6}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 187.

2, 1

Sporoči napako

Rezultati naloge 188.

1.4, 1.84, 1.36

Sporoči napako

Rezultati naloge 189.

64, 215

Sporoči napako

Rezultati naloge 190.

$\binom{n}{2}\frac{5}{36}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 191.

$\frac{48}{15}$, $\frac{142}{75}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 192.

$\frac{4}{\pi}$, $2-\frac{16}{\pi^2}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 193.

$E(R)=\frac{1}{3}$, $\sigma(R)=\frac{\sqrt{2}}{6}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 194.

(a) $4; 1.8$ (b) $2.1; 0.89$ (c) $14; 28.8$ (d) $-1.7; 15.21$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 195.

a. $P(X>950)=0.3$ b. $\begin{cases} \frac{1}{1000}, & x\in[250,1250] \\ 0 & x\notin[250,1250] \end{cases}$, c. $E(X)=\int_{250}^{1250} x\frac{1}{1000}\mathrm{d}x=750$, $\frac{750}{50}=15$, d. 83333, 289

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 196.

$\frac{3}{4}$, 0.3125, 0, 0.2

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 197.

2.6, 6.84

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 198.

-1.72, 15.6.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 199.

10.6, 27.8.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 200.

a. $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & x\in[0,r] \\ 1, & x>r \end{cases}$, $p_X(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0,r] \\ \frac{2x}{r^2}, & x\in[0,r] \end{cases}$, b. $\frac{10}{3}r$, $\frac{50}{9}r^2$

Sporoči napako

Rezultati naloge 201.

3.67, −0.75, 1.89, 7.19

Sporoči napako

Rezultati naloge 202.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{36} & \frac{10}{36} & \frac{13}{36} & \frac{10}{36} \end{pmatrix}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{31}{36}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 203.

$\frac{4}{3}$, $\frac{2}{9}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 204.

$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \in [0, \sqrt{2}] \\ 1, & \sqrt{2} < x \end{cases}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{9}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 205.

6, 40

Sporoči napako

Rezultati naloge 206.

a. $\frac{161}{36}$, $\frac{2555}{1296}$, b. $\frac{36}{11}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 207.

$F_X(t) = \frac{\pi t^2}{4}$, $p_X(t) = \frac{\pi t}{2}$, $E(Y) = \frac{2}{3}$, $D(Y) = \frac{1}{18}$

Sporoči napako

7. Slučajni vektorji in kovarianca

Rezultati naloge 208.

$c = \frac{1}{4}$. Ne, $P(X=1, Y=-1) = 0 \neq \frac{1}{3}\frac{1}{6} = P(X=1)P(Y=-1)$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 209.

a. $a = 0.24$, $b = 0.24$, $c = 0.12$, $d = 0.12$, $e = 0.06$, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$,

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.04 & 0.16 & 0.38 & 0.30 & 0.12 \end{pmatrix}$, c. 0.32.

Sporoči napako

Rezultati naloge 210.

a.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{20}$
1	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$
2	0	0	$\frac{1}{20}$

b. $X \sim H(4,12,2)$ in $Y \sim H(8,8,2)$.
c. ne, saj je $P(X=1,Y=0)=0$ in $P(X=1)P(Y=0)\neq 0$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 211.

a. $\frac{1}{10}$, b. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 11/30 & 8/15 & 1/10 \end{pmatrix}$. c. ne

Sporoči napako

Rezultati naloge 212.

a. $0 \leq a \leq \frac{-1+\sqrt{41}}{4} \doteq 1.351$, b. 0 ali $\frac{1}{2}$, c. 1.

Sporoči napako

Rezultati naloge 213.

a. $\frac{1}{2}$, b. $\frac{5}{32}$, c. $\frac{1}{2}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 214.

a. $\frac{1}{4}$, b. $\frac{1}{2}$, c. $\frac{1}{8}$, d. $\frac{3}{8}$

Sporoči napako

Rezultati naloge 215.

a. $\frac{1}{\pi}$, $p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1], \\ 0, & x\notin[-1,1]. \end{cases}$, $p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & y\in[-1,1], \\ 0, & y\notin[-1,1]. \end{cases}$, b. ne, c. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 216.

a.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{10}{165}$	$\frac{20}{165}$	$\frac{5}{165}$
1	$\frac{40}{165}$	$\frac{40}{165}$	$\frac{4}{165}$
2	$\frac{30}{165}$	$\frac{12}{165}$	0
3	$\frac{4}{165}$	0	0

, $X \sim \mathrm{H}(4,7,3)$, $Y \sim \mathrm{H}(2,9,3)$, b. ne, c. $\mathrm{H}(6,5,3)$, d. $\frac{119}{165} = 0.7212$,
e. $\frac{270}{165} = 1.6364$, $\frac{72}{165} = 0.4364$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 217.

a. .

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

, $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$, b. ne, c. $\frac{11}{18}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 218.

a.

$X\backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0
6	0	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

,

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36 \end{pmatrix},$$

b. $1 - P(X \leq 5) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$, c. $E(X) = \frac{161}{36}$, $E(X^2) = \frac{791}{36}$, $D(X) = \frac{2555}{1296}$, $E(Y) = \frac{252}{36}$, $E(Y^2) = \frac{1974}{36}$, $D(Y) = \frac{35}{6}$, $E(2X^2Y) = \frac{12768}{36}$, $E(XY) = \frac{1232}{36}$,

Sporoči napako

Rezultati naloge 219.

a. $a = -1$, b. $p = \frac{3}{8}, q = \frac{1}{4}$, c. ne.

Sporoči napako

Rezultati naloge 220.

a.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	36/120	27/120	3/120
1	27/120	18/120	3/120
2	3/120	3/120	0

, b. $E(W) = -\frac{1}{2}$, $E(W^2) = \frac{3}{5}$, $D(W) = \frac{7}{20}$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 221.

0.05, 1, 110.

Sporoči napako

Rezultati naloge 222.

a.

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$

, b. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, c. $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d. $\frac{5}{9}$, e. da, f. $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{35}{9}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 223.

a.

$Z\backslash W$	0	1	2	3	4	6
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{5}{18}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$

, b. ne, c. $\frac{8}{3}$, $\frac{5}{3}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 224.

a.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\binom{2}{0}\binom{2}{2}\binom{4}{2}/\binom{8}{4}=\frac{6}{70}$	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{3}/\binom{8}{4}=\frac{8}{70}$	$\binom{2}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{4}/\binom{8}{4}=\frac{1}{70}$
1	$\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{4}{1}/\binom{8}{4}=\frac{8}{70}$	$\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2}/\binom{8}{4}=\frac{24}{70}$	$\binom{2}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{3}/\binom{8}{4}=\frac{8}{70}$
2	$\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{4}{0}/\binom{8}{4}=\frac{1}{70}$	$\binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{1}/\binom{8}{4}=\frac{8}{70}$	$\binom{2}{2}\binom{2}{0}\binom{4}{2}/\binom{8}{4}=\frac{6}{70}$

,

$X \sim Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3/14 & 4/7 & 3/14 \end{pmatrix}$, b. ne, $P(X=0,Y=0)=\frac{6}{70} \neq \frac{3}{14}\frac{3}{14}=P(X=0)P(Y=0)$, c. 1, 1, $\frac{8}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 225.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = -0.93$, $r(X,Y) = -0.395$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 226.

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.08$, $r(X,Y) = 0.15$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 227.

$a = -1$ in $a = -2$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 228.

$\frac{19}{12}$

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 229.

11, 54.5

Sporoči napako

Rezultati naloge 230.

1

Sporoči napako

Rezultati naloge 231.

$-\frac{3}{4}$

Sporoči napako

8. Aproksimacija binomske porazdelitve

Rezultati naloge 233.

0.1146 (točno), 0.0888 (Poisson), 0.1152 (Laplace)

Sporoči napako

Rezultati naloge 234.

$p = 0.99$: 0.1257 (točno), 0.1251 (Poisson), 0.1268 (Laplace), $p = 0.98$: 0.0056 (točno), 0.0058 (Poisson), 0.0070 (Laplace)

Sporoči napako

Rezultati naloge 235.

a. 0.2229 (točno), 0.2231 (Poisson), 0.1538 (Laplace), b. 0.1911 (točno), 0.1912 (Poisson)

Sporoči napako

Rezultati naloge 236.

0.9922

Sporoči napako

Rezultati naloge 237.

0.2090

Sporoči napako

Rezultati naloge 238.

a. 0.0318 (Laplace), b. 0.33 (Laplace), c. 171 in 179, d. 196

Sporoči napako

Rezultati naloge 239.

1164 (uporabimo F(1.645) = 0.95)

Sporoči napako

Rezultati naloge 240.

12930 (uporabimo F(2.33) = 0.99), točen rezultat je $n = 12901$, $P(X \geq 0.59 \cdot 12900) = 0.98996$, $P((X \geq 0.59 \cdot 12901) = 0.99024$

Sporoči napako

Rezultati naloge 241.

0.849

Sporoči napako

Rezultati naloge 242.

a. 0.8315, b. 0.1387, c. 0.8665

Sporoči napako

Rezultati naloge 243.

0

Sporoči napako

Rezultati naloge 244.

a. $2^{-100} \approx 8 \cdot 10^{-31}$, b. $3 \cdot 10^{-7}$, c. 1, d. 47

Sporoči napako

9. Centralni limitni izrek

Rezultati naloge 245.

$X \sim N(40, 20)$, $P(X > 60) = 1 - \mathrm{F}(1) = 0.1587$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 246.

a. $X \sim N(56, 2)$, $P(X > 64) = 1 - \mathrm{F}(4) = 0$, b. $X < 52$ cm ali $X > 60$ cm.

Sporoči napako

Rezultati naloge 247.

a. 68.3%, b. $P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = 0.5$, $\delta = 0.67\sigma$, c. $\mu - \delta$ je prvi kvartil, $\mu + \delta$ pa tretji kvartil, d. $P(\mu - q \leq X \leq \mu + q) = 0.9$, $q = 1.645\sigma$. Interval $[\mu - q, \mu + q]$ določata 5. in 95. percentil.

Sporoči napako

Rezultati naloge 248.

a. $Y = X + 2 \sim N(2, 0.3)$, b. $P(|Y| < 3) = 0.9992$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 249.

a.$X \sim N(40, 25)$, $P(X < 14) = 1 - \mathrm{F}(1.04) = 0.1492$, b.$P(X > 77) = 1 - \mathrm{F}(1.48) = 0.0694$, c.$P(25 < X < 55) = \mathrm{F}(0.6) - \mathrm{F}(-0.6) = 2\,\mathrm{F}(0.6) - 1 = 0.4514$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 250.

a. $X \sim N(100, 0.5)$, $P(X \geq 99.2) = 0.9452$, b. $P(99.2 \leq X \leq 100.8) = 0.8904$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 251.

a. $X \sim N(10, 2)$, $P(X > 13) = 0.0668$, b. $P(9 < X < 11) = 0.383$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 252.

a. $X \sim N(115, 14)$, $P(X < 90) = 1 - \mathrm{F}(1.79) = 0.0367$, b. $P(X \geq a) = 0.05$, $a = 1.645 \cdot 14 + 115 \approx 138$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 253.

a. $X \sim N(65.7, 11.9)$, $P(X \geq 48) = 0.9319$, b. $P(60 < X < 70) = 0.325$, c. $P(X \geq a) = 0.05$, $a = 1.645 \cdot 11.9 + 65.7 \approx 85.3$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 254.

a. $X \sim N(266, 16)$, $P(X < 250) = 1 - \mathrm{F}(1) = 0.1587$, b. $P(241 < X < 286) = 0.835$, c. $P(X \geq a) = 0.02$, $a = \mathrm{F}^{-1}(0.98) \cdot 16 + 266 = 298.8 \approx 299$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 255.

a. X - višina žensk, $X \sim N(165, 7.5)$, Y - višina moških, $Y \sim N(178, 9.2)$, $P(X > 178) = 0.0418$, b. $P(Y < 165) = 0.0793$, c. $\frac{P(Y \geq 185)}{P(X \geq 185)} = 58.96$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 256.

X_i - teža i-tega jabolka, $X_i \sim N(180, 15)$, Y_i - teža i-te pomaranče, $Y_i \sim N(160, 12)$, $1 \leq i \leq 6$, $Z = \sum_{i=1}^{6}(X_i + Y_i) \sim N(2040, \sqrt{6(15^2 + 12^2)})$, $P(Z < 2000) = 0.1977$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 257.

X - dolžina vrvi z oznako 10 m, $X \sim N(10, 0.02)$, Y - dolžina vrvi z oznako 3 m, $Y \sim N(3, 0.01)$, $V = X + Y \sim N(13, \sqrt{0.0005})$, $P(V < 12.9) = \mathrm{F}(-4.47) = 0$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 258.

X_i - dolžina i-tega skoka, $X_i \sim N(3.5, 0.5)$, $1 \leq i \leq 500$, $S = \sum_{i=1}^{500} X_i \sim N(1750, 5\sqrt{5})$, $P(1760 \leq S \leq 1764) = 0.0811$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 259.

$S \sim N(200, 10)$, $P(170 \leq S \leq 210) = \mathrm{F}\left(\frac{210.5-200}{10}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{169.5-200}{10}\right) = 0.852$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 260.

$S = X_1 + \ldots + X_{100} \sim N(40, 8)$, $P(S > 50) = 0.0951$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 261.

a. $E(X_i) = \frac{7}{2}$, $D(X_i) = \frac{35}{12}$, b. $S \sim N\left(350, 5\sqrt{\frac{35}{3}}\right)$, c. $P(S < 320 \text{ ali } S > 370) = 1 - P(320 \leq S \leq 370) = 0.1518$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 262.

a. $X \sim P(80, 0.2)$, $E(X) = 400$. b. Aproksimacija Pascalove porazdelitve števila potopov: 0.1038, aproksimacija binomske porazdelitve števila biserov: 0.1075.

Sporoči napako

Rezultati naloge 263.

a. X_i - indikator smrtnosti, $S = X_1 + X_2 + \ldots X_{200}$ število umrlih piščancev, $S \sim B(200, 0.05)$, $U = 5S$ - izguba, CLI: $U \sim N(50, 5\sqrt{9.5})$, $P(U < 30) = 0.0918$, b. $p = 0.04$, CLI: $U \sim N(40, 5\sqrt{7.68})$, $P(U < 30) = 0.2236$, c. CLI: $U \sim N(1000p, 50\sqrt{2p(1-p)})$, $P(U < 30) = 0.9$, $p = 0.018$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 264.

a. $S \sim B(10000, 0.4)$, $E(S) = 4000$, b. CLI: $S \sim N(4000, 20\sqrt{6})$, $P(S > 4100) = 0.0202$, c. $P(3900 \leq S \leq 4500) = 0.9798$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 265.

a. S_n - dobitek igralnice po n stavah, CLI: $S_n \sim N\left(\frac{n}{37}, \frac{6\sqrt{38n}}{37}\right)$, $P(S_{20} < 0) = 0.409$, $P(S_{10000} < 0) = 0.0034$, b. U_{20} - dobitek igralca po 20 stavah, $P\left(-\frac{20}{37} - a \leq U_{20} \leq -\frac{20}{37} + a\right) = 0.9$, $I = [-7.39, 6.31]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 266.

a. $E(S) = 5000$. b. $S \sim N(5000, 100\sqrt{6})$, $P(4500 \leq S \leq 5500) = 0.9586$, c. $P(S > 6000) \leq 0.95$, $n = 130$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 267.

a. S - število praznih sedežev, CLI: $S \sim N(8, \sqrt{7.68})$, $P(S \geq 5) = 0.8962$, b. Q_n - število potrebnih sedežev, CLI: $Q_n \sim N(0.96n, 0.08\sqrt{6n})$, $P(Q_n \leq 200) \geq 0.95$, $n = 204$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 268.

a. $E(Z_i) = 40$, $\sigma(Z_i) = 40\sqrt{51}$, $1 \leq i \leq n$, b. S - vsota stroškov, CLI: $S \sim N(400000, 4000\sqrt{51})$, $P(S \leq 450000) = 0.9599$, c. $P(S_n \leq 43n) \geq 0.95$, CLI: $S_n \sim N(40n, 40\sqrt{51n})$, $n = 24535$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 269.

a. $E(Z_i) = \frac{2}{3}x$, $\sigma(Z_i) = \frac{x}{3\sqrt{2}}$, $i = 1, \ldots, 100$, b. $S \sim N\left(\frac{200}{3}x, \frac{5\sqrt{2}}{3}x\right)$, c. $S \sim N\left(\frac{2800}{3}, \frac{70\sqrt{2}}{3}\right)$, $P(S > 1000) = 0.0217$, d. $P(S > 1000) = 0.99$, $x = 16.35$ milijonov.

Sporoči napako

Rezultati naloge 270.

$X \sim N(100, 10\sqrt{2})$, $P(90 < X < 110) = 0.5222$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 271.

X_i - dolžina zamude staršev, $X_i \sim Exp(1)$, $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$-vsota zamud v letu, CLI: $S \sim \mathcal{N}(600, 60)$, $P(S > 630) = 0.3085$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 272.

S - število pijanih voznikov, $S \sim B(10000, 0.05)$, CLI: $S \sim N(500, 5\sqrt{19})$, $P(S > 500) = 0.492$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 273.

X_i - čas med prihodoma $i-1$ in i-tega potnika, $X_i \sim Exp(1)$, $S = X_1 + X_2 + \ldots X_{30}$ - čas dokler se nabere 30 potnikov, CLI: $S \sim N(30, \sqrt{30})$, $P(S > 40) = 0.0336$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 274.

a. $\overline{X} \sim N\left(59.1, \frac{19.1}{\sqrt{80}}\right)$, b. $P(\overline{X} < 60) = 0.6628$, c. $P(50 < \overline{X} < 65) = 0.9971$, d. $P(59.1 - 3 \leq \overline{X} \leq 59.1 + 3) = 0.8384$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 275.

a. $E(\overline{X}) = 175$, $\sigma(\overline{X}) = 1$, b. $\overline{X} \sim N(175, 1)$, $P(173 < \overline{X} < 177) = 0.95$, $P(\overline{X} > 178) = 0.0015$, $P(\overline{X} < 170) = 0$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 276.

a. $X \sim N(40,4)$, $P(X \geq 35) = 0.8944$, b. $\overline{X} \sim N\left(40, \frac{4}{\sqrt{50}}\right)$, $P(38 < \overline{X} < 41) = 0.9614$, c. $P(40-2 \leq X \leq 40+2) = 0.383$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 277.

a. CLI: $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$, $P(\overline{X} < 0.5) = 0.9969$, b. CLI: $\overline{X} \sim N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $P(\overline{X} < 0.1) \geq 0.9$, $n = 167$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 278.

a. CLI: $\overline{X} \sim N(2.4, 0.02)$, b. $P(\overline{X} > 2.5) = 0$, c. $P(\overline{X} < 2.25) = 0$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 279.

a. CLI: $\overline{X} \sim N\left(100, \frac{10}{\sqrt{60}}\right)$, $P(\overline{X} < 97) = 0.0102$, b. $P(100-1 \leq \overline{X} \leq 100+1) = 0.5588$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 280.

a. $Y = 4X$ - obseg kvadrata, $Y \sim U(0,4)$, $E(Y) = 2$, $\sigma(Y) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, b. CLI: $\overline{Y} \sim N\left(2, \frac{1}{50\sqrt{3}}\right)$, $P(2-0.01 < \overline{Y} < 2+0.01) = 0.6158$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 281.

CLI: $\overline{X} \sim N(500, 6)$, $P(\overline{X} > 510) = 0.0475$.

Sporoči napako

10. Intervali zaupanja

REZULTATI NALOGE 282.

a. $\overline{x} = 97$, $I_\mu = [97-3.27,\ 97+3.27] = [93.73,\ 100.27]$ b. $d = 2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10$, $1-\alpha = 0.9974$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 283.

$\overline{x} = 19.3$, $I_\mu = [19.3-1.86,\ 19.3+1.86] = [17.44,\ 21.16]$.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 284.

$d = 2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.1$, $n = 10651$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 285.

$\epsilon = c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 50$, $c = 1.645$, $n = 22$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 286.

$I_\mu = \left[1350 - 1.96\frac{120}{\sqrt{100}},\ 1350 + 1.96\frac{120}{\sqrt{100}}\right] = [1350 - 23.52,\ 1350 + 23.52] = [1326.48,\ 1373.52].$

Sporoči napako

Rezultati naloge 287.

a. $\overline{x} = 0.5$, $s = 0.71$, b. $I_\mu = [0.5 - 0.45,\ 0.5 + 0.45] = [0.05,\ 0.95]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 288.

$I_\mu = \left[6 - 2.68\frac{5}{\sqrt{50}},\ 6 + 2.68\frac{5}{\sqrt{50}}\right] = [6 - 1.9,\ 6 + 1.9] = [4.1,\ 7.9].$

Sporoči napako

Rezultati naloge 289.

$I_\mu = \left[1.74 - 2.02\frac{0.7}{\sqrt{40}},\ 1.74 + 2.02\frac{0.7}{\sqrt{40}}\right] = [1.74 - 0.224,\ 1.74 + 0.224] = [1.516,\ 1.964].$

Sporoči napako

Rezultati naloge 290.

$I_\mu = \left[8.4 - 2.01\frac{5.1}{\sqrt{50}},\ 8.4 + 2.01\frac{5.1}{\sqrt{50}}\right] = [8.4 - 1.45,\ 8.4 + 1.45] = [6.95,\ 9.85].$

Sporoči napako

Rezultati naloge 291.

95% interval zaupanja: $I_\sigma = [0.53, 1.02]$, 99% interval zaupanja: $I_\sigma = [0.49, 1.17]$. Za višjo stopnjo zaupanja se dobi širši interval zaupanja.

Sporoči napako

Rezultati naloge 292.

$\overline{x} = 45.5$, $s = 3.71$, $I_\mu = [45.5 - 0.86,\ 45.5 + 0.86] = [44.64,\ 46.36]$, $I_\sigma = [3.27,\ 4.57]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 293.

$I_\mu = [1210 - 27.63,\ 1210 + 27.63] = [1182.37,\ 1237.63]$, $I_\sigma = [75.94,\ 117.73]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 294.

$I_\mu = [165 - 1.53,\ 165 + 1.53] = [163.47,\ 166.53]$, $I_\sigma = [3.71,\ 5.99]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 295.

$\hat{p} = 0.096, I_p = [0.096 - 0.026,\ 0.096 + 0.026] = [0.070,\ 0.122]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 296.

$\hat{p} = 0.63, I_p = [0.63 - 0.037,\ 0.63 + 0.037] = [0.593,\ 0.667]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 297.

$\hat{p} = 0.09, I_p = [0.09 - 0.033,\ 0.09 + 0.033] = [0.057,\ 0.123]$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 298.

$\epsilon = c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.02,\ n = 2401.$

Sporoči napako

11. Testiranje domnev

Rezultati naloge 299.

Testiramo $H_0 : \mu = 100$ proti $H_1 : \mu \neq 100$, vrednost testne statistike $z = -1.8$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$, kritično območje $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 300.

Testiramo $H_0 : \mu = 1.5$ proti $H_1 : \mu < 1.5$, vrednost testne statistike $z = -0.511$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.01) = -\mathrm{F}^{-1}(0.99) = -2.33$, kritično območje $K = (-\infty, -2.33]$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 301.

Testiramo $H_0 : \mu = 3.5$ proti $H_1 : \mu > 3.5$, vrednost testne statistike $z = 2.4$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$, kritično območje $K = [1.645, \infty)$. Ker $z \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 302.

Testiramo $H_0 : \mu = 175$ proti $H_1 : \mu \neq 175$, vrednost testne statistike $t = 0.042$, kritična vrednost $c = t_{8;0.975} = 2.31$, kritično območje $K = (-\infty, -2.31] \cup [2.31, \infty)$. Ker $t \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 303.

Testiramo $H_0 : \mu = 1600$ proti $H_1 : \mu > 1600$, vrednost testne statistike $t = 3.333$, kritična vrednost $c = t_{99;0.95} \approx t_{120;0.95} = 1.66$, kritično območje $K = [1.66, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 304.

Testiramo $H_0 : \mu = 700$ proti $H_1 : \mu < 700$, vrednost testne statistike $t = -4.685$, kritična vrednost $c = t_{29;0.05} = -t_{29;0.95} = -1.70$, kritično območje $K = (-\infty, -1.70]$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Sodnik se bo odločil, da je pekarna kriva za prodajo štruc kruha, ki so pod reklamirano težo.

Sporoči napako

Rezultati naloge 305.

Testiramo $H_0 : \mu = 99$ proti $H_1 : \mu \neq 99$, vrednost testne statistike $t = 1.488$, kritična vrednost $c = t_{29;0.995} = 2.76$, kritično območje $K = (-\infty, -2.76] \cup [2.76, \infty)$. Ker $t \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 306.

Testiramo $H_0 : \mu = 24$ proti $H_1 : \mu < 24$, vrednost testne statistike $t = -3.060$, kritična vrednost $c = t_{39;0.05} = -t_{39;0.95} = -1.68$, kritično območje $K = (-\infty, -1.68]$. Ker $t \in W$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 307.

Testiramo $H_0 : \mu = 210$ proti $H_1 : \mu > 210$, vrednost testne statistike $t = 3.929$, kritična vrednost $c = t_{11;0.99} = 2.72$, kritično območje $K = [2.72, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 308.

Testiramo $H_0 : \sigma = 5$ proti $H_1 : \sigma \neq 5$, vrednost testne statistike $\chi^2 = 20$, kritični vrednosti $c_1 = \chi^2_{9;0.025} = 2.70$ in $c_2 = \chi^2_{9;0.975} = 19$, kritično območje $K = (0, 2.7] \cup [19, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo.

Sporoči napako

Rezultati naloge 309.

Testiramo $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ proti $H_1 : \sigma^2 > 0.01$, vrednost testne statistike $\chi^2 = 29.07$, kritična vrednost $c = \chi^2_{19;0.95} = 30.1$, kritično območje $K = [30.1, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 310.

Testiramo $H_0 : \sigma = 1.5$ proti $H_1 : \sigma < 1.5$, vrednost testne statistike $\chi^2 = 15.36$, kritična vrednost $c = \chi^2_{24;0.05} = 13.8$, kritično območje $K = (0, 13.8]$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 311.

Testiramo $H_0 : \sigma = 2$ proti $H_1 : \sigma > 2$, vrednost testne statistike $\chi^2 = 28.1$, kritična vrednost $c = \chi^2_{9;0.99} = 21.7$, kritično območje $K = [21.7, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 312.

Testiramo $H_0 : p = 0.5$ proti $H_1 : p \neq 0.5$, vrednost testne statistike $z = -1.386$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.995) = 2.58$, kritično območje $K = (-\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 313.

Testiramo $H_0 : p = 0.04$ proti $H_1 : p > 0.04$, vrednost testne statistike $z = 0.274$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$, kritično območje $K = [1.645, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 314.

Testiramo $H_0 : p = 0.02$ proti $H_1 : p < 0.02$, vrednost testne statistike $z = -1.010$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.05) = -\mathrm{F}^{-1}(0.95) = -1.645$, kritično območje $K = (\infty, -1.645]$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 315.

Testiramo $H_0 : p = 0.6$ proti $H_1 : p > 0.6$, vrednost testne statistike $z = 2.488$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$, kritično območje $K = [1.645, \infty)$. Ker $z \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 316.

Dogodek A - generator je zgeneriral bit 1, testiramo $H_0 : p = 0.5$ proti $H_1 : p \neq 0.5$, vrednost testne statistike $z = 0.632$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.995) = 2.58$, kritično območje $K = (-\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 317.

Testiramo $H_0 : p = 0.5$ proti $H_1 : p > 0.5$, vrednost testne statistike $z = 1$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.99) = 2.33$, kritično območje $K = [2.33, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 318.

Testiramo $H_0 : p = 0.22$ proti $H_1 : p < 0.22$, vrednost testne statistike $z = -1.931$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.05) = -\mathrm{F}^{-1}(0.95) = -1.645$, kritično območje $K = (-\infty, -1.645]$. Ker $z \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 319.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 2.155$, kritični vrednosti $c_1 = F_{9,9;0.05} = 0.31$ in $c_2 = F_{9,9;0.95} = 3.18$, kritično območje $K = (0, 0.31] \cup [3.18, \infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Testiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, vrednost testne statistike $t = 3.091$, kritična vrednost $c = t_{18;0.975} = 2.10$, kritično območje $K = (-\infty, -2.10] \cup [2.10, \infty)$ Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 320.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 1.410$, kritični vrednosti $c_1 = F_{99,99;0.025} \approx F_{100,100;0.025} = 0.67$ in $c_2 = F_{99,99;0.975} =\approx F_{100,100;0.975} = 1.48$, kritično območje $K = (0, 0.67] \cup [1.48, \infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Testiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, vrednost testne statistike $t = 2.214$, kritična vrednost $c = t_{198;0.95} =\approx t_{\infty;0.95} = 1.645$, kritično območje $K = [1.645, \infty)$ Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 321.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 0.790$, kritični vrednosti $c_1 = F_{29,29;0.025} = 0.48$ in $c_2 = F_{29,29;0.975} = 2.10$, kritično območje $K = (0, 0.48] \cup [2.10, \infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Testiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, vrednost testne statistike $t = -3.296$, kritična vrednost $c = t_{58;0.05} = -t_{58;0.95} \approx -t_{60;0.95} = -1.67$, $K = (-\infty, -1.67]$ Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 322.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 1.361$, kritični vrednosti $c_1 = F_{99,119;0.05} \approx F_{100,120;0.05} = 0.73$ in $c_2 = F_{99,119;0.95} =\approx F_{100,120;0.95} = 1.37$, kritično območje $K = (0, 0.73] \cup [1.37, \infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Testiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, vrednost testne statistike $t = 5.705$, kritična vrednost $c = t_{218;0.975} =\approx t_{\infty;0.975} = 1.96$, kritično območje $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

REZULTATI NALOGE 323.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 1.266$, kritični vrednosti $c_1 = F_{29,29;0.05} = 0.54$ in $c_2 = F_{29,29;0.95} = 1.86$, kritično območje $K = (0, 0.54] \cup$

$[1.86,\infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Tetsiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 > \mu_2$, vrednost testne statistike $t = 1.365$, kritična vrednost $c = t_{58;0.95} =\approx t_{60;0.95} = 1.67$, kritično območje $K = [1.67,\infty)$. Ker $t \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 324.

a. Testiramo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, vrednost testne statistike $F = 0.590$, kritični vrednosti $c_1 = F_{39,39;0.025} =\approx F_{40,40;0.025} = 0.53$ in $c_2 = F_{39,39;0.975} =\approx F_{40,40;0.975} = 1.88$, kritično območje $K = (0, 0.53] \cup [1.88,\infty)$. Ker $F \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. b. Testiramo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti $H_1 : \mu_1 < \mu_2$, vrednost testne statistike $t = -4.569$, kritična vrednost $c = t_{78;0.05} = -t_{78;0.95} = - \approx t_{60;0.95} = -1.67$, kritično območje $K = (-\infty, -1.67]$ Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 325.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 \neq p_2$, vrednost testne statistike $z = 0.624$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$, kritično območje $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 326.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 > p_2$, vrednost testne statistike $z = 1.063$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$, kritično območje $K = [1.645,\infty)$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 327.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 < p_2$, vrednost testne statistike $z = -1.587$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.01) = -\mathrm{F}^{-1}(0.99) = -2.33$, kritično območje $K = (-\infty, -2.33]$. Ker $z \notin W$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 328.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 \neq p_2$, vrednost testne statistike $z = 2.115$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$, kritično območje $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Ker $z \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 329.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 < p_2$, vrednost testne statistike $z = -0.757$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.05) = -\mathrm{F}^{-1}(0.95) = -1.645$, kritično območje $K = (-\infty, -1.645]$. Ker $z \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva ni potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 330.

Testiramo $H_0 : p_1 = p_2$ proti $H_1 : p_1 > p_2$, vrednost testne statistike $z = 2.657$, kritična vrednost $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$, kritično območje $K = [1.645, \infty)$. Ker $z \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva je potrjena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 331.

Testiramo H_0 : (kocka je poštena) proti H_1 : (kocka ni poštena), vrednost testne statistike $\chi^2 = 10.16$, kritična vrednost $c = \chi^2_{5;0.95} = 11.1$, kritično območje $K = [11.1, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve. Ne moremo trditi, da kocka ni poštena.

Sporoči napako

Rezultati naloge 332.

Testiramo H_0 : (odgovori so diskretno enakomerno porazdeljeni) proti H_1 : (odgovori niso diskretno enakomerno porazdeljeni), vrednost testne statistike $\chi^2 = 81.344$, kritična vrednost $c = \chi^2_{3;0.99} = 11.3$, kritično območje $K = [11.3, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Lahko zaključimo, da odgovori na kvizu niso diskretno enakomerno porazdeljeni.

Sporoči napako

Rezultati naloge 333.

Testiramo H_0 : (število metov, dokler ne pade grb ima $G(p)$) proti H_1 : (število metov, dokler ne pade grb nima $G(p)$), vrednost testne statistike $\chi^2 = 2.82$, kritična vrednost $c = \chi^2_{4;0.95} = 9.49$, kritično območje $K = [9.49, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 334.

Testiramo H_0 : (ruleta je pravična) proti H_1 : (ruleta ni pravična), vrednost testne statistike $\chi^2 = 14.917$, kritična vrednost $c = \chi^2_{2;0.99} = 9.21$, kritično območje $K = [9.21, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Lahko zaključimo, da ruleta ni pravična.

Sporoči napako

Rezultati naloge 335.

Testiramo H_0 : (število golov ima $P(\lambda)$) proti H_1 : (število golov nima $P(\lambda)$), vrednost testne statistike $\chi^2 = 0.4$, kritična vrednost $c = \chi^2_{1;0.95} = 3.84$, kritično območje $K = [3.84, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 336.

Testiramo H_0 : (spol in ocena učinka sta neodvisna) proti H_1 : (spol in ocena učinka sta odvisna), vrednost testne statistike $\chi^2 = 7.238$, kritična vrednost $c = \chi^2_{2;0.95} = 5.99$, kritično območje $K = [5.99, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Ocena učinka predsednika je odvisna od spola volilca.

Sporoči napako

Rezultati naloge 337.

Testiramo H_0 : (stopnja depresije in zakonski stan sta neodvisna) proti H_1 : (stopnja depresije in zakonski stan sta odvisna), vrednost testne statistike $\chi^2 = 6.829$, kritična vrednost $c = \chi^2_{4;0.95} = 9.49$, kritično območje $K = [9.49, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rezultati naloge 338.

Testiramo H_0 : (kadilski status in stopnja holesterola sta neodvisna) proti H_1 : (kadilski status in stopnja holesterola sta odvisna), vrednost testne statistike $\chi^2 = 18.708$, kritična vrednost $c = \chi^2_{4;0.95} = 9.49$, kritično območje $K = [9.49, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Kajenje in stopnja holesterola v krvi sta odvisna.

Sporoči napako

Rezultati naloge 339.

Testiramo H_0 : (fluoriranost vode in kvarjenje zob sta neodvisna) proti H_1 : (fluoriranost vode in kvarjenje zob sta odvisna), vrednost testne statistike $\chi^2 = 9.442$, kritična vrednost $c = \chi^2_{3;0.95} = 7.81$, kritično območje $K = [7.81, \infty)$. Ker $\chi^2 \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo.

Sporoči napako

Rezultati naloge 340.

Testiramo H_0 : (stopnja izobrazbe in število otrok sta neodvisna) proti H_1 : (stopnja izobrazbe in število otrok sta odvisna), vrednost testne statistike $\chi^2 = 6.828$, kritična vrednost $c = \chi^2_{4;0.99} = 13.3$, kritično območje $K = [13.3, \infty)$. Ker $\chi^2 \notin K$, ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

12. Linearna regresija

Rezultati naloge 341.

Za vse ponujene pare stavkov, je pravilen odgovor 2.

Sporoči napako

Rezultati naloge 342.

Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.948$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 343.

Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.904$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 344.

b. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.9813$, c. ocena naklona $\hat{b} = 1.7432$, ocena odseka $\hat{a} = 15.2119$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 15.2119 + 1.7432x$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 345.

b. Pearsonov koeficient korelacije $r = -0.8719$, c. ocena naklona $\hat{b} = -0.0947$, ocena odseka $\hat{a} = 5.1729$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 5.1729 - 0.0947x$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 346.

b. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.8653$, c. ocena naklona $\hat{b} = 2.3321$, ocena odseka $\hat{a} = 17.689$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 17.689 + 2.3321x$, d. napovedano število točk pri 24-urni pripravi $\hat{y} = 73.4194 \approx 73$.

Sporoči napako

Rezultati naloge 347.

b. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.984$, c. ocena naklona $\hat{b} = 0.01757$, ocena odseka $\hat{a} = -0.29633$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = -0.29633 + 0.01757x$, d. napovadan čas potovanja odaljenega 250 km $\hat{y} = 4.09617 \approx 4.1$ ur.

Sporoči napako

Rezultati naloge 348.

b. Personov koeficient korelacije $r = -0.9553$, c. ocena naklona $\hat{b} = -0.4447$, ocena odseka $\hat{a} = 27.4661$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 27.4661 - 0.4447x$, d. napovedano število ur pri 15 h treninga $\hat{y} = 20.7956 \approx 20.8$ ur.

Sporoči napako

Rezultati naloge 349.

b. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.9832$, c. ocena naklona $\hat{b} = 0.624$, ocena odseka $\hat{a} = 104.352$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 104.352 + 0.624x$, d. napovedana prodajna cena za površino 200 m^2 $\hat{y} = 229.152 \approx 229$ tisoč dolarjev.

Sporoči napako

Rezultati naloge 350.

a. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.9917$, b. ocena naklona $\hat{b} = 0.3118$, ocena odseka $\hat{a} = 0.7$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 0.7 + 0.3118x$. c. Testiramo $H_0 : b = 0$ proti $H_1 : b \neq 0$, vrednost testne statistike $t = 15.459$, kritična vrednost $c = t_{4;0.975} = 2.78$, kritično območje $K = (-\infty, -2.78] \cup [2.78, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Rezultati naloge 351.

a. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.9374$, b. ocena naklona $\hat{b} = 266.1457$, ocena odseka $\hat{a} = 99.2559$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 99.2559 + 266.1457x$. c. Testiramo $H_0 : b = 0$ proti $H_1 : b \neq 0$, vrednost testne statistike $t = 6.039$, kritična vrednost $c = t_{5;0.975} = 2.57$, kritično območje $K = (-\infty, -2.57] \cup [2.57, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Rezultati naloge 352.

a. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.9945$, b. ocena naklona $\hat{b} = 3.1267$, ocena odseka $\hat{a} = 80.8907$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 80.8907{+}3.1267x$. c. Testiramo $H_0 : b = 0$ proti $H_1 : b \neq 0$, vrednost testne statistike $t = 23.195$, kritična vrednost $c = t_{6;0.975} = 2.45$, kritično območje $K = (-\infty, -2.45] \cup [2.45, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Rezultati naloge 353.

a. Pearsonov koeficient korelacije $r = 0.8669$, b. ocena naklona $\hat{b} = 1.9139$, ocena odseka $\hat{a} = 79.2506$, vzorčna linearna regresijska premica $\hat{y} = 79.2506{+}1.9139x$. c. Testiramo $H_0 : b = 0$ proti $H_1 : b \neq 0$, vrednost testne statistike $t = 4.260$, kritična vrednost $c = t_{6;0.975} = 2.45$, kritično območje $K = (-\infty, -2.45] \cup [2.45, \infty)$. Ker $t \in K$, zavrnemo ničelno domnevo in sprejememo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Rešitve

1. Kombinatorika

Rešitev naloge 2.

Naprej poiščemo praštevilski razcep števila 2520.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ker je torej $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, bodo vsi delitelji števila 2520 oblike $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ za $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$ in $d \in \{0, 1\}$. Vseh možnosti je tako $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 3.

Z Ajdove gore do Cvetočega dola lahko gremo direktno ali pa preko Brežic. Če želimo preko Brežic, moramo izbrati eno cesto od Ajdove gore do Brežic (5 možnosti) in nato še eno od Brežic do Cvetočega dola (4 možnosti). Skupaj imamo za pot preko Brežic torej $5 \cdot 4 = 20$ načinov. Dodamo še 3 direktne poti in dobimo skupno

$$5 \cdot 4 + 3 = 23$$

načinov, da pridemo z Ajdove gore do Cvetočega dola.

Sporoči napako

Rešitev naloge 5.

a. V množici A imamo tri števila in vsako se lahko pojavi na kateremkoli od štirih mest, torej imamo 3 možnosti za izbiro števke na mestu tisočic, 3 možnosti izbiro stotic, 3 možnosti za desetice in 3 za enice. Sestavimo lahko torej

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

različnih štirimestnih števil.

b. Če se mora štirimestno število začeti s 5, imamo za mesto tisočic samo eno možnost namesto treh, zato je takih števil le še

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27.$$

c. Če štirimestna števila sestavljamo iz števk množice B, lahko na mestu tisočic stojijo le števke 2, 4, 6 ali 8. Za ostala mesta lahko uporabimo katerokoli števko iz B. Takih števil je torej
$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3 = 500.$$
d. Ugotovili smo že, da lahko iz števk množice B sestavimo 500 različnih štirimestnih števil. Preštejmo še, koliko je takih, ki se končajo na 24. Zadnji dve števki sta že določeni, torej imamo samo še 4 izbire za prvo števko (2, 4, 6 ali 8) in pet izbir za drugo. Vseh takih števil je torej
$$4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 20.$$
Štirimestnih števil s števkami iz B, ki se ne končajo na 24, je torej $500 - 20 = 480$.
e. Ker se petmestno število ne sme začeti niti z 2 niti z 8, imamo za mesto desettisočic le dve možnosti, 4 ali 6. Na preostala štiri mesta lahko damo katerokoli od 5 števk iz B, zato je takih števil
$$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^4 = 1250.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 6.

Za besede dolžine 5 moramo uporabiti vse črke, lahko pa jih poljubno premešamo, zato je vseh takih besed $5! = 120$ (permutacije). Če se besede dolžine 5 morajo začeti na B, potem lahko premešamo le še ostale 4 črke in je vseh besed, ki zadoščajo temu pogoju $4! = 24$. Besed dolžine 4 iz teh črk pa je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ (variacije brez ponavljanja dolžine 4 iz 5 različnih elementov).

Sporoči napako

Rešitev naloge 7.

Za števili 1 in 2 imamo dva možna vrstna reda, najprej 1 in nato 2 ter najprej 2 in nato 1. Ta par števil in še preostalih $n-2$ števil lahko postavimo v vrsto na $(n-1)!$ načinov, zato je skupaj $2(n-1)!$ razporeditev, pri katerih 1 in 2 stojita skupaj.

Sporoči napako

Rešitev naloge 9.

a. Če vse knjige razlikujemo in ni nobenih omejitev, potem iščemo število načinov, da 9 različnih objektov postavimo v vrsto. Teh je seveda $9! = 362880$.
b. Če je vrstni red posameznih skupin predpisan, potem lahko knjige prerazporejamo le še znotraj skupin. Za 3 romane imamo $3!$, za 4 učbenike $4!$ in za 2 vodiča $2!$ različnih vrstnih redov. Skupaj je torej
$$3! \cdot 4! \cdot 2! = 6 \cdot 24 \cdot 2 = 288$$
možnih razporeditev.
c. Kot v prejšnjem primeru morajo tudi tu knjige iste vrste stati skupaj, še vedno pa jih lahko premešamo znotraj skupin. Poleg tega lahko tokrat še na $3!$ načinov premešamo skupine. Vseh postavitev je torej
$$3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3! = 288 \cdot 6 = 1728.$$
d. Ugotovili smo že, da lahko vseh 9 knjig postavimo v vrsto na $9!$ načinov. Če knjig iste vrste ne razlikujemo, jih lahko premešamo na $3!$, $4!$ oziroma $2!$ načinov. Vseh možnih postavitev je v tem primeru torej
$$\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{362880}{6 \cdot 24 \cdot 2} = 1260.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 11.

a. Na voljo imamo 3 črke, od katerih se ena dvakrat ponovi, zato lahko iz njih tvorimo $\frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$ različne nize.
b. Od šestih črk se dve ponovita dvakrat, torej je vseh možnosti $\frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$.
c. Tudi tu gre za permutacije s ponavljanjem, nizov je $\frac{10!}{2!2!2!1!1!1!1!} = 453600$.
d. Podobno kot pri ostalih primerih dobimo s formulo za permutacije s ponavljanjem tokrat $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$.

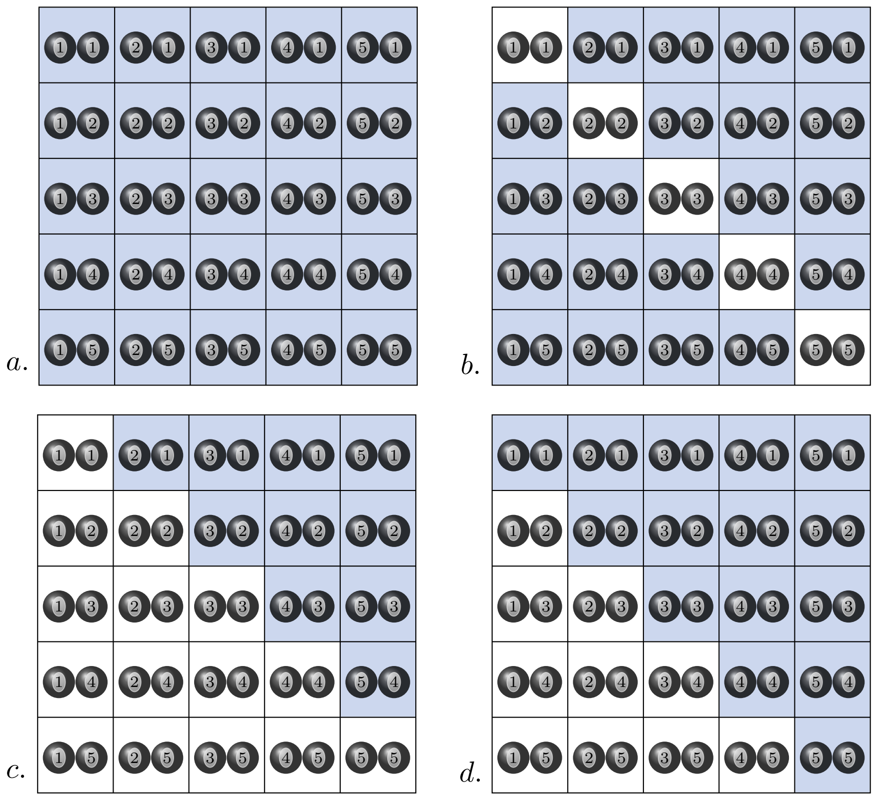
Sporoči napako

Rešitev naloge 13.

Izmed 18 sošolcev mora izbrati 4, kar lahko stori na $\binom{18}{4} = 3060$ načinov.

Sporoči napako

Rešitev naloge 14.



Obravnavati moramo štiri primere.

a. **Kroglice vračamo in vrstni red je pomemben.** V tem primeru imamo 5 možnosti za prvo kroglico in 5 za drugo, zato je vseh možnosti $5 \cdot 5 = 25$ (variacije s ponavljanjem).
b. **Kroglice ne vračamo in vrstni red je pomemben.** V tem primeru imamo za prvo kroglico 5 možnosti, za drugo pa samo še 4, zato je vseh možnosti $5 \cdot 4 = 20$ (variacije).
c. **Kroglic ne vračamo in vrstni red ni pomemben.** V tem primeru izberemo dve kroglici izmed 5 na

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

načinov (kombinacije).

d. **Kroglice vračamo in vrstni red ni pomemben.** Ločimo dva primera. Lahko smo dvakrat izvlekli isto kroglico (5 načinov) ali pa smo izvlekli dve različni kot v prejšnjem primeru (10 načinov). Skupaj imamo torej po pravilu vsote $5 + 10 = 15$ možnosti. Kasneje bomo to lahko izračunali tudi kot kombinacije s ponavljanjem,

$$\left(\!\!\binom{5}{2}\!\!\right) = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 15.

a. Najprej izmed 6 rdečih kroglic izberemo 3, nato pa še izmed 4 črnih izberemo 3. Skupaj imamo torej

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{3} = \binom{6}{3} \cdot \binom{4}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 = 20 \cdot 4 = 80$$

možnosti.

b. Vseh načinov, da izmed 10 kroglic izberemo 4 je

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Pri tem so v

$$\binom{4}{4} + \binom{6}{4} = 1 + \binom{6}{2} = 1 + \frac{6 \cdot 5}{2} = 1 + 15 = 16$$

primerih vse kroglice iste barve. Vsaj eno rdečo in vsaj eno črno kroglico dobimo torej v

$$210 - 16 = 194$$

primerih.

Sporoči napako

Rešitev naloge 16.

a. Če želimo na $r + c$ mest razporediti r rdečih in c črnih kroglic, lahko izberemo mesta za rdeče kroglice, na preostalih mestih pa morajo biti črne kroglice. Seveda pa bi lahko namesto tega izmed $r + c$ mest izbrali c mest za črne kroglice in potem na preostala mesta postavili rdeče. Možnosti je torej

$$\binom{r+c}{r} = \binom{r+c}{c}.$$

b. Če rdeče kroglice ne smejo stati skupaj, najprej c črnih kroglic postavimo v vrsto in potem izberemo, na katere od $c+1$ prostorov, ki jih določa c črnih kroglic, bomo postavili rdečo kroglico. Pri tem lahko vsak prostor izberemo ničkrat ali enkrat in ne večkrat, zato so to kombinacije in je iskano število načinov

$$\binom{c+1}{r},$$

če je $r \leq c + 1$. Če je $r > c + 1$, potem taka postavitev ni mogoča, saj je črnih kroglic premalo, da bi zagotovili, da se med vsakima rdečima nahaja vsaj ena.

Sporoči napako

Rešitev naloge 17.

a. Premica je natanko določena z dvema točkama, ki ležita na njej. Ker nobene tri točke ne ležijo na isti premici, ne bomo nobene šteli večkrat, če preštejemo vse pare, ki jih lahko tvorimo z 10 točkami. Vrstni red izbire točk iz para seveda ni pomemben, zato je vseh takih premic $\binom{10}{2} = 45$.
b. Premic, ki potekajo skozi točke $A_3, \ldots, A_{10}$ je $\binom{8}{2} = 28$.
c. Ker nobene tri točke ne ležijo na isti premici, bo vsaka trojica določala (neizrojen) trikotnik. Vseh trikotnikov je torej $\binom{10}{3} = 120$.
d. Če mora biti eno od oglišč trikotnika A_1, potem moramo izbrati samo še dve oglišči izmed preostalih 9 točk, torej je takih trikotnikov $\binom{9}{2} = 36$.
e. Če trikotnik vsebuje točki A_1 in A_2, izberemo samo še tretje oglišče izmed preostalih 8 točk na $\binom{8}{1} = 8$ načinov.

Sporoči napako

Rešitev naloge 19.

Za $k = 0, 1, 2$ je nizov, kjer se A pojavi k-krat, $\binom{4}{k}$. Vseh nizov, v katerih se A pojavi največ dvakrat, je torej

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 1 + 4 + 6 = 11.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 21.

a. Za vsako kocko imamo 6 možnih izidov, zato jih je za tri kocke $6^3 = 216$.
b. Izberemo eno od treh kock, na kateri bo padlo 6 pik (3 možne izbire kocke, 1 sam možen izid). Za vsako od ostalih dveh kock imamo 5 možnih izidov, saj ne sme pasti 6. Vseh je torej $3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.
c. Vseh možnih izidov je 216. Takih, kjer na nobeni kocki ne pade 6, je $5^3 = 125$. Izidov, kjer na vsaj eni kocki pade 6, je torej $216 - 125 = 91$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 24.

a. To lahko storimo na $6! = 720$ načinov (permutacije).
b. Iz vsake postavitve otrok v vrsto lahko dobimo razporeditev otrok na vrtiljak, ker pa ni pomembno, na katerem od 6 sedežev začnemo s posedanjem, bo 6 različnih vrst določalo isti razpored na vrtiljaku. Vseh razvrstitev na vrtiljak bo torej $\frac{6!}{6} = 120$.
c. Najprej posedimo 6 otrok v vrsto z 10 sedeži. To naredimo tako, da najprej izberemo, kateri sedeži bodo zasedeni, potem pa, v katerem vrstnem redu bodo na njih sedeli otroci. Ker lahko torej 6 otrok postavimo v vrsto z 10 sedeži na $\binom{10}{6} \cdot 6!$ načinov in ker po 10 takih razporeditev določa isto razporeditev na vrtiljaku, je vseh razporeditev 6 otrok na vrtiljak z 10 sedeži
$$\frac{\binom{10}{6} \cdot 6!}{10} = 15120.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 27.

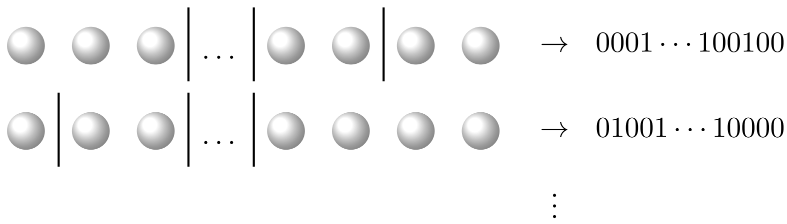
Izbrati moramo 20 bonbonov izmed 5 vrst bonbonov, zato je vseh izbir
$$\left(\!\binom{5}{20}\!\right) = \binom{5 + 20 - 1}{20} = \binom{24}{20} = \binom{24}{4} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10626.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 29.

a. Najprej razmislimo, na koliko načinov lahko b belih kroglic razporedimo v s škatel, če lahko damo v vsako škatlo poljubno število kroglic. Vsako razporeditev kroglic v škatle lahko predstavimo z binarnim zaporedjem tako, da vsako kroglico zamenjamo z ničlo in vsako mejo med dvema zaporednima škatlama z enico. Iščemo torej število vseh binarnih zaporedij z b ničlami in $s-1$ enicami. Izmed $b+s-1$ mest izberemo b mest za ničle in položaj enic je potem že določen. Vseh možnosti je torej

$$\binom{b+s-1}{b}.$$



Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo kombinacij s ponavljanjem. Za vsako od b kroglic moramo izbrati eno od s škatel, pri čemer je lahko vsaka škatla izbrana večkrat, zato je vseh načinov

$$\left(\!\!\binom{s}{b}\!\!\right) = \binom{b+s-1}{b}.$$

Ker lahko rdeče in črne kroglice v škatle razporedimo povsem neodvisno od belih, je vseh možnih razporeditev kroglic v škatle

$$\binom{b+s-1}{b}\binom{r+s-1}{r}\binom{c+s-1}{c}.$$

b. Če je lahko v vsaki škatli največ ena kroglica, potem je razporeditev mogoča le, če je $b+r+c < s$. Najprej izmed s škatel izberemo b škatel, v katerih bo po ena bela kroglica, nato izmed preostalih $s-b$ škatel izberemo r škatel za rdeče kroglice in nazadnje izmed preostalih $s-b-r$ škatel izberemo še c škatel za črne kroglice. Skupaj imamo

$$\binom{s}{b}\binom{s-b}{r}\binom{s-b-r}{c}$$

možnosti.

Sporoči napako

2. Verjetnost

Rešitev naloge 30.

a. Pri metu dveh poštenih kock imamo 36 enako verjetnih izidov. Pri tem na prvi kocki padejo 4 pike v 6 primerih, zato je

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.1667.$$

b. Vsota pik je enaka 6 v 5 primerih od 36, saj je

$$6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1,$$

zato je

$$P(B) = \frac{5}{36} = 0.1389.$$

c. Vsota pik je manjša od 4 v treh primerih od 36, zato je

$$P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.0833.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 31.

a. Vseh možnosti, da iz posode z 12 kroglicami izvlečemo tri kroglice, če pri tem kroglice vračamo, je $12 \cdot 12 \cdot 12$. Če mora biti po ena vsake barve, imamo 3 izbire za rdečo, 4 za črno in 5 za belo, poleg tega pa še 3! različnih vrstnih redov teh treh barv. Iskana verjetnost je torej

$$\frac{3! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{5}{24} = 0.2083.$$

b. Če kroglic ne vračamo je vseh izbir le $12 \cdot 11 \cdot 10$, zato je iskana verjetnost

$$\frac{3! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{11} = 0.2727.$$

Ker kroglic ne vračamo in zato nobene ne moremo izbrati večkrat, pa bi lahko uporabili tudi kombinacije. Vseh možnosti bi bilo v tem primeru $\binom{12}{3}$, tri različne barve pa bi dobili, če bi izbrali po eno kroglico vsake barve, torej bi bila iskana verjetnost

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{220} = \frac{3}{11} = 0.2727.$$

Rezultat je seveda enak.

Sporoči napako

Rešitev naloge 32.

Ker je vsak od štirih otrok lahko deček ali deklica, je vseh možnosti $2^4 = 16$. Za dogodek A moramo od štirih mest izbrati dve za deklici, preostali dve pa pripadata dečkoma, torej je vseh možnosti $\binom{4}{2}\binom{4-2}{2} = 6$ in je

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4-2}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

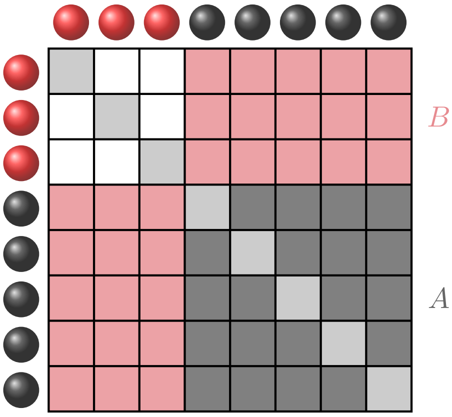
Pri dogodku B ločimo dve možnosti. Par ima lahko tri deklice in enega dečka na $\binom{4}{3}\binom{4-3}{1} = 4$ načine ali pa eno deklico in tri dečke na $\binom{4}{1}\binom{4-1}{3} = 4$ načine. Skupaj je za dogodek B torej 8 možnosti in je

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4-3}{1}}{2^4} + \frac{\binom{4}{1}\binom{4-1}{3}}{2^4} = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8}.$$

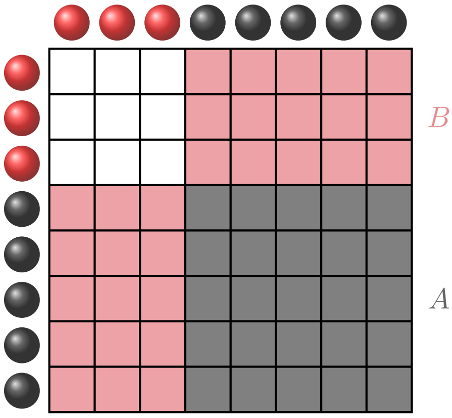
Vidimo, da je $P(B) > P(A)$, torej je bolj verjetno, da bodo trije od štirih otrok istega spola.

Sporoči napako

Rešitev naloge 33.



a.



b.

a. Če kroglic ne vračamo, lahko računamo s kombinacijami. Dve kroglici lahko izberemo na $\binom{8}{2}$ načinov. Če morata biti obe črni, je izbir $\binom{5}{2}$, če mora biti po ena vsake barve, pa je izbir $\binom{3}{1}\binom{5}{1}$. Torej je

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} = 0.3571$$

in

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28} = 0.5357.$$

b. Če kroglice vračamo, je lažje uporabiti variacije s ponavljanjem oziroma pravilo produkta. Vseh izbir je v tem primeru $8 \cdot 8$. Če morata biti obe kroglici črni, je izbir $5 \cdot 5$, če je po ena vsake barve, pa je izbir $2 \cdot 5 \cdot 3$, ker moramo upoštevati dva možna vrstna reda (prva rdeča in druga črna ter prva črna in druga rdeča). V tem primeru je torej

$$P(A) = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 8} = \frac{25}{64} = 0.3906$$

in

$$P(B) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 8} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32} = 0.4688.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 34.

Naj bo A dogodek, da sta med prvimi osmimi kartami natanko dva pika. Vseh načinov, da iz kupa 16 kart izberemo 8 kart, je $\binom{16}{8}$. Dogodek A se bo zgodil, če bomo izbrali 2 od 4 pikov in 6 kart izmed preostalih 12. Takih izbir je torej $\binom{4}{2}\binom{12}{6}$. Zato je

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{12}{6}}{\binom{16}{8}} = \frac{28}{65} = 0.4308.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 36.

Vseh možnih listkov pri Lotu je $\binom{39}{7} = 15380937$. Samo v enem primeru smo izbrali vseh 7 pravilnih števil, zato je verjetnost, da zadenemo sedmico $\frac{1}{15380937} = 0.00000006502$. Načinov, da izberemo šest od sedmih pravilnih števil in eno od $39 - 7 = 32$ nepravilnih, je $\binom{7}{6}\binom{32}{1} = 7 \cdot 32 = 224$, zato je verjetnost, da zadenemo šestico, enaka $\frac{224}{15380937} = 0.00001456$. Načinov, da izberemo pet od sedmih pravilnih števil in dve od 32 nepravilnih, je $\binom{7}{5}\binom{32}{2} = 21 \cdot 496 = 10416$, zato je ta verjetnost enaka $\frac{10416}{15380937} = 0.0006772$. Načinov, da izberemo štiri od sedmih pravilnih številk in tri od 32 nepravilnih, je $\binom{7}{4}\binom{32}{3} = 35 \cdot 4960 = 173600$, zato je ta verjetnost enaka $\frac{173600}{15380937} = 0.01129$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 37.

Za vsako kocko imamo 6 možnih izidov, zato je vseh možnosti pri metu petih neodvisnih kock $6^5 = 7776$. Naj bo A dogodek, da na vsaj eni kocki pade šestica. Potem je $\overline{A}$ dogodek, da na nobeni kocki ne pade šestica. Ker imamo v tem primeru za vsako kocko le še 5 možnih izidov, je

$$P(\overline{A}) = \frac{5^5}{6^5} = \frac{3125}{7776}.$$

Po formuli za verjetnost nasprotnega dogodka je zato

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776} = 0.5981.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 39.

a. Iz kupa 32 kart lahko 3 karte izberemo na $\binom{32}{3}$ načinov. Če želimo, da se bo zgodil dogodek A, moramo izbrati 3 od 4 dam, zato je

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{4}{4960} = \frac{1}{1240} = 0.0008.$$

b. Če morata biti natanko dve karti pika, moramo izbrati 2 pika od 8 in 1 od preostalih 24 kart, kar lahko storimo na $\binom{8}{2}\binom{24}{1}$ načinov, zato je

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{672}{4960} = \frac{21}{155} = 0.1355.$$

c. Če morajo biti vse tri karte iste barve (torej vse črne ali vse rdeče), je izbir $2 \cdot \binom{16}{3}$, zato je

$$P(C) = \frac{2 \cdot \binom{16}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{560}{4960} = \frac{7}{31} = 0.2258.$$

d. Oglejmo si najprej nasprotni dogodek $\overline{D}$, da med izvlečenimi tremi kartami ni nobene dame. Izbrati moramo torej 3 od preostalih 28 kart, kar lahko storimo na $\binom{28}{3}$ načinov. Zato je

$$P(\overline{D}) = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{3276}{4960} = \frac{819}{1240}.$$

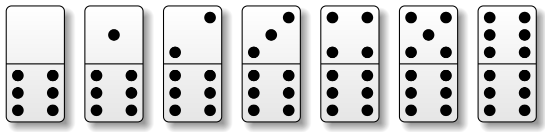
Iskana verjetnost je torej

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{819}{1240} = \frac{421}{1240} = 0.3395.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 40.

Domine so dveh vrst. Prve imajo na obeh polovicah istega od sedmih možnih simbolov. Takih je 7. Druge imajo dva različna simbola, teh je $\binom{7}{2} = 21$. Vseh domin je torej $21 + 7 = 28$. Podobno je domin, ki nimajo na nobeni od obeh polovic 6 pik, $6 + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21$. Tistih, ki imajo na vsaj eni polovici 6 pik, je torej $28 - 21 = 7$.



Naj bo A dogodek, da je na vsaj eni od 6 izbranih domin 6 pik. Potem je $\overline{A}$ dogodek, da nismo izbrali nobene od 7 domin s 6 pikami in je

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{21}{6}}{\binom{28}{6}} = \frac{54264}{376740} = \frac{4522}{31395} = 0.1440$$

in je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.8560$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 41.

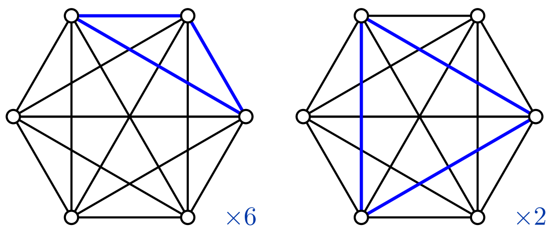
a. Verjetnost, da je naključno izbrana srečka dobitna, je $\frac{50}{1000} = 0.05$.
b. Naj bo A dogodek, da je med tremi kupljenimi srečkami vsaj ena dobitna. Potem je $\overline{A}$ dogodek, da med njimi ni nobene dobitne in je

$$P(\overline{A}) = \frac{950 \cdot 949 \cdot 948}{1000 \cdot 999 \cdot 998} = 0.8572,$$

zato je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.1428$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 44.

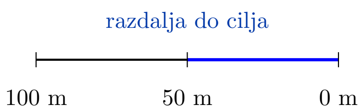


a. Vseh trikotnikov je $\binom{6}{3} = 20$. Enakokrakih je 8, zato je iskana verjetnost enaka $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$.
b. Enakostranična trikotnika sta 2, zato je iskana verjetnost, da trikotnik ni enakostraničen, enaka $1 - \frac{2}{20} = \frac{9}{10} = 0.9$.

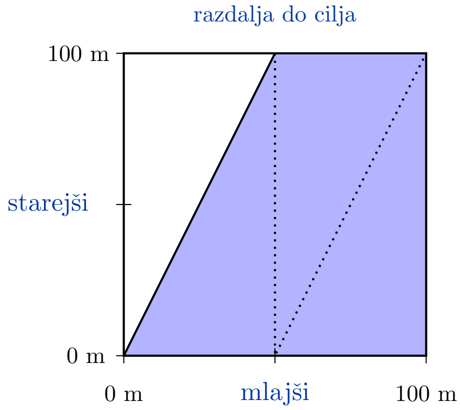
Sporoči napako

Rešitev naloge 48.

a. Če mlajši brat začne kjerkoli na zadnjih 50 metrih steze, bo prišel do cilja v 15 sekundah ali manj, sicer pa bo potreboval več kot 15 sekund.



Iskana verjetnost je torej $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0.5$.
b. Ker je starejši brat dvakrat hitrejši od mlajšega, bo prišel na cilj prej, če bo njegova pot manj kot dvakrat daljša od poti mlajšega brata. Vse možne izbire začetnih položajev lahko predstavimo s točkami v kvadratu. Točke, ki predstavljajo istočasen prihod na cilj, ležijo na premici z enačbo $y = 2x$, ki poteka skozi točki $(0, 0)$ in $(50, 100)$.

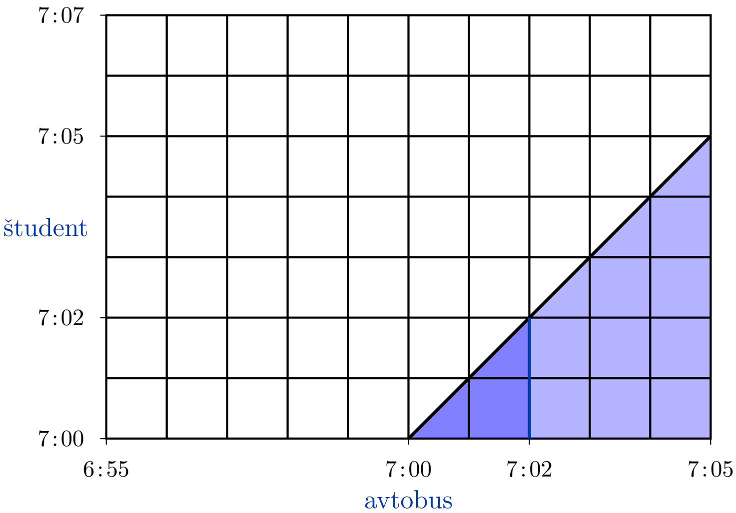


Izbire, pri katerih mlajši pride na cilj za starejšim, ustrezajo pogoju $y \leq 2x$ in se nahajajo pod premico $y = 2x$. Vidimo, da to območje vključuje tri od štirih skladnih trikotnikov, zato je iskana verjetnost enaka $\frac{3}{4}$. Seveda pa lahko tudi izračunamo kvocient ploščine trapeza in ploščine kvadrata:

$$\frac{\frac{1}{2}(100+50)\cdot 100}{100^2} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 49.



a. Narišimo pravokotnik, ki ga dobimo kot produkt intervalov $[6:55, 7:05]$ in $[7:00, 7:07]$ ter premico skozi točki $(7:00, 7:00)$ ter $(7:05, 7:05)$. Točke v trikotnem območju pod premico ustrezajo dogodku, da študent ujame avtobus, zato je iskana verjetnost

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5}{10\cdot 7} = \frac{25}{140} = \frac{5}{28} = 0.1786.$$

b. Dogodku, da bo študent ujel avtobus in se bo to zgodilo pred $7:02$, ustreza močneje senčeni trikotnik in verjetnost tega dogodka je

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2}{10\cdot 7} = \frac{4}{140} = \frac{1}{35} = 0.0286.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 52.

Izmed 23 kandidatov lahko skupino 4 tekmovalcev sestavimo na $\binom{23}{4}$ načinov. Če ta skupina vsebuje dva matematika, enega fizika in enega računalničarja, jo lahko sestavimo na $\binom{5}{2}\binom{7}{1}\binom{11}{1}$ načinov. Podobno imamo za sestavljanje skupin z dvema fizikoma oziroma z dvema računalničarjema $\binom{5}{1}\binom{7}{2}\binom{11}{1}$ oziroma $\binom{5}{1}\binom{7}{1}\binom{11}{2}$ možnosti. Verjetnost, da skupina vsebuje vsaj po enega matematika, fizika in računalničarja, je torej

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{1}\binom{11}{1}+\binom{5}{1}\binom{7}{2}\binom{11}{1}+\binom{5}{1}\binom{7}{1}\binom{11}{2}}{\binom{23}{4}}=\frac{770+1155+1925}{8855}=\frac{3850}{8855}=\frac{10}{23}=0.4348.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 53.

a. Naj bo A dogodek, da je naključno izbrano število med 1 in 1000 deljivo 3, B pa dogodek, da je deljivo s 4. Potem je AB dogodek, da je deljivo z 12 in je

$$P(AB)=\frac{\lfloor\frac{1000}{12}\rfloor}{1000}=\frac{83}{1000}=0.083.$$

b. Ker je

$$P(A)=\frac{\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor}{1000}=\frac{333}{1000}\quad\text{in}\quad P(B)=\frac{\lfloor\frac{1000}{4}\rfloor}{1000}=\frac{250}{1000},$$

lahko z uporabo načela vključitev-izključitev izračunamo

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{333}{1000}+\frac{250}{1000}-\frac{83}{1000}=\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}=0.5.$$

c. Za $k=1,2,3$ naj bo A_k dogodek, da sta obe izbrani števili k-mestni. Potem je

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{9}{1000}\cdot\frac{8}{999} = \frac{8}{111000} = \frac{4}{55500},\\
P(A_2) &= \frac{90}{1000}\cdot\frac{89}{999} = \frac{890}{111000} = \frac{445}{55500},\\
P(A_3) &= \frac{900}{1000}\cdot\frac{899}{999} = \frac{89900}{111000} = \frac{44950}{55500}.
\end{aligned}$$

Dogodki A_k so nezdružljivi, zato je

$$\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\\
&= \frac{4}{55500}+\frac{445}{55500}+\frac{44950}{55500}=\\
&= \frac{45399}{55500}=\frac{409}{500}=0.818.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 54.

Naj bo A_k dogodek, da je naključno izbrano število med 1 in 1000 deljivo s k. Potem je

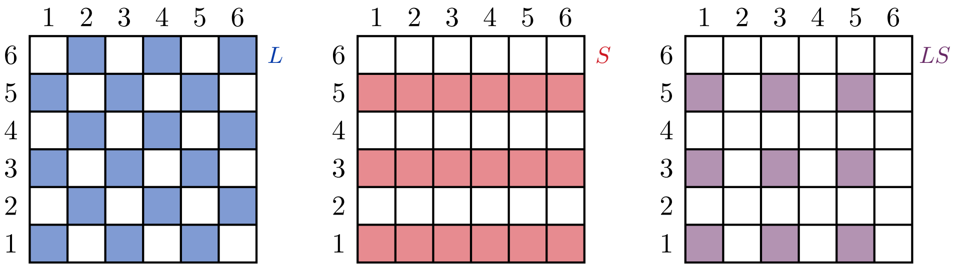
$$P(A_k)=\frac{\lfloor\frac{1000}{k}\rfloor}{1000},$$

pri čemer $\lfloor x\rfloor$ označuje najmanjše celo število, ki je manjše ali enako x. Iščemo $P(A_2\cup A_3\cup A_5)$. Upoštevamo še, da je $A_2A_3=A_6$, $A_2A_5=A_{10}$, $A_3A_5=A_{15}$ ter $A_2A_3A_5=A_{30}$, pa po načelu vključitev in izključitev dobimo

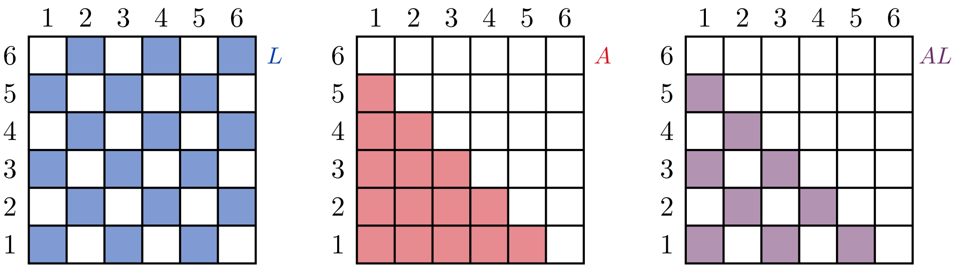
$$\begin{aligned}
P(A_2\cup A_3\cup A_5) &= P(A_2)+P(A_3)+P(A_5)-P(A_6)-P(A_{10})-P(A_{15})+P(A_{30}) =\\
&= \frac{\lfloor\frac{1000}{2}\rfloor}{1000}+\frac{\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor}{1000}+\frac{\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor}{1000}-\frac{\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor}{1000}-\frac{\lfloor\frac{1000}{10}\rfloor}{1000}-\frac{\lfloor\frac{1000}{15}\rfloor}{1000}+\frac{\lfloor\frac{1000}{30}\rfloor}{1000} =\\
&= \frac{500}{1000}+\frac{333}{1000}+\frac{200}{1000}-\frac{166}{1000}-\frac{100}{1000}-\frac{66}{1000}+\frac{33}{1000} =\\
&= \frac{734}{1000} = 0.734.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 56.



a.



b.

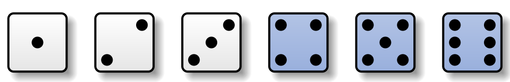
a. Naj bo L dogodek, da pri metu dveh kock pade skupaj liho pik, S pa dogodek, da na prvi kocki pade sodo pik. Potem je seveda $P(L) = P(S) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Izračunati moramo še $P(LS)$. Ker se dogodek LS zgodi v 9 primerih od 36, je $P(LS) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Ker je
$$P(LS) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(L)\cdot P(S),$$
sta dogodka L in S neodvisna.

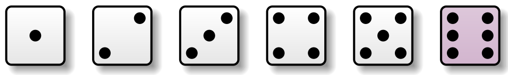
b. Naj bo A dogodek, da na prvi kocki pade več pik kot na drugi. Potem je $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ in $P(AL) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Ker je
$$P(AL) = \frac{1}{4} = \frac{6}{24} \neq \frac{5}{24} = \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(L),$$
dogodka A in L nista neodvisna.

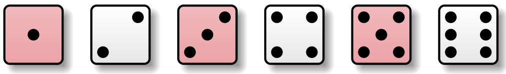
Sporoči napako

3. Pogojna verjetnost

REŠITEV NALOGE 59.

A:


B: 

L: 

a. Očitno je $P(A) = P(L) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ in $P(B) = \frac{1}{6}$. Dogodek AL se zgodi, če pade 5 pik, zato je $P(AL) = \frac{1}{6}$, medtem ko je BL nemogoč dogodek in je $P(BL) = 0$. Tako je

$$\begin{aligned} P(A\,|\,L) &= \frac{P(AL)}{P(L)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}, \\ P(B\,|\,L) &= \frac{P(BL)}{P(L)} = \frac{0}{\frac{3}{6}} = 0. \end{aligned}$$

Ker

$$P(A\,|\,L) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A) \quad \text{in} \quad P(B\,|\,L) = 0 \neq \frac{1}{6} = P(B),$$

dogodka A in L nista neodvisna ter dogodka B in L nista neodvisna.

b. Če niso vsi izidi enako verjetni, se verjetnosti nekoliko spremenijo. Dogodki, da pade 2, 3, 4 ali 5 pik, imajo verjetnost $\frac{1}{4}(1 - 0.3 - 0.1) = 0.15$. Tokrat je torej

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.15 + 0.15 + 0.1 = 0.4, \\ P(B) &= 0.1, \\ P(L) &= 0.3 + 0.15 + 0.15 = 0.6, \\ P(AL) &= 0.15, \\ P(BL) &= 0, \end{aligned}$$

zato je

$$\begin{aligned} P(A\,|\,L) &= \frac{P(AL)}{P(L)} = \frac{0.15}{0.6} = \frac{1}{4}, \\ P(B\,|\,L) &= \frac{P(BL)}{P(L)} = \frac{0}{0.6} = 0. \end{aligned}$$

Ker

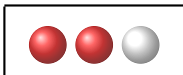
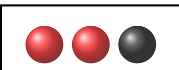
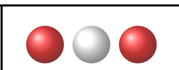
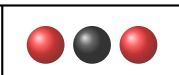
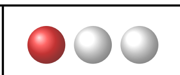
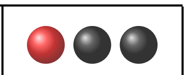
$$P(A\,|\,L) = \frac{1}{4} \neq 0.4 = P(A) \quad \text{in} \quad P(B\,|\,L) = 0 \neq 0.1 = P(B),$$

dogodka A in L nista neodvisna ter dogodka B in L nista neodvisna.

Sporoči napako

Rešitev naloge 62.

Naj bo I dogodek, da sta natanko dve od treh kroglic iste barve, R pa dogodek, da je prva kroglica rdeča. Iščemo $P(I|R)$. Verjetnost, da je prva kroglica rdeča, je seveda $P(R) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Poiščimo še verjetnost dogodka IR, da je prva kroglica rdeča in sta natanko dve iste barve. Za vsa možna zaporedja kroglic, ki ustrezajo temu pogoju poiščimo, na koliko načinov se lahko zgodijo:

					
$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$	$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$	$3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$	$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$	$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$	$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

S tem lahko izračunamo

$$P(IR) = \frac{30 + 24 + 30 + 24 + 60 + 36}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{204}{12 \cdot 11 \cdot 10}$$

in nazadnje

$$P(I\,|\,R)=\frac{P(IR)}{P(R)}=\frac{\frac{204}{12\cdot 11\cdot 10}}{\frac{3}{12}}=\frac{204\cdot 12}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 3}=\frac{204}{330}=\frac{34}{55}=0.6182.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 67.

Označimo dogodek, da sovražni cilj zadene prvi top s T_1, da ga zadene drugi top pa s T_2. Naj bo U dogodek, da bo sovražni cilj po dveh strelih uničen. Dogodki $H_0 = T_1T_2$, $H_1 = T_1\overline{T_2}$, $H_2 = \overline{T_1}T_2$ in $H_3 = \overline{T_1T_2}$ tvorijo popolni sistem dogodkov. Iz podatkov naloge razberemo, da je

$$\begin{aligned}
P(U\,|\,H_0) &= P(U|T_1T_2) = 1,\\
P(U\,|\,H_1) &= P(U|T_1\overline{T_2}) = 0.3,\\
P(U\,|\,H_2) &= P(U|\overline{T_1}T_2) = 0.3.
\end{aligned}$$

Poleg tega je seveda $P(U\,|\,H_3) = P(U\,|\,\overline{T_1T_2}) = 0$. Ker sta dogodka T_1 in T_2 neodvisna, lahko izračunamo še

$$\begin{aligned}
P(H_0) &= P(T_1T_2) = 0.2\cdot 0.6 = 0.12,\\
P(H_1) &= P(T_1\overline{T_2}) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08,\\
P(H_2) &= P(\overline{T_1}T_2) = 0.8\cdot 0.6 = 0.48,\\
P(H_3) &= P(\overline{T_1T_2}) = 0.8\cdot 0.4 = 0.32.
\end{aligned}$$

Po izreku o popolni verjetnosti je torej

$$\begin{aligned}
P(U) &= P(U\,|\,H_0)P(H_0)+P(U\,|\,H_1)P(H_1)+P(U\,|\,H_2)P(H_2)+P(U\,|\,H_3)P(H_3) =\\
&= 1\cdot 0.12+0.3\cdot 0.08+0.3\cdot 0.48+0\cdot 0.32 =\\
&= 0.12+0.024+0.144 =\\
&= 0.288.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 69.

Naj bo A dogodek, da študent naredi izpit in označimo s H_k dogodek, da študent na izpitu dobi k vprašanj, ki se jih je naučil, $k = 0,1,2,3$. Potem je $\{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ popoln sistem dogodkov in

$$\begin{aligned}
P(H_0) &= \tfrac{20\cdot 19\cdot 18}{50\cdot 49\cdot 48} = \tfrac{6840}{117600},\\
P(H_1) &= \tfrac{30\cdot 20\cdot 19\cdot \binom{3}{1}}{50\cdot 49\cdot 48} = \tfrac{34200}{117600},\\
P(H_2) &= \tfrac{30\cdot 29\cdot 20\cdot \binom{3}{2}}{50\cdot 49\cdot 48} = \tfrac{52200}{117600},\\
P(H_3) &= \tfrac{30\cdot 29\cdot 28}{50\cdot 49\cdot 48} = \tfrac{24360}{117600}.
\end{aligned}$$

Denimo, da se je zgodila hipoteza H_0. Študent je torej dobil tri vprašanja, ki se jih ni naučil, in zato mora vsaj dva odgovora uganiti, da bo naredil izpit. Torej je

$$P(A\,|\,H_0) = 3\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{9}{10}+\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10} = \tfrac{28}{1000}.$$

Če se je zgodila hipoteza H_1, lahko študent pravilno odgovori na znano vprašanje in ugane še vsaj enega od neznanih, ali pa pozabi odgovor na znano vprašanje in ugane oba odgovora na neznani vprašanji. Torej je

$$P(A\,|\,H_1) = 2\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{9}{10}+\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10} = \tfrac{136}{1000}.$$

S podobnim premislekom dobimo še

$$P(A\,|\,H_2) = \tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{1}{10}+\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{9}{10}+2\cdot\tfrac{7}{10}\cdot\tfrac{3}{10}\cdot\tfrac{1}{10} = \tfrac{532}{1000}$$

in

$$P(A \mid H_3) = 3 \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \tfrac{3}{10} + \tfrac{7}{10} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \tfrac{7}{10} = \tfrac{784}{1000}.$$

Verjetnost, da študent naredi izpit, je torej enaka

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_0)P(A \mid H_0) + P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3) = \\ &= \tfrac{6840}{117600} \cdot \tfrac{28}{1000} + \tfrac{34200}{117600} \cdot \tfrac{136}{1000} + \tfrac{52200}{117600} \cdot \tfrac{532}{1000} + \tfrac{24360}{117600} \cdot \tfrac{784}{1000} = \\ &= \tfrac{19\,151+465\,120+2\,777\,040+1\,909\,824}{11\,760\,000} = \\ &= \tfrac{5\,171\,136}{11\,760\,000} = \\ &= 0.4397. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 70.

Naj bo

- B dogodek, da ima izbrana oseba bolezen,
- T_1 dogodek, da je prvi test pozitiven in
- T_2 dogodek, da je drugi test pozitiven.

Velja $P(B) = 0.02$, $P(T_1 \mid B) = 0.97$, $P(T_1 \mid \bar{B}) = 0.01$, $P(T_2 \mid B) = 0.99$ in $P(T_2 \mid \bar{B}) = 0.02$.

a. Ker poznamo $P(T_1 \mid B)$ in sprašujemo po $P(B \mid T_1)$, uporabimo Bayesovo formulo:

$$P(B \mid T_1) = \frac{P(T_1 \mid B)P(B)}{P(T_1 \mid B)P(B) + P(T_1 \mid \bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.97 \cdot 0.02}{0.97 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.98} = 0.6644.$$

b. Ker poznamo $P(T_2 \mid B)$ in sprašujemo po $P(B \mid T_2)$, uporabimo Bayesovo formulo:

$$P(B \mid T_2) = \frac{P(T_2 \mid B)P(B)}{P(T_2)} = \frac{0.99 \cdot 0.02}{0.0394} = 0.5025.$$

Prvi test je boljši, čeprav je delež pozitivih testov pri bolnikih za prvi test manjši kot za drugi. Ker pa ima drugi test večji delež lažnih pozitivnih testov, je skupni rezultat slabši.

c. Iščemo pogojno verjetnost $P(T_2 \mid T_1)$. Ker sta T_2 in T_1 neodvisna pogojno na B in $\bar{B}$, lahko $P(T_1T_2)$ zapišemo kot:

$$\begin{aligned} P(T_1T_2) &= P(T_1T_2 \mid B)P(B) + P(T_1T_2 \mid \bar{B})P(\bar{B}) \\ &= P(T_1 \mid B)P(T_2 \mid B)P(B) + P(T_1 \mid \bar{B})P(T_2 \mid \bar{B})P(\bar{B}) = \\ &= 0.97 \cdot 0.99 \cdot 0.02 + 0.01 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 0.0194. \end{aligned}$$

Potem je

$$P(T_2 \mid T_1) = \frac{P(T_2T_1)}{P(T_1)} = 0.6645$$

d. Iščemo pogojno verjetnost $P(B \mid T_1T_2)$. Uporabimo Bayesovo formulo in dejstvo, da sta testa neodvisna pogojno na B:

$$\begin{aligned} P(B \mid T_1T_2) &= \frac{P(T_1T_2 \mid B)P(B)}{P(T_1T_2)} = \frac{P(T_1 \mid B)P(T_2 \mid B)P(B)}{P(T_1T_2)} \\ &= \frac{0.97 \cdot 0.99 \cdot 0.02}{0.0194} = 0.9899. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 72.

Naj bo J dogodek, da je Janez ponudil Mihi šmarnico, L pa dogodek, da mu jo je ponudil Lojze. Naj bo B dogodek, da Miho boli glava. Iz besedila naloge razberemo, da je $P(J) = 0.6$

in $P(L) = 0.3$. Dogodki $H_0 = \overline{J}\overline{L}$, $H_1 = J\overline{L}$, $H_2 = \overline{J}L$ in $H_3 = JL$ tvorijo popoln sistem dogodkov. Ker sta dogodka J in L neodvisna, velja

$$\begin{aligned}
P(H_0) &= P(\overline{J}\overline{L}) = P(\overline{J})P(\overline{L}) = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28,\\
P(H_1) &= P(J\overline{L}) = P(J)P(\overline{L}) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42,\\
P(H_2) &= P(\overline{J}L) = P(\overline{J})P(L) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12,\\
P(H_3) &= P(JL) = P(J)P(L) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18.
\end{aligned}$$

Prav tako iz besedila naloge razberemo še, da je $P(B \mid H_0) = 0.4$, $P(B \mid H_1) = 0.8$, $P(B \mid H_2) = 0.8$ in $P(B \mid H_3) = 1$. Z uporabo izreka o popolni verjetnosti dobimo

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \mid H_0)P(H_0) + P(B \mid H_1)P(H_1) + P(B \mid H_2)P(H_2) + P(B \mid H_3)P(H_3) =\\
&= 0.4 \cdot 0.28 + 0.8 \cdot 0.42 + 0.8 \cdot 0.12 + 1 \cdot 0.18 =\\
&= 0.112 + 0.336 + 0.096 + 0.18 =\\
&= 0.724.
\end{aligned}$$

Iščemo $P(J \mid B) = P(H_1 \cup H_3 \mid B)$, kar je po Bayesovi formuli enako

$$P(J \mid B) = P(H_1 \cup H_3 \mid B) = \frac{P(B \mid H_1 \cup H_3)P(H_1 \cup H_3)}{P(B)}.$$

Ker je po formuli za unijo hipotez

$$P(B \mid H_1 \cup H_3) = \frac{P(B \mid H_1)P(H_1) + P(B \mid H_3)P(H_3)}{P(H_1) + P(H_3)} = \frac{P(B \mid H_1)P(H_1) + P(B \mid H_3)P(H_3)}{P(H_1 \cup H_3)},$$

je

$$\begin{aligned}
P(J \mid B) &= \frac{\frac{P(B \mid H_1)P(H_1) + P(B \mid H_3)P(H_3)}{P(H_1 \cup H_3)} P(H_1 \cup H_3)}{P(B)} =\\
&= \frac{P(B \mid H_1)P(H_1) + P(B \mid H_3)P(H_3)}{P(B)} =\\
&= \frac{0.336 + 0.18}{0.724} = \frac{0.516}{0.724} = 0.7127.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 73.

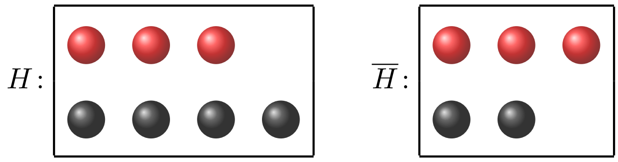
Naj bo A dogodek, da je izdelek izdelan na stroju $\mathcal{A}$, B dogodek, da je izdelan na stroju $\mathcal{B}$, in C dogodek, da je izdelan na stroju $\mathcal{C}$. Potem je $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ in $P(C) = 0.5$. Dogodki A, B in C tvorijo popoln sistem dogodkov. Naj bo D dogodek, da ima izdelek napako. Iz podatkov naloge razberemo še, da je $P(D \mid A) = 0.05$, $P(D \mid B) = 0.03$ in $P(D \mid C) = 0.01$. Iščemo $P(C \mid D)$, ki je po Bayesovi formuli enaka

$$\begin{aligned}
P(C \mid D) &= \frac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)} =\\
&= \frac{P(D \mid C)P(C)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C)} =\\
&= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.05 \cdot 0.2 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.5} =\\
&= \frac{0.005}{0.01 + 0.009 + 0.005} = \frac{0.005}{0.024} = \frac{5}{24} = 0.2083.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 76.

Naj bo H dogodek, da je pri metu kovanca padla cifra, $\overline{H}$ pa dogodek, da je padel grb. Potem je $\{H, \overline{H}\}$ popoln sistem dogodkov. Seveda je $P(H) = P(\overline{H}) = \frac{1}{2}$. Označimo še z A dogodek, da je drugi igralec iz žare izvlekel dve črni kroglici, z B pa dogodek, da je izvlekel vsaj eno črno kroglico.



a. Če si ogledamo, kako izgleda škatla s kroglicami v primeru, da se zgodi H ali $\overline{H}$, vidimo, da je

$$P(A\,|\,H) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7} \quad \text{in} \quad P(A\,|\,\overline{H}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Iščemo $P(A)$, ki je po izreku o popolni verjetnosti enaka

$$P(A) = P(A\,|\,H)P(H) + P(A\,|\,\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{7} + \frac{1}{20} = \frac{27}{140} = 0.1929.$$

b. V tem primeru si raje oglejmo dogodek $\overline{B}$, da igralec izvleče dve rdeči kroglici. Kot v prejšnji točki ugotovimo, da je

$$P(\overline{B}\,|\,H) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{7} \quad \text{in} \quad P(\overline{B}\,|\,\overline{H}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Po izreku o popolni verjetnosti je

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B}\,|\,H)P(H) + P(\overline{B}\,|\,\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{14} + \frac{3}{20} = \frac{31}{140},$$

zato je $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{31}{140} = \frac{109}{140} = 0.7786$.

c. Iščemo $P(B\,|\,H)$. Ker smo že izračunali $P(\overline{B}\,|\,H)$, dobimo

$$P(B\,|\,H) = 1 - P(\overline{B}\,|\,H) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0.8571.$$

d. V tem primeru nas zanima $P(H\,|\,B)$, zato uporabimo Bayesovo formulo:

$$P(H\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,H)P(H)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{109}{140}} = \frac{6\cdot 140}{7\cdot 2\cdot 109} = \frac{60}{109} = 0.5505.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 78.

Naj bo S dogodek, da je naključno izbrano elektronsko sporočilo nezaželjeno in I dogodek, da sporočilo v naslovu vsebuje besedo *invoice*. Potem je $P(S) = 0.53$ in $P(I\,|\,S) = 0.26$. Dogodka S in $\overline{S}$ tvorita popoln sistem dogodkov.

a. Iz besedila naloge razberemo, da je $P(I) = 0.14$. Iščemo $P(S\,|\,I)$, zato bomo uporabili Bayesovo formulo:

$$P(S\,|\,I) = \frac{P(I\,|\,S)P(S)}{P(I)} = \frac{0.26\cdot 0.53}{0.14} = 0.9843.$$

b. Za primer nabavnega referenta velja $P(I|\overline{S}) = 0.1$. Zanima nas $P(S|I)$, zato spet uporabimo Bayesovo formulo, le da moramo tokrat na novo izračunati $P(I)$ s pomočjo izreka o popolni verjetnosti:

$$\begin{aligned} P(S\,|\,I) &= \frac{P(I\,|\,S)P(S)}{P(I)} = \frac{P(I\,|\,S)P(S)}{P(I\,|\,S)P(S) + P(I\,|\,\overline{S})P(\overline{S})} = \\ &= \frac{0.26\cdot 0.53}{0.26\cdot 0.53 + 0.1\cdot 0.47} = \frac{0.1378}{0.1848} = 0.7457. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 99.

Naj bo A dogodek, da z 2 razlike zmaga Aleš, in $\overline{A}$ dogodek, da z 2 razlike zmaga Bojan. Zanima nas $P(A) = p$. Naj bo še D dogodek, da Aleš dobi posamezen niz. Potem je $P(D) = \frac{1}{3}$. Premislimo, kdaj in s kakšno verjetnostjo bo Aleš zmagal. Če ima srečo, bo dobil prva dva niza in zmagal z verjetnostjo

$$P(D) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Če ima nekaj manj sreče, bo dobil enega od prvih dveh nizov, Bojan pa drugega, kar se zgodi z verjetnostjo

$$P(D) \cdot P(\overline{D}) + P(\overline{D}) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

V tem primeru lahko prva dva niza ignoriramo in vemo, da bo v nadaljevanju Aleš zmagal z verjetnostjo p. Lahko pa ima Aleš smolo in prva dva niza izgubi. V tem primeru seveda zmaga Bojan. Aleš torej zmaga z verjetnostjo

$$p = \frac{1}{9} + \frac{4}{9}p.$$

Iz dobljene enačbe lahko izrazimo $p = \frac{1}{5}$, torej je verjetnost, da Aleš zmaga z 2 razlike, enaka $\frac{1}{5} = 0.2$.

Sporoči napako

4. Diskretne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Rešitev naloge 101.

Pri metu dveh kock je vsota pik celo število med 2 in 12. Možne vsote najlažje ponazorimo s tabelo:

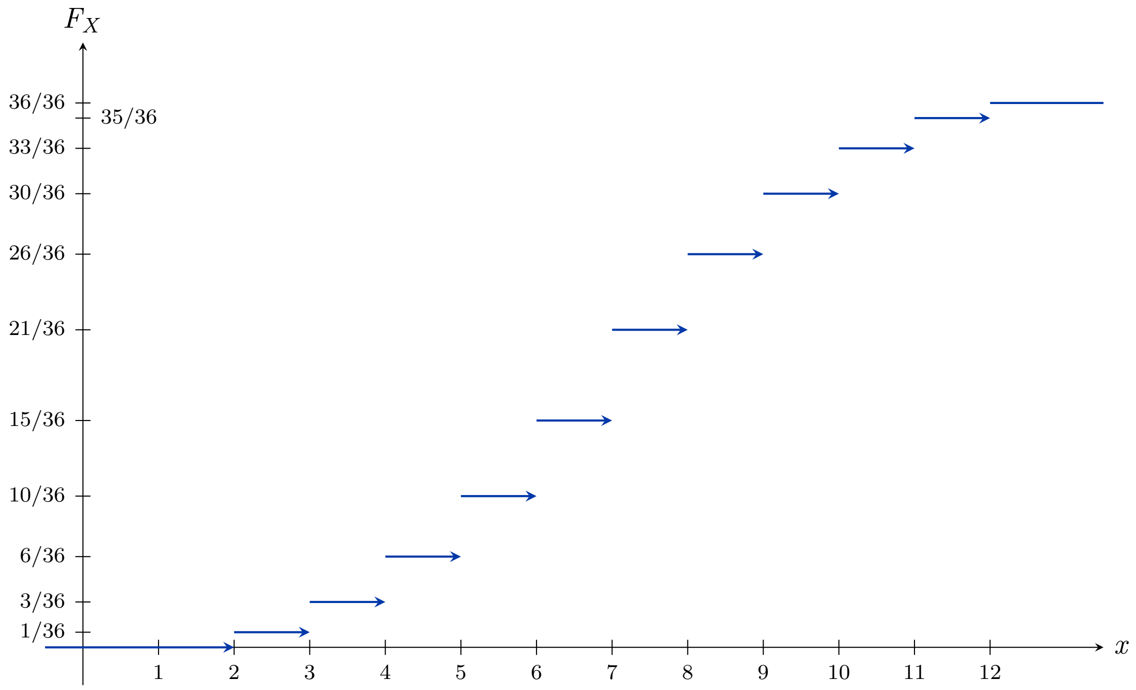
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Za vsakega od možnih izidov pogledamo, kolikokrat se v zgornji tabeli pojavi. Če se pojavi k-krat, potem je ustrezna verjetnost $\frac{k}{36}$. Porazdelitev spremenljivke X je torej enaka

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = P(X \leq x)$ dobimo tako, da seštejemo verjetnosti vseh izidov, ki so manjši ali enaki x. Torej je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{6}{36}, & 4 \leq x < 5, \\ \frac{10}{36}, & 5 \leq x < 6, \\ \frac{15}{36}, & 6 \leq x < 7, \\ \frac{21}{36}, & 7 \leq x < 8, \\ \frac{26}{36}, & 8 \leq x < 9, \\ \frac{30}{36}, & 9 \leq x < 10, \\ \frac{33}{36}, & 10 \leq x < 11, \\ \frac{35}{36}, & 11 \leq x < 12, \\ 1, & 12 \leq x. \end{cases}$$



Sporoči napako

Rešitev naloge 102.

a. Graf porazdelitvene funkcije je na prvi sliki. Funkcija z druge slike ni naraščajoča, funkcija na tretji sliki ni z leve zvezna, funkcija na četrti sliki pa zavzame vrednosti, večje od 1.
b. Vrednosti koordinate x, pri katerih ima graf porazdelitvene funkcije skok, so vrednosti, ki jih spremenljivka X lahko zavzame, velikosti skokov pa verjetnosti, s katero se posamezna vrednost pojavi. Torej je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

c. Dogodek $X \leq 2$ je unija nezdružljivih dogodkov $X = 1$ in $X = 2$, zato je

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.2 + 0.2 = 0.4.$$

Seveda pa bi lahko odgovor prebrali kar iz grafa, ker je

$$P(X \leq 2) = F_X(2) = 0.4.$$

Če upoštevamo, da je $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$, dobimo

$$\begin{aligned} P(-3 < X < 4) &= P(X < 4) - P(X \leq -3) = \\ &= P(X \leq 3) - P(X \leq -3) = \\ &= F_X(3) - F_X(-3) = \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

Podobno je

$$\begin{aligned} P(2.3 \leq X \leq 10) &= P(X \geq 2.3) = \\ &= 1 - P(X < 2.3) = \\ &= 1 - P(X \leq 2) = \\ &= 1 - 0.4 = \\ &= 0.6. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 104.

a. Spremenljivka X ima porazdelitev

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ c & 4c & 9c & 16c \end{pmatrix}.$$

Iz pogoja $c + 4c + 9c + 16c = 1$ dobimo $c = \frac{1}{30}$. Porazdelitev je torej

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{30} & \frac{4}{30} & \frac{9}{30} & \frac{16}{30} \end{pmatrix}.$$

b. S pomočjo porazdelitvene tabele za X dobimo

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \\ &= 1 - \frac{1}{30} - \frac{4}{30} = \\ &= \frac{25}{30} \end{aligned}$$

ali pa

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \\ &= \frac{9}{30} + \frac{16}{30} = \\ &= \frac{25}{30}. \end{aligned}$$

c. Vrednost $F_X(x)$ dobimo tako, da seštejemo vrednosti $\frac{k}{30}$ za vse $k \in \{1,2,3,4\}$, ki so manjši ali enaki x. Torej je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{30}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{5}{30}, & 2 \le x < 3, \\ \frac{14}{30}, & 3 \le x < 4, \\ 1, & 4 \le x. \end{cases}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 106.

a. Naj bo A dogodek, da pri metu kocke pade liho pik. Potem je $P(A) = \frac{1}{2}$ in slučajna spremenljivka X_1 šteje, kolikokrat se v štirih ponovitvah poskusa zgodi dogodek A. Zato je $X_1 \sim B(4, \frac{1}{2})$. Verjetnosti izračunamo po formuli

$$P(X_1 = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Na primer, pri $k = 2$ dobimo

$$P(X_1 = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16}.$$

Porazdelitev spremenljivke X_1 je zato

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

b. Naj bo A dogodek, da pri metu standardne kocke pade šestica. Potem je $P(A) = \frac{1}{6}$ in slučajna spremenljivka X_2 šteje število ponovitev poskusa, dokler se ne zgodi A. Zato je $X_2 \sim G(\frac{1}{6})$. Verjetnosti izračunamo po formuli

$$P(X_2 = k) = (1-p)^{k-1} p,$$

kjer je $k = 1, 2, \ldots$. Dobimo

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= \frac{1}{6}, \\ P(X_2 = 2) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}, \\ P(X_2 = 3) &= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke X_1 je zato

$$X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \cdots \end{pmatrix}.$$

c. Za razliko od prejšnjega primera tu poskus ponavljamo, dokler šestica ne pade desetkrat, zato je X_3 negativno binomsko porazdeljena kot $X_3 \sim P(10, \frac{1}{6})$. Verjetnosti izračunamo po formuli

$$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n$$

za $k = 10, 11, \ldots$, pri čemer je $n = 10$. Dobimo

$$\begin{aligned} P(X_3 = 10) &= \binom{9}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{6^{10}}, \\ P(X_3 = 11) &= \binom{10}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{50}{6^{11}}, \\ P(X_3 = 12) &= \binom{11}{9}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1375}{6^{12}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke X_3 je zato

$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & \cdots \\ \frac{1}{6^{10}} & \frac{50}{6^{11}} & \frac{1375}{6^{12}} & \cdots \end{pmatrix}.$$

d. Slučajna spremenljivka X_4 šteje število pikov med $n = 7$ kartami, ki jih izvlečemo iz kupčka $R + B = 16$ kart z $R = 4$ piki in $B = 12$ ostalimi kartami, zato je porazdeljena hipergeometrijsko, $X_4 \sim H(4, 12, 7)$. Verjetnosti izračunamo po formuli

$$P(X = k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{R+B}{n}}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dobimo

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{12}{7}}{\binom{16}{7}} = \frac{792}{11440}, \\ P(X = 1) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{12}{6}}{\binom{16}{7}} = \frac{3696}{11440}, \\ P(X = 2) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{12}{5}}{\binom{16}{7}} = \frac{4752}{11440}, \\ P(X = 3) &= \frac{\binom{4}{3}\binom{12}{4}}{\binom{16}{7}} = \frac{1980}{11440}, \\ P(X = 4) &= \frac{\binom{4}{4}\binom{12}{3}}{\binom{16}{7}} = \frac{220}{11440}. \end{aligned}$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke X_4 je torej

$$X_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{792}{11440} & \frac{3696}{11440} & \frac{4752}{11440} & \frac{1980}{11440} & \frac{220}{11440} \end{pmatrix}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 107.

a. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki šteje število avtomobilov, ki pripeljejo mimo v treh minutah. Potem je X Poissonova slučajna spremenljivka $P(\lambda)$ s parametrom

$$\lambda = \frac{100}{60} \cdot 3 = 5.$$

Iščemo verjetnost dogodka $X < 2$, ki je enaka

$$\begin{aligned} P(X<2) &= P(X=0)+P(X=1)= \\ &= \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}= \\ &= e^{-5}+5e^{-5}= \\ &= 6e^{-5}= \\ &= 0.0404. \end{aligned}$$

b. Iščemo verjetnost dogodka $X > 5$. Najprej izračunajmo

$$P(X \leq 5) = P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=4)+P(X=5).$$

Ker je $P(X=2)=\frac{25}{2}e^{-5}$, $P(X=3)=\frac{125}{6}e^{-5}$, $P(X=4)=\frac{625}{24}e^{-5}$ in $P(X=5)=\frac{3125}{120}e^{-5}$, dobimo

$$P(X \leq 5) = \frac{10970}{120}e^{-5} = 0.6160.$$

Od tu lahko sklepamo, da je $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0.3840$.

c. Naj slučajna spremenljivka Y šteje število avtomobilov, ki pripeljejo mimo v eni minuti. Potem je $Y \sim P(\frac{5}{3})$ in izračunamo

$$P(Y=0) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\frac{5}{3}} = 0.1889.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 121.

a. Označimo z L_i dogodek, da i-ti lokostrelec zadene tarčo. Potem je $P(L_1)=\frac{1}{2}$, $P(L_2)=\frac{1}{4}$ in $P(L_3)=\frac{1}{6}$. Seveda velja tudi $P(\overline{L}_1)=\frac{1}{2}$, $P(\overline{L}_2)=\frac{3}{4}$ in $P(\overline{L}_3)=\frac{5}{6}$. Slučajna spremenljivka X lahko zavzame vrednosti iz množice $\{0,1,2,3\}$. Za dogodke $X=k$ velja

$$\begin{aligned} (X=0) &= \overline{L_1 L_2 L_3}, \\ (X=1) &= L_1\overline{L_2 L_3} \cup \overline{L_1}L_2\overline{L_3} \cup \overline{L_1 L_2}L_3, \\ (X=2) &= \overline{L_1}L_2L_3 \cup L_1\overline{L_2}L_3 \cup L_1L_2\overline{L_3}, \\ (X=3) &= L_1L_2L_3, \end{aligned}$$

Ker so dogodki L_1, L_2 in L_3 neodvisni (in enako velja, če katerega od njih zamenjamo z nasprotnim dogodkom), lahko verjetnosti množimo. Ker so zgornji produkti dogodkov paroma nezdružljivi, lahko posamezne verjetnosti seštevamo. Dobimo

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{15}{48}, \\ P(X=1) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{23}{48}, \\ P(X=2) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{9}{48}, \\ P(X=3) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke X je torej

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{15}{48} & \frac{23}{48} & \frac{9}{48} & \frac{1}{48} \end{pmatrix}.$$

b. Verjetnost dogodka $X \geq 2$ lahko izračunamo kot

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{9}{48} + \frac{1}{48} = \frac{10}{48} = \frac{5}{24} = 0.2083.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 125.

Vse možne izide pri metu dveh kock lahko zberemo v tabeli. V vsakem polju tabele zapišemo, kakšno vrednost ima pri tem spremenljivka $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	2	3	4	5	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	4	5	6
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	6	6	6	6	6

Za vsakega od možnih izidov pogledamo, kolikokrat se v zgornji tabeli pojavi. Če se pojavi k-krat, potem je ustrezna verjetnost $\frac{k}{36}$. Porazdelitev spremenljivke X je torej enaka

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Sporoči napako

5. Zvezne slučajne spremenljivke in porazdelitve

Rešitev naloge 134.

a. Veljati mora

$$\int_0^1 p_X(x)dx = 1.$$

Ker je

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 p_X(x)\,dx = \int_0^1 cx(1-x)\,dx = c\int_0^1 x - x^2\,dx = \\ &= c\left(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = c\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) - c\left(\tfrac{0}{2} - \tfrac{0}{3}\right) = \tfrac{c}{6}, \end{aligned}$$

mora biti $c = 6$.

b. Porazdelitvena funkcija je za $x \in [0,1]$ enaka

$$F_X(x) = \int_0^x p_X(t)\,dt = 6\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = 3x^2 - 2x^3.$$

Torej je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

c. Z uporabo prejšnje točke dobimo

$$P(0 < X < \tfrac{1}{4}) = P(X < \tfrac{1}{4}) - P(X \leq 0) = F_X(\tfrac{1}{4}) - F_X(0) = \tfrac{3}{16} - \tfrac{2}{64} - 0 = \tfrac{5}{32}.$$

d. Nazadnje je še

$$P(\tfrac{1}{4} < X < 3) = P(X < 3) - P(X \leq \tfrac{1}{4}) = F_X(3) - F_X(\tfrac{1}{4}) = 1 - \tfrac{5}{32} = \tfrac{27}{32}.$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 135.

Najprej poiščimo porazdelitveno funkcijo F_X. Za $x \in [0, 1)$ velja

$$F_X(x) = \int_0^x \tfrac{2t}{3}\,dt = \tfrac{t^2}{3}\Big|_0^x = \tfrac{x^2}{3}.$$

Posebej je še $F_X(1) = \frac{1}{3}$. Za $x \in [1, 3]$ je

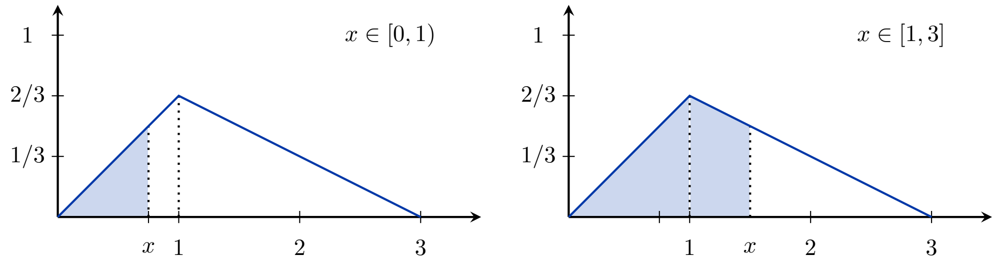
$$F_X(x) = F_X(1) + \int_1^x \left(-\tfrac{t}{3} + 1\right)\,dt = \tfrac{1}{3} + \left(t - \tfrac{t^2}{6}\right)\Big|_1^x = \tfrac{1}{3} + x - \tfrac{x^2}{6} - 1 + \tfrac{1}{6} = x - \tfrac{x^2}{6} - \tfrac{1}{2}.$$

Zdaj ko poznamo porazdelitveno funkcijo F_X, lahko izračunamo

$$P(0.5 < X < 1.5) = P(X < 1.5) - P(X \leq 0.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) =$$

$$= 1.5 - \tfrac{(1.5)^2}{6} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{(0.5)^2}{3} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{24} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{36-9-12-2}{24} = \tfrac{13}{24} = 0.5417.$$

Računanju integralov se lahko izognemo, če narišemo graf gostote p_X, ki je odsekoma linearna, in porazdelitveno funkcijo izračunamo kot ploščino pod grafom s pomočjo formule za ploščino trikotnika.



Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 141.

a. Dostavljenega goriva bo zmanjkalo, če bo $X > 950$. S pomočjo porazdelitvene funkcije izračunamo

$$\begin{aligned} P(X > 950) &= 1 - P(X \leq 950) = 1 - F_X(950) = \\ &= 1 - \tfrac{950}{1000} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{100-95+25}{100} = \tfrac{30}{100} = 0.3. \end{aligned}$$

b. Gostoto verjetnosti p_X dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije F_X, torej je

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}, & 250 \leq x \leq 1250, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 142.

a. Pri $x = 2$ mora veljati $F_X(2) = 1$, zato je $2c = 1$ oziroma $c = \frac{1}{2}$.
b. Gostoto p_X dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije F_X. Torej je

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

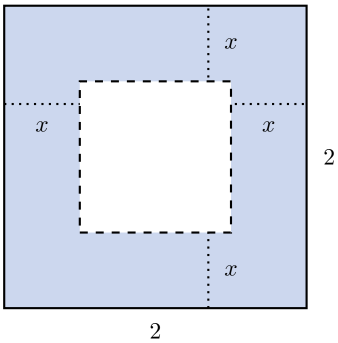
c. Izračunamo

$$\begin{aligned} P(|X|<1) &= P(-1<X<1) = P(X<1) - P(X\leq -1) = \\ &= F_X(1) - F_X(-1) = \tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 143.

a. Najprej narišimo skico. Izbrana točka bo od stranice kvadrata oddaljena manj kot x, če se bo nahajala v pobarvanem območju.



Verjetnost, da je točka od stranice oddaljena manj kot x, je enaka razmerju ploščin osenčenega dela in celotnega kvadrata,

$$P(X<x) = \tfrac{4-(2-2x)^2}{4} = \tfrac{4-(4-8x+4x^2)}{4} = \tfrac{8x-4x^2}{4} = 2x - x^2.$$

Torej je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 2x-x^2, & 0\leq x\leq 1, \\ 1, & 1<x. \end{cases}$$

b. Gostoto verjetnosti p_X dobimo tako, da porazdelitveno funkcijo F_X odvajamo. Torej je

$$p_X(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0\leq x\leq 1, \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

c. S pomočjo porazdelitvene funkcije lahko izračunamo

$$P(X<\tfrac{1}{2}) = F_X(\tfrac{1}{2}) = 2\cdot\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 144.

Profesor lahko na fakulteto pride od 0 do 15 minut pred začetkom predavanj, zato je zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X interval $[0,15]$. Ker so vse vrednosti na tem intervalu enako verjetne, je $X\sim U[0,15]$. Gostota verjetnosti je zato funkcija

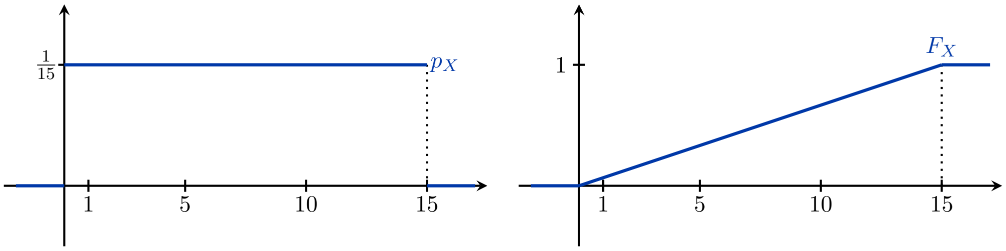
$$p_X(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{15}, & 0\leq x\leq 15, \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Za $x\in[0,15]$ je

$$F_X(x) = \int_0^x p_X(t)\,dt = \int_0^x \tfrac{1}{15}\,dt = \tfrac{t}{15}\Big|_0^x = \tfrac{x}{15}.$$

Porazdelitvena funkcija je torej enaka

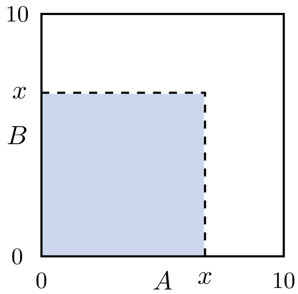
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{15}, & x \in [0, 15], \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$



Sporoči napako

Rešitev naloge 146.

Naj bo slučajna spremenljivka $A \in [0, 10]$ Anžetov čas prihoda, merjen v minutah po 18h. Podobno naj bo slučajna spremenljivka $B \in [0, 10]$ Brinin čas prihoda. Potem je $M = \max\{A, B\}$. Narišimo skico. Za poljuben $x \in [0, 10]$ je verjetnost, da je $M < x$, enaka razmerju ploščine osenčenega območja in plošine celotnega kvadrata.



Torej je $F_M(x) = P(M < x) = \frac{x^2}{100}$. Gostoto verjetnosti p_M dobimo tako, da F_M odvajamo, zato je $p_M(x) = \frac{x}{50}$. Natančneje,

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{100}, & x \in [0, 10], \\ 1, & x > 10. \end{cases} \quad \text{in} \quad p_M(x) = \begin{cases} \frac{x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 149.

a. Če bankomat na uro v povprečju obišče 15 ljudi, to pomeni v povprečju en obisk na 4 minute oziroma $\frac{1}{4}$ obiska na minuto. Naj slučajna spremenljivka X meri čas med dvema zaporednima dvigoma. Potem je X porazdeljena eksponentno s parametrom $\lambda = \frac{1}{4}$, $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{4})$.
b. S pomočjo porazdelitvene funkcije eksponentne slučajne spremenljivke $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ izračunamo

$$P(X < 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\frac{1}{4} \cdot 2} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935.$$

c. Označimo iskano dolžino intervala z d. Za ta d mora veljati $P(X > d) = 0.75$. Ker je

$$P(X > d) = 1 - P(X < d) = 1 - F_X(d) = e^{-\frac{d}{4}},$$

dobimo enačbo $e^{-\frac{d}{4}} = 0.75$. Enačbo preoblikujemo,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{d}{4}} &= 0.75, \\ -\tfrac{d}{4} &= \ln(0.75), \\ d &= -4\ln(0.75), \\ d &= 1.1507. \end{aligned}$$

V času 1.15 minute torej z verjetnostjo 75 odstotkov ne bo nobenega dviga.

d. Naj bo Y slučajna spremenljivka, ki meri čas med dvema zaporednima dvigoma v času razprodaj. Ker je $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, je $Y \sim \text{Exp}(\frac{2}{3})$. Iščemo $P(Y < 2)$. Tokrat dobimo

$$P(Y < 2) = F_Y(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}\cdot 2} = 1 - e^{-\frac{4}{3}} = 0.7364.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 150.

a. Ker ima motor povprečno življenjsko dobo 15 let, je frekvenca okvar 1 na 15 let oziroma $\lambda = \frac{1}{15}$. Spremenljivka $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{15})$ ima porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{15}}$, torej je

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F_X(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{10}{15}}) = e^{-\frac{2}{3}} = 0.5134.$$

b. Če želimo oceniti, kako dolgo deluje 80 odstotkov vseh motorjev, moramo določiti interval, na katerem se z verjetnostjo 80 odstotkov naključno izbrani motor ne bo pokvaril. Iščemo torej d, za katerega velja $P(X > d) = 0.8$. Ker je

$$P(X > d) = 1 - P(X \leq d) = 1 - F_X(d) = 1 - (1 - e^{-\frac{d}{15}}) = e^{-\frac{d}{15}},$$

dobimo enačbo $e^{-\frac{d}{15}} = 0.8$ oziroma $d = -15\ln(0.8)$. Rešitev je torej $d = 3.35$.

c. V tem primeru je

$$\begin{aligned} P(15 < X < 20) &= P(X < 20) - P(X \leq 15) = F_X(20) - F_X(15) = \\ &= 1 - e^{-\frac{20}{15}} - (1 - e^{-\frac{15}{15}}) = -e^{-\frac{4}{3}} + e^{-1} = \\ &= 0.3679 - 0.2636 = 0.1043. \end{aligned}$$

Sporoči napako

6. Sredine

Rešitev naloge 153.

Porazdelitev slučajne spremenljivke X je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{3}{45} & \frac{4}{45} & \frac{5}{45} & \frac{6}{45} & \frac{7}{45} & \frac{8}{45} & \frac{9}{45} \end{pmatrix}.$$

Njeno matematično upanje je torej

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\cdot\tfrac{1}{45} + 2\cdot\tfrac{2}{45} + 3\cdot\tfrac{3}{45} + 4\cdot\tfrac{4}{45} + 5\cdot\tfrac{5}{45} + 6\cdot\tfrac{6}{45} + 7\cdot\tfrac{7}{45} + 8\cdot\tfrac{8}{45} + 9\cdot\tfrac{9}{45} = \\ &= \tfrac{1+4+9+16+25+36+49+64+81}{45} = \tfrac{285}{45} = \tfrac{19}{3}. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 155.

Ker je $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ in $\cos(0) = 1$, lahko spremenljivka $\cos(X)$ zavzame vrednosti -1 in 1. Pri tem je

$$P(\cos(X) = -1) = P(X = -\pi) + P(X = \pi) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}$$

in

$$P(\cos(X) = 1) = P(X = 0) = \tfrac{1}{3}.$$

Zato je

$$E(\cos(X)) = -1 \cdot \tfrac{2}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{3}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 156.

Ker je X zvezna slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & \text{sicer}, \end{cases}$$

je

$$E(X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \tfrac{1}{\pi}\, dx = \tfrac{1}{\pi} \cdot \tfrac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{\pi} \cdot \tfrac{\pi^2}{8} - \tfrac{1}{\pi} \cdot \tfrac{\pi^2}{8} = 0.$$

Poleg tega je

$$E(\cos(X)) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \tfrac{1}{\pi}\, dx = \tfrac{1}{\pi} \cdot \sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{\pi} \cdot 1 - \tfrac{1}{\pi} \cdot (-1) = \tfrac{2}{\pi}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 158.

Naj bo A dogodek, da ima nek par oseb enak izid. Verjetnost, da se to zgodi, je $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Vseh parov v množici n ljudi je $\binom{n}{2}$. Spremenljivka X je porazdeljena binomsko $B(\binom{n}{2}, \frac{1}{6})$, zato je njeno matematično upanje enako $E(X) = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{6}$.

Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo indikatorskih (Bernoullijevih) slučajnih spremenljivk. Za $k = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ naj bo X_k Bernoullijeva slučajna spremenljivka, ki ima vrednost 1, če imata osebi iz k-tega para enaka izida, ter 0, če se izida razlikujeta. Verjetnost, da sta izida enaka, je $\frac{1}{6}$, zato je

$$E(X_k) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 0 \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{6}.$$

Ker je $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{\binom{n}{2}}$, je

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{\binom{n}{2}}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \cdots + \tfrac{1}{6} = \binom{n}{2} \cdot \tfrac{1}{6}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 159.

Naj bo za $k = 1, 2, \ldots, 8$ slučajna spremenljivka X_k enaka 1, če se dvigalo ustavi v k-tem nadstropju in 0 sicer. Potem je

$$P(X_k = 0) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^n,$$

saj je X_k enak 0 takrat, ko vsak od n ljudi z verjetnostjo $\frac{7}{8}$ izbere nadstropje, različno od k. Ker je $P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0)$, dobimo porazdelitve

$$X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{7}{8}\right)^n & 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Matematično upanje teh spremenljivk je enako

$$E(X_k) = 0 \cdot \left(\tfrac{7}{8}\right)^n + 1 \cdot \left(1 - \left(\tfrac{7}{8}\right)^n\right) = 1 - \left(\tfrac{7}{8}\right)^n.$$

Naj bo slučajna spremenljivka X število postankov dvigala. Potem je

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_8$$

in je

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_8) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_8) = 8 \cdot (1 - (\tfrac{7}{8})^n).$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 160.

Pri metu dveh kock je vsota pik enaka 6 z verjetnostjo $\frac{5}{36}$ in 7 z verjetnostjo $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Zato je $X \sim G(\frac{5}{36})$ in $Y \sim G(\frac{1}{6})$. Ker je upanje geometrijske spremenljivke $G(p)$ enako $\frac{1}{p}$, je $E(X) = \frac{36}{5}$ in $E(Y) = \frac{6}{1} = 6$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 162.

a. Čas med dvema zaporednima klicema je porazdeljen eksponentno s parametrom

$$\lambda = \frac{96 \text{ klicev}}{8 \cdot 60 \text{ minut}} = \frac{1}{5} \frac{\text{klica}}{\text{minuto}}.$$

Torej $T \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{5})$.

b. Spomnimo se, da je za eksponentno porazdeljeno slučajno spremenljivko T porazdelitvena funkcija enaka $F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Verjetnost, da je čas med dvema zaporednima klicema večji od 5 minut, je torej enaka

$$P(T > 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - F_T(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 5}) = e^{-1} = 0.3679.$$

c. Iščemo pogojno verjetnost, da v desetih minutah ne bo nobenega klica, če vemo, da v prvih petih minutah ni bilo nobenega klica. Torej

$$\begin{aligned} P(T > 10 | T > 5) &= \frac{P(T > 10 \text{ in } T > 5)}{P(T > 5)} = \frac{P(T > 10)}{P(T > 5)} = \frac{1 - P(T < 10)}{e^{-1}} = \\ &= \frac{1 - F_T(10)}{e^{-1}} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 10})}{e^{-1}} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

d. Naj bo Y število klicev v pol ure. Potem je Y diskretna slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena po Poissonu s parametrom

$$\lambda = \frac{96 \text{ klicev}}{8 \cdot 60 \text{ minut}} \cdot 30\text{minut} = 6 \text{ klicev}.$$

Upanje Poissonove slučajne spremenljivke $P(\lambda)$ je enako λ, torej je $E(Y) = 6$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 163.

Naj bo slučajna spremenljivka D dobiček igralnice po eni igri. Če pade cifra dobi igralec 4 evre, plačal pa jih je a, zato je dobiček igralca $4-a$ evrov, dobiček igralnice pa $D=a-4$. Če pade grb, igralec ne dobi ničesar, plačal pa je a evrov, zato ima igralnica dobiček a. Zato je

$$D \sim \begin{pmatrix} a-4 & a \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pričakovani dobiček igralnice je torej

$$E(D) = (a-4)\cdot\tfrac{1}{2} + a\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{a}{2} - 2 + \tfrac{a}{2} = a-2.$$

Ker želimo, da je pričakovani dobiček enak 1, mora biti $a=3$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 172.

Naj bo X število žensk med izbranimi tekmovalci. Potem je $X \sim H(500, 750, 20)$. Matematično upanje hipergeometrijske slučajne spremenljivke $H(R, B, n)$ je enako $\frac{nR}{R+B}$, torej je

$$E(X) = \frac{20\cdot 500}{500+750} = \frac{10000}{1250} = \frac{1000}{125} = 8.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 173.

Verjetnost dogodka A, da pri enem poskusu potegnemo rdečo kroglico, je enaka $p=\frac{5}{12}$. Ta poskus ponovimo dvajsetkrat ($n=20$). Naj bo X slučajna spremenljivka, ki šteje število rdečih kroglic med 20 izvlečenimi. Potem je $X \sim B(n,p)$ in je njeno matematično upanje enako

$$E(X) = np = 20\cdot\tfrac{5}{12} = \tfrac{100}{12} = \tfrac{25}{3} = 8.33.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 176.

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki šteje število grbov pri metu treh kovancev. Verjetnost, da pade grb pri posameznem metu je $\frac{1}{2}$, zato je $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ oziroma

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Igralčev dobiček pri igri naj bo slučajna spremenljivka D. Njena porazdelitev je

$$D \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 10 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Matematično upanje te spremenljivke je enako

$$E(D) = -2\cdot\tfrac{1}{8} + 3\cdot\tfrac{3}{8} + 5\cdot\tfrac{3}{8} + 10\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{-2+9+15+10}{8} = \tfrac{32}{8} = 4.$$

Igra bo torej poštena, če igralec zanjo plača 4 evre.

Sporoči napako

Rešitev naloge 181.

Če ne bomo čakali pri nobenem semaforju, bomo na cilj prispeli že v 15 minutah, v najslabšem primeru pa bomo potrebovali $15+4=19$ minut. Zaloga vrednosti slučajne spremenljivke

X je torej enaka $\{15, 16, 17, 18, 19\}$. Za vsako od možnih vrednosti izračunajmo pripadajočo verjetnost:

$$\begin{aligned} P(X=15) &= \binom{4}{0}\left(\tfrac{2}{3}\right)^4\left(\tfrac{1}{3}\right)^0 = \tfrac{16}{81}, \\ P(X=16) &= \binom{4}{1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 = \tfrac{32}{81}, \\ P(X=17) &= \binom{4}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{24}{81}, \\ P(X=18) &= \binom{4}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^1\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{81}, \\ P(X=19) &= \binom{4}{4}\left(\tfrac{2}{3}\right)^0\left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \tfrac{1}{81}. \end{aligned}$$

Porazdelitev za X je torej

$$X \sim \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \frac{16}{81} & \frac{32}{81} & \frac{24}{81} & \frac{8}{81} & \frac{1}{81} \end{pmatrix}$$

in pričakovana vrednost je enaka

$$E(X) = 15 \cdot \tfrac{16}{81} + 16 \cdot \tfrac{32}{81} + 17 \cdot \tfrac{24}{81} + 18 \cdot \tfrac{8}{81} + 19 \cdot \tfrac{1}{81} = \tfrac{240+512+408+144+19}{81} = \tfrac{1323}{81} = \tfrac{49}{3}.$$

Sporoči napako

RešITEV NALOGE 184.

a. Matematično upanje spremenljivke X je

$$E(X) = 2 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.4 = 0.2 + 2.1 + 1.8 + 4 = 8.1.$$

Za izračun disperzije potrebujemo še porazdelitev spremenljivke X^2,

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 4 & 49 & 81 & 100 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ker je

$$E(X^2) = 4 \cdot 0.1 + 49 \cdot 0.3 + 81 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 = 0.4 + 14.7 + 16.2 + 40 = 71.3,$$

je

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 71.3 - (8.1)^2 = 71.3 - 65.61 = 5.69.$$

b. Ker je matematično upanje linearno, je

$$E(4X+2) = 4E(X) + 2 = 4 \cdot 8.1 + 2 = 34.4,$$

za disperzijo pa velja $D(aX+b) = a^2 D(X)$, torej je

$$D(4X+2) = 16D(X) = 91.04.$$

Sporoči napako

RešITEV NALOGE 185.

V tem primeru za izračun upanja in disperzije zvezne slučajne spremenljivke potrebujemo njeno gostoto verjetnosti, ki jo dobimo z odvajanjem porazdelitvene funkcije,

$$p_X(x) = \begin{cases} 6x+2, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Matematično upanje spremenljivke X je torej

$$E(X) = \int_0^{\frac{1}{3}} x(6x+2)\ dx = \int_0^{\frac{1}{3}} 6x^2 + 2x\ dx = \left(2x^3 + x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \tfrac{2}{27} + \tfrac{1}{9} - (0+0) = \tfrac{5}{27}.$$

Izračunajmo še $E(X^2)$. Spremenljivka X^2 ima enako porazdelitveno funkcijo kot X, le vrednosti so kvadrati vrednosti spremenljivke X, zato je

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\frac{1}{3}} x^2(6x+2)\ dx = \int_0^{\frac{1}{3}} 6x^3 + 2x^2\ dx = \left(\tfrac{3}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{81} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{27} - (0+0) = \tfrac{3}{162} + \tfrac{4}{162} = \tfrac{7}{162}. \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \tfrac{7}{162} - \tfrac{25}{729} = \tfrac{13}{1458}.$$

Standardni odklon $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ je enak

$$\sigma(X) = \sqrt{\tfrac{13}{1458}} = \tfrac{\sqrt{13}}{27\sqrt{2}} = 0.0944.$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 189.

Vemo, da je disperzija zvezne spremenljivke s porazdelitvijo $\chi^2(n)$ enaka $2n$, matematično upanje pa n, torej je $D(X) = 6$, $E(X) = 3$, $D(Y) = 10$ in $E(Y) = 5$. Ker sta X in Y neodvisni, sta tudi $3X$ in $-Y$ neodvisni. Sledi, da je

$$D(3X - Y) = D(3X) + D(-Y) = 9D(X) + D(Y) = 9 \cdot 6 + 10 = 64$$

in

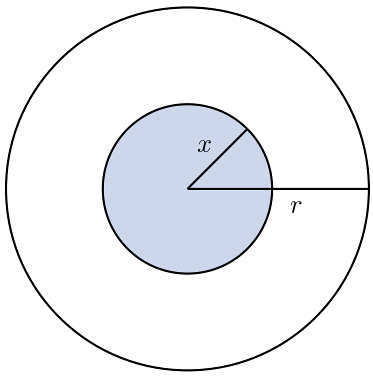
$$\begin{aligned} E((X+2Y)^2) &= E(X^2 + 4XY + 4Y^2) = \\ &= E(X^2) + 4E(XY) + 4E(Y^2) = \\ &= D(X) + E(X)^2 + 4E(X)E(Y) + 4D(Y) + 4E(Y)^2 = \\ &= 6 + 9 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 25 = \\ &= 15 + 60 + 40 + 100 = \\ &= 215. \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali, da je $E(X^2) = D(X) + E(X)^2$ in $E(Y^2) = D(Y) + E(Y)^2$ ter da zaradi neodvisnosti X in Y velja $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 200.

a. Najprej narišimo skico.



Ker je $F_X(x) = P(X \leq x)$, dobimo vrednosti porazdelitvene funkcije za $x \in [0, r]$ tako, da izračunamo razmerje ploščin kroga z radijem x in kroga z radijem r. Torej je

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \tfrac{\pi x^2}{\pi r^2} = \tfrac{x^2}{r^2}$$

in

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{r^2}, & x \in [0, r], \\ 1, & x > r. \end{cases}$$

Gostoto verjetnosti p_X dobimo tako, da porazdelitveno funkcijo odvajamo po spremenljivki x. Torej

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{r^2}, & x \in [0, r], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

b. Ker je matematično upanje linearno, je

$$E(T) = E(10(r - X)) = 10E(r) - 10E(X) = 10r - 10E(X).$$

Izračunajmo torej najprej

$$E(X) = \int_0^r x \cdot \tfrac{2x}{r^2}\, dx = \int_0^r \tfrac{2x^2}{r^2}\, dx = \tfrac{2x^3}{3r^2}\Big|_0^r = \tfrac{2r^3}{3r^2} = \tfrac{2r}{3}.$$

Tako je $E(T) = 10r - \frac{20r}{3} = \frac{10r}{3}$. Za disperzijo pa velja $D(T) = D(10(r - X)) = 100D(r - X) = 100D(X)$, torej moramo najprej izračunati $D(X)$. Za ta namen potrebujemo še

$$E(X^2) = \int_0^r x^2 \cdot \tfrac{2x}{r^2}\, dx = \int_0^r \tfrac{2x^3}{r^2}\, dx = \tfrac{x^4}{2r^2}\Big|_0^r = \tfrac{r^4}{2r^2} = \tfrac{r^2}{2}.$$

Potem je

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \tfrac{r^2}{2} - \tfrac{4r^2}{9} = \tfrac{9r^2 - 8r^2}{18} = \tfrac{r^2}{18}.$$

Sledi, da je $D(T) = \frac{100r^2}{18} = \frac{50r^2}{9}$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 202.

Ugotoviti moramo, kako je Z porazdeljena, torej kakšne vrednosti lahko zavzame in s kakšnimi verjetnostmi. Če je $Y = 0$, je $Z \in \{0, 1, 2\}$, če je $Y = 1$ pa je $Z \in \{1, 2, 3\}$. Zaloga vrednosti slučajne spremenljivke Z je torej $\{0, 1, 2, 3\}$. Upoštevamo še, da sta X in Y neodvisni in je zato $P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$, pa dobimo

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= P(X = 0, Y = 0) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{12} = \tfrac{3}{36}, \\
P(Z = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{5}{18} = \tfrac{10}{36}, \\
P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{12} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{9} + \tfrac{5}{36} = \tfrac{13}{36}, \\
P(Z = 3) &= P(X = 2, Y = 1) = \tfrac{5}{12} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{18} = \tfrac{10}{36},
\end{aligned}$$

Torej je

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{36} & \frac{10}{36} & \frac{13}{36} & \frac{10}{36} \end{pmatrix}.$$

Matematično upanje je zato

$$E(Z) = 0 \cdot \tfrac{3}{36} + 1 \cdot \tfrac{10}{36} + 2 \cdot \tfrac{13}{36} + 3 \cdot \tfrac{10}{36} = \tfrac{0+10+26+30}{36} = \tfrac{66}{36} = \tfrac{11}{6}.$$

Ker je $D(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$, izračunajmo naprej še

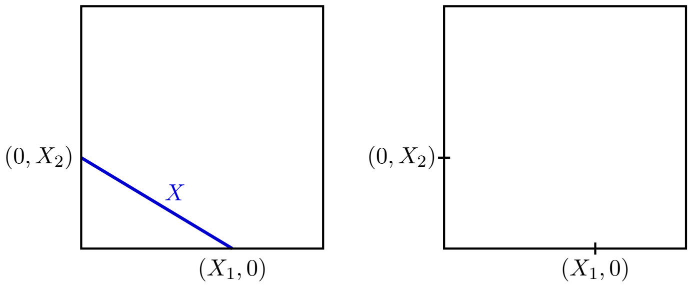
$$E(Z^2) = 0 \cdot \tfrac{3}{36} + 1 \cdot \tfrac{10}{36} + 4 \cdot \tfrac{13}{36} + 9 \cdot \tfrac{10}{36} = \tfrac{0+10+52+90}{36} = \tfrac{152}{36}.$$

Nazadnje je

$$D(Z) = \tfrac{152}{36} - \tfrac{121}{36} = \tfrac{31}{36}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 207.



Denimo, da ima točka, ki smo jo izbrali na spodnji stranici koordinate $(X_1, 0)$, točka na levi stranici pa $(0, X_2)$. Pri tem je $X_1, X_2 \sim U[0,1]$. Dolžina daljice med točkama je

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}.$$

Minimalna možna vrednost slučajne spremenljivke X je seveda 0, največja pa $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Določimo porazdelitveno funkcijo $F_X(t)$ za $t \in [0, \sqrt{2}]$. Ker je

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P\left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2} \leq t\right) = P\left(X_1^2 + X_2^2 \leq t^2\right),$$

mora pri fiksnem t točka (X_1, X_2) ležati znotraj kroga s središčem $(0,0)$ in radijem t, hkrati pa morata biti obe koordinati pozitivni, zato leži v pozitivnem kvadrantu (četrtini kroga). V splošnem leži točka (X_1, X_2) nekje znotraj kvadrata $[0,1]^2$. Iskana verjetnost je enaka razmerju ploščin, torej

$$F_X(t) = \frac{\frac{1}{4}\pi t^2}{1^2} = \tfrac{1}{4}\pi t^2.$$

Natančneje,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{4}\pi t^2, & t \in (0, \sqrt{2}], \\ 1, & 1 < t. \end{cases}$$

Gostoto verjetnosti $p_X(t)$ dobimo tako, da $F_X(t)$ odvajamo, torej

$$p_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi t, & t \in (0, \sqrt{2}], \\ 0, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Izračunajmo še porazdelitveno funkcijo $F_Y(t)$. Najprej je

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \leq t \,|\, X \leq 1) = \frac{P(X \leq t\,,\; X \leq 1)}{P(X \leq 1)}.$$

Če je $t \leq 1$, potem je produkt dogodkov $X \leq t$ in $X \leq 1$ kar dogodek $X \leq t$, zato je v tem primeru

$$F_Y(t) = \frac{P(X \leq t)}{P(X \leq 1)} = \frac{F_X(t)}{F_X(1)} = \frac{\frac{1}{4}\pi t^2}{\frac{1}{4}\pi 1^2} = t^2.$$

Če je $t > 1$, potem je produkt dogodkov $X \leq t$ in $X \leq 1$ kar dogodek $X \leq 1$, zato je v tem primeru

$$F_Y(t) = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = 1.$$

Torej je

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t^2, & t \in (0,1], \\ 1, & 1 < t. \end{cases}$$

Od tu lahko spet z odvajanjem izračunamo gostoto verjetnosti

$$p_X(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (0,1], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ko poznamo gostoto verjetnosti, pa lahko izračunamo

$$E(Y) = \int_0^1 t \cdot 2t\; dt = \int_0^1 2t^2\; dt = \tfrac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = \tfrac{2}{3},$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 t^2 \cdot 2t\; dt = \int_0^1 2t^3\; dt = \tfrac{1}{2}t^4\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

in nazadnje

$$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{9-8}{18} = \tfrac{1}{18}.$$

Sporoči napako

7. Slučajni vektorji in kovarianca

Rešitev naloge 209.

a. Ker sta X in Y neodvisni, morajo biti vrednosti v vseh poljih tabele produkti vrednosti z roba tabele, tj. $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$. Ker je $P(X=0) = 0.1$ in $P(X=0, Y=0) = 0.04$, mora biti $P(Y=0) = 0.4$. Podobno dobimo še $P(Y=1) = 0.4$ in $P(Y=2) = 0.2$. Ker je po drugi strani $0.4 = P(Y=0) = 0.04 + 0.12 + a$, dobimo $a = 0.24$. Ker je $P(Y=0) = 0.4$ in $P(X=1, Y=0) = 0.12$, mora biti $P(X=1) = 0.3$. Podobno dobimo še $P(X=2) = 0.6$. Zdaj pa lahko izračunamo še

$$\begin{aligned} d &= P(X=1,Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12, \\ e &= P(X=1,Y=2) = P(X=1)P(Y=2) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06, \\ b &= P(X=2,Y=1) = P(X=2)P(Y=1) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24, \\ c &= P(X=2,Y=2) = P(X=2)P(Y=2) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12. \end{aligned}$$

Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitvi

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

b. Slučajna spremenljivka $Z = X^2$ ima iste verjetnosti kot X, ustrezne vrednosti pa so kvadrirane. Torej

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Slučajna spremenljivka $W = X + Y$ ima zalogo vrednosti $\{0,1,2,3,4\}$. Izračunamo

$$\begin{aligned} P(W=0) &= P(X=0,Y=0) = 0.04, \\ P(W=1) &= P(X=0,Y=1) + P(X=1,Y=0) = 0.04 + 0.12 = 0.16, \\ P(W=2) &= P(X=0,Y=2) + P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=0) = \\ &= 0.02 + 0.12 + 0.24 = 0.38, \\ P(W=3) &= P(X=1,Y=2) + P(X=2,Y=1) = 0.06 + 0.24 = 0.30, \\ P(W=4) &= P(X=2,Y=2) = 0.12. \end{aligned}$$

Torej je

$$W \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.04 & 0.16 & 0.38 & 0.30 & 0.12 \end{pmatrix}.$$

c. Izračunamo

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1,1) &= P(X \leq 1, Y \leq 1) = \\ &= P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1) + P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=0) = \\ &= 0.04 + 0.04 + 0.12 + 0.12 = \\ &= 0.32. \end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 212.

a. Vsi elementi tabele so verjetnosti, zato mora veljati

$$0 \leq \frac{5}{6} - \frac{a}{6} - \frac{a^2}{3} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{a^2}{3} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{a}{6} \leq 1 \quad \text{in} \quad 0 \leq \frac{1}{6} \leq 1.$$

Zadnji par pogojev je vedno izpolnjen, iz drugega in tretjega para pogojev pa dobimo

$$0 \leq a \leq \sqrt{3} \quad \text{in} \quad 0 \leq a \leq 6.$$

Seveda je $a \leq 6$, če je $a \leq \sqrt{3}$, torej si moramo od teh dveh zapomniti samo prvi par pogojev,

$$0 \leq a \leq \sqrt{3}.$$

Oglejmo si še pogoja

$$0 \leq \frac{5}{6} - \frac{a}{6} - \frac{a^2}{3} \leq 1.$$

Najprej vse skupaj pomnožimo s 6:

$$0 \leq 5 - a - 2a^2 \leq 6.$$

Iz desne strani dobimo $5 - a - 2a^2 \leq 6$ oziroma

$$2a^2 + a + 1 \geq 0,$$

kar je vedno res, ker je vodilni koeficient pozitiven, diskriminanta $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1$ pa negativna. Iz leve strani dobimo $0 \leq 5 - a - 2a^2$ oziroma

$$2a^2 + a - 5 \leq 0.$$

Ker je $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 41$, sta rešitvi kvadratne enačbe $2a^2 + a - 5$ števili $a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$, in ker je vodilni koeficient negativen, ustrezajo neenačbi števila a, za katera je

$$a_1 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{4} \leq a \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{4} = a_2.$$

Ker je $a_1 < 0$ in $a_2 < \sqrt{3}$, dobimo v kombinaciji z zgoraj izpeljanimi pogoji nov pogoj,

$$0 \leq a \leq \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}.$$

Zlahka se prepričamo, da so za števila a, ki zadoščajo temu pogoju, tudi vse robne verjetnosti,

$$\frac{5-a}{6}, \frac{a+1}{6}, \frac{5-2a^2}{6} \quad \text{in} \quad \frac{2a^2+1}{6},$$

med 0 in 1. Rešitve so torej $a \in [0, \frac{-1+\sqrt{41}}{4}]$.

b. Porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y sta

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5-a}{6} & \frac{a+1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5-2a^2}{6} & \frac{2a^2+1}{6} \end{pmatrix}.$$

Seveda bosta X in Y enako porazdeljeni natanko takrat, ko bo $P(X=1) = P(Y=1)$. Drugi dve verjetnosti bosta v tem primeru avtomatično enaki, ker je vsota verjetnosti v obeh tabelah 1. Torej

$$\begin{aligned} \frac{5-a}{6} &= \frac{5-2a^2}{6}, \\ 5-a &= 5-2a^2, \\ 2a^2 &= a, \\ 2a^2-a &= 0, \\ a(2a-1) &= 0. \end{aligned}$$

Slučajni spremenljivki X in Y bosta torej enako porazdeljeni pri $a=0$ in $a=\frac{1}{2}$.

c. Slučajni spremenljivki bosta neodvisni natanko tedaj, ko bo veljalo

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

za vse $x, y \in \{1,2\}$. Pri $x=y=2$ dobimo pogoj

$$\frac{2a^2+1}{6} \cdot \frac{a+1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Pomnožimo s 36, odpravimo oklepaje in preoblikujemo, pa dobimo

$$\begin{aligned} (2a^2+1)(a+1) &= 6, \\ 2a^3+2a^2+a+1 &= 6, \\ 2a^3+2a^2+a-5 &= 0. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $a=1$ ničla tega polinoma tretje stopnje, z uporabo Hornerjevega algoritma pa brez težav poiščemo tudi kvocient, ki je polinom druge stopnje:

	2	2	1	−5
1		2	4	5
	2	4	5	0

Kvocient je torej $2a^2+4a+5$. Ker je diskriminanta tega kvadratnega polinoma $D = 16-40 < 0$, drugih realnih ničel ni. Edina možnost je $a=1$. Pri tej vrednosti a še preverimo, da je tudi

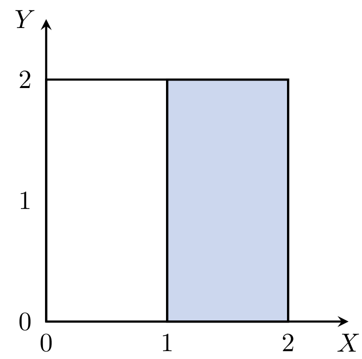
$$\begin{aligned} P(X=1,Y=1) &= \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(X=1)P(Y=1), \\ P(X=1,Y=2) &= \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(X=1)P(Y=2), \\ P(X=2,Y=1) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(X=2)P(Y=1). \end{aligned}$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta torej neodvisni pri $a=1$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 213.

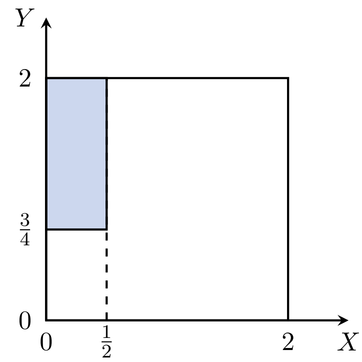
a. Slučajni vektor (X,Y) ima vrednosti na kvadratu $[0,2]^2$. Narišimo skico.



Ker je gostota verjetnosti konstantna, so vse točke v kvadratu enako verjetne, zato je $P(X>1) = \frac{1}{2}$. Seveda pa lahko do rezultata pridemo tudi računsko.

$$\begin{aligned}
P(X>1) &= \int_1^2 \left(\int_0^2 p_{X,Y}(x,y)\, dy\right) dx = \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{4}\, dy\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{y}{4}\right)\Big|_0^2 dx = \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\right)\Big|_1^2 = \\
&= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b. Tudi v tem primeru bi lahko nalogo rešili geometrijsko.



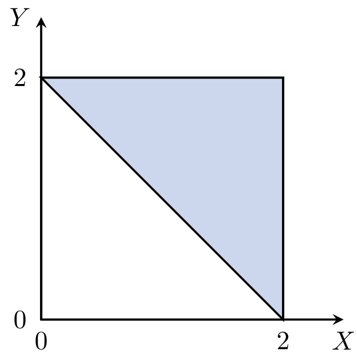
Pogojem ustreza pravokotno območje s stranicama $\frac{1}{2}$ in $\frac{5}{4}$, in ker so vse točke v kvadratu enako verjetne, je iskana verjetnost razmerje ploščine tega območja in ploščine celotnega kvadrata, torej

$$P(X \leq \frac{1}{2}, Y > \frac{3}{4}) = \frac{\frac{5}{8}}{4} = \frac{5}{32}.$$

Lahko pa izračunamo

$$\begin{aligned}
P(X \leq \frac{1}{2}, Y > \frac{3}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{1}{4}\, dy\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{4}\right)\Big|_{\frac{3}{4}}^2 dx = \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5}{16}\, dx = \\
&= \frac{5x}{16}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

c. Točke, ki ustrezajo pogoju $X+Y > 2$ ležijo v kvadratu nad diagonalo, ki ima enačbo $X + Y = 2$ oziroma $Y = 2 - X$, zato je $P(X+Y>2) = \frac{1}{2}$.



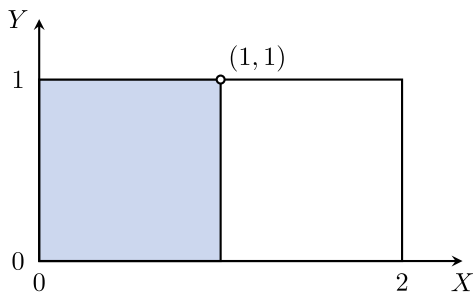
Če se odločimo za računsko pot, pa moramo po spremenljivki x integrirati od 0 do 2 in pri vsakem od teh x še po spremenljivki y od premice $y = x - 2$ do premice $y = 2$, zato dobimo

$$
\begin{aligned}
P(X+Y>2) &= \int_0^2 \left(\int_{2-x}^2 \frac{1}{4}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{y}{4} \right) \Big|_{2-x}^2 dx = \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2-x}{4} \right) dx = \int_0^2 \frac{x}{4}\, dx = \\
&= \frac{x^2}{8} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 214.

a. Točke (X, Y) ležijo v pravokotniku s stranicama 2 in 1. Vrednost $F_{X,Y}(x, y)$ nam pove, kako verjetno je, da točka (X, Y) leži levo in pod točko (x, y). S ploščinami si ne moremo pomagati, ker gostota verjetnosti ni konstantna in zato niso vse točke v pravokotniku enako verjetne.

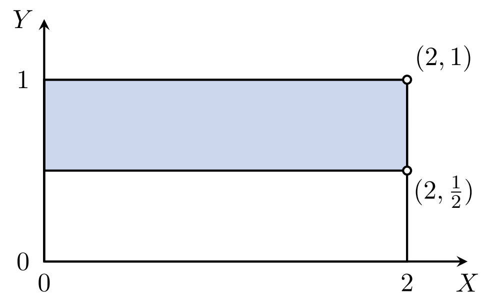


Upoštevamo, da ima pri pogoju $X<1$ spremenljivka Y poljubno vrednost, torej je $Y \leq 1$. Zato velja

$$
P(X<1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = F_{X,Y}(1,1) = \frac{1^2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{4}.
$$

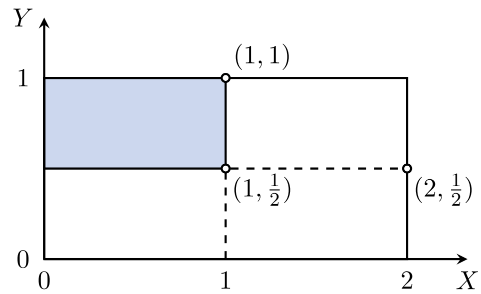
b. Podoben trik uporabimo v tem primeru, hkrati pa uporabimo še formulo za verjetnost nasprotnega dogodka. Dobimo

$$
\begin{aligned}
P(Y>\tfrac{1}{2}) &= 1 - P(Y \leq \tfrac{1}{2}) = 1 - P(X \leq 2, Y \leq \tfrac{1}{2}) = 1 - F_{X,Y}(2, \tfrac{1}{2}) = \\
&= 1 - \frac{2^2 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$



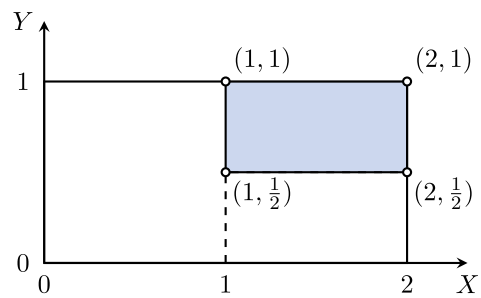
c. Tokrat je

$$\begin{aligned} P(X<1, Y>\tfrac{1}{2}) &= P(X\leq 1, Y\leq 1) - P(X\leq 1, Y\leq \tfrac{1}{2}) = \\ &= F_{X,Y}(1,1) - F_{X,Y}(1,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$



d. V tem primeru moramo celotnemu območju odšteti pravokotnika, ki imata desno zgornje oglišče v $(1,1)$ oziroma $(2,\frac{1}{2})$, vendar smo s tem območje, ki ima desno zgornje krajišče v $(1,\frac{1}{2})$ odšteli dvakrat. Če ga enkrat prištejemo nazaj, bomo dobili pravilni rezultat. Torej

$$\begin{aligned} P(X>1, Y>\tfrac{1}{2}) &= F_{X,Y}(2,1) - F_{X,Y}(1,1) - F_{X,Y}(2,\tfrac{1}{2}) + F_{X,Y}(1,\tfrac{1}{2}) = \\ &= 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$



Sporoči napako

Rešitev naloge 216.

a. Slučajna spremenljivka X ima zalogo vrednosti $\{0,1,2,3\}$, slučajna spremenljivka Y pa $\{0,1,2\}$. Dogodek $(X=0, Y=0)$ je dogodek, da izvlečemo tri bele kroglice (nič rdečih in nič črnih), zato je

$$P(X=0, Y=0) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{60}{990} = \frac{10}{165}.$$

Podobno izračunamo še

$$\begin{aligned}
P(X=0,Y=1) &= \frac{\binom{3}{1}\cdot 2\cdot 5\cdot 4}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{120}{990} = \frac{20}{165},\\
P(X=0,Y=2) &= \frac{\binom{3}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 5}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{30}{990} = \frac{5}{165},\\
P(X=1,Y=0) &= \frac{\binom{3}{1}\cdot 4\cdot 5\cdot 4}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{240}{990} = \frac{40}{165},\\
P(X=1,Y=1) &= \frac{3!\cdot 4\cdot 2\cdot 5}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{240}{990} = \frac{40}{165},\\
P(X=1,Y=2) &= \frac{\binom{3}{1}\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{24}{990} = \frac{4}{165},\\
P(X=2,Y=0) &= \frac{\binom{3}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 5}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{180}{990} = \frac{30}{165},\\
P(X=2,Y=1) &= \frac{\binom{3}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{72}{990} = \frac{12}{165},\\
P(X=2,Y=0) &= \frac{4\cdot 3\cdot 2}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{24}{990} = \frac{4}{165}.
\end{aligned}$$

Dobljene verjetnosti zberemo v tabelo.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{10}{165}$	$\frac{20}{165}$	$\frac{5}{165}$
1	$\frac{40}{165}$	$\frac{40}{165}$	$\frac{4}{165}$
2	$\frac{30}{165}$	$\frac{12}{165}$	0
3	$\frac{4}{165}$	0	0

Robni porazdelitvi sta

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{35}{165} & \frac{84}{165} & \frac{42}{165} & \frac{4}{165} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{28}{55} & \frac{24}{55} & \frac{3}{55} \end{pmatrix}.$$

Lahko pa bi seveda tudi opazili, da gre za hipergeometrijski porazdelitvi, in sicer je $X \sim H(4,7,3)$ ter $Y \sim H(2,9,3)$.

b. Slučajni spremenljivki X in Y bi bili neodvisni, če bi za vse $x \in \{0,1,2,3\}$ in vse $y \in \{0,1,2\}$ veljalo

$$P(X=x,Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

Ampak pri $x = 3$ in $y = 2$ (na primer) dobimo

$$0 = P(X=3,Y=2) \neq P(X=3)P(Y=2) = \frac{4}{165}\cdot\frac{3}{55},$$

zato X in Y nista neodvisni.

c. Vsota $X+Y$ ima zalogo vrednosti $\{0,1,2,3,4,5\}$. Izračunamo

$$\begin{aligned}
P(X+Y=0) &= \frac{10}{165},\\
P(X+Y=1) &= \frac{40}{165}+\frac{20}{165} = \frac{60}{165},\\
P(X+Y=2) &= \frac{30}{165}+\frac{40}{165}+\frac{5}{165} = \frac{75}{165},\\
P(X+Y=3) &= \frac{4}{165}+\frac{12}{165}+\frac{4}{165} = \frac{20}{165},\\
P(X+Y=4) &= 0+0 = 0,\\
P(X+Y=5) &= 0.
\end{aligned}$$

Torej je

$$X+Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{10}{165} & \frac{60}{165} & \frac{75}{165} & \frac{20}{165} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nalogo lahko rešimo tudi hitreje, če opazimo, da slučajna spremenljivka $X+Y$ šteje skupno število rdečih in črnih kroglic. Ker je teh kroglic skupaj 6, belih pa 5, je $X+Y \sim H(6,5,3)$.

d. Za izračun $F_{X,Y}(1,2)$ moramo sešteti verjetnosti vseh elementarnih dogodkov, pri katerih je $X \leq 1$ ter $Y \leq 2$. Za Y torej nimamo nobenih omejitev, saj je $Y \leq 2$ vedno res. Tako dobimo

$$F_{X,Y}(1,2) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{35}{165} + \frac{84}{165} = \frac{119}{165} = 0.7212.$$

e. Ker porazdelitev slučajne spremenljivke $X+Y$ že poznamo, ni težko izračunati

$$E(X+Y) = 1 \cdot \frac{60}{165} + 2 \cdot \frac{75}{165} + 3 \cdot \frac{20}{165} = \frac{270}{165} = 1.6364.$$

Poiščimo še porazdelitev slučajne spremenljivke XY. Hitro se lahko prepričamo, da je njena zaloga vrednosti enaka $\{0,1,2,3,4,6\}$. Nato pa izračunamo

$$\begin{aligned}
P(XY=0) &= \frac{10}{165} + \frac{40}{165} + \frac{30}{165} + \frac{4}{165} + \frac{20}{165} + \frac{5}{165} = \frac{109}{165}, \\
P(XY=1) &= \frac{40}{165}, \\
P(XY=2) &= \frac{12}{165} + \frac{4}{165} = \frac{16}{165}, \\
P(XY=3) &= 0, \\
P(XY=4) &= 0, \\
P(XY=6) &= 0.
\end{aligned}$$

Tako je

$$E(XY) = 1 \cdot \frac{40}{165} + 2 \cdot \frac{16}{165} = \frac{72}{165} = 0.4364.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 222.

a. Verjetnostna funkcija nam pove, kaj moramo zapisati v polja tabele, zato brez težav dobimo

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$

.

b. Za porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X moramo sešteti vrednosti po vrsticah. Dobimo

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

c. Za porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke Y moramo sešteti vrednosti po stolpcih. Dobimo

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d. Najprej poiščimo porazdelitev slučajne spremenljivke XY. Njena zaloga vrednosti je enaka $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, pripadajoče verjetnosti pa so

$$\begin{aligned}
P(XY! = 1) &= P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{18}, \\
P(XY! = 2) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{4}{18}, \\
P(XY! = 3) &= P(X = 1, Y = 3) = \frac{3}{18}, \\
P(XY! = 4) &= P(X = 2, Y = 2) = \frac{4}{18}, \\
P(XY! = 6) &= P(X = 2, Y = 3) = \frac{6}{18}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$XY \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \frac{1}{18} & \frac{4}{18} & \frac{3}{18} & \frac{4}{18} & \frac{6}{18} \end{pmatrix}$$

in

$$P(XY \geq 4) = P(XY = 4) + P(XY = 6) = \frac{10}{18}.$$

e. Ker za vse $x \in \{1, 2\}$ in vse $y \in \{1, 2, 3\}$ velja

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$

sta spremenljivki X in Y neodvisni.

f. Porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Y in XY že poznamo, zato zlahka izračunamo

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \\
E(Y) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{3}, \\
E(XY) &= 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 3 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{4}{18} + 6 \cdot \frac{6}{18} = \frac{35}{9}.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 225.

Ker je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \end{pmatrix},$$

je

$$E(X) = 0 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.35 = 1.7.$$

Ker je

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

je

$$E(Y) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 = 1.4.$$

Slučajna spremenljivka XY ima zalogo vrednosti $\{0, 1, 3, 4, 12\}$ s pripadajočimi verjetnostmi

$$\begin{aligned}
P(XY = 0) &= 0.05 + 0.1 + 0.2 + 0.15 + 0.2 = 0.7, \\
P(XY = 1) &= 0, \\
P(XY = 3) &= 0.15, \\
P(XY = 4) &= 0.1, \\
P(XY = 12) &= 0.05.
\end{aligned}$$

Zato je

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 12 \\ 0.7 & 0 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$$

in

$$E(XY) = 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.1 + 12 \cdot 0.05 = 1.45.$$

S temi podatki pa že lahko izračunamo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.45 - 1.7 \cdot 1.4 = -0.93.$$

Za izračun korelacijskega koeficienta potrebujemo še $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ in $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$. Ker je

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 16 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix},$$

je

$$E(X^2) = 0 \cdot 0.35 + 1 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.35 = 5.9$$

in

$$E(Y^2) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.4 = 3.8.$$

Zato je

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{5.9 - 1.7^2} = \sqrt{3.01} = 1.73$$

in

$$\sigma(Y) = \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2} = \sqrt{3.8 - 1.4^2} = \sqrt{1.84} = 1.36.$$

Nazadnje dobimo še

$$r(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-0.93}{1.73 \cdot 1.36} = 0.40.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 226.

Ker je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}, \; Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}, \; X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \; Y^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 = -0.2, \\ E(Y) &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9, \\ E(X^2) &= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6, \\ E(Y^2) &= 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.2 = 1.3. \end{aligned}$$

Slučajna spremenljivka XY lahko zavzame vrednosti -1, 0 in 1, vrednosti 2 in -2 pa zavzame z verjetnostjo 0, zato jih lahko ignoriramo. Njena porazdelitev je torej

$$XY \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

in zato je

$$E(XY) = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.1 = -0.1.$$

Zdaj lahko izračunamo

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.1 - (-0.2) \cdot 0.9 = 0.08.$$

Potrebujemo še

$$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{0.6 - (-0.2)^2} = \sqrt{0.56} = 0.75$$

in

$$\sigma(Y) = \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2} = \sqrt{1.3 - 0.9^2} = \sqrt{0.49} = 0.7,$$

da nazadnje dobimo

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0.08}{0.75 \cdot 0.7} = 0.15.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 227.

Najprej izračunamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(U,V) &= \operatorname{Cov}(aX+4Y, 3Y+aZ) = \\
&= E((aX+4Y)(3Y+aZ)) - E(aX+4Y)E(3Y+aZ) = \\
&= E(3aXY + a^2XZ + 12Y^2 + 4aYZ) - (aE(X)+4E(Y))(3E(Y)+aE(Z)) = \\
&= 3aE(XY) + a^2E(XZ) + 12E(Y^2) + 4aE(YZ) \\
&\quad -3aE(X)E(Y) - a^2E(X)E(Z) - 12E(Y)^2 - 4aE(Y)E(Z) = \\
&= 3a\operatorname{Cov}(X,Y) + a^2\operatorname{Cov}(X,Z) + 12\operatorname{Cov}(Y,Y) + 4a\operatorname{Cov}(Y,Z) = \\
&= 3a \cdot 4 + a^2 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1}{6} + 4a \cdot (-\tfrac{9}{4}) = \\
&= a^2 + 3a + 2 = \\
&= (a+1)(a+2).
\end{aligned}$$

Spremenljivki U in V bosta nekorelirani tedaj, ko bo $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$. Takrat bo namreč tudi

$$r(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(U,V)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0.$$

Iz pogoja $\operatorname{Cov}(U,V) = 0$ dobimo kvadratno enačbo, katere rešitvi sta $a = -1$ ter $a = -2$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 228.

Sporoči napako

Rešitev naloge 229.

Sporoči napako

Rešitev naloge 230.

Sporoči napako

Rešitev naloge 232.

Robni porazdelitvi sta

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Zato je $E(X) = E(Y) = 0$. Slučajna spremenljivka XY ima zalogo vrednosti $\{-1, 0, 1\}$ s pripadajočimi verjetnostmi

$$\begin{aligned}
P(XY=-1) &= 0.25, \\
P(XY=0) &= 0.5, \\
P(XY=1) &= 0.25,
\end{aligned}$$

zato je tudi $E(XY) = 0$. Od tod sledi

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$$

zato je tudi $r(X, Y) = 0$ in sta spremenljivki nekorelirani. Nista pa neodvisni, ker je

$$0.25 = P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)P(Y=1) = 0.25 \cdot 0.5.$$

Sporoči napako

8. Aproksimacija binomske porazdelitve

Rešitev naloge 233.

Naj bo X slučajna spremenljivka, ki šteje število grbov v 50 metih kovanca. Potem je $X \sim B(50, 0.4)$ (torej $n = 20$ in $p = 0.4$) in je

$$P(X=20) = \binom{50}{20}(0.4)^{20}(0.6)^{30} = 0.1146.$$

Ker je $np = 20$, bomo Poissonov približek dobili s pomočjo Poissonove slučajne spremenljivke $X_P \sim P(20)$. Velja

$$P(X=20) \approx P(X_Pe=20) = \frac{(20)^{20}}{20!}e^{-20} = 0.0888.$$

Vidimo, da približek ni preveč dober, kar je razumljivo. Res je namreč $n \geq 20$ vendar $p \notin (0, 0.05)$, hkrati pa tudi ni $n \geq 100$ in zato nismo v nobenem ob primerov, ko bi lahko pričakovali dober približek. Oglejmo si še Laplaceov pristop. Očitno velja $np = 20 \geq 10$ in $n(1-p) = 30 \geq 10$. Ker je $np(1-p) = 20 \cdot 0.6 = 12$, si tu ogledamo slučajno spremenljivko $X_L \sim N(20, \sqrt{12})$. Velja

$$P(X=20) \approx P(X_L=20) = \frac{e^{-(20-20)^2/(24)}}{\sqrt{24\pi}} = \frac{1}{\sqrt{24\pi}} = 0.1152.$$

Kot smo pričakovali, je ta približek veliko boljši.

Sporoči napako

Rešitev naloge 234.

Naj slučajna spremenljivka X šteje, kolikokrat smo zaklenili stanovanje pri 1000 odhodih. Potem je $X \sim B(n, p)$, kjer je $n = 1000$, $p = 0.99$ in

$$P(X=990) = \binom{1000}{990}(0.99)^{990}(0.01)^{10} = \mathrm{dbinom}(990, 1000, 0.99) = 0.1257.$$

Ker je $np = 990$, bomo za Poissonov približek uporabili slučajno spremenljivko $X_P \sim P(990)$. Dobimo

$$P(X=990) \approx P(X_P=990) = \frac{990^{990}}{990!}e^{-990} = \mathrm{dpois}(990, 990) = 0.0127.$$

Približek je razumljivo slab, ker ni izpolnjen noben od pogojev $p \in (0, 0.05)$ in $np \in (0, 10]$. Če namesto tega uporabimo slučajno spremenljivko X', ki šteje kolikokrat smo pozabili zakleniti stanovanje, pa je $X' \sim B(1000, 0.01)$, $X'_P \sim P(10)$ in dogodek $X=990$ je seveda enak dogodku $X'=10$, torej je

$$P(X=990) = P(X'=10) = P(X'_P=10) = \frac{10^{10}}{10!}e^{-10} = 0.1251.$$

Vidimo, da smo dobili dober približek, poleg tega pa smo ga lahko izračunali s kalkulatorjem, medtem ko smo za prejšnja računa morali uporabiti R. Prepričaj se, da sta v tem primeru izpolnjena oba pogoja, pri katerih je uporaben Poissonov približek.
Nazadnje si oglejmo še Laplaceov pristop. Očitno je $np = 990 \geq 10$ in $n(1-p) = 10 \geq 10$.

Ker je $np(1-p) = 9.9$, si pomagamo z normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko $X_N \sim N(990, \sqrt{9.9})$. Dobimo

$$P(X\!=\!990) \approx P(X_N\!=\!990) = \frac{e^{-(990-990)^2/19.8}}{\sqrt{19.8\pi}} = \frac{1}{\sqrt{19.8\pi}} = 0.1268.$$

Če je $p = 0.98$, potem je $X \sim B(1000, 0.98)$, $X'_P \sim P(20)$, $X_N \sim N(980, \sqrt{19.6})$ in

$$\begin{aligned}
P(X\!=\!990) &= \binom{1000}{990}(0.98)^{990}(0.02)^{10} = \mathrm{dbinom}(990, 1000, 0.98) = 0.0056,\\
P(X\!=\!990) &= P(X'\!=\!10) \approx P(X'_P\!=\!10) = \frac{(20)^{10}}{10!}e^{-20} = 0.0058,\\
P(X\!=\!990) &\approx P(X_N\!=\!990) = \frac{e^{-(990-980)^2/39.2}}{\sqrt{39.2\pi}} = \frac{e^{-2.55}}{\sqrt{39.2\pi}} = 0.0070.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 236.

Naj bo X_B število uspešnih poskusov. Potem je $X_B \sim B(n, p)$, kjer je $n = 800$ in $p = 0.9$. Zanima nas $P(X_B \geq 700)$. Spremenljivko X_B lahko aproksimiramo z normalno porazdeljeno spremenljivko $X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$, kjer je $np = 800 \cdot 0.9 = 720$ in $np(1-p) = 72$. Zato je

$$\begin{aligned}
P(X_B\!\geq\!700) &= 1 - P(X_B\!\leq\!699) = 1 - P(X_N\!\leq\!699.5) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{699.5-720}{\sqrt{72}}\right) =\\
&= 1 - \mathrm{F}(-2.42) = 1 - (1 - \mathrm{F}(2.42)) = \mathrm{F}(2.42) = 0.9922.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 237.

Naj slučajna spremenljivka X_B šteje število procesorjev z napako med 200 prodanimi procesorji. Potem je $X_B \sim B(n, p)$, kjer je $n = 200$ in $p = 0.05$. Zanima nas $P(X_B < k)$, kjer je $k = 0.04 \cdot 200 = 8$. Naj bo $X_N \sim N(\mu, \sigma)$ za $\mu = np = 10$ in $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{9.5}$. Potem je

$$\begin{aligned}
P(X_B\!<\!8) &= P(X_B\!\leq\!7) = P(X_N\!\leq\!7.5) = \mathrm{F}\left(\frac{7.5-10}{\sqrt{9.5}}\right) =\\
&= \mathrm{F}(-0.81) = 1 - \mathrm{F}(0.81) = 1 - 0.7910 = 0.2090.
\end{aligned}$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 239.

Naj slučajna spremenljivka X_B šteje število prvovrstnih izdelkov med n naročenimi. Potem je $X_B \sim B(n, p)$ za $p = 0.1$. Zanima nas verjetnost dogodka $X_B \geq 100$, ki jo lahko ocenimo s pomočjo normalno porazdeljene slučajne spremenljivke $X_N \sim N(\mu, \sigma)$, pri čemer je $\mu = np = \frac{n}{10}$ in

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\tfrac{9n}{100}} = \tfrac{3}{10}\sqrt{n}.$$

Iz ocene

$$\begin{aligned}
P(X_B\!\geq\!100) &= 1 - P(X_B\!\leq\!99) \approx 1 - P(X_N\!\leq\!99.5) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{99.5-\frac{n}{10}}{\frac{3}{10}\sqrt{n}}\right) =\\
&= 1 - \mathrm{F}\left(\frac{995-n}{3\sqrt{n}}\right) = 1 - \mathrm{F}\left(-\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right) =\\
&= 1 - \left(1 - \mathrm{F}\left(\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right)\right) = \mathrm{F}\left(\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

in pogoja $P(X_B \geq 100) \geq 0.95$ dobimo neenačbo

$$\mathrm{F}\left(\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right) \geq 0.95.$$

Upoštevamo, da je $\mathrm{F}(1.645) = 0.95$, pa dobimo

$$\frac{n-995}{3\sqrt{n}} \geq 1.645$$

oziroma $n - 995 \geq 4.935\sqrt{n}$. Če pripadajočo enakost $n - 995 = 4.935\sqrt{n}$ kvadriramo in preuredimo, dobimo kvadratno enačbo

$$n^2 - 2014.35n + 990025 = 0,$$

ki ima rešitvi $n_1 = 851.045$ in $n_2 = 1163.3$. Hitro se lahko prepričamo, da je pri $n = 1163$ iskana verjetnost enaka

$$P(X_B \geq 100) \approx \mathrm{F}\left(\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{1163-995}{3\sqrt{1163}}\right) = \mathrm{F}(1.64) = 0.9495$$

in pri $n = 1164$

$$P(X_B \geq 100) \approx \mathrm{F}\left(\frac{n-995}{3\sqrt{n}}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{1164-995}{3\sqrt{1164}}\right) = \mathrm{F}(1.65) = 0.9515.$$

Najmanjši n z iskano lastnostjo je torej $n = 1164$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 240.

Sporoči napako

9. Centralni limitni izrek

Rešitev naloge 247.

Naj bo slučajna spremenljivka X telesna višina, $X \sim N(\mu, \sigma)$.

a. Za normalno porazdelitev velja, da se 68.3% vrednosti nahaja na razdalji $\pm\sigma$ od pričakovane vrednosti μ. V tem primeru to pomeni, da ima 68.3% populacije višino na intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$.
b. Dobimo

$$0.5 = P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = \mathrm{F}\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= \mathrm{F}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \mathrm{F}\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\,\mathrm{F}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1.$$

Izkoristili smo dejstvo, da je $\mathrm{F}(-x) = 1 - \mathrm{F}(x)$. Tako je $\mathrm{F}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{3}{4}$, oziroma

$$\frac{\delta}{\sigma} = \mathrm{F}^{-1}(0.75) = 0.67.$$

Vrednost inverzne funkcije F^{-1} najdemo v tabeli standardne normalne porazdelitve: to je tisti x, za katerega je $\mathrm{F}(x) = 0.75$. Torej je $\delta = 0.67\sigma$.
c. Iz prejšnje točke je $P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = 0.5$, ali ekvivalentno

$$P(X \leq \mu - \delta) = 0.25,$$
$$P(X \leq \mu + \delta) = 0.75.$$

Torej, $\mu - \delta$ je 1. kvartil in $\mu + \delta$ 3. kvartil.

d. Dano je $P(\mu - q \leq X \leq \mu + q) = 0.9$, ali ekvivalentno

$$P(X \leq \mu - q) = 0.05,$$
$$P(X \leq \mu + q) = 0.95.$$

Torej je $\mu - q$ 5. percentil, $\mu + q$ pa 95. percentil porazdelitve. Določimo q.

$$0.9 = P(\mu - q \leq X \leq \mu + q) = \mathrm{F}\left(\frac{\mu + q - \mu}{\sigma}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{\mu - q - \mu}{\sigma}\right) =$$
$$= \mathrm{F}\left(\frac{q}{\sigma}\right) - \mathrm{F}\left(-\frac{q}{\sigma}\right) = 2\,\mathrm{F}\left(\frac{q}{\sigma}\right) - 1,$$

oziroma $\frac{q}{\sigma} = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$. Torej je $q = 1.645\sigma$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 252.

Naj bo X zgornji krvni pritisk pri ženskah starosti 18 do 25 let, $X \sim N(115, 14)$.

a. Verjetnost, da ima ženska v tej starosti zgornji krvni pritisk nižji od 90 je enaka

$$P(X < 90) = \mathrm{F}\left(\frac{90 - 115}{14}\right) = \mathrm{F}(-1.79) = 1 - \mathrm{F}(1.79) = 0.0367.$$

b. Želimo izračunati mejo a, za katero ima 5% žensk zgornji krvni pritisk a ali več:

$$0.05 = P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{a - 115}{14}\right),$$

oziroma $\mathrm{F}\left(\frac{a-115}{14}\right) = 0.95$. Dobimo

$$\frac{a - 115}{14} = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645.$$

Vrednost inverzne funkcije F^{-1} smo našli v tabeli standardne normalne porazdelitve: to je tisti x, za katerega je $\mathrm{F}(x) = 0.95$. Torej je meja a za zgornji krvni pritisk enaka

$$a = 1.645 \cdot 14 + 115 \approx 138.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 258.

Označimo z X_i dolžino i-tega skoka, $X_i \sim N(3.5, 0.5)$, $i = 1, 2, \ldots 500$. Vsota 500 skokov je slučajna spremenljivka $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500}$, ki je normalno porazdeljena. Velja

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots E(X_{500}) = 500 \cdot 3.5 = 1750,$$
$$D(S) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots D(X_{500}) = 500 \cdot 0.5^2 = 125,$$

od koder dobimo še $\sigma(S) = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Zato je $S \sim N(1750, 5\sqrt{5})$. Kenguru se bo ustavil na cesti, če bo $1760 \leq S \leq 1764$. Izračunamo

$$P(1760 \leq S \leq 1764) = \mathrm{F}\left(\frac{1764 - 1750}{5\sqrt{5}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1760 - 1750}{5\sqrt{5}}\right) = \mathrm{F}(1.25) - \mathrm{F}(0.89) =$$
$$= 0.8944 - 0.8133 = 0.0811.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 259.

Najprej izračunajmo pričakovano vrednost in disperzijo slučajne spremenljivke X_i, $1 \leq i \leq 100$

$$E(X_i) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2,$$
$$E(X_i^2) = 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.2 + 16 \cdot 0.1 = 5.$$

Dobimo $D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 1$. Potem sta pričakovana vrednost in disperzija vsote S enaki

$$E(S) = 100 \cdot E(X_i) = 200, D(S) = 100 \cdot D(X_i) = 100.$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S) = \sqrt{D(S)} = 10$. Centralni limitni izrek nam pove, da je vsota S približno normalno porazdeljena, $S \sim N(200, 10)$. Potem je

$$P(170 \leq S \leq 210) = \mathrm{F}\left(\frac{210 + 0.5 - 200}{10}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{170 - 0.5 - 200}{10}\right) = \mathrm{F}(1.05) - \mathrm{F}(-3.05) =$$
$$= \mathrm{F}(1.05) - (1 - \mathrm{F}(3.05)) = \mathrm{F}(1.05) + \mathrm{F}(3.05) - 1 = 0.8531 + 0.9989 - 1 = 0.852.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 261.

a. Pričakovani vrednosti X_i in X_i^2, $i = 1, 2, \ldots 100$, sta enaki

$$E(X_i) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2},$$
$$E(X_i^2) = \frac{1}{6} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) = \frac{91}{6}.$$

Dobimo $D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$.

b. Pričakovana vrednost in disperzija vsote S sta enaki

$$E(S) = 100 \cdot E(X_i) = 100 \cdot \frac{7}{2} = 350,$$
$$D(S) = 100 \cdot D(X_i) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3}.$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S) = \sqrt{\frac{875}{3}} = 5\sqrt{\frac{35}{3}}$. Po centralnem limitnem izreku je slučajna spremenljivka S približno normalno podazdeljena, $S \sim N\left(350, 5\sqrt{\frac{35}{3}}\right)$.

c. Pri računanju verjetnosti, da je S manjša od 320 ali večja od 370, bomo uporabili popravek za zveznost (vrednost 0.5) pri aproksimaciji njene porazdelitve z normalno porazdelitvijo.

$$P(S < 320 \text{ ali } S > 370) = 1 - P(320 \leq S \leq 370) =$$
$$= 1 - \left(\mathrm{F}\left(\frac{370 + 0.5 - 350}{5\sqrt{\frac{35}{3}}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{320 - 0.5 - 350}{5\sqrt{\frac{35}{3}}}\right)\right) = 1 - \mathrm{F}(1.20) + \mathrm{F}(-1.79) =$$
$$= 1 - \mathrm{F}(1.20) + 1 - \mathrm{F}(1.79) = 2 - \mathrm{F}(1.20) - \mathrm{F}(1.79) = 2 - 0.8849 - 0.9633 = 0.1518.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 262.

a. Označimo z X število potopov, ki so potrebni, da potapljač nabere 80 biserov. Slučajna spremenljivka X ima Pascalovo (negativno binomsko) porazdelitev, $X \sim P(80, 0.2)$ ($r = 80, p = 0.2$). Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X je enaka

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{80}{0.2} = 400.$$

b. Disperzija slučajne spremenljivke X je enaka

$$D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{80 \cdot 0.8}{0.04} = 1600,$$

in standardni odklon je $\sigma(X) = \sqrt{1600} = 40$.

Slučajno spremenljivko X lahko zapišemo kot vsoto geometrijsko porazdeljenih slučajnih spremenljivk, $X = U_1 + U_2 + \ldots U_{80}$, $U_i \sim G(0.2)$. Tu je U_i je število potopov, potrebnih, da potapljač najde i-ti biser.

Po centralnem limitnem izreku je vsota X približno normalno porazdeljena, $X \sim N(400, 40)$. Verjetnost, da je skupno število potopov večje od 450, je enaka

$$P(X > 450) = 1 - P(X \leq 450) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{450 + 0.5 - 400}{40}\right) = 1 - \mathrm{F}(1.26) =$$
$$= 1 - 0.8962 = 0.1038.$$

Ocenimo iskano verjetnost še na en način. Pri vsakem potopu potapljač nabere največ 1 biser. Označimo z Y_i število biserov v i-tem potopu. To je indikatorska slučajna spremenljivka z zakonom porazdelitve

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $S = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{450}$ število biserov po 450 potopih. Slučajna spremenljivka S ima binomsko porazdelitev, $S \sim B(450, 0.2)$. Pričakovana vrednost in disperzija slučajne spremenljivke S sta enaki

$$E(S) = np = 450 \cdot 0.2 = 90,$$
$$D(S) = np(1-p) = 450 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 72.$$

Standardni odklon vsote S je torej enak $\sigma(S) = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
Centralni limitni izrek nam pove, da je slučajna spremenljivka S približno normalno porazdeljena, $S \sim N(90, 6\sqrt{2})$. Ker se potapljač za 80 biserov potopi več kot 450-krat, velja, da najde v 450 potopih manj kot 80 biserov, zato je iskana verjetnost približno enaka

$$P(S < 80) = P(S \leq 79) = \mathrm{F}\left(\frac{79 + 0.5 - 90}{6\sqrt{2}}\right) = \mathrm{F}(-1.24) = 1 - \mathrm{F}(1.24) =$$
$$= 1 - 0.8925 = 0.1075.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 265.

a. Pričakovani vrednosti X_i in X_i^2 sta enaki

$$E(X_i) = -1 \cdot \frac{18}{37} + 1 \cdot \frac{19}{37} = \frac{1}{37},$$
$$E(X_i^2) = (-1)^2 \cdot \frac{18}{37} + 1 \cdot \frac{19}{37} = 1.$$

Potem je disperzija enaka $D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 1 - \frac{1}{37^2} = \frac{1368}{1369}$.

Vsota $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ predstavlja dobitek igralnice po n stavah s pričakovano vrednostjo in disperzijo

$$E(S_n) = n \cdot E(X_i) = \frac{n}{37},$$
$$D(S_n) = n \cdot D(X_i) = \frac{1368n}{1369},$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S_n) = \frac{6\sqrt{38n}}{37}$. Centralni limitni izrek nam pove, da je vsota S_n normalno porazdeljena, $S_n \sim N\left(\frac{n}{37}, \frac{6\sqrt{38n}}{37}\right)$.
Vsota $S_{20} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}$ predstavlja dobitek igralnice po 20 stavah. Izračunajmo verjetnost, da dobimo več denarja, kot vložimo v 20 stavah, oziroma, da je igralnica izgubila denar. Za $n = 20$ dobimo, da je $S_{20} \sim N\left(\frac{20}{37}, \frac{12\sqrt{190}}{37}\right)$ in

$$P(S_{20} < 0) = P(S_{20} \le -1) = \mathrm{F}\left(\frac{-1 + 0.5 - \frac{20}{37}}{\frac{12\sqrt{190}}{37}}\right) = \mathrm{F}(-0.23) =$$
$$= 1 - \mathrm{F}(0.23) = 1 - 0.591 = 0.409.$$

Vsota $S_{10000} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10000}$ predstavlja dobitek igralnice po 10000 stavah. Izračunajmo verjetnost, da dobimo več denarja, kot vložimo v 10000 stavah, oziroma, da je igralnica izgubila denar. Za $n = 10000$ dobimo, da je $S_{10000} \sim N\left(\frac{10000}{37}, \frac{600\sqrt{38}}{37}\right)$ in

$$P(S_{10000} < 0) = P(S_{10000} \le -1) = \mathrm{F}\left(\frac{-1 + 0.5 - \frac{10000}{37}}{\frac{600\sqrt{38}}{37}}\right) = \mathrm{F}(-2.71) =$$
$$= 1 - \mathrm{F}(2.71) = 1 - 0.9966 = 0.0034.$$

b. Naj bo $U_{20} = -S_{20}$ dobitek igralca v 20 stavah. Na osnovi centralnega limitnega izreka je U_{20} porazdeljena približno normalno, $U_{20} \sim N\left(-\frac{20}{37}, \frac{12\sqrt{190}}{37}\right)$. Upoštevali smo, da je $E(U_{20}) = -E(S_{20})$ in $D(U_{20}) = D(S_{20})$. Razpon dobitka igralca računamo okoli povprečnega dobitka, oziroma kot interval $I = \left[-\frac{20}{37} - a, -\frac{20}{37} + a\right]$. Iščemo tisto vrednost a, za katero je

$$P\left(-\frac{20}{37} - a \le U_{20} \le -\frac{20}{37} + a\right) = 0.9$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{-\frac{20}{37} + a + 0.5 - \left(-\frac{20}{37}\right)}{\frac{12\sqrt{190}}{37}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{-\frac{20}{37} - a - 0.5 - \left(-\frac{20}{37}\right)}{\frac{12\sqrt{190}}{37}}\right) = 0.9$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{-37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right) = 0.9$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right) - \left(1 - \mathrm{F}\left(\frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right)\right) = 0.9$$
$$\Longrightarrow 2\,\mathrm{F}\left(\frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right) - 1 = 0.9$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}}\right) = 0.95$$
$$\Longrightarrow \frac{37(a+0.5)}{12\sqrt{190}} = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$$
$$\Longrightarrow a = 6.85.$$

Razpon dobitka igralca je torej enak

$$I = \left[-\frac{20}{37} - 6.85, -\frac{20}{37} + 6.85\right] = [-7.39, 6.31].$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 266.

a. Označimo z X_i znesek i-te donacije, $i = 1, 2, \ldots, 100$, ki ima porazdelitveni zakon

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 20 & 50 & 100 \\ 0.25 & 0.6 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Pričakovani vrednosti X_i in X_i^2 sta enaki

$$E(X_i) = 20 \cdot 0.25 + 50 \cdot 0.6 + 100 \cdot 0.15 = 50,$$
$$E(X_i^2) = 400 \cdot 0.25 + 2500 \cdot 0.6 + 10000 \cdot 0.15 = 3100.$$

Disperzija je torej enaka $D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 3100 - 2500 = 600$. Označimo vsoto doniranih sredstev s $S = X_1 + X_2 + \ldots X_{100}$. Pričakovana vrednost in disperzija vsote S sta enaki

$$E(S) = 100 \cdot E(X_i) = 100 \cdot 50 = 5000,$$
$$D(S) = 100 \cdot D(X_i) = 100 \cdot 600 = 60000.$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S) = \sqrt{60000} = 100\sqrt{6}$.
Po centralnem limitnem izreku je vsota S približno normalno porazdeljena, $S \sim N(5000, 100\sqrt{6})$, zato je verjetnost, da bo vsota doniranih sredstev med 4500 in 5500 evrov, enaka

$$P(4500 \leq S \leq 5500) = \mathrm{F}\left(\frac{5500 + 0.5 - 5000}{100\sqrt{6}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{4500 - 0.5 - 5000}{100\sqrt{6}}\right) =$$
$$= \mathrm{F}(2.04) - \mathrm{F}(-2.04) = \mathrm{F}(2.04) - (1 - \mathrm{F}(2.04)) = 2\,\mathrm{F}(2.04) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0.9793 - 1 = 0.9586.$$

b. Naj bo S_n skupna vrednost donacij n gostov. Pričakovana vrednost in disperzija slučajne spremenljivke S_n sta enaki

$$E(S_n) = 50n,\ D(S_n) = 600n,$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S_n) = 10\sqrt{6n}$.
Iz centralnega limitnega izreka sledi, da je $S_n \sim N(50n, 10\sqrt{6n})$. Iz $P(S_n > 6000) \geq 0.95$ dobimo

$$1 - P(S_n \leq 6000) \geq 0.95$$
$$\Longrightarrow 1 - \mathrm{F}\left(\frac{6000 + 0.5 - 50n}{10\sqrt{6n}}\right) \geq 0.95$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}\left(\frac{6000.5 - 50n}{10\sqrt{6n}}\right) \leq 0.05$$
$$\Longrightarrow \frac{600.05 - 5n}{\sqrt{6n}} \leq \mathrm{F}^{-1}(0.05) = -1.645.$$

Zaradi simetričnosti normalne porazdelitve velja $\mathrm{F}^{-1}(0.05) = -\mathrm{F}^{-1}(0.95) = -1.645$. Vpeljemo novo spremenljivko $t = \sqrt{n}$ in dobimo kvadratno neenačbo

$$5t^2 - 1.645\sqrt{6}t - 600.05 \geq 0.$$

Kvadratna enačba $5t^2 - 1.645\sqrt{6}t - 600.05 = 0$ ima dve rešitvi $t_{1,2} = \frac{4.03 \pm 109.66}{10}$. Mi potrebujemo pozitivno rešitev, $t = 11.369$. Kvadratna neenačba je nenegativna za $t \geq 11.369$. Za $n = t^2$ dobimo $n \geq 129.25$. Najmanjše število gostov je torej $n = 130$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 267.

a. Označimo z A dogodek, da je sedež prazen (tj. potnik je odpovedal let). Pri tem je $p = P(A) = 0.04$. Slučajna spremenljivka X_i s porazdelitvenim zakonom

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.96 & 0.04 \end{pmatrix}$$

je indikator dogodka A, $i = 1, 2, \dots 200$. Število praznih sedežev je $S = X_1 + X_2 + \dots X_{200}$. To je binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka, $S \sim B(200, 0.04)$ s pričakovano vrednostjo in disperzijo

$$\begin{aligned} E(S) &= n \cdot p = 200 \cdot 0.04 = 8, \\ D(S) &= n \cdot p \cdot (1-p) = 200 \cdot 0.04 \cdot 0.96 = 7.68. \end{aligned}$$

Centralni limitni izrek pove, da ima vsota S približno normalno porazdelitev, $S \sim N(8, \sqrt{7.68})$. Verjetnost, da je na letalu vsaj 5 praznih sedežev, je zato enaka

$$\begin{aligned} &P(S \geq 5) = 1 - P(S < 5) = 1 - P(S \leq 4) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{4 + 0.5 - 8}{\sqrt{7.68}}\right) = \\ &= 1 - \mathrm{F}(-1.26) = \mathrm{F}(1.26) = 0.8962. \end{aligned}$$

b. Označimo z B dogodek, da je sedež zaseden, $P(B) = 0.96$. Slučajna spremenljivka Y_i s porazdelitvenim zakonom

$$Y_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.04 & 0.96 \end{pmatrix}$$

je indikator dogodka B. Letalska družba je prodala n letalskih kart. Število zasedenih sedežev je $Q_n = Y_1 + Y_2 + \dots Y_n$. To je binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka, $Q_n \sim B(n, 0.96)$ s pričakovano vrednostjo in disperzijo

$$\begin{aligned} E(Q_n) &= n \cdot p = 0.96n, \\ D(Q_n) &= n \cdot p \cdot (1-p) = 0.0384n, \end{aligned}$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(Q_n) = \sqrt{0.0384n} = 0.08\sqrt{6n}$.

Centralni limitni izrek nam pove, da ima vsota Q_n približno normalno porazdelitev, $Q_n \sim N(0.96n, 0.08\sqrt{6n})$. Iščemo takšen n, tako da je $Q_n \leq 200$, z verjetnostjo vsaj 0.95

$$\begin{aligned} & P(Q_n \leq 200) \geq 0.95 \\ \Longrightarrow\ & \mathrm{F}\left(\frac{200 + 0.5 - 0.96n}{0.08\sqrt{6n}}\right) \geq 0.95 \\ \Longrightarrow\ & \frac{200.5 - 0.96n}{0.08\sqrt{6n}} \geq \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645. \end{aligned}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = \sqrt{n}$ in dobimo kvadratno neenačbo

$$0.96t^2 + 0.32t - 200.5 \leq 0.$$

Kvadratna enačba $0.96t^2 + 0.32t - 200.5 = 0$ ima dve rešitvi $t_{1,2} = \frac{-0.32 \pm 27.75}{1.92}$. Mi potrebujemo pozitivno rešitev, $t = 14.29$. Kvadratna neenačba je nepozitivna za $0 \leq t \leq 14.29$. Za $n = t^2$ dobimo $n \leq 204.20$. Največje število vozovnic, ki lahko prodajo je $n = 204$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 269.

a. Pričakovani vrednosti Z_i in Z_i^2 sta enaki

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= x \cdot E(Y_i) = x \int_0^1 y \cdot 2y dy = x \cdot \frac{2}{3}\, y^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x, \\ E(Z_i^2) &= x^2 \cdot E(Y_i^2) = x^2 \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = x^2 \cdot \frac{2}{4}\, y^4\Big|_0^1 = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Potem sta disperzija in standardni odklon enaki

$$D(Z_i) = E(Z_i^2) - (E(Z_i))^2 = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{x^2}{18},$$
$$\sigma(Z_i) = \sqrt{D(Z_i)} = \frac{x}{3\sqrt{2}}.$$

b. Pričakovana vrednost in disperzija slučajne spremenljivke S sta enaki

$$E(S) = 100 \cdot E(Z_i) = \frac{200}{3}x,$$
$$D(S) = 100 \cdot D(Z_i) = \frac{50}{9}x^2,$$

Standardni odklon vsote je enak $\sigma(S) = \frac{5\sqrt{2}}{3}x$. Na osnovi centralnega limitnega izreka je vsota S približno normalno porazdeljena, $S \sim N\left(\frac{200}{3}x, \frac{5\sqrt{2}}{3}x\right)$.

c. Banka nima izgube, če dobi več kot 10 milijonov od 100 podjetij. Za $x = 14$ je $S \sim N\left(\frac{2800}{3}, \frac{70\sqrt{2}}{3}\right)$. Dobimo

$$P(S > 100 \cdot 10) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{1000 - \frac{2800}{3}}{\frac{70\sqrt{2}}{3}}\right) = 1 - \mathrm{F}(2.02) =$$
$$= 1 - 0.9783 = 0.0217.$$

d. Iščemo x, pri katerem banka dobi več kot 1000 milijonov, z verjetnostjo 99%:

$$P(S > 1000) = 0.99,$$
$$1 - \mathrm{F}\left(\frac{1000 - \frac{200}{3}x}{\frac{5\sqrt{2}}{3}x}\right) = 0.99,$$
$$\mathrm{F}\left(\frac{\frac{200}{3}x - 1000}{\frac{5\sqrt{2}}{3}x}\right) = 0.99,$$
$$\frac{200x - 3000}{5\sqrt{2}x} = \mathrm{F}^{-1}(0.99) = 2.33,$$
$$x = 16.35 \text{ milijonov}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 274.

a. Označimo z X uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri matematiki, ki je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim N(59.1, 19.1)$. Vzorčno povprečje normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je tudi normalno porazdeljeno, $\overline{X} \sim N\left(59.1, \frac{19.1}{\sqrt{80}}\right)$.

b. Verjetnost, da je vzorčno povprečje manj kot 60, je enaka

$$P(\overline{X} < 60) = \mathrm{F}\left(\frac{60 - 59.1}{\frac{19.1}{\sqrt{80}}}\right) = \mathrm{F}(0.42) = 0.6628.$$

c. Verjetnost, da je vzorčno povprečje med 50 in 65, je enaka

$$P(50 < \overline{X} < 65) = \mathrm{F}\left(\frac{65 - 59.1}{\frac{19.1}{\sqrt{80}}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{50 - 59.1}{\frac{19.1}{\sqrt{80}}}\right) = \mathrm{F}(2.76) - \mathrm{F}(-4.26) =$$
$$= 0.9971 - 0 = 0.9971.$$

d. Verjetnost, da se vzorčno povprečje razlikuje od povprečja cele mature za največ 3 točke, je enaka

$$P(59.1-3 \le \overline{X} \le 59.1+3) = \mathrm{F}\left(\frac{3\sqrt{80}}{19.1}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{-3\sqrt{80}}{19.1}\right) = \mathrm{F}(1.4) - \mathrm{F}(-1.4) =$$
$$= \mathrm{F}(1.4) - (1-\mathrm{F}(1.4)) = 2\,\mathrm{F}(1.4) - 1 = 2\cdot 0.9192 - 1 = 0.8384.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 275.

a. Označimo z X višino študentov. Potem je $E(X) = 175$ in $\sigma(X) = 7$. Pričakovana vrednost in disperzija vzorčnega povprečja sta enaki

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_{49}}{49}\right) = \frac{E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_{49})}{49} = \frac{49E(X)}{49} = 175,$$
$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_{49}}{49}\right) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_{49})}{2401} = \frac{49D(X)}{2401} = 1.$$

Standardni odklon vzorčnega povprečja je $\sigma(\overline{X}) = 1$.

b. Vzorčno povprečje normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je normalno porazdeljeno, $\overline{X}\sim N(175,1)$. Spomnimo se značilnosti normalne porazdelitve ($\sigma=\sigma(\overline{X})=1$):
   (a) 2σ pravilo: v intervalu $[175-2\cdot 1, 175+2\cdot 1] = [173,177]$ je 95% povprečne višine 49 študentov, oziroma $P(173 \le \overline{X} \le 177) = 0.95$.
   (b) 3σ pravilo: v intervalu $[175-3\cdot 1, 175+3\cdot 1] = [172,178]$ je 99.7% povprečne višine 49 študentov, oziroma 0.3% povprečne višine 49 študentov je višje od 178 cm ali nižje od 172 cm. Ker nas zanima samo verjetnost, da je povprečje 49 višin nad 178 cm, je to polovica od 0.003, $P(\overline{X} > 178) = 0.0015$.
   (c) Verjetnost, da so vrednosti normalne porazdelitve na razdalji več kot 4σ od povprečja, je približno 0, oziroma $P(\overline{X} < 170) = 0$ (višina 170 je na razdalji 5σ od povprečja 175 cm).

Sporoči napako

Rešitev naloge 276.

a. Naj bo X višina sadike paprike, ki je normalno porazdeljena, $X \sim N(40,4)$. Verjetnost, da je sadika paprike višine vsaj 35 cm, je enaka

$$P(X \ge 35) = 1 - P(X < 35) = 1 - \mathrm{F}\left(\frac{35-40}{4}\right) = 1 - \mathrm{F}(-1.25) = \mathrm{F}(1.25) = 0.8944.$$

b. Vzorčno povprečje normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je tudi normalno porazdeljeno, $\overline{X} \sim N\left(40, \frac{4}{\sqrt{50}}\right)$. Verjetnost, da je povprečna višina tega vzorca med 38 cm in 41 cm, je enaka

$$P(38 < \overline{X} < 41) = \mathrm{F}\left(\frac{41-40}{\frac{4}{\sqrt{50}}}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{38-40}{\frac{4}{\sqrt{50}}}\right) = \mathrm{F}(1.77) - \mathrm{F}(-3.54) =$$
$$= \mathrm{F}(1.77) + 1 - \mathrm{F}(3.54) = 0.9616 + 1 - 0.9998 = 0.9614.$$

c. Verjetnost, da se višina sadike razlikuje od povprečja za največ 2 cm, je enaka

$$P(40-2 \le X \le 40+2) = \mathrm{F}\left(\frac{42-40}{4}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{38-40}{4}\right) = \mathrm{F}(0.5) - \mathrm{F}(-0.5) =$$
$$= \mathrm{F}(0.5) - (1-\mathrm{F}(0.5)) = 2\,\mathrm{F}(0.5) - 1 = 2\cdot 0.6915 - 1 = 0.383.$$

Sporoči napako

REŠITEV NALOGE 279.

a. Označimo z X upornost 100-ohmskih uporov s pričakovano vrednostjo $\mu = 100\ \Omega$ in standardnim odklonom $\sigma = 10\ \Omega$. Centralni limitni izrek pravi, da je vzorčno povprečje normalno porazdeljeno, $\overline{X} \sim N\left(100, \frac{10}{\sqrt{60}}\right)$. Verjetnost, da je povprečna upornost vzorca manjša od 97 Ω, je enaka

$$P(\overline{X} < 97) = \mathrm{F}\left(\frac{97-100}{\frac{10}{\sqrt{60}}}\right) = \mathrm{F}(-2.32) = 1 - \mathrm{F}(2.32) = 1 - 0.9898 = 0.0102.$$

b. Verjetnost, da se vzorčno povprečje razlikuje od povprečja μ za največ 1 Ω, je enaka

$$P(100 - 1 < \overline{X} < 100 + 1) = \mathrm{F}\left(\frac{1\sqrt{60}}{10}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{-1\sqrt{60}}{10}\right) = \mathrm{F}(0.77) - \mathrm{F}(-0.77) =$$
$$= \mathrm{F}(0.77) - (1 - \mathrm{F}(0.77)) = 2\,\mathrm{F}(0.77) - 1 = 2 \cdot 0.7794 - 1 = 0.5588.$$

Sporoči napako

10. Intervali zaupanja

REŠITEV NALOGE 282.

a. Standardni odklon slučajne spremenljivke X je enak $\sigma = 5$, stopnja zaupanja $1-\alpha = 0.95$ (oziroma stopnja tveganja $\alpha = 0.05$) in velikost vzorca $n = 9$. Izračunajmo vzorčno povprečje

$$\overline{x} = \frac{101 + 91 + 93 + 103 + 91 + 101 + 103 + 95 + 95}{9} = \frac{873}{9} = 97.$$

Interval zaupanja za μ je $I_\mu = \left[\overline{x} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, kjer je

$$c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$$

(v tabeli normalne porazdelitve iščemo vrednost x, ki ji ustreza verjetnost 0.975).

Zamenjamo vse dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za pričakovano vrednost μ:

$$I_\mu = \left[97 - 1.96\frac{5}{\sqrt{9}},\ 97 + 1.96\frac{5}{\sqrt{9}}\right] = [97 - 3.27,\ 97 + 3.27] = [93.73,\ 100.27]$$

b. Dolžina intervala zaupanja za μ je enaka

$$d = \overline{x} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Zamenjamo vrednosti za σ in n v zgornji izraz za dolžino. Dobimo

$$d = 2c\frac{5}{3} = 10.$$

oziroma $c = 3$. Izkoristimo, da je $c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. Dobimo

$$\mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 3,$$
$$\Longrightarrow\ 1 - \frac{\alpha}{2} = \mathrm{F}(3) = 0.9987.$$

Potem je stopnja tveganja enaka $\alpha = 0.0026$, oziroma stopnja zaupanja $1 - \alpha = 0.9974$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 284.

Standardni odklon slučajne spremenljivke X je enak $\sigma = 2$ in stopnja zaupanja $1 - \alpha = 0.99$ (oziroma stopnja tveganja $\alpha = 0.01$). Interval zaupanja za pričakovano vrednost μ je $I_\mu = \left[\overline{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Dolžina intervala zaupanja za μ je enaka

$$d = \overline{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

in dano je $d \leq 0.1$.

V tabeli normalne porazdelitve najdemo $c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) = \mathrm{F}^{-1}(0.995) = 2.58$. Zamenjamo c in σ v izraz za d:

$$2 \cdot 2.58\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.1.$$

Dobimo $\sqrt{n} \geq 103.2$, oziroma $n \geq 10650.2$. Najmanjši število n, ki zadovoljuje to neenakost, je $n = 10651$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 287.

a. Vzorec je velikosti $n = 12$. Izračunajmo vzorčno povprečje in popravljeno vzorčno varianco

$$\overline{x} = \frac{6}{12} = 0.5,$$
$$s^2 = \frac{(-0.3 - 0.5)^2 + (1.4 - 0.5)^2 + \dots (1 - 0.5)^2}{11} = \frac{5.56}{11} = 0.51,$$

Potem je popravljeni vzorčni standardni odklon enak $s = \sqrt{s^2} = 0.71$.

b. Dana je stopnja zaupanja $1 - \alpha = 0.95$ (oziroma stopnja tveganja $\alpha = 0.05$). Interval zaupanja za pričakovano vrednost μ s stopnjo zaupanja 95% je enak

$$I_\mu = \left[\overline{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

kjer je

$$c = t_{n-1;1-\frac{0.05}{2}} = t_{11;0.975} = 2.2$$

(vrednost c najdemo v tabeli kvantilov Studentove porazdelitve z 11 prostostnimi stopnjami in za verjetnost 0.975). Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za μ:

$$I_\mu = \left[0.5 - 2.2\frac{0.71}{\sqrt{12}}, 0.5 + 2.2\frac{0.71}{\sqrt{12}}\right] = [0.5 - 0.45,\ 0.5 + 0.45] = [0.05,\ 0.95].$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 291.

Vzorec je velikosti $n = 20$, popravljeni vzorčni standardni odklon pa $s = 0.7$. Interval zaupanja za standardni odklon σ je enak $I_\sigma = \left[s\sqrt{\frac{n-1}{c_2}},\ s\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}\right]$. Za stopnjo zaupanja $1 - \alpha = 0.95$ (oziroma stopnjo tveganja $\alpha = 0.05$), dobimo vrednosti c_1 in c_2

$$c_1 = \chi^2_{n-1;\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{19;0.025} = 8.91,$$
$$c_2 = \chi^2_{n-1;1-\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{19;0.975} = 32.9$$

(vrednost c_1 najdemo v tabeli kvantilov χ^2 porazdelitve z 19 prostostnimi stopnjami in za verjetnost 0.025, vrednost c_2 pa za 19 prostostnih stopenj in za verjetnost 0.975).

Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za σ.

$$I_\sigma = \left[0.7\sqrt{\frac{19}{32.9}},\ 0.7\sqrt{\frac{19}{8.91}}\right] = [0.53,\ 1.02].$$

Za stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.99$ (oziroma stopnjo tveganja $\alpha = 0.01$), dobimo vrednosti c_1 in c_2

$$c_1 = \chi^2_{19;0.005} = 6.84, \quad c_2 = \chi^2_{19;0.995} = 38.6.$$

Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za σ.

$$I_\sigma = \left[0.7\sqrt{\frac{19}{38.6}},\ 0.7\sqrt{\frac{19}{6.84}}\right] = [0.49,\ 1.17].$$

Opažamo, da smo za višjo stopnjo zaupanja $1-\alpha = 0.99$ dobili širši interval zaupanja.

Sporoči napako

Rešitev naloge 292.

Označimo z X težo učenk. V vzorcu velikosti $n = 75$ imamo 17 različnih vrednosti teže učenk, in število učenk (frekvenco) f_i, $i = 1, 2, \ldots 17$, za vsako od teh vrednosti. Vzorčno povprečje in popravljeno vzorčno varianco za tabelarno dane podatke najdemo na naslednji način:

$$\overline{x} = \frac{1}{75}\sum_{i=1}^{17} f_i x_i = \frac{1\cdot 39 + 3\cdot 40 + \ldots + 1\cdot 59}{75} = \frac{3413}{75} = 45.5,$$

$$s^2 = \frac{1}{74}\sum_{i=1}^{17} f_i(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1\cdot(39-45.5)^2 + 3\cdot(40-45.5)^2 + \ldots + 1\cdot(59-45.5)^2}{74} = \frac{1018.75}{74} = 13.7669.$$

Potem je popravljeni vzorčni standardni odklon enak $s = \sqrt{s^2} = 3.71$. Izbrana je stopnja zaupanja $1-\alpha = 0.95$ (oziroma stopnja tveganja $\alpha = 0.05$). Interval zaupanja za pričakovano vrednost μ je $I_\mu = \left[\overline{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$, kjer je

$$c = t_{n-1;1-\frac{0.05}{2}} = t_{74;0.975} \approx t_{60;0.975} = 2$$

(vzeli smo vrednost iz tabele kvantilov Studentove porazdelitve, z najbližimi prostostnimi stopnjami). Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za μ.

$$I_\mu = \left[45.5 - 2\frac{3.71}{\sqrt{75}},\ 45.5 + 2\frac{3.71}{\sqrt{75}}\right] = [45.5-0.86,\ 45.5+0.86] = [44.64,\ 46.36].$$

Interval zaupanja za standardni odklon σ je $I_\sigma = \left[s\sqrt{\frac{n-1}{c_2}},\ s\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}\right]$, kjer sta

$$c_1 = \chi^2_{n-1;\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{74;0.025} =\approx \chi^2_{70;0.025} = 48.8,$$
$$c_2 = \chi^2_{n-1;1-\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{74;0.975} =\approx \chi^2_{70;0.975} = 95$$

(vzeli smo vrednost iz tabele kvantilov χ^2 porazdelitve, z najbližimi prostostnimi stopnjami). Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za σ.

$$I_\sigma = \left[3.71\sqrt{\frac{74}{95}},\ 3.71\sqrt{\frac{74}{48.8}}\right] = [3.27,\ 4.57].$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 295.

Vzorec je velikosti $n = 500$ in vzorčni delež je $\hat{p} = \frac{48}{500} = 0.096$. Izbrana je stopnja zaupanja $1 - \alpha = 0.95$ (oziroma stopnjo tveganja $\alpha = 0.05$). Interval zaupanja za delež levičarjev p je enak $I_p = \left[\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$, kjer je

$$c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96.$$

Zamenjamo dobljene vrednosti v izraz za interval zaupanja za p.

$$I_p = \left[0.096 - 1.96\sqrt{\frac{0.096 \cdot 0.904}{500}},\ 0.096 + 1.96\sqrt{\frac{0.096 \cdot 0.904}{500}}\right] =$$
$$= [0.096 - 0.026,\ 0.096 + 0.026] = [0.070,\ 0.122].$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 298.

Interval zaupanja za delež p je enak $I_p = \left[\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$, kar lahko tudi zapišemo $p \in [\hat{p} - \epsilon,\ \hat{p} - \epsilon]$, kjer je $\epsilon = c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Dano je $\epsilon \leq 0.02$. Iz tabele normalne porazdelitve dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$. Vzorčni delež $\hat{p} \in [0, 1]$ in velja $\hat{p}(1 - \hat{p}) \leq \frac{1}{4}$ (maksimalna vrednost $\hat{p}(1 - \hat{p})$ je $\frac{1}{4}$ za $\hat{p} = \frac{1}{2}$). Dobimo

$$\epsilon = 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \leq 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \leq 0.02.$$

Potem je $\sqrt{n} \geq 49$, oziroma $n \geq 2401$. Najmanjša velikost vzorca, ki zadovoljuje to neenakost, je $n = 2401$.

Sporoči napako

11. Testiranje domnev

Rešitev naloge 299.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \mu = 100$ proti alternativni domnevi $H_1 : \mu \neq 100$. Imamo vzorec velikosti $n = 9$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Povprečje populacije μ ocenjujemo z vzorčnim povprečjem, ki je enako

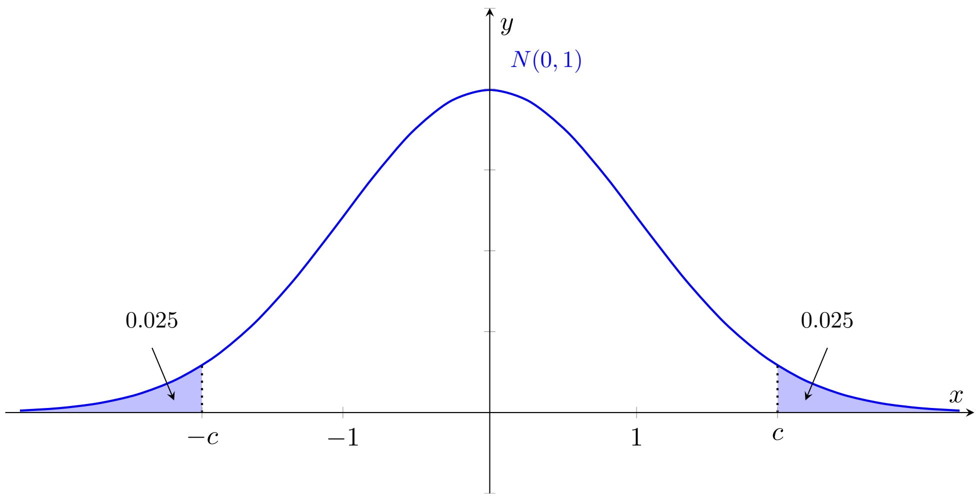
$$\overline{x} = \frac{101 + 91 + 93 + 103 + 91 + 101 + 103 + 95 + 95}{9} = 97.$$

Testna statistika $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{97 - 100}{5}\sqrt{9} = -1.8.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \mu \neq 100$ konstruiramo kritično območje $K : |Z| \geq c$. Za ničelno domnevo $H_0 : \mu = 100$ so kritične velike absolutne vrednosti testne statistike, ki govorijo o velikem odstopanju vzorčnega povprečja od predpostavljene vrednosti 100.

Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorita repa normalne porazdelitve. Ploščina pod krivuljo za oba repa je 0.05, oziroma po 0.025 za vsak rep. Ploščina pod krivuljo do vrednosti c je $1-0.025 = 0.975$, in točno za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Vredност testne statistike $z = -1.8$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rešitev naloge 303.

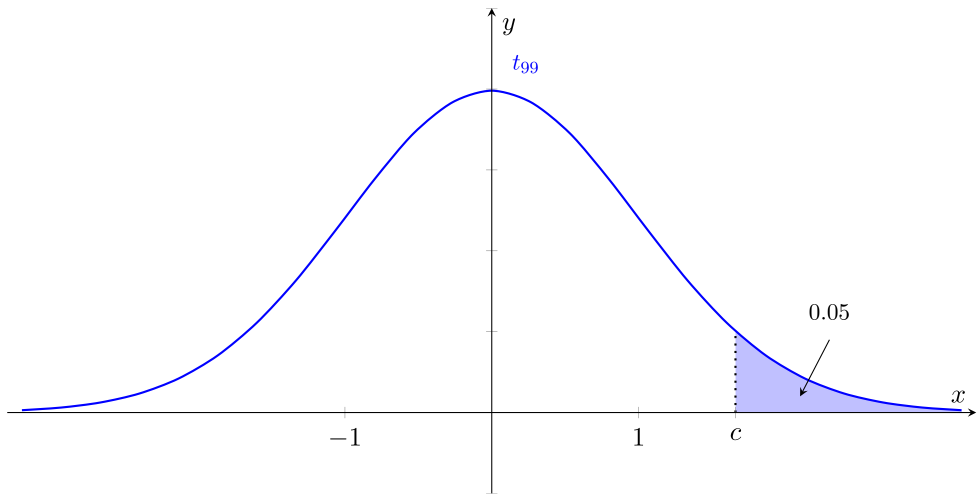
Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \mu = 1600$ proti alternativni domnevi $H_1 : \mu > 1600$. Imamo vzorec velikosti $n = 100$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Povprečje populacije μ ocenjujemo z vzorčnim povprečjem $\overline{x} = 1640$ ur in standardni odklon populacije σ ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $s = 120$ ur.

Testna statistika $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ ima Studentovo porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1640-1600}{120}\sqrt{100} = 3.333.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \mu > 1600$ konstruiramo kritično območje $K : T \geq c$. Za ničelno domnevo $H_0 : \mu = 1600$ so kritične velike vrednosti testne statistike, ki govorijo o velikem odstopanju vzorčnega povprečja od predpostavljene vrednosti 1600.

Kritično območje lahko zapišemo kot $K = [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve z 99 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvori desni rep Studentove porazdelitve, kjer so velike vrednosti. Ploščina pod krivuljo za desni rep je 0.05. Potem je ploščina pod krivuljo do vrednosti c enaka $1 - 0.05 = 0.95$, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli Studentove porazdelitve. Dobimo $c = c = t_{99;0.95} \approx t_{120;0.95} = 1.66$ (vzeli smo tablično vrednost za najbližje prostostne stopnje).

Kritično območje je enako $K = [1.66, \infty)$. Vrednost testne statistike $t = 3.333$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. To pomeni, da je raziskovalna domneva, ki ji ustreza alternativna domneva, potrjena, na osnovi rezultatov t-testa, za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljeni vzorec.

Sporoči napako

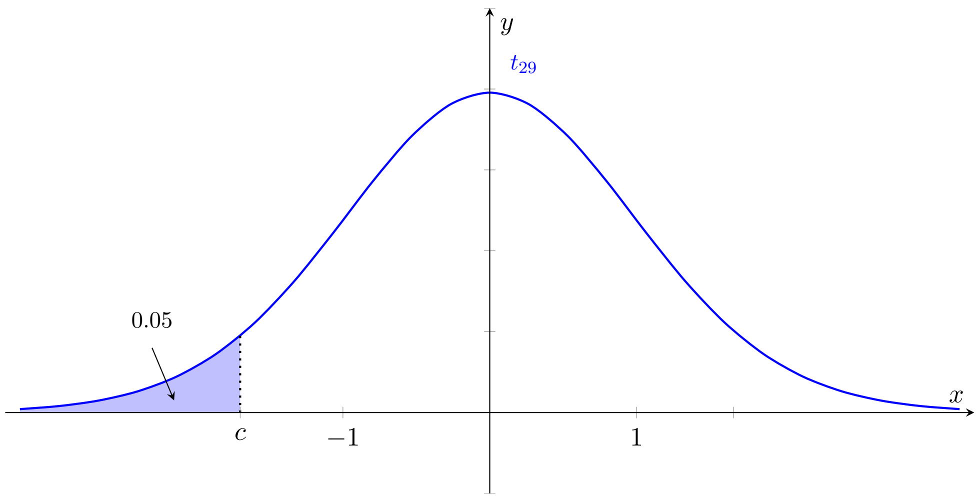
Rešitev naloge 304.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \mu = 700$ proti alternativni domnevi $H_1 : \mu < 700$. Imamo vzorec velikosti $n = 30$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Povprečje populacije μ ocenjujemo z vzorčnim povprečjem $\overline{x} = 665.1$ g in standardni odklon populacije σ ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $s = 40.8$ g.

Testna statistika $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$ ima Studentovo porazdelitev z $n - 1$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{665.1 - 700}{40.8}\sqrt{30} = -4.685.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \mu < 700$ konstruiramo kritično območje $K : T \leq c$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (-\infty, c]$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve z 29 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvori levi rep Studentove porazdelitve, kjer so zelo majhne vrednosti. Ploščina pod krivuljo za levi rep je 0.05, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli Studentove porazdelitve. Dobimo $c = t_{29;0.05} = -t_{29;0.95} = -1.70$.

Kritično območje je $W = (-\infty, -1.70]$. Vrednost testne statistike $t = -4.685$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. To pomeni, da je raziskovalna domneva, ki ji ustreza alternativna domneva, potrjena, na osnovi rezultatov t-testa, za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljeni vzorec. Sodnik se bo odločil, da je pekarna kriva, za prodajo štruc kruha, ki so pod reklamirano težo.

Sporoči napako

Rešitev naloge 308.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \sigma = 5$ proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma \neq 5$. Imamo vzorec velikosti $n = 10$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Povprečje populacije μ ocenjujemo z vzorčnim povprečjem, ki je enako

$$\overline{x} = \frac{99 + 90 + 108 + 111 + 97 + 93 + 90 + 106 + 104 + 102}{10} = 100.$$

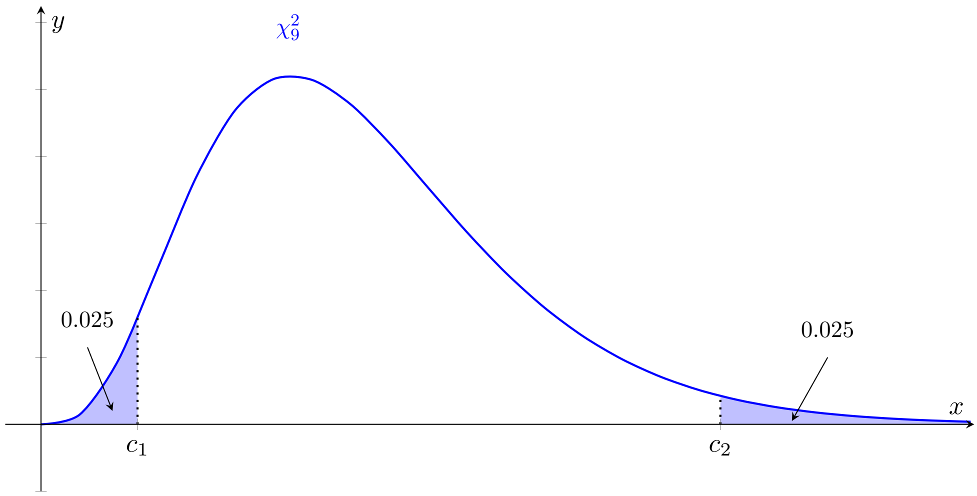
Varianco populacije σ^2 ocenjujemo s popravljeno vzorčno varianco, ki je enaka

$$s^2 = \frac{(99 - 100)^2 + (90 - 100)^2 + \ldots + (102 - 100)^2}{9} = \frac{500}{9} = 55.556$$

Testna statistika $\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ ima χ^2 porazdelitev z $n - 1$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} = 9 \cdot \frac{55.556}{5^2} = \frac{500}{25} = 20.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \sigma \neq 5$ konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \leq c_1$ ali $\chi^2 \geq c_2$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (0, c_1] \cup [c_2, \infty)$, kjer sta c_1 in c_2 kritični vrednosti, kateri bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve z 9 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorijo zelo majhne in zelo velike vrednosti (desni rep). Ploščina pod krivuljo do c_1 je 0.025 in do c_2 je $1 - 0.025 = 0.975$. Za te verjetnosti bomo poiskali vrednosti v tabeli χ^2 porazdelitve. Dobimo $c_1 = \chi^2_{9;0.025} = 2.70$, $c_2 = \chi^2_{9;0.975} = 19$

Kritično območje je $K = (0, 2.7] \cup [19, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 20$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo.

Sporoči napako

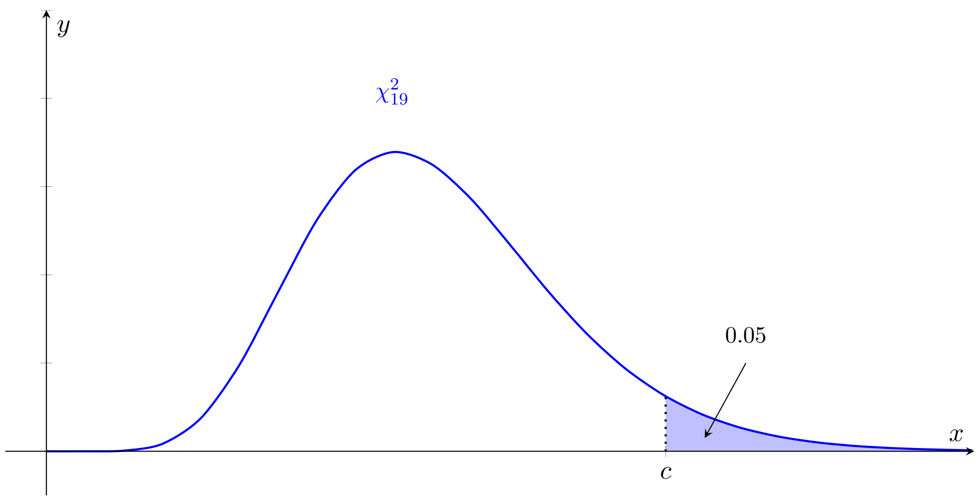
Rešitev naloge 309.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \sigma^2 = 0.01$ proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma^2 > 0.01$. Imamo vzorec velikosti $n = 20$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Varianco populacije σ^2 ocenjujemo s popravljeno vzorčno varianco $s^2 = 0.0153$.

Testna statistika $\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ ima χ^2 porazdelitev z $n - 1$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$\chi^2 = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} = 19\frac{0.0153}{0.01} = 29.07.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \sigma^2 > 0.01$ konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \geq c$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve z 19 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorijo zelo velike vrednosti (desni rep). Ploščina pod krivuljo do c je $1-0.25 = 0.95$. Za te verjetnosti bomo poiskali vrednosti v tabeli χ^2 porazdelitve. Dobimo $c = \chi^2_{19;0.95} = 30.1$

Kritično območje je $K = [30.1, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 29.07$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve.

Sporoči napako

Rešitev naloge 312.

V vsakem metu kovanca smo opazovali, ali se je zgodil dogodek A - padla je cifra. Verjetnost dogodka A je $P(A) = 0.5$ in če je kovanec pošten, cifra pade z verjetnostjo 0.5. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : p = 0.5$ proti alternativni domnevi $H_1 : p \neq 0.5$. Imamo vzorec velikosti $n = 300$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.01$. Delež populacije p ocenjujemo z vzorčnim deležem, ki je enako

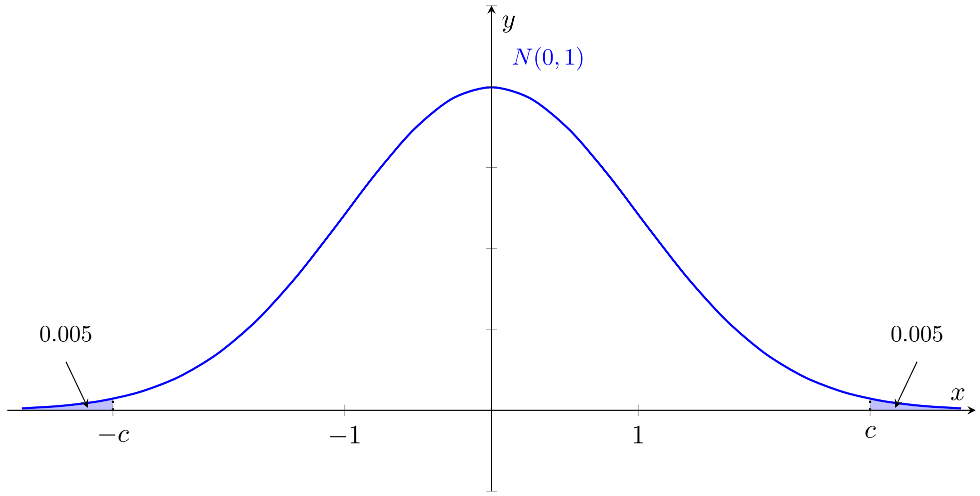
$$\hat{p} = \frac{138}{300} = 0.46.$$

Testna statistika $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)}}\sqrt{n}$ ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{0.46-0.5}{0.5}\sqrt{300} = -1.386.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : p \neq 0.5$ konstruiramo kritično območje $K : |Z| \geq c$. Za ničelno domnevo $H_0 : p = 0.5$ so kritične velike absolutne vrednosti testne statistike, ki govorijo o velikem odstopanju vzorčnega deleža od predpostavljene vrednosti 0.5.

Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.01$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorita repa normalne porazdelitve. Ploščina pod krivuljo za oba repa je 0.01, oziroma po 0.005 za vsak rep. Ploščina pod krivuljo do vrednosti c je $1 - 0.005 = 0.995$, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.995) = 2.58$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -2.58] \cup [2.58, \infty)$. Vrednost testne statistike $z = -1.386$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Raziskovalna domneva, da kovanec ni pošten, ni potrjena.

Sporoči napako

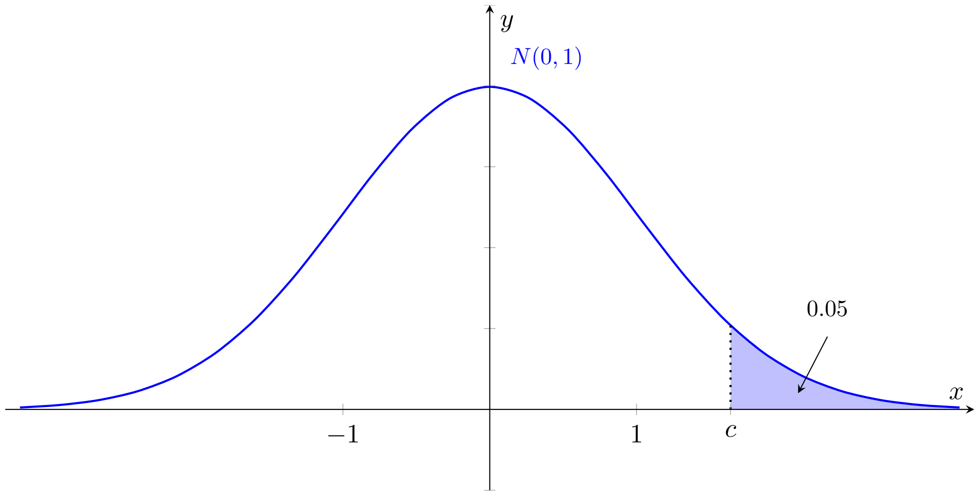
Rešitev naloge 313.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : p = 0.04$ proti alternativni domnevi $H_1 : p > 0.04$. Imamo vzorec velikosti $n = 723$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Delež prebivalcev, ki podpira stranko p, ocenjujemo z vzorčnim deležem $\hat{p} = 0.042$.

Testna statistika $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)}}\sqrt{n}$ ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{0.042 - 0.04}{\sqrt{0.04 \cdot 0.96}}\sqrt{723} = 0.274.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : p > 0.04$ konstruiramo kritično območje $K : Z \geq c$, oziroma $K = [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvori desni rep normalne porazdelitve. Ploščina pod krivuljo do vrednosti c je $1 - 0.05 = 0.95$, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.95) = 1.645$.

Kritično območje je enako $K = [1.645, \infty)$. Vrednost testne statistike $z = 0.274$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Na osnovi rezultatov Z-testa, za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljeni vzorec, nismo potrdili raziskovalne domneve, da bo stranka prišla v parlament.

Sporoči napako

Rešitev naloge 318.

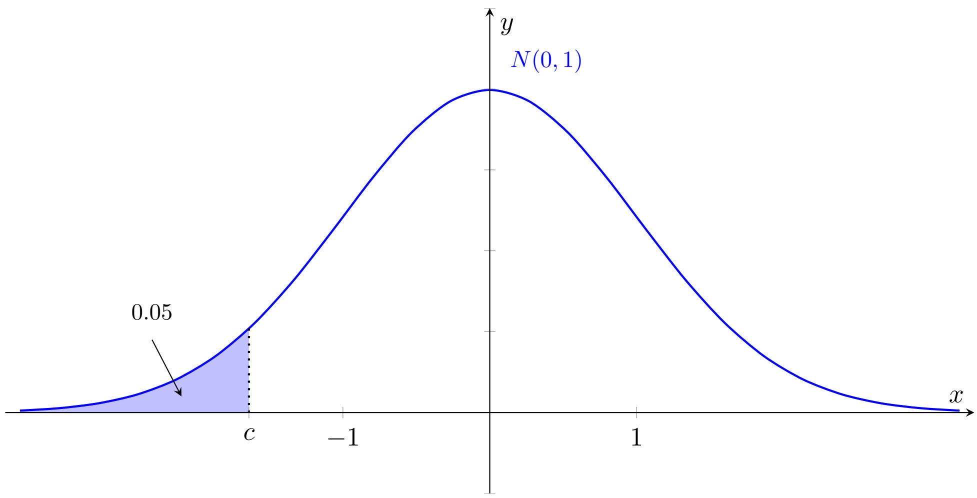
Testiramo ničelno domnevo $H_0 : p = 0.22$ proti alternativni domnevi $H_1 : p < 0.22$. Imamo vzorec velikosti $n = 100$ in izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Delež nepismene populacije Ugande p ocenjujemo z vzorčnim deležem, ki je enako

$$\hat{p} = \frac{14}{100} = 0.14.$$

Testna statistika $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0\cdot(1-p_0)}}\sqrt{n}$ ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{0.14 - 0.22}{\sqrt{0.22 \cdot 0.78}} \cdot 10 = -1.931.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : p < 0.22$ konstruiramo kritično območje $K : Z \leq c$, oziroma $K = (-\infty, c]$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvori levi rep normalne porazdelitve. Za verjetnost 0.05 bomo poiskali vrednost v tabeli normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.05) = -\mathrm{F}^{-1}(0.95) = -1.645$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -1.645]$. Vrednost testne statistike $z = -1.931$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Raziskovalna domneva, da je nepismenost prebivalcev Ugande zmanjšana, je potrjena.

Sporoči napako

Rešitev naloge 319.

a. Označimo z X dolžino klobas, proizvedenih na prvem stroju in z Y dolžino klobas, proizvedenih na drugem stroju. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Imamo neodvisna vzorca po $n = m = 10$ klobas z obeh strojev. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.1$. Povprečje dolžine prve populacije klobas μ_1 ocenjujemo z vzorčnim povprečjem, ki je enako

$$\overline{x} = \frac{19.2 + 14.8 + 21.9 + 15.2 + 17.0 + 15.3 + 18.9 + 16.1 + 21.6 + 16.5}{10} = \frac{176.5}{10} = 17.65.$$

Varianco dolžine prve populacije klobas σ_1^2 ocenjujemo s popravljeno vzorčno varianco, ki je enaka

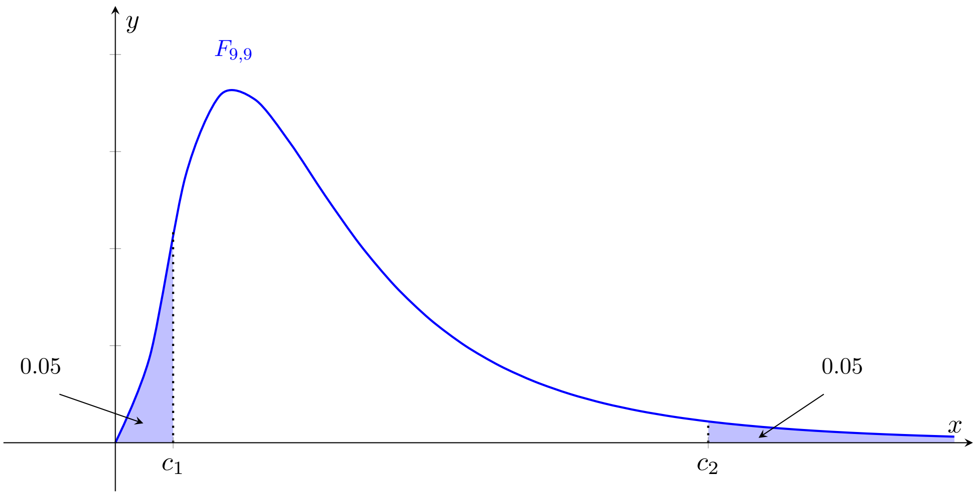
$$s_1^2 = \frac{(19.2 - 17.65)^2 + (14.8 - 17.65)^2 + \ldots + (16.5 - 17.65)^2}{9} = 6.825.$$

Na enak način izračunamo vzorčno povprečje $\overline{y} = 14.56$ kot oceno povprečja dolžine klobas druge populacije μ_2 in popravljeno vzorčno varianco $s_2^2 = 3.167$ kot oceno variance dolžine klobas druge populacije σ_2^2.

Testna statistika $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, pri točni ničelni domnevi, ima Fisherjevo porazdelitev z $n - 1 = 9$ in $m - 1 = 9$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{6.825}{3.167} = 2.155.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ konstruiramo kritično območje $K : F \leq c_1$ ali $F \geq c_2$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (0, c_1] \cup [c_2, \infty)$, kjer sta c_1 in c_2 kritični vrednosti, kateri bomo prebrali iz tabele Fisherjeve porazdelitve. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.1$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorijo zelo majhne in zelo velike vrednosti (desni rep). Ploščina pod krivuljo do c_1 je 0.05 in do c_2 je $1 - 0.05 = 0.95$. Za te verjetnosti bomo poiskali vrednosti v tabeli Fisherjeve porazdelitve. Dobimo $c_1 = F_{9,9;0.05} = 0.31$, $c_2 = F_{9,9;0.95} = 3.18$

Potem je kritično območje $K = (0, 0.31] \cup [3.18, \infty)$. Vrednost testne statistike $F = 2.155$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Lahko zaključimo, da ne obstaja statistično pomembna razlika med variancama dolžin klobas dveh populacij.

b. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativni domnevi $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Na osnovi rezultatov F-testa o enakosti varianc smo zaključili, da sta varianci dveh populacij enaki. Za testiranje domneve o enakosti povprečij dveh populacij lahko uporabimo standarden t-test za neodvisna vzorca.

Združena vzorčna varianca je enaka ($n = m = 10$)

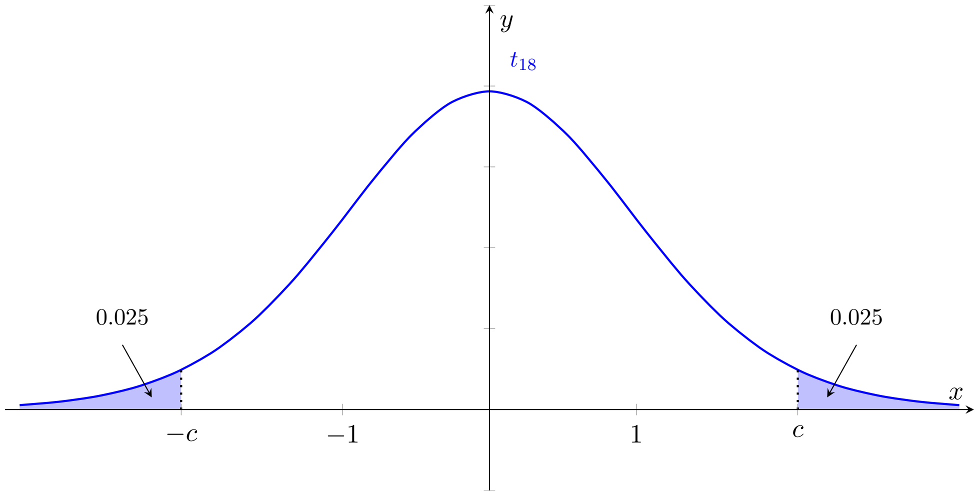
$$s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} = \frac{6.825 + 3.167}{2} = 4.996,$$

in združen standardni odklon $s = \sqrt{s^2} = 2.235$.

Testna statistika $T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$, pri točni ničelni domnevi, ima Studentovo porazdelitev z $n + m - 2 = 18$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{17.65 - 14.56}{2.235}\sqrt{5} = 3.091.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ konstruiramo kritično območje $K : |T| \geq c$, oziroma $K = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve z 18 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvorita oba repa Studentove porazdelitve, vsak ploščine 0.025. Ploščina pod krivuljo do c je $1 - 0.025 = 0.975$, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli Studentove porazdelitve. Dobimo $c = t_{18;0.975} = 2.10$.

Kritično območje je $K = (-\infty, -2.10] \cup [2.10, \infty)$. Vrednost testne statistike $t = 3.091$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Obstaja statistično pomembna razlika med povprečjema dolžine klobas, proizvedenih na dveh strojih.

Sporoči napako

Rešitev naloge 321.

a. Označimo z X čas ozdravljenja vitamin C skupine in z Y čas ozdravljenja placebo skupine. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternativni domnevi $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Imamo neodvisna vzorca po $n = m = 30$ oseb. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Povprečje časa ozdravljenja prve populacije μ_1 ocenjujemo z vzorčnim povprečjem $\overline{x} = 6.5$ in standardni odklon časa ozdravljenja prve populacije σ_1^2 ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $s_1 = 0.8$. Povprečje časa ozdravljenja druge populacije μ_2 ocenjujemo z vzorčnim povprečjem $\overline{y} = 7.5$ in standardni odklon časa ozdravljenja druge populacije σ_2^2 ocenjujemo s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom $s_2 = 0.9$.

   Testna statistika $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, pri točni ničelni domnevi, ima Fisherjevo porazdelitev z $n-1 = 29$ in $m-1 = 29$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.8^2}{0.9^2} = 0.790.$$

   Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ konstruiramo kritično območje $K : F \leq c_1$ ali $F \geq c_2$ velikosti $\alpha = 0.05$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (0, c_1] \cup [c_2, \infty)$, kjer sta c_1 in c_2 kritični vrednosti, kateri bomo prebrali iz tabele Fisherjeve porazdelitve. Dobimo $c_1 = F_{29,29;0.025} = 0.48$, $c_2 = F_{29,29;0.975} = 2.10$

   Kritično območje je $K = (0, 0.48] \cup [2.10, \infty)$. Vrednost testne statistike $F = 0.79$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Lahko zaključimo, da ne obstaja statistično pomembna razlika med variancami časa ozdravljenja dveh populacij.

b. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativni domnevi $H_1 : \mu_1 < \mu_2$. Na osnovi rezultatov F-testa o enakosti varianc smo zaključili, da sta varianci dveh populacij enaki. Za testiranje domneve o enakosti povprečij dveh populacij lahko uporabimo standardni t-test za neodvisna vzorca.

Združena vzorčna varianca je enaka ($n = m = 30$)

$$s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} = \frac{0.8^2 + 0.9^2}{2} = 0.725,$$

in združeni standardni odklon $s = \sqrt{s^2} = 0.851$.

Testna statistika $T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}$, pri točni ničelni domnevi, ima Studentovo porazdelitev z $n + m - 2 = 58$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{6.5 - 7.5}{0.851}\sqrt{15} = -3.296.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ konstruiramo kritično območje $K : T \leq c$ velikosti $\alpha = 0.05$. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = (-\infty, c]$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve z 58 prostostnimi stopnjami. $c = t_{58;0.05} = -t_{58;0.95} \approx -t_{60;0.95} = -1.67$ (vzeli smo tablično vrednost z najbližimi prostostnimi stopnjami).

Kritično območje je $K = (-\infty, -1.67]$. Vrednost testne statistike $t = -3.296$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Na osnovi rezultatov t-testa za neodvisna vzorca, za izbrano stopnjo značilnosti in dobljena vzorca, je raziskovalna domneva potrjena. Redno jemanje 1 g vitamina C večkrat na dan skrajša povprečni čas ozdravljenja.

Sporoči napako

Rešitev naloge 325.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : p_1 = p_2$ proti alternativni domnevi $H_1 : p_1 \neq p_2$, kjer je p_1 delež kadilcev v mestih in p_2 delež kadilcev na podeželju. Imamo vzorec $n = 125$ prebivalcev mest in vzorec $m = 153$ prebivalcev s podeželja. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Delež p_1 ocenjujemo z deležem prvega vzorca

$$\hat{p}_1 = \frac{47}{125} = 0.376,$$

in delež p_2 z deležem drugega vzorca

$$\hat{p}_2 = \frac{52}{153} = 0.340.$$

Ocena združenega deleža je enaka

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m} = \frac{47 + 52}{278} = 0.356.$$

Testna statistika $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$, pri točni ničelni domnevi, ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{0.376 - 0.340}{\sqrt{0.356 \cdot 0.644\left(\frac{1}{125} + \frac{1}{153}\right)}} = 0.624.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : p_1 \neq p_2$ konstruiramo kritično območje $K : |Z| \geq c$, oziroma $K = (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{F}^{-1}(0.975) = 1.96$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$. Vrednost testne statistike $z = 0.624$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Na osnovi rezultatov Z-testa, za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljena vzorca, nismo potrdili raziskovalne domneve, da se delež kadilcev v mestih razlikuje od deleža kadilcev na podeželju.

Sporoči napako

Rešitev naloge 327.

Testiramo ničelno domnevo $H_0 : p_1 = p_2$ proti alternativni domnevi $H_1 : p_1 < p_2$, kjer je p_1 delež defektnih čipov po stari metodi in p_2 delež defektnih čipov po novi metodi. Imamo vzorec $n = 320$ čipov, proizvedenih po novi metodi in vzorec $m = 360$ čipov, proizvedenih po stari metodi. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Delež p_1 ocenjujemo z deležem prvega vzorca

$$\hat{p}_1 = \frac{10}{320} = 0.031,$$

in delež p_2 z deležem drugega vzorca

$$\hat{p}_2 = \frac{20}{360} = 0.056.$$

Ocena združenega deleža je enaka

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m} = \frac{10+20}{680} = 0.044.$$

Testna statistika $Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$, pri točni ničelni domnevi, ima standardno normalno porazdelitev. Vrednost testne statistike je enaka

$$z = \frac{0.031 - 0.056}{\sqrt{0.044 \cdot 0.956\left(\frac{1}{320} + \frac{1}{360}\right)}} = -1.587.$$

Na osnovi alternativne domneve $H_1 : p_1 < p_2$ konstruiramo kritično območje $K : Z \leq c$, oziroma $K = (-\infty, c]$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele standardne normalne porazdelitve. Dobimo $c = \mathrm{F}^{-1}(0.01) = -\mathrm{F}^{-1}(0.99) = -2.33$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -2.33]$. Vrednost testne statistike $z = -1.587$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Na osnovi rezultatov Z-testa, za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljena vzorca, nismo potrdili raziskovalne domneve, da je nova metoda vplivala na zmanjšanje deleža defektnih čipov.

Sporoči napako

Rešitev naloge 333.

Označimo z X število metov, dokler ne pade grb. Testiramo ničelno domnevo H_0: (X ima geometrijsko porazdelitev $G(p)$ proti alternativni domnevi H_1: (X nima geometrijske porazdelitve $G(p)$). Za geometrijsko porazdelitev je verjetnost, da grb pade v k - tem metu, $p_k = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$. Dobimo

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X = 1) = \frac{1}{2},\\
p_2 &= P(X = 2) = \frac{1}{4},\\
p_3 &= P(X = 3) = \frac{1}{8},\\
p_4 &= P(X = 4) = \frac{1}{16},\\
p_5 &= P(X = 5) = \frac{1}{32},\\
p_{6+} &= P(X \geq 6) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = \frac{1}{32}.
\end{aligned}$$

Narišimo tabelo s teoretičnimi in empiričnimi frekvencami ($n = 100$)

št. metov	1	2	3	4	5	6+
empirične frekvence f_i	45	30	15	6	2	2
verjetnost p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
teoretične frekvence $f_i' = np_i$	50	25	12.5	6.25	**3.125**	**3.125**

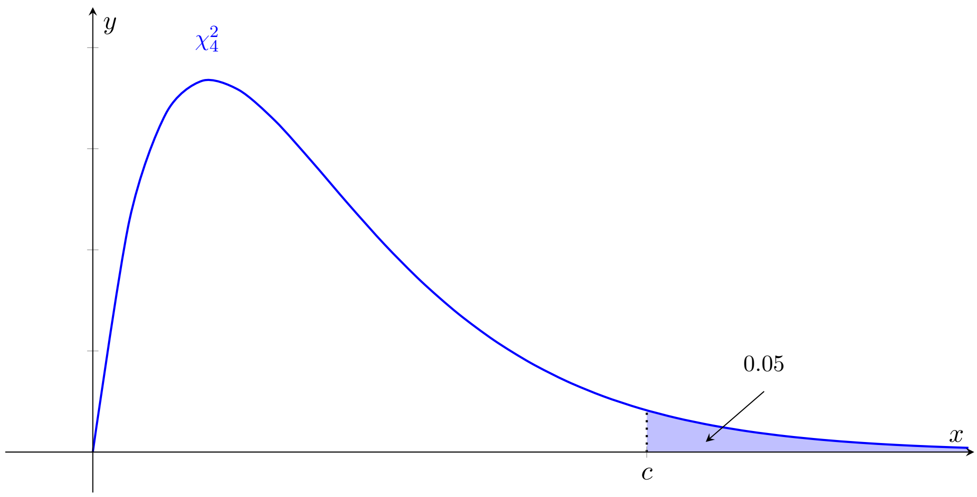
Pri številu metov 5 in 6+ sta teoretični frekvenci manjši kot 5 (oziroma, pogoj uporabe χ^2 testa ni izpolnjen), zato bomo združili ta dva razreda. Sešteli bomo njuni teoretični, oziroma empirični frekvenci.

št. metov	1	2	3	4	5+
empirične frekvence f_i	45	30	15	6	4
verjetnost p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
teoretične frekvence $f_i' = np_i$	50	25	12.5	6.25	6.25
$\frac{(f_i-f_i')^2}{f_i'}$	0.5	1	0.5	0.01	0.81

Imamo $k = 5$ razredov. Testna statistika $\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(f_i-f_i')^2}{f_i'}$, pri točni ničelni domnevi, ima χ^2 porazdelitev s $k - 1 = 4$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$\chi^2 = 0.5 + 1 + 0.5 + 0.01 + 0.81 = 2.82.$$

Na osnovi alternativne domneve, da slučajna spremenljivka X nima geometrijske porazdelitve, konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \geq c$. Za ničelno domnevo so kritične velike vrednosti testne statistike, ki govorijo o velikem odstopanju empiričnih frekvenc od teoretičnih frekvenc, oziroma o neusklajenosti empirične porazdelitve z predpostavljeno (teoretično) porazdelitvijo. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve s 4 prostostnimi stopnjami. Kritično območje je velikosti $\alpha = 0.05$ in ga bomo narisali na naslednji sliki.



Na sliki vidimo, da kritično območje tvori (desni) rep χ^2 porazdelitve, ki je ploščine 0.05. Ploščina pod krivuljo do c je $1 - 0.05 = 0.95$, in za to verjetnost bomo poiskali vrednost v tabeli χ^2 porazdelitve s 4 prostostnimi stopnjami. Dobimo $c = \chi^2_{4;0.95} = 9.49$.

Kritično območje je enako $K = [9.49, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 2.82$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Ne moremo trditi, da število metov tega kovanca, dokler ne pade grb, ni geometrijsko porazdeljeno.

Sporoči napako

Rešitev naloge 335.

Označimo z X število golov v finalu Svetovnega prvenstva v nogometu, zadetih v prvih 90 minutah igre. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : X$ ima Poissonovo porazdelitev, $X \sim P(\lambda)$ proti alternativni domnevi $H_1 : X$ nima Poissonove porazdelitve $P(\lambda)$. V tabeli razporedimo število golov s pripadajočimi frekvencami.

št. golov	0	1	2	3	4	5	6	7
frekvence	3	1	4	2	3	3	3	1

Zdaj bomo izračunali verjetnosti Poissonove porazdelitve, $P(X = k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$. Neznani parameter λ bomo ocenili z vzorčnim povprečjem

$$\hat{\lambda} = \overline{x} = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{20} = 3.35.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(X = 0) = e^{-3.35} = 0.035,\\
p_1 &= P(X = 1) = 3.35e^{-3.35} = 0.118,\\
p_2 &= P(X = 2) = (3.35)^2 \cdot \frac{e^{-3.35}}{2} = 0.197,\\
p_3 &= P(X = 3) = (3.35)^3 \cdot \frac{e^{-3.35}}{6} = 0.220,\\
p_4 &= P(X = 4) = (3.35)^4 \cdot \frac{e^{-3.35}}{24} = 0.184,\\
p_5 &= P(X = 5) = (3.35)^5 \cdot \frac{e^{-3.35}}{120} = 0.123,\\
p_6 &= P(X = 6) = (3.35)^6 \cdot \frac{e^{-3.35}}{720} = 0.069,\\
p_{7+} &= P(X \geq 7) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = 0.054.
\end{aligned}$$

Da bi pokrili celotno zalogo vrednosti Poissonove porazdelitve, smo vzeli razred vrednosti 7+.

Narišimo tabelo s teoritičnimi in empiričnimi frekvencami ($n = 20$)

št. golov	0	1	2	3	4	5	6	7+
empirične frekvence f_i	3	1	4	2	3	3	3	1
verjetnost p_i	0.035	0.118	0.197	0.220	0.184	0.123	0.069	0.054
teoretične frekvence $f_i' = np_i$	0.70	2.36	3.94	4.40	3.68	2.46	1.38	1.08

Pri vseh razredih so teoretične frekvence manjše kot 5 (imamo majhen vzorec), zato bomo združili razrede v $0-3$ in 4+. Sešteli bomo bomo njihove teoretične, oziroma empirične frekvence.

št. golov	$0-3$	4+
empirične frekvence f_i	10	10
verjetnost p_i	0.57	0.43
teoretične frekvence $f_i' = np_i$	11.4	8.6
$\frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}$	0.172	0.228

Imamo $k = 2$ razreda. Testna statistika $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}$, pri točni ničelni domnevi, ima χ^2 porazdelitev s $k - 1 = 1$ prostostno stopnjo. Vrednost testne statistike je enaka

$$\chi^2 = 0.172 + 0.228 = 0.4.$$

Na osnovi alternativne domneve konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \geq c$, oziroma $K = [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve z 1 prostostno stopnjo. Dobimo $c = \chi^2_{1;0.95} = 3.84$.

Kritično območje je enako $K = [3.84, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 0.4$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Ne moremo trditi, da se porazdelitev števila golov v finalu Svetovnega prvenstva v nogometu razlikuje od Poissonove porazdelitve.

Sporoči napako

Rešitev naloge 337.

Označimo opazovani nominalni spremenljivki z X - stopnja depresije in Y - zakonski stan. Testiramo ničelno domnevo H_0 : (stopnja depresije zakonski stan sta neodvisna) proti H_1 : (stopnja depresije in zakonski stan sta odvisna). Izračunajmo vsote empiričnih frekvenc vrstic in stolpcev kontingenčne tabele

$X \backslash Y$	Poročen/a	Samski/a	Vdovec/a ali ločen/a	Vsota
Resna	22	16	19	57
Srednja	33	29	14	76
Blaga	14	9	3	26
Vsota	69	54	36	159

Poglejmo, kako se računajo teoretične frekvence. Empirični frekvenci $f_{11} = 22$, ki je v prvi vrstici in prvem stolpcu tabele, ustreza teoretična frekvenca $f_{11}' = \frac{57 \cdot 69}{159}$ (v števcu sta vsota prve vrstice 57 in vsota prvega stolpca 69, v imenovalcu pa velikost vzorca $n = 159$). Na enak način izračunamo teoretične frekvence ostalih 8 celic tabele. Teoretične frekvence predstavljajo vrednosti, katere bi dobili v primeru, da sta spremenljivki neodvisni.

Imamo $s = 3$ kategorije stopnje depresije in $v = 3$ kategorije zakonskega stana. Testna statistika $\chi^2 = \sum\limits_{i,j} \frac{(f_{ij} - f_{ij}')^2}{f_{ij}'}$, pri točni ničelni domnevi, ima χ^2 porazdelitev s $(s-1)(v-1) = 4$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$\begin{aligned}\chi^2 = & \frac{\left(22 - \frac{57\cdot 69}{159}\right)^2}{\frac{57\cdot 69}{159}} + \frac{\left(16 - \frac{57\cdot 54}{159}\right)^2}{\frac{57\cdot 54}{159}} + \frac{\left(19 - \frac{57\cdot 36}{159}\right)^2}{\frac{57\cdot 36}{159}} + \frac{\left(33 - \frac{76\cdot 69}{159}\right)^2}{\frac{76\cdot 69}{159}} + + \frac{\left(29 - \frac{76\cdot 54}{159}\right)^2}{\frac{76\cdot 54}{159}} + \\ & + \frac{\left(14 - \frac{76\cdot 36}{159}\right)^2}{\frac{76\cdot 36}{159}} + \frac{\left(14 - \frac{26\cdot 69}{159}\right)^2}{\frac{26\cdot 69}{159}} + \frac{\left(9 - \frac{26\cdot 54}{159}\right)^2}{\frac{26\cdot 54}{159}} + \frac{\left(3 - \frac{26\cdot 36}{159}\right)^2}{\frac{26\cdot 36}{159}} = \\ & = 0.303 + 0.583 + 2.878 + 0 + 0.394 + 0.598 + 0.654 + 0.003 + 1.416 = 6.829.\end{aligned}$$

Na osnovi alternativne domneve, konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \geq c$. Za ničelno domnevo so kritične velike vrednosti testne statistike, ki govorijo o velikem odstopanju empiričnih frekvenc od teoretičnih frekvenc. Kritično območje lahko zapišemo kot $K = [c, \infty)$, kjer je c kritična vrednost, katero bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve s 4 prostostnimi stopnjami. Dobimo $c = \chi^2_{4;0.95} = 9.49$.

Kritično območje je enako $K = [9.49, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 6.829$ ne pade v kritično območje, zato ne zavrnemo ničelne domneve. Na osnovi rezultatov χ^2 testa neodvisnosti, smo za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljen vzorec ne moremo trditi, da sta stopnja depresije in zakonski stan odvisna.

Sporoči napako

Rešitev naloge 339.

Označimo z X - fluoriranost vode in Y - število zob, prizadetih s kariesom. Testiramo ničelno domnevo H_0 : (fluoriranost vode in kvarjenje zob sta neodvisna) proti alternativni domnevi H_1 : (fluoriranost vode in kvarjenje zob sta odvisna). Opazimo v kontingenčni tabeli, da so empirične frekvence za število prizadetih zob večjih od 0, nižje pri najstnikih, ki pijejo fluorirano vodo. S χ^2 testom neodvisnosti bomo formalno preverili, ali je ta razlika med empiričnimi frekvencami najstnikov, ki pijejo in tistih, ki ne pijejo fluorirane vode, statistično pomembna.

Izračunajmo vsote empiričnih frekvenc vrstic in stolpcev kontingenčne tabele

$X\backslash Y$	0	1	2	3+	Vsota
Fluorirana	154	20	14	12	200
Nefluorirana	133	18	21	28	200
Vsota	287	38	35	40	400

V tem primeru imamo vnaprej fiksirane vsote vrstic, oziroma velikosti vzorca najstnikov iz dveh mest (brez in s fluorirano vodo).

Imamo $s = 2$ kategoriji fluoriranosti vode in $v = 4$ kategorije števila prizadetih zob. Testna statistika $\chi^2 = \sum\limits_{i,j} \frac{(f_{ij}-f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$, pri točni ničelni domnevi, ima χ^2 porazdelitev s $(s-1)(v-1) = 3$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$
\begin{aligned}
\chi^2 = {} & \frac{\left(154 - \frac{200\cdot 287}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 287}{400}} + \frac{\left(20 - \frac{200\cdot 38}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 38}{400}} + \frac{\left(14 - \frac{200\cdot 35}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 35}{400}} + \frac{\left(12 - \frac{200\cdot 40}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 40}{400}} + \frac{\left(133 - \frac{200\cdot 287}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 287}{400}} + \\
& + \frac{\left(18 - \frac{200\cdot 38}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 38}{400}} + \frac{\left(21 - \frac{200\cdot 35}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 35}{400}} + \frac{\left(28 - \frac{200\cdot 40}{400}\right)^2}{\frac{200\cdot 40}{400}} = \\
& = 0.768 + 0.053 + 0.7 + 3.2 + 0.768 + 0.053 + 0.7 + 3.2 = 9.442
\end{aligned}
$$

Na osnovi alternativne domneve, konstruiramo kritično območje $K : \chi^2 \geq c$, oziroma $K = [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele χ^2 porazdelitve s 3 prostostnimi stopnjami. Dobimo $c = \chi^2_{3;0.95} = 7.81$.

Kritično območje je enako $K = [7.81, \infty)$. Vrednost testne statistike $\chi^2 = 9.442$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Na osnovi rezultatov χ^2 testa neodvisnosti, smo za izbrano stopnjo značilnosti α in dobljen vzorec dobili, da sta fluoriranost vode in število prizadetih zob odvisna.

Sporoči napako

12. Linearna regresija

Rešitev naloge 342.

Označimo z X starost otrok v mesecih in z Y število izgovorjenih besed. Izračunajmo vsoto dobljenih vrednosti teh spremenljivk.

Meritev	1	2	3	4	5	6	Vsota
x	13	14	15	16	16	18	92
y	8	10	15	20	27	30	110

Potem sta vzorčni povprečji enaki $\overline{x} = \frac{92}{6} = 15.33$ mesecev in $\overline{y} = \frac{110}{6} = 18.33$ izgovorjenih besed. Potrebno je še izračunati odstopanja vsake vrednosti od vzorčnega povprečja

Meritev	1	2	3	4	5	6	Vsota
x	13	14	15	16	16	18	92
y	8	10	15	20	27	30	110
$(x-\overline{x})$	-2.33	-1.33	-0.33	0.67	0.67	2.67	0.02
$(y-\overline{y})$	-10.33	-8.33	-3.33	1.67	8.67	11.67	0.02
$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	24.0689	11.0789	1.0989	1.1189	5.8089	31.1589	74.3334
$(x-\overline{x})^2$	5.4289	1.7689	0.1089	0.4489	0.4489	7.1289	15.3334
$(y-\overline{y})^2$	106.7089	69.3889	11.0889	2.7889	75.1689	136.1889	455.4534

Pearsonov koeficient korelacije je enak

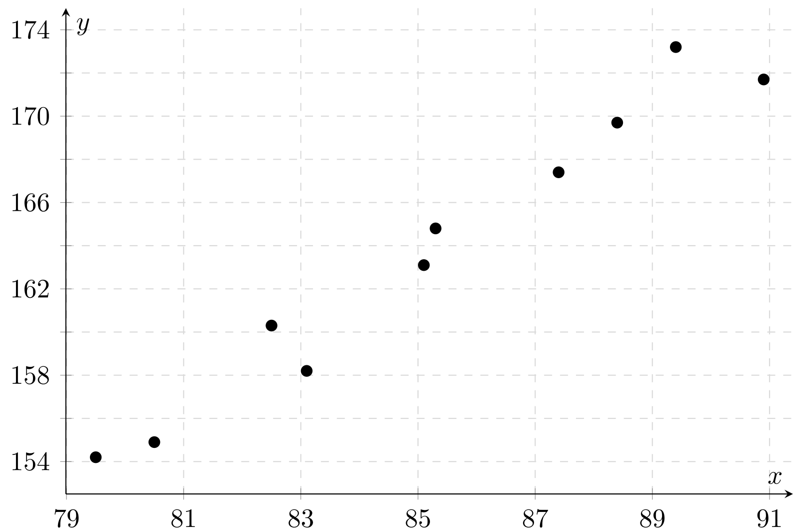
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y-\overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\overline{y})^2}} = \frac{74.3334}{\sqrt{15.3334 \cdot 455.4534}} = 0.948.$$

Na osnovi babičinega priročnega vzorca, smo ugotovli, da med starostjo otroka in številom izgovorjenih besed obstaja močna pozitivna korelacija.

Sporoči napako

Rešitev naloge 344.

a. Narišimo razsevni diagram dobljenih vrednosti višine žensk pri 2 in 20 letih starosti.



b. Izračunajmo vsoto dobljenih vrednosti teh spremenljivk.

Meritev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vsota
x	79.5	80.5	82.5	85.1	87.4	89.4	90.9	83.1	85.3	88.4	852.1
y	154.2	154.9	160.3	163.1	167.4	173.2	171.7	158.2	164.8	169.7	1637.5

Potem sta vzorčni povprečji enaki $\overline{x} = \frac{852.1}{10} = 85.21$ centimetrov in $\overline{y} = \frac{1637.5}{10} = 163.75$ centrimetrov. Potrebno je še izračunati odstopanja vsake vrednosti od vzorčnega povprečja

Meritev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vsota
x	79.5	80.5	82.5	85.1	87.4	89.4	90.9	83.1	85.3	88.4	852.1
y	154.2	154.9	160.3	163.1	167.4	173.2	171.7	158.2	164.8	169.7	1637.5
$(x-\overline{x})$	-5.71	-4.71	-2.71	-0.11	2.19	4.19	5.69	-2.11	0.09	3.19	0
$(y-\overline{y})$	-9.55	-8.85	-3.45	-0.65	3.65	9.45	7.95	-5.55	1.05	5.95	0
$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	54.5305	41.6835	9.3495	0.0715	7.9935	39.5955	45.2355	11.7105	0.0945	18.9805	229.245
$(x-\overline{x})^2$	32.6041	22.1841	7.3441	0.0121	4.7961	17.5561	32.3761	4.4521	0.0081	10.1761	131.509
$(y-\overline{y})^2$	91.2025	78.3225	11.9025	0.4225	13.3225	89.3025	63.2025	30.8025	1.1025	35.4025	414.985

Pearsonov koeficient korelacije je enak

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y-\overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}} = \frac{229.245}{\sqrt{131.509 \cdot 414.985}} = 0.9813.$$

Med višino žensk pri 2 in 20 letih obstaja močna pozitivna korelacija.

c. Popravljena vzorčna standardna odklona sta enaka

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{131.509}{9}} = 3.8226,$$
$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{414.985}{9}} = 6.7904.$$

Ocena naklona regresijske premice je

$$\hat{b} = r\frac{s_Y}{s_X} = 0.9813 \cdot \frac{6.7904}{3.8226} = 1.7432.$$

Potem je ocena odseka regresijske premice enaka

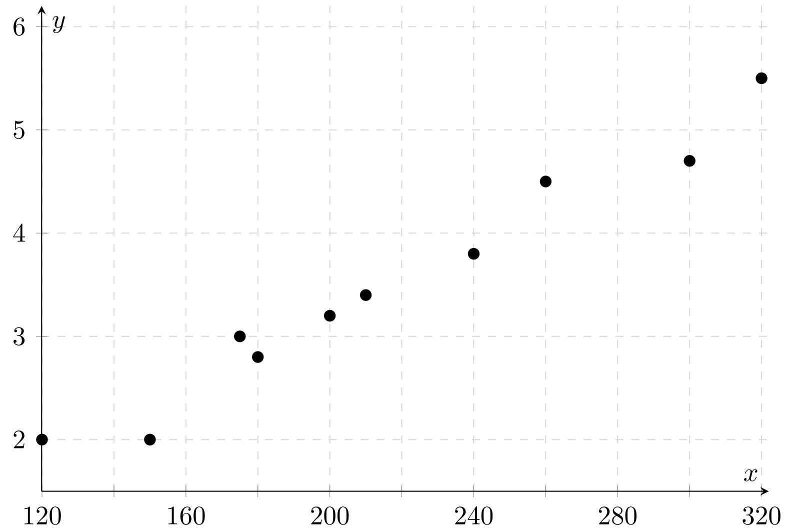
$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x} = 163.75 - 1.7432 \cdot 85.21 = 15.2119.$$

Dobimo enačbo vzorčne linearne regresijske premice $\hat{y} = 15.2119 + 1.7432x$.

Sporoči napako

Rešitev naloge 347.

a. Označimo z X razdaljo mesta od avtobusne postaje in z Y čas potovanja avtobusa. Narišimo razsevni diagram dobljenih vrednosti teh spremenljivk.



b. Vzorčni povprečji sta enaki $\overline{x} = 215.5$ in $\overline{y} = 3.49$. Vsota produkta odstopanj in vsoti kvadratnih odstopanj od vzorčnih povprečij so enake

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{x}) = 654.05,$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 37222.5,$$

$$\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2 = 11.869.$$

Zdaj lahko izračunamo Pearsonov koeficient korelacije

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{654.05}{\sqrt{37222.5 \cdot 11.869}} = 0.9840.$$

Med razdaljo mesta od avtobusne postaje in časom potovanja avtobusa obstaja močna pozitivna korelacija.

c.

d. Popravljena vzorčna standardna odklona sta enaka

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{37222.5}{9}} = 64.3104,$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2} = \sqrt{\frac{11.869}{9}} = 1.1484.$$

Ocena naklona regresijske premice je

$$\hat{b} = r\frac{s_Y}{s_X} = 0.984 \cdot \frac{1.1484}{64.3104} = 0.01757.$$

Potem je ocena odseka regresijske premice enaka

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x} = 3.49 - 0.01757 \cdot 215.5 = -0.29633.$$

Dobimo enačbo vzorčne linearne regresijske premice $\hat{y} = -0.29633 + 0.01757x$.

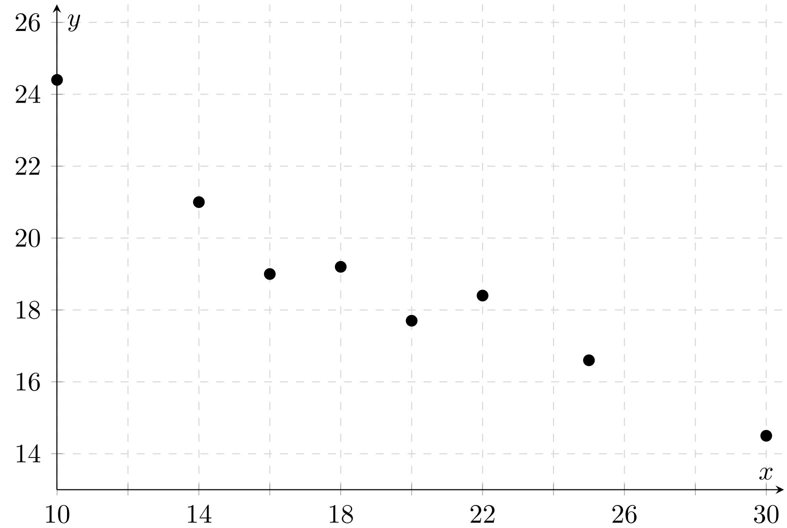
e. Predviden čas potovanja avtobusa do mesta, oddaljenega 250 km od avtobusne postaje, je

$$\hat{y} = -0.29633 + 0.01757 \cdot 250 = 4.09617 \approx 4.1\text{ur}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 348.

a. Označimo z X število ur treninga in z Y število ur, potrebnih za projekt. Narišimo razsevni diagram dobljenih vrednosti teh spremenljivk.



b. Vzorčni povprečji sta enaki $\overline{x} = 19.375$ in $\overline{y} = 18.85$. Vsota produkta odstopanj in vsoti kvadratnih odstopanj od vzorčnih povprečij so enake

$$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{x}) = -125.35,$$

$$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = 281.875,$$

$$\sum_{i=1}^{8}(y_i - \overline{y})^2 = 61.08.$$

Zdaj lahko izračunamo Pearsonov koeficient korelacije

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(y - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{-125.35}{\sqrt{281.875 \cdot 61.08}} = -0.9553.$$

Med številom ur treninga in številom ur, potrebnih za projekt, obstaja močna negativna korelacija.

c.

d. Popravljena vzorčna standardna odklona sta enaka

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{281.875}{7}} = 6.3457,$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(y_i - \overline{y})^2} = \sqrt{\frac{61.08}{7}} = 2.9539.$$

Ocena naklona regresijske premice je

$$\hat{b} = r\frac{s_Y}{s_X} = -0.9553 \cdot \frac{2.9539}{6.3457} = -0.4447.$$

Potem je ocena odseka regresijske premice enaka

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x} = 18.85 + 0.4447 \cdot 19.375 = 27.4661.$$

Dobimo enačbo vzorčne linearne regresijske premice $\hat{y} = 27.4661 - 0.4447x$.

e. Predviden čas, potreben za končanje projekta pri 15 urah treninga je

$$\hat{y} = 27.4661 - 0.4447 \cdot 15 = 20.7956 \approx 20.8\text{ur}.$$

Sporoči napako

Rešitev naloge 350.

a. Označimo z X temperaturo in z Y velikost razpoke eksperimentalne ploščice. Vzorčni povprečji sta enaki $\overline{x} = 0$ in $\overline{y} = 0.7$. Vsota produkta odstopanj in vsoti kvadratnih odstopanj od vzorčnih povprečij so enake

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{x}) = 2.65,$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2 = 8.5,$$

$$\sum_{i=1}^{6}(y_i - \overline{y})^2 = 0.84.$$

Zdaj lahko izračunamo Pearsonov koeficient korelacije

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{2.65}{\sqrt{8.5 \cdot 0.84}} = 0.9917.$$

Med temperaturo in velikostjo razpoke eksperimentalne ploščice obstaja močna pozitivna korelacija.

b.

c. Popravljena vzorčna standardna odklona sta enaka

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{8.5}{5}} = 1.3038,$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(y_i - \overline{y})^2} = \sqrt{\frac{0.84}{5}} = 0.4099.$$

Ocena naklona regresijske premice je

$$\hat{b} = r\frac{s_Y}{s_X} = 0.9917 \cdot \frac{0.4099}{1.3038} = 0.3118.$$

Potem je ocena odseka regresijske premice enaka

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x} = 0.7 + 0.3118 \cdot 0 = 0.7.$$

Dobimo enačbo vzorčne linearne regresijske premice $\hat{y} = 0.7 + 0.3118x$.

d. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : b = 0$ proti alternativni domnevi $H_1 : b \neq 0$. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Najprej bomo izračunali predvidene vrednosti, ostanke in standardni odklon ostankov.

Meritev	1	2	3	4	5	6
x	-1.5	-1	-0.5	0	1	2
y	-1.5	-1	-0.5	0	1	2
$\hat{y}$	0.2323	0.3882	0.5441	0.7000	1.0118	1.3236
$y - \hat{y}$	-0.0323	0.0118	-0.0441	0.1000	-0.0118	-0.0236
$(y - \hat{y})^2$	0.00104	0.00014	0.00194	0.01000	0.00014	0.00056

Potem je standardni odklon ostankov enak

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.01382}{4}} = 0.0588.$$

Testna statistika $T = \frac{\hat{b}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}S_X}} = \frac{\hat{b}}{S}\sqrt{n-1}S_X$ ima Studentovo porazdelitev z $n-2=4$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\hat{b}}{s}\sqrt{n-1}s_X = \frac{0.3118}{0.0588}\sqrt{5}\cdot 1.3038 = 15.459.$$

Konstruiramo kritično območje $K : |T| \geq c$, oziroma $K = (-\infty, c] \cup [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve. Dobimo $c = t_{4;0.975} = 2.78$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -2.78] \cup [2.78, \infty)$. Vrednost testne statistike $t = 15.459$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Rešitev naloge 351.

a. Označimo z X nivo alkohola v krvi in z Y čas reakcije na stimulus. Vzorčni povprečji sta enaki $\overline{x} = 1.3286$ in $\overline{y} = 452.8571$. Vsota produkta odstopanj in vsoti kvadratnih odstopanj od vzorčnih povprečij so enake (vzorčna povprečja smo zaokrožili na dve decimalki)

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i - 1.33)(y_i - 452.86) = 195.4286,$$
$$\sum_{i=1}^{7}(x_i - 1.33)^2 = 0.7343,$$
$$\sum_{i=1}^{7}(y_i - 452.86)^2 = 59142.86.$$

Zdaj lahko izračunamo Pearsonov koeficient korelacije

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y - \overline{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{195.4286}{\sqrt{0.7343 \cdot 59142.86}} = 0.93778.$$

Med nivojem alkohola v krvi in časom reakcije na stimulus obstaja močna pozitivna korelacija.

b.

c. Popravljena vzorčna standardna odklona sta enaka

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(x_i - 1.33)^2} = \sqrt{\frac{0.7343}{6}} = 0.34983,$$
$$s_Y = \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}(y_i - 452.86)^2} = \sqrt{\frac{59142.86}{6}} = 99.28315.$$

Ocena naklona regresijske premice je

$$\hat{b} = r\frac{s_Y}{s_X} = 0.93778 \cdot \frac{99.28315}{0.34983} = 266.1457.$$

Potem je ocena odseka regresijske premice enaka

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\cdot\overline{x} = 452.8571 - 266.1457 \cdot 1.3286 = 99.2559.$$

Dobimo enačbo vzorčne linearne regresijske premice $\hat{y} = 99.2559 + 266.1457x$.

d. Testiramo ničelno domnevo $H_0 : b = 0$ proti alternativni domnevi $H_1 : b \neq 0$. Izbrali smo stopnjo značilnosti $\alpha = 0.05$. Najprej bomo izračunali predvidene vrednosti, ostanke in standardni odklon ostankov.

Meritev	1	2	3	4	5	6	7
x	0.8	1	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8
y	320	380	440	420	470	510	630
$\hat{y}$	312.1725	365.4016	418.6307	471.8599	498.4744	525.0890	578.3182
$y - \hat{y}$	7.82754	14.59840	21.36926	−51.85988	−28.47445	−15.08902	51.68184
$(y - \hat{y})^2$	61.27038	213.11328	456.64527	2689.44715	810.79430	227.67852	2671.01259

Potem je standardni odklon ostankov enak

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{7129.962}{5}} = 37.76231.$$

Testna statistika $T = \frac{\hat{b}}{\frac{S}{\sqrt{n-1}S_X}} = \frac{\hat{b}}{S}\sqrt{n-1}S_X$ ima Studentovo porazdelitev z $n-2 = 5$ prostostnimi stopnjami. Vrednost testne statistike je enaka

$$t = \frac{\hat{b}}{s}\sqrt{n-1}s_X = \frac{266.1457}{37.76231}\sqrt{6} \cdot 0.34983 = 6.039.$$

Konstruiramo kritično območje $K : |T| \geq c$, oziroma $K = (-\infty, c] \cup [c, \infty)$. Kritično vrednost c bomo prebrali iz tabele Studentove porazdelitve. Dobimo $c = t_{5;0.975} = 2.57$.

Kritično območje je enako $K = (-\infty, -2.57] \cup [2.57, \infty)$. Vrednost testne statistike $t = 6.039$ pade v kritično območje, zato zavrnemo ničelno domnevo in sprejmemo alternativno domnevo. Linearni regresijski model je validen.

Sporoči napako

Tabele

Standardna normalna porazdelitev

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.50	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.60	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.70	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.80	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000
3.90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabelirane so vrednosti funkcije

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\ dt$$

za $x \geq 0$. Za negativne x velja $\mathrm{F}(-x) = 1 - \mathrm{F}(x)$.

Studentova porazdelitev

df	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
31	1.31	1.70	2.04	2.45	2.74
32	1.31	1.69	2.04	2.45	2.74
33	1.31	1.69	2.03	2.44	2.73
34	1.31	1.69	2.03	2.44	2.73
35	1.31	1.69	2.03	2.44	2.72
36	1.31	1.69	2.03	2.43	2.72
37	1.30	1.69	2.03	2.43	2.72
38	1.30	1.69	2.02	2.43	2.71
39	1.30	1.68	2.02	2.43	2.71
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
41	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
42	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
43	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
44	1.30	1.68	2.02	2.41	2.69
45	1.30	1.68	2.01	2.41	2.69
46	1.30	1.68	2.01	2.41	2.69
47	1.30	1.68	2.01	2.41	2.68
48	1.30	1.68	2.01	2.41	2.68
49	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68
50	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

Pri $df = \infty$ dobimo kvantile standardne normalne porazdelitve.

χ^2-porazdelitev

df	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
31	14.5	15.7	17.5	19.3	21.4	41.4	45.0	48.2	52.2	55.0
32	15.1	16.4	18.3	20.1	22.3	42.6	46.2	49.5	53.5	56.3
33	15.8	17.1	19.0	20.9	23.1	43.7	47.4	50.7	54.8	57.6
34	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3
36	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6
37	18.6	20.0	22.1	24.1	26.5	48.4	52.2	55.7	59.9	62.9
38	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2
39	20.0	21.4	23.7	25.7	28.2	50.7	54.6	58.1	62.4	65.5
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
41	21.4	22.9	25.2	27.3	29.9	52.9	56.9	60.6	65.0	68.1
42	22.1	23.7	26.0	28.1	30.8	54.1	58.1	61.8	66.2	69.3
43	22.9	24.4	26.8	29.0	31.6	55.2	59.3	63.0	67.5	70.6
44	23.6	25.1	27.6	29.8	32.5	56.4	60.5	64.2	68.7	71.9
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2
46	25.0	26.7	29.2	31.4	34.2	58.6	62.8	66.6	71.2	74.4
47	25.8	27.4	30.0	32.3	35.1	59.8	64.0	67.8	72.4	75.7
48	26.5	28.2	30.8	33.1	35.9	60.9	65.2	69.0	73.7	77.0
49	27.2	28.9	31.6	33.9	36.8	62.0	66.3	70.2	74.9	78.2
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100	104
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	102	107	112	116
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	108	113	118	124	128
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118	124	130	136	140

Fisherjeva $F_{n,m}$ porazdelitev, $p = 0.025$

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	60	100	120	∞
1	0.00	0.03	0.06	0.08	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.14	0.15	0.15	0.16	0.16	0.16	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.19	0.19	0.19	0.20
2	0.00	0.03	0.06	0.09	0.12	0.14	0.15	0.17	0.17	0.18	0.19	0.20	0.20	0.21	0.21	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.24	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.26	0.26	0.27
3	0.00	0.03	0.06	0.1	0.13	0.15	0.17	0.18	0.20	0.21	0.22	0.22	0.23	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.26	0.26	0.26	0.26	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27	0.28	0.28	0.28	0.29	0.30	0.31	0.31	0.32
4	0.00	0.03	0.07	0.1	0.14	0.16	0.18	0.20	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.26	0.27	0.27	0.28	0.28	0.28	0.29	0.29	0.29	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.31	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36
5	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.24	0.25	0.26	0.27	0.27	0.28	0.29	0.29	0.30	0.30	0.30	0.31	0.31	0.31	0.32	0.32	0.32	0.32	0.33	0.33	0.33	0.34	0.36	0.37	0.37	0.39
6	0.00	0.03	0.07	0.11	0.14	0.17	0.20	0.21	0.23	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.29	0.30	0.31	0.31	0.32	0.32	0.32	0.33	0.33	0.33	0.34	0.34	0.34	0.34	0.35	0.35	0.36	0.38	0.39	0.40	0.42
7	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.22	0.24	0.25	0.27	0.28	0.29	0.30	0.30	0.31	0.32	0.32	0.33	0.33	0.34	0.34	0.34	0.35	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36	0.36	0.38	0.40	0.41	0.42	0.44
8	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.20	0.23	0.24	0.26	0.27	0.28	0.3	0.30	0.31	0.32	0.33	0.33	0.34	0.34	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.37	0.38	0.40	0.41	0.43	0.43	0.46
9	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.28	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.34	0.35	0.35	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.38	0.38	0.38	0.39	0.39	0.41	0.43	0.45	0.45	0.47
10	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.27	0.28	0.30	0.31	0.32	0.33	0.33	0.34	0.35	0.35	0.36	0.37	0.37	0.37	0.38	0.38	0.39	0.39	0.39	0.40	0.40	0.42	0.44	0.46	0.46	0.49
11	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.18	0.21	0.24	0.26	0.27	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.36	0.37	0.37	0.38	0.38	0.39	0.39	0.39	0.40	0.40	0.40	0.41	0.43	0.45	0.47	0.48	0.50
12	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.21	0.24	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.35	0.36	0.37	0.37	0.38	0.38	0.39	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.41	0.44	0.46	0.48	0.49	0.51
13	0.00	0.03	0.07	0.11	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.37	0.38	0.38	0.39	0.40	0.40	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42	0.44	0.47	0.49	0.50	0.53
14	0.00	0.03	0.07	0.12	0.15	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.31	0.32	0.34	0.35	0.35	0.36	0.37	0.38	0.38	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42	0.43	0.45	0.48	0.50	0.51	0.54
15	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.24	0.27	0.28	0.30	0.31	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.37	0.38	0.39	0.39	0.40	0.41	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.43	0.46	0.49	0.51	0.51	0.55
16	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.30	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.46	0.49	0.52	0.52	0.55
17	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.30	0.32	0.33	0.34	0.36	0.37	0.37	0.38	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.47	0.50	0.52	0.53	0.56
18	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.31	0.32	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.45	0.47	0.50	0.53	0.54	0.57
19	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.31	0.32	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.45	0.45	0.48	0.51	0.54	0.54	0.58
20	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.31	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.48	0.51	0.54	0.55	0.59
21	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27	0.29	0.31	0.33	0.34	0.35	0.36	0.38	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.49	0.52	0.55	0.55	0.59
22	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.23	0.25	0.27	0.30	0.31	0.33	0.34	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45	0.46	0.46	0.49	0.52	0.55	0.56	0.60
23	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.19	0.23	0.25	0.28	0.30	0.31	0.33	0.34	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.49	0.53	0.56	0.56	0.60
24	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.25	0.28	0.30	0.32	0.33	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.46	0.47	0.50	0.53	0.56	0.57	0.61
25	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.25	0.28	0.30	0.32	0.33	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.50	0.54	0.56	0.57	0.62
26	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.25	0.28	0.30	0.32	0.33	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.47	0.50	0.54	0.57	0.58	0.62
27	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.32	0.33	0.35	0.36	0.37	0.39	0.40	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.51	0.54	0.57	0.58	0.63
28	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35	0.36	0.38	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.51	0.55	0.58	0.58	0.63
29	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35	0.36	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.51	0.55	0.58	0.59	0.63
30	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.51	0.55	0.58	0.59	0.64
40	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.23	0.26	0.29	0.31	0.33	0.34	0.36	0.37	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.50	0.53	0.57	0.61	0.62	0.67
60	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.26	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37	0.38	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.51	0.51	0.52	0.55	0.60	0.64	0.65	0.72
100	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.2	0.24	0.27	0.29	0.32	0.34	0.36	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.51	0.51	0.52	0.53	0.53	0.57	0.63	0.67	0.69	0.77
120	0.00	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.24	0.27	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.39	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.52	0.52	0.53	0.54	0.58	0.63	0.68	0.70	0.79
∞	0.00	0.03	0.07	0.12	0.17	0.21	0.24	0.27	0.30	0.32	0.35	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.52	0.53	0.54	0.55	0.55	0.56	0.61	0.67	0.74	0.76	1.00

Fisherjeva $F_{n,m}$ porazdelitev, $p = 0.05$

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	60	100	120	∞
1	0.01	0.05	0.10	0.13	0.15	0.17	0.18	0.19	0.20	0.20	0.21	0.21	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.26	0.26
2	0.01	0.05	0.10	0.14	0.17	0.19	0.21	0.22	0.23	0.24	0.25	0.26	0.26	0.27	0.27	0.28	0.28	0.28	0.28	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.31	0.32	0.32	0.33	0.33
3	0.00	0.05	0.11	0.15	0.18	0.21	0.23	0.25	0.26	0.27	0.28	0.29	0.29	0.30	0.30	0.31	0.31	0.32	0.32	0.32	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.35	0.36	0.37	0.37	0.38
4	0.00	0.05	0.11	0.16	0.19	0.22	0.24	0.26	0.28	0.29	0.30	0.31	0.31	0.32	0.33	0.33	0.34	0.34	0.35	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.37	0.38	0.40	0.41	0.41	0.42
5	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.25	0.27	0.29	0.30	0.31	0.32	0.33	0.34	0.34	0.35	0.36	0.36	0.36	0.37	0.37	0.38	0.38	0.38	0.38	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45
6	0.00	0.05	0.11	0.16	0.20	0.23	0.26	0.28	0.3	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.36	0.37	0.38	0.38	0.38	0.39	0.39	0.40	0.40	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.41	0.43	0.44	0.46	0.46	0.48
7	0.00	0.05	0.11	0.16	0.21	0.24	0.26	0.29	0.3	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.38	0.39	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42	0.43	0.43	0.44	0.46	0.48	0.48	0.50
8	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.29	0.31	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42	0.43	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.46	0.48	0.49	0.50	0.52
9	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.24	0.27	0.30	0.31	0.33	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.43	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45	0.47	0.49	0.51	0.51	0.53
10	0	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.27	0.30	0.32	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45	0.46	0.46	0.46	0.48	0.50	0.52	0.52	0.55
11	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.45	0.46	0.46	0.46	0.47	0.47	0.49	0.51	0.53	0.53	0.56
12	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.30	0.33	0.34	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.47	0.48	0.48	0.50	0.52	0.54	0.55	0.57
13	0.00	0.05	0.11	0.17	0.21	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.36	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.46	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.48	0.48	0.51	0.53	0.55	0.55	0.58
14	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.47	0.48	0.48	0.48	0.49	0.49	0.51	0.54	0.56	0.56	0.59
15	0.00	0.05	0.11	0.17	0.22	0.25	0.28	0.31	0.33	0.35	0.37	0.38	0.39	0.41	0.42	0.43	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.49	0.50	0.52	0.54	0.57	0.57	0.60
16	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.25	0.29	0.31	0.33	0.35	0.37	0.38	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.49	0.50	0.50	0.53	0.55	0.57	0.58	0.61
17	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.31	0.34	0.36	0.37	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.50	0.51	0.53	0.56	0.58	0.59	0.62
18	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.37	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.50	0.51	0.51	0.54	0.56	0.59	0.59	0.62
19	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.51	0.54	0.57	0.59	0.60	0.63
20	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.39	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.51	0.52	0.54	0.57	0.60	0.60	0.64
21	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.39	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.51	0.52	0.52	0.55	0.58	0.60	0.61	0.64
22	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.52	0.55	0.58	0.61	0.61	0.65
23	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	0.41	0.42	0.44	0.45	0.45	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.52	0.53	0.55	0.58	0.61	0.62	0.65
24	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.34	0.37	0.38	0.40	0.41	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.56	0.59	0.61	0.62	0.66
25	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.35	0.37	0.38	0.40	0.41	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.52	0.53	0.53	0.56	0.59	0.62	0.63	0.66
26	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.35	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.53	0.56	0.59	0.62	0.63	0.67
27	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.29	0.32	0.35	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.51	0.52	0.52	0.52	0.53	0.53	0.54	0.57	0.60	0.63	0.63	0.67
28	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.32	0.35	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54	0.57	0.60	0.63	0.64	0.68
29	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.32	0.35	0.37	0.39	0.40	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54	0.57	0.60	0.63	0.64	0.68
30	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.30	0.32	0.35	0.37	0.39	0.41	0.42	0.43	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54	0.54	0.57	0.61	0.64	0.64	0.69
40	0.00	0.05	0.12	0.17	0.22	0.26	0.3	0.33	0.35	0.38	0.40	0.41	0.43	0.44	0.45	0.46	0.48	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.52	0.53	0.53	0.54	0.54	0.55	0.55	0.56	0.59	0.63	0.66	0.67	0.72
60	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.3	0.33	0.36	0.38	0.40	0.42	0.44	0.45	0.46	0.47	0.49	0.50	0.51	0.51	0.52	0.53	0.54	0.54	0.55	0.55	0.56	0.57	0.57	0.57	0.61	0.65	0.69	0.70	0.76
100	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.31	0.34	0.36	0.39	0.41	0.43	0.44	0.46	0.47	0.48	0.49	0.51	0.52	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.56	0.57	0.57	0.58	0.58	0.59	0.63	0.68	0.72	0.73	0.80
120	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.31	0.34	0.36	0.39	0.41	0.43	0.44	0.46	0.47	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.54	0.55	0.56	0.57	0.57	0.58	0.58	0.59	0.59	0.63	0.68	0.73	0.74	0.82
∞	0.00	0.05	0.12	0.18	0.23	0.27	0.31	0.34	0.37	0.39	0.42	0.44	0.45	0.47	0.48	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.58	0.59	0.60	0.60	0.61	0.62	0.66	0.72	0.78	0.80	1.00

Fisherjeva $F_{n,m}$ porazdelitev, $p = 0.95$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	60	100	120	∞
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	246	247	247	248	248	248	249	249	249	249	249	250	250	250	250	251	252	253	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.65	8.65	8.64	8.64	8.63	8.63	8.63	8.62	8.62	8.62	8.59	8.57	8.55	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.79	5.79	5.78	5.77	5.77	5.76	5.76	5.75	5.75	5.75	5.72	5.69	5.66	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.55	4.54	4.53	4.53	4.52	4.52	4.51	4.50	4.50	4.50	4.46	4.43	4.41	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.86	3.86	3.85	3.84	3.83	3.83	3.82	3.82	3.81	3.81	3.77	3.74	3.71	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.43	3.43	3.42	3.41	3.40	3.40	3.39	3.39	3.38	3.38	3.34	3.30	3.27	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.2	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	3.10	3.09	3.08	3.08	3.04	3.01	2.97	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.93	2.92	2.91	2.9	2.89	2.89	2.88	2.87	2.87	2.86	2.83	2.79	2.76	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.83	2.81	2.80	2.79	2.77	2.76	2.75	2.75	2.74	2.73	2.72	2.72	2.71	2.70	2.70	2.66	2.62	2.59	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.64	2.63	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59	2.58	2.58	2.57	2.53	2.49	2.46	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.53	2.52	2.51	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	2.47	2.43	2.38	2.35	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.6	2.58	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44	2.43	2.42	2.41	2.41	2.40	2.39	2.39	2.38	2.34	2.30	2.26	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.38	2.37	2.36	2.35	2.34	2.33	2.33	2.32	2.31	2.31	2.27	2.22	2.19	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.32	2.31	2.30	2.29	2.28	2.27	2.27	2.26	2.25	2.25	2.20	2.16	2.12	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.26	2.25	2.24	2.24	2.23	2.22	2.21	2.21	2.20	2.19	2.15	2.11	2.07	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	2.15	2.15	2.10	2.06	2.02	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.18	2.17	2.16	2.15	2.14	2.13	2.13	2.12	2.11	2.11	2.06	2.02	1.98	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.11	2.10	2.09	2.08	2.08	2.07	2.03	1.98	1.94	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10	2.09	2.08	2.07	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	1.99	1.95	1.91	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	2.03	2.02	2.02	2.01	1.96	1.92	1.88	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02	2.01	2.00	2.00	1.99	1.98	1.94	1.89	1.85	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	1.91	1.86	1.82	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94	1.89	1.84	1.80	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.96	1.96	1.95	1.94	1.93	1.93	1.92	1.87	1.82	1.78	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	1.85	1.80	1.76	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	1.90	1.89	1.88	1.84	1.79	1.74	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.82	1.77	1.73	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.86	1.85	1.81	1.75	1.71	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84	1.79	1.74	1.70	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.83	1.81	1.80	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.74	1.69	1.64	1.59	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	1.66	1.65	1.59	1.53	1.48	1.47	1.39
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.66	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.52	1.45	1.39	1.38	1.28
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66	1.64	1.63	1.62	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.56	1.55	1.50	1.43	1.37	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69	1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.56	1.54	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.39	1.32	1.24	1.22	1.00

Fisherjeva $F_{n,m}$ porazdelitev, $p = 0.975$

$m\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	60	100	120	∞
1	647	799	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	980	983	985	987	989	990	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1000	1001	1001	1006	1010	1013	1014	1018
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.4	14.3	14.3	14.3	14.3	14.2	14.2	14.2	14.2	14.2	14.2	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.0	14.0	14.0	13.9	13.9
4	12.2	10.6	10.0	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.71	8.68	8.66	8.63	8.61	8.59	8.58	8.56	8.55	8.53	8.52	8.51	8.50	8.49	8.48	8.48	8.47	8.46	8.41	8.36	8.32	8.31	8.26
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.40	6.38	6.36	6.34	6.33	6.31	6.30	6.29	6.28	6.27	6.26	6.25	6.24	6.23	6.23	6.18	6.12	6.08	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.3	5.27	5.24	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13	5.12	5.11	5.10	5.09	5.08	5.07	5.07	5.01	4.96	4.92	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.54	4.52	4.5	4.48	4.47	4.45	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.39	4.38	4.37	4.36	4.31	4.25	4.21	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.08	4.05	4.03	4.02	4.00	3.98	3.97	3.96	3.95	3.94	3.93	3.92	3.91	3.90	3.89	3.84	3.78	3.74	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.74	3.72	3.70	3.68	3.67	3.65	3.64	3.63	3.61	3.60	3.59	3.58	3.58	3.57	3.56	3.51	3.45	3.40	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.50	3.47	3.45	3.44	3.42	3.40	3.39	3.38	3.37	3.35	3.34	3.34	3.33	3.32	3.31	3.26	3.20	3.15	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.33	3.28	3.26	3.24	3.23	3.21	3.20	3.18	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.13	3.12	3.06	3.00	2.96	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.15	3.13	3.11	3.09	3.07	3.06	3.04	3.03	3.02	3.01	3.00	2.99	2.98	2.97	2.96	2.91	2.85	2.80	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.95	2.93	2.92	2.91	2.89	2.88	2.87	2.86	2.85	2.85	2.84	2.78	2.72	2.67	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.84	2.83	2.81	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.67	2.61	2.56	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.84	2.81	2.79	2.77	2.76	2.74	2.73	2.71	2.70	2.69	2.68	2.67	2.66	2.65	2.64	2.59	2.52	2.47	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.68	2.67	2.65	2.64	2.63	2.61	2.60	2.59	2.58	2.58	2.57	2.51	2.45	2.40	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.70	2.67	2.65	2.63	2.62	2.60	2.59	2.57	2.56	2.55	2.54	2.53	2.52	2.51	2.50	2.44	2.38	2.33	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.64	2.62	2.60	2.58	2.56	2.54	2.53	2.52	2.50	2.49	2.48	2.47	2.46	2.45	2.44	2.38	2.32	2.27	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.59	2.57	2.55	2.53	2.51	2.49	2.48	2.46	2.45	2.44	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.33	2.27	2.22	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.55	2.52	2.50	2.48	2.46	2.45	2.43	2.42	2.41	2.40	2.39	2.38	2.37	2.36	2.35	2.29	2.22	2.17	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.42	2.41	2.39	2.38	2.37	2.36	2.34	2.33	2.33	2.32	2.31	2.25	2.18	2.13	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50	2.47	2.45	2.43	2.41	2.39	2.37	2.36	2.34	2.33	2.32	2.31	2.30	2.29	2.28	2.27	2.21	2.14	2.09	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47	2.44	2.42	2.39	2.37	2.36	2.34	2.33	2.31	2.30	2.29	2.28	2.27	2.26	2.25	2.24	2.18	2.11	2.06	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.35	2.33	2.31	2.30	2.28	2.27	2.26	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21	2.15	2.08	2.02	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30	2.28	2.27	2.26	2.24	2.23	2.22	2.21	2.20	2.19	2.18	2.12	2.05	2.00	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.28	2.26	2.24	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	2.09	2.03	1.97	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.16	2.15	2.14	2.13	2.07	2.00	1.94	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34	2.32	2.29	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.17	2.16	2.15	2.14	2.13	2.12	2.11	2.05	1.98	1.92	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.13	2.12	2.11	2.10	2.09	2.03	1.96	1.90	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.18	2.16	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10	2.09	2.08	2.07	2.01	1.94	1.88	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.01	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94	1.88	1.80	1.74	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.98	1.96	1.94	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.86	1.85	1.83	1.82	1.82	1.74	1.67	1.60	1.58	1.48
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.94	1.91	1.89	1.87	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.77	1.76	1.75	1.74	1.72	1.71	1.64	1.56	1.48	1.46	1.35
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98	1.94	1.92	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81	1.79	1.77	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.70	1.69	1.61	1.53	1.45	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.99	1.94	1.90	1.87	1.83	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66	1.64	1.63	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	1.48	1.39	1.30	1.27	1.00

Literatura

[1] J. A. Čibej, *Matematika (kombinatorika, verjetnostni račun, statistika)*, DZS, Ljubljana, 1994.
[2] M. Hladnik, *Verjetnostni račun in statistika (Zapiski predavanj)*, Ljubljana, 2002.
[3] W. Mendenhall, T. Sincich, *Statistics for Engineering and the Sciences*, Boca Raton ; London ; New York : CRC Press, Taylor & Francis Group, cop. 2016.
[4] S. M. Ross, *Introductory statistics*, Burlington, MA: Academic Press, Elsevier, cop. 2010.
[5] G. Turk, *Verjetnostni račun in statistika*, Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2012.