

# **OSNOVE UMETNE INTELIGENCE**

**2022/23**

*verjetnostno sklepanje z bayesovskimi mrežami  
odvisnosti in neodvisnosti pri sklepanju  
ekvivalenca bayesovskih mrež*

# Pridobljeno znanje s prejšnjih predavanj

- **razporejanje opravil**
  - časovne omejitve, resursi
  - razširitev PDDL za zapis akcij s trajanji in rabo resursov (DURATION, CONSUME, USE)
  - izračun kritične poti, najbolj zgodnjega začetka (ES), najbolj poznega začetka (LS), časovne rezerve (slack)
  - upoštevanje resursov vodi v kombinatoričen problem, možen je hevrističen algoritem
  - algoritem najmanjše časovne rezerve
- **verjetnostno sklepanje z bayesovskimi mrežami**
  - definicija z popolno verjetnostno porazdelitvijo
  - definicija s pogojnimi verjetnostmi dogodkov, izračun verjetnosti dogodkov

# Izračun verjetnosti dogodka

- s pogojnimi verjetnostmi **preprosteje izračunamo verjetnost dogodka** iz popolne verjetnostne porazdelitve

- primer: kakšna je verjetnost  $P(V \sim St \ Se \ A \ K)$  ?

$$\begin{aligned} P(V \sim St \ Se \ A \ K) &= P(V) \cdot P(\sim St \ Se \ A \ K|V) = \\ &= P(V) \cdot P(\sim St | V) \cdot P(Se|V \sim St) \cdot P(A|V \sim St \ Se) \cdot P(K|V \sim St \ Se \ A) \end{aligned}$$

- zaradi neodvisnosti, podanih v mreži, velja:

$$P(\sim St|V) = P(\sim St)$$

$$P(A|V \sim St \ Se) = P(A|Se)$$

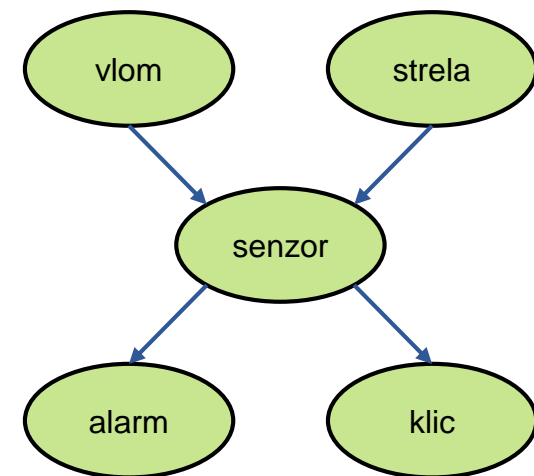
$$P(K|V \sim St \ Se \ A) = P(K|Se)$$

- torej:

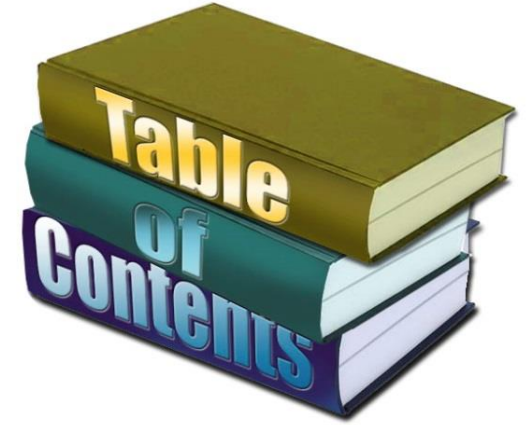
$$\begin{aligned} P(V \sim St \ Se \ A \ K) &= P(V) \cdot P(\sim St \ Se \ A \ K|V) = \\ &= P(V) \cdot P(\sim St) \cdot P(Se|V \sim St) \cdot P(A|Se) \cdot P(K|Se) \\ &= 0,001 \cdot 0,98 \cdot 0,9 \cdot 0,95 \cdot 0,9 = 0,00075 \end{aligned}$$

- v splošnem velja:

$$P(X_1 X_2 \dots X_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i | \text{starši}(X_i))$$



# Pregled

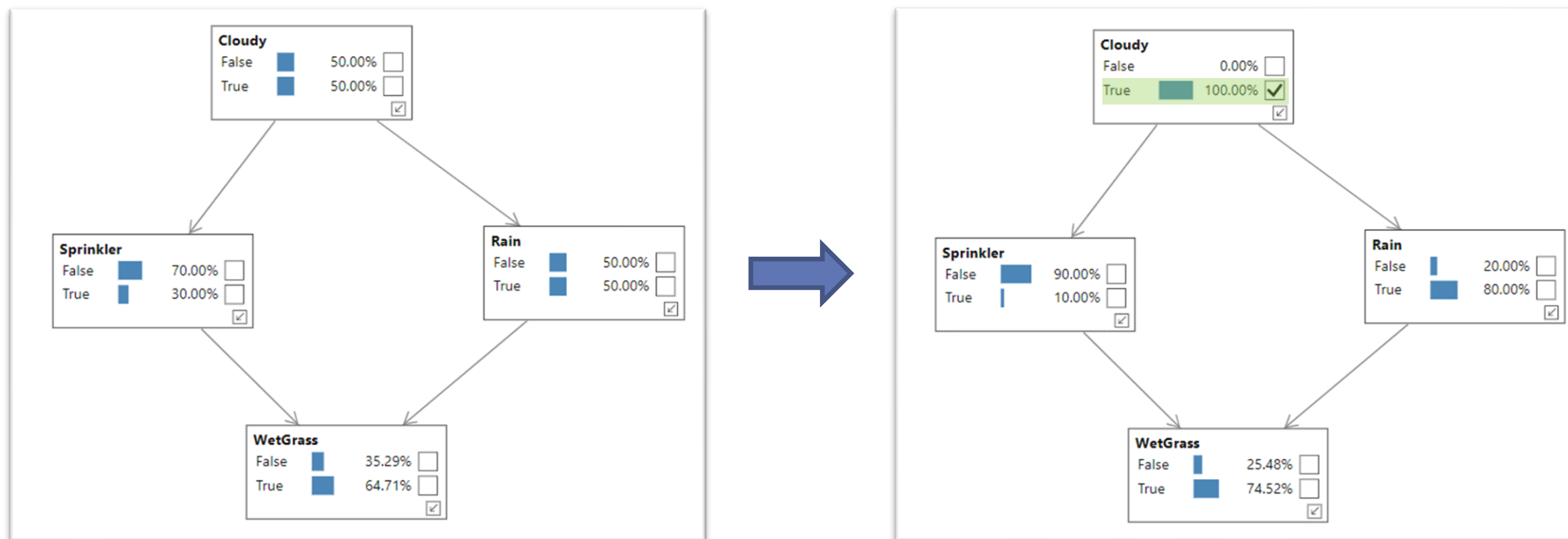


## IV. VERJETNOSTNO SKLEPANJE z bayesovskimi mrežami

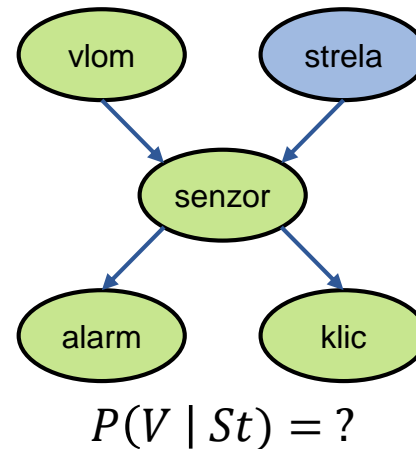
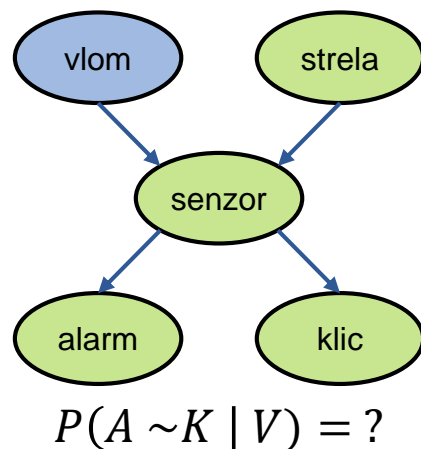
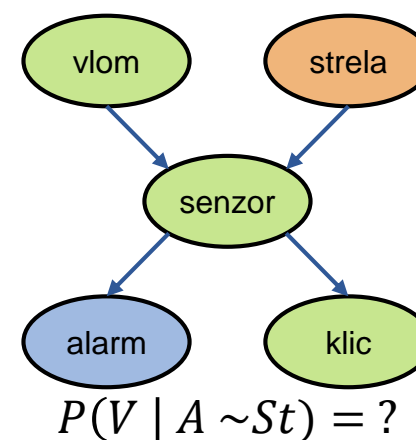
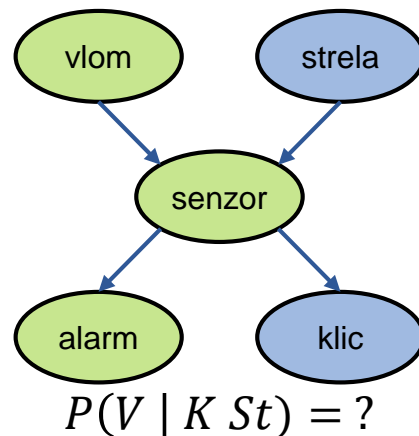
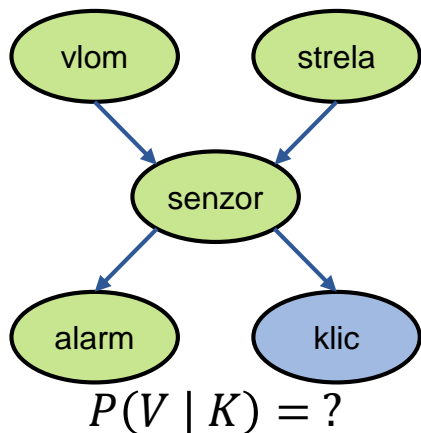
- definicija
- izračun verjetnosti dogodkov
- vprašanja pri verjetnostnem sklepanju
- odvisnosti v bayesovski mreži
- neodvisnosti v bayesovski mreži
- ekvivalenca bayesovskih mrež

# Verjetnostno sklepanje

- do sedaj: definiranje mreže s podajanjem pogojnih verjetnosti
- vendar: upoštevanje **evidence** (podanih informacij o dogodkih, ki so resnični), lahko vpliva na izračun verjetnosti ostalih dogodkov v mreži
- demo: <https://www.bayesserver.com/examples/networks/sprinkler>



# Verjetnostno sklepanje

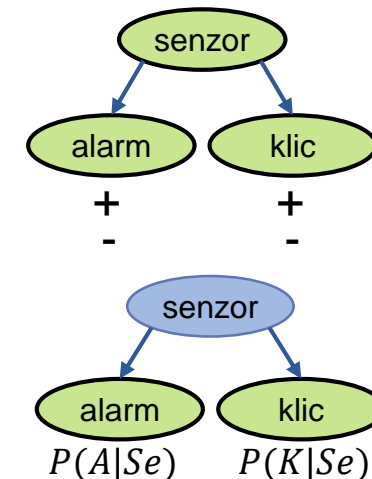


- dve smeri sklepanja:
  - vzročno** (od vzrokom k posledicam): npr.  $P(A | V St) = ?$
  - diagnostično** (od posledic k vzroku): npr.  $P(V | A) = ?$

# Odvisnosti v mreži

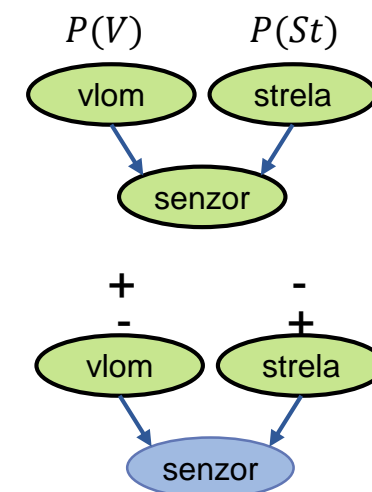
- **skupni prednik (divergentno vozlišče):**

- *alarm* in *klic* sta **odvisna**; če vemo, da je eden od njiju resničen, vpliva to tudi na naše verjetje o resničnosti drugega (če se je sprožil alarm, se je verjetno izvedel tudi klic);  $P(A|K) \neq P(A)$ ,  $P(K|A) \neq P(K)$
- vendar: poznavanje resničnosti prednika *senzor* omogoči, da *alarm* in *klic* obravnavamo kot **neodvisna** (vemo, da se je sprožil *senzor*, torej se je z določeno verjetnost tudi sprožil *alarm* in z določeno (neodvisno) verjetnostjo izvedel tudi *klic*;  
 $P(A|Se \wedge K) = P(A|Se)$ ,  $P(K|Se \wedge A) = P(K|Se)$



- **skupni naslednik (konvergentno vozlišče):**

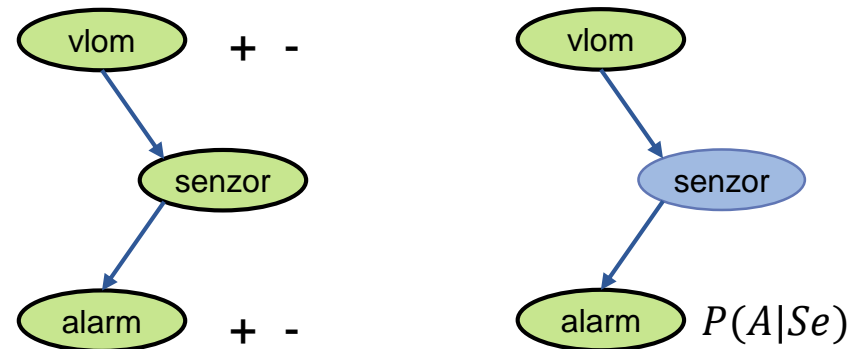
- *vlom* in *strela* sta medseboj **neodvisna** (vedenje, da se je zgodil vlom, ne vpliva na verjetje o dogodku strele)  
 $P(V|St) = P(V)$ ,  $P(St|V) = P(St)$
- vendar: poznavanje resničnosti tega, da se je sprožil *senzor* povzroči, da dogodka *vlom* in *strela* postaneta **odvisna**; ker sta oba vzroka za sproženje *senzorja*, velja, da resničnost enega zmanjšuje verjetnost drugega in obratno  
 $P(V|St \wedge Se) \neq P(V|Se)$ ,  $P(St|V \wedge Se) \neq P(St|Se)$



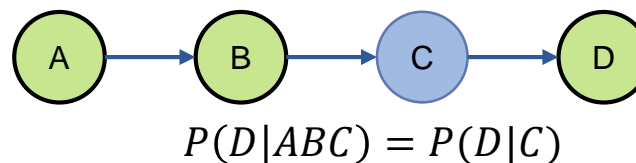
# Odvisnosti v mreži

- **veriga**

- *vlom* in *alarm* sta **odvisna**; poznavanje resničnosti enega od njiju vpliva na naše verjetje o resničnosti drugega
- vendar: če vemo, da je resničen tudi *senzor*, postaneta *vlom* in *alarm* **neodvisna**: poznavanje resničnosti spremenljivke *alarm* ni pogojena s poznavanjem *vloma* in obratno
- pravimo, da vozlišče *senzor* *blokira* vpliv vozlišča *vlom* na vozlišče *alarm*



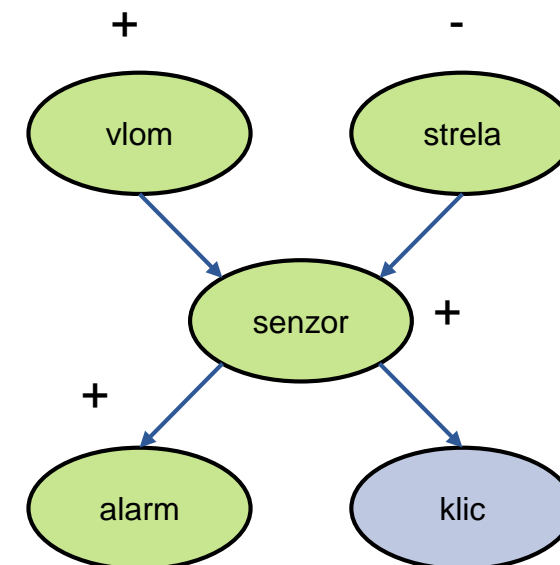
- pravilo lahko posplošimo na daljše verige:



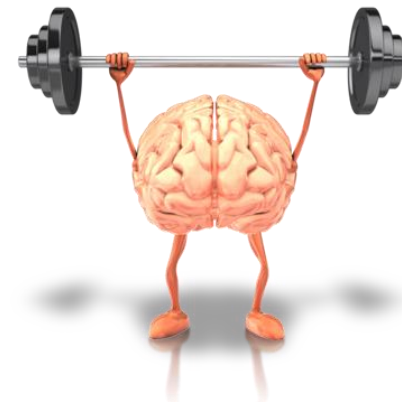


# Primer

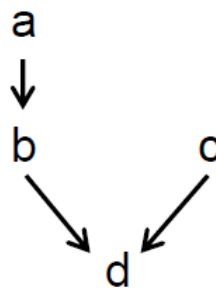
- sklepanje lahko uporabimo na našem primeru:
  - vlom je sam po sebi malo verjeten dogodek
  - denimo, da prejmemo opozorilni klic
  - zaradi prejetega klica se verjetnost proženja senzorja poveča (in ravno tako verjetnost alarma)
  - ker vlom sproža senzor, se poveča tudi verjetnost vlomu
  - ali: izvemo, da je doma bila nevihta s strelami; ker je strela možen vzrok za proženje senzorja, se verjetnost vloma zmanjša



# Vaja



- podana je naslednja bayesovska mreža:

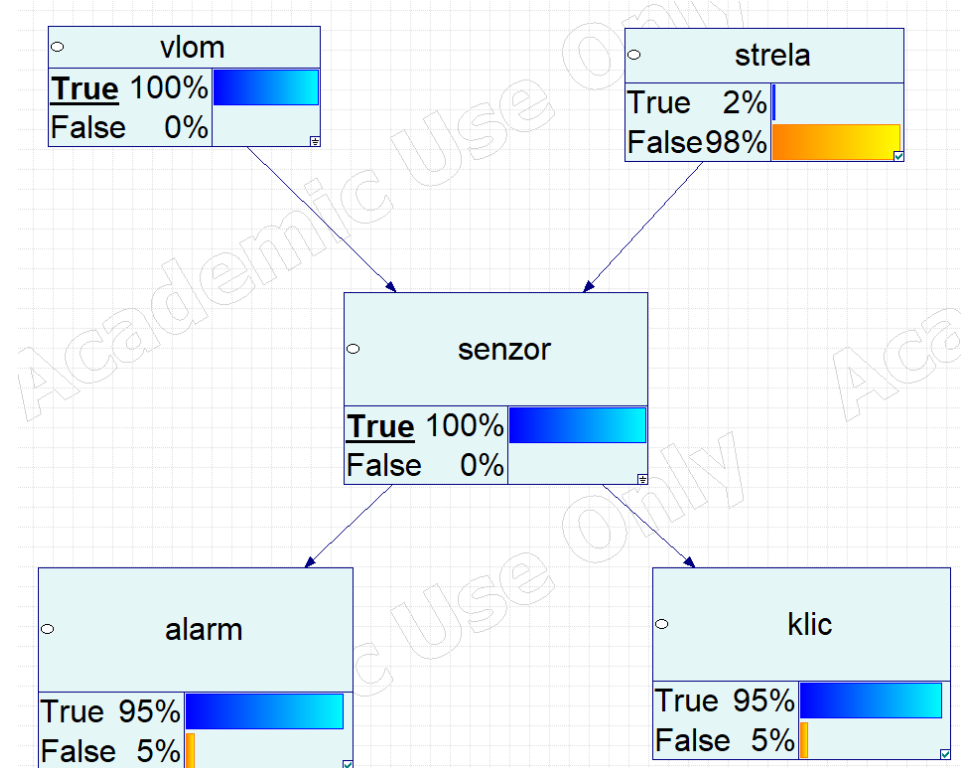


- a in c naj bosta redka dogodka in vse povezave v mreži naj predstavljajo vzročnost med dogodki (torej npr.  $P(b|a) \gg P(b|\sim a)$ ). Brez računanja oceni relacije ( $<$ ,  $>$  ali  $=$ ) med naslednjimi verjetnostmi:

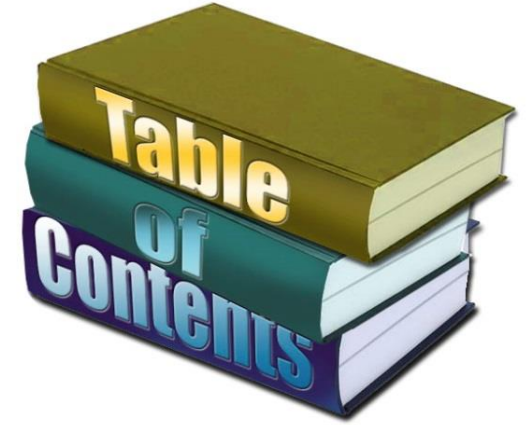
- |                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| a) $P(a) : P(a c)$      | $P(a) = P(a c)$      |
| b) $P(a) : P(a d)$      | $P(a) < P(a d)$      |
| c) $P(a d) : P(a cd)$   | $P(a d) > P(a cd)$   |
| d) $P(d bc) : P(d abc)$ | $P(d bc) = P(d abc)$ |

# Primeri

- modeliranje na spletu:
  - <https://demo.bayesfusion.com/bayesbox.html>
  - <https://www.bayesserver.com/examples/networks/asia>
- namizna aplikacija BayesFusion GeNIe (brezplačna akademska verzija):
  - <https://www.bayesfusion.com/downloads/>



# Pregled

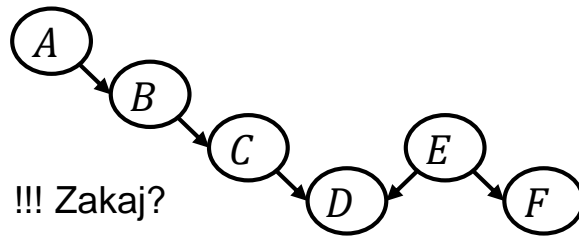


## IV. VERJETNOSTNO SKLEPANJE z bayesovskimi mrežami

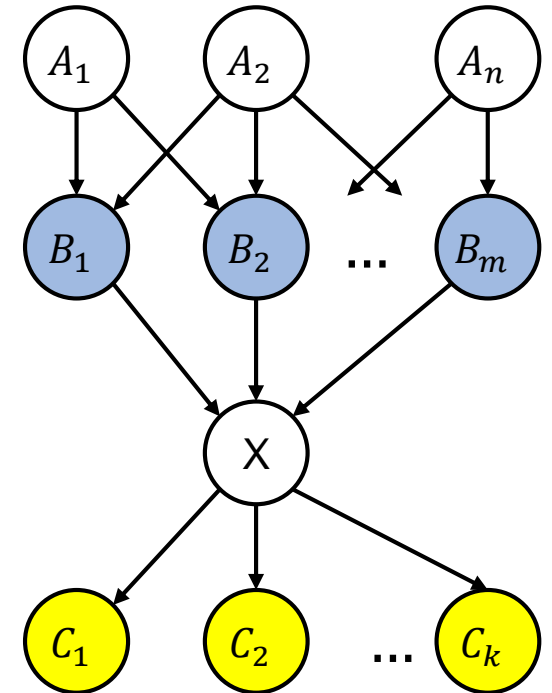
- definicija
- izračun verjetnosti dogodkov
- vprašanja pri verjetnostnem sklepanju
- odvisnosti v bayesovski mreži
- določanje neodvisnosti v bayesovski mreži
  - nenasledniki
  - ovojnica Markova
  - d-ločevanje
- izražanje in računanje verjetnosti v bayesovski mreži
- ekvivalenca bayesovskih mrež

# Neodvisnost od nenaslednikov

- dosedanje pravilo o blokiranju odvisnosti v verigah lahko posplošimo:
  - če so **podani starši** vozlišča  $X$  ( $B_1 \dots B_m$ ),  
je  $X$  **neodvisen samo od svojih nenaslednikov**  
(torej od predhodnikov staršev:  $A_1 \dots A_n$ )  
$$P(X|A_1 \dots A_n B_1 \dots B_m C_1 \dots C_k) = P(X|B_1 \dots B_m C_1 \dots C_k)$$
- pozor:
  - zgornje velja le, če so podani **vsi** starši  $B_1, \dots, B_m$
  - zgornje velja le, če so podani **samo** starši  $B_1, \dots, B_m$ .
  - če so podana tudi druga vozlišča, je potrebno upoštevati tudi njihove neposredne ali posredne vplive
  - primer:

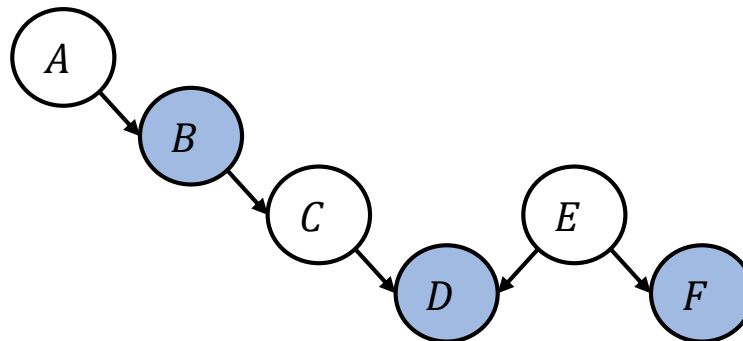


velja  $P(C|AB) = P(C|B)$ ,  
ne pa tudi  $P(C|BDF) = P(C|BD)$  !!! Zakaj?



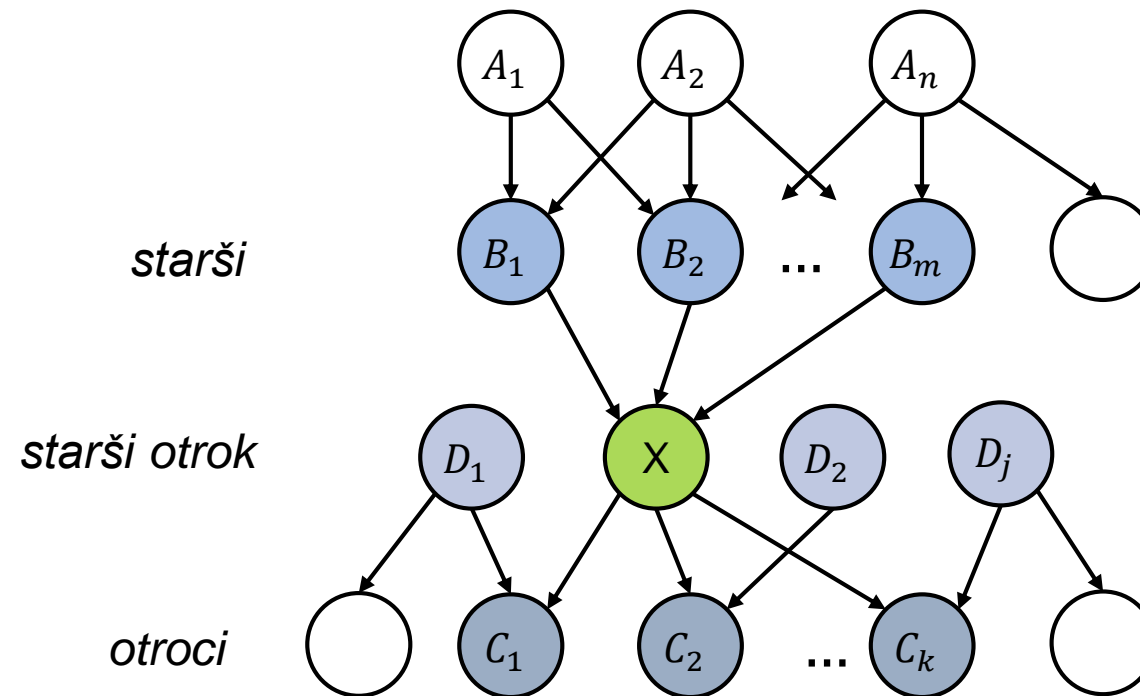
# Neodvisnost v mreži

- $P(C|BDF) \neq P(C|BD)$
- čeprav je F nenaslednik od C, vpliva na to, da je E bolj verjeten in zato C manj verjeten
- pravilo o neodvisnosti od nenaslednikov velja torej samo, če so podani izključno starši vozlišča C



# Ovojnica Markova

- prejšnje pravilo lahko še bolj posplošimo
- **ovojnica Markova** (angl. *Markov blanket*) zagotavlja neodvisnost opazovanega vozlišča
- če so podani **starši, otroci in starši otrok**, je vozlišče  $X$  **neodvisno** od vseh ostalih vozlišč



# d-ločevanje

- angl. *d-separation* (*direction-dependent separation*)
- še večja **posplošitev določanja neodvisnih vozlišč**
- pravilo: če sta  $A$  in  $B$  dve vozlišči (spremenljivki) v mreži, sta ti vozlišči **neodvisni**, če obstaja množica vozlišč  $E$ , ki d-ločuje  $A$  in  $B$
- to pomeni, da velja:

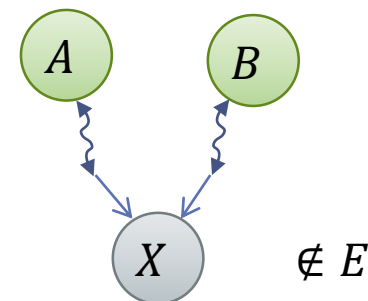
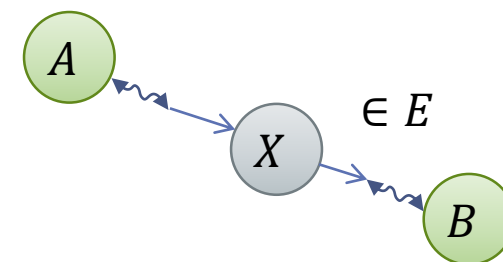
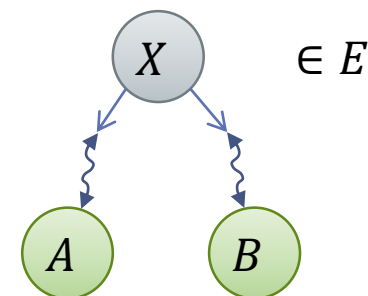
$$P(A|EB) = P(A|E)$$

- kako najdemo množico  $E$ , ki d-ločuje vozlišči  $A$  in  $B$ ?



# d-ločevanje

- kako najdemo množico  $E$ , ki d-ločuje vozlišči  $A$  in  $B$  ?
- množica  $E$  d-ločuje vozlišči  $A$  in  $B$ , če obstaja takšno podano vozlišče  $X$  na vsaki (neusmerjeni) poti med  $A$  in  $B$ , da blokira to pot. Vozlišče  $X$  blokira pot na enega od naslednjih načinov:
  1.  $X$  je **divergentno vozlišče** (skupni vzrok, angl. *fork*) – iz njega kažeta povezavi v  $A$  in  $B$ . Tedaj velja  $X \in E$ .
  2.  $X$  je **zaporedno vozlišče** (bolj neposreden vzrok za  $B$  kot za  $A$ , angl. *serial, chain*). Tedaj velja  $X \in E$ .
  3.  $X$  je **konvergentno vozlišče** (skupna posledica, angl. *converging, collider*) – vanj kažeta povezavi iz  $A$  in  $B$ . Tedaj velja za  $X$  in za vse njegove naslednike, da  $\notin E$ .



# d-ločevanje

- postopek iskanja množice  $E$ , ki d-ločuje  $A$  in  $B$ :

za **vsako neusmerjeno pot  $P$**  med  **$A$**  in  **$B$**  v bayesovski mreži:

za **vsako vozlišče  $X$**  na poti  **$P$** :

**analiziraj pogoj** za pripadnost  $X$  množici  $E$  glede na tip:

**divergentno** ali **zaporedno** vozlišče:  $X \in E$

**konvergentno** vozlišče:  $X$  in nasledniki  $\notin E$

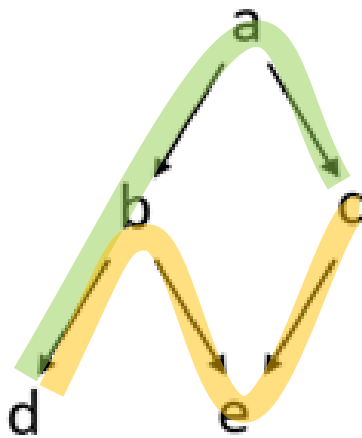
$S_X$  = množice vozlišč, ki ustrezajo pogoju za  $X$

$S_P = \bigcup_X (S_X)$  // množice, ki d-ločujejo samo na poti  $P$   
(unijs množic za vozlišča na poti)

$E = \bigcap_P S_P$  // množice, ki d-ločujejo v celi mreži  
(preseki množic za vse možne poti)

# d-ločevanje: primer

- primer: d-ločevanje vozlišč c in d



$b \in E: \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

$a \in E: \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{a, b, e\}\}$

na celi zeleni poti:  $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

$b \in E: \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

$e \notin E: \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

na celi oranžni poti:  $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

$E = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}\}$

# Izpitna naloga

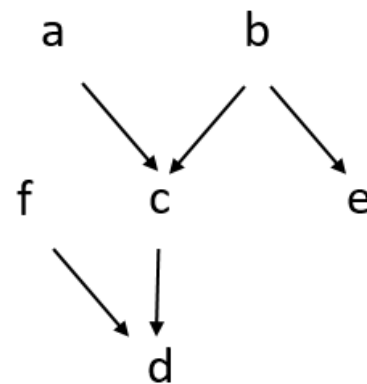
- 1. izpitni rok, 30. 1. 2018

## 4. NALOGA:

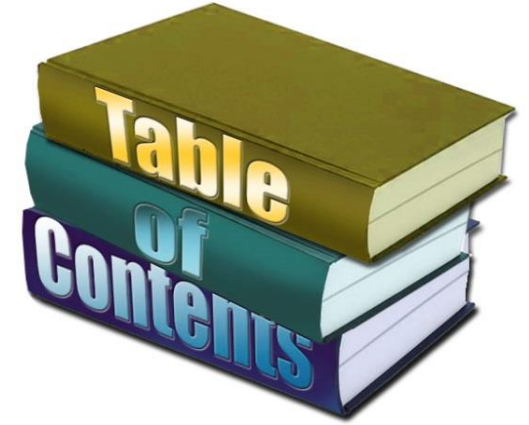
Podana je Bayesovska mreža, ki je prikazana na sliki. Predpostavimo, da vse povezave v mreži predstavljajo pozitivno vzročnost med dogodki.

Odgovori na naslednja vprašanja:

- Kolikšno število verjetnosti je potrebno podati, da je prikazana mreža dobro definirana? Kakšen je prihranek v številu verjetnosti glede na število podatkov v popolni verjetnostni porazdelitvi?
- Katera vozlišča so v ovojnici Markova vozlišča  $c$ ? Zapiši, katera neodvisnost izhaja iz pravila o ovojnici Markova za vozlišče  $c$  in kateri pogoji morajo biti za to izpolnjeni?
- Če je možno, čim bolj poenostavi pogojni del v izrazu:  $P(f|abe)$ . Odgovor utemelji.
- Če je možno, čim bolj poenostavi pogojni del v izrazu:  $P(f|abde)$ . Odgovor utemelji.
- Izrazi verjetnost  $P(d|b)$  z verjetnostmi, ki so podane v mreži.
- Zapiši vse množice vozlišč, ki d-ločujejo vozlišči  $a$  in  $e$ .



# Pregled



## IV. VERJETNOSTNO SKLEPANJE z bayesovskimi mrežami

- definicija
- izračun verjetnosti dogodkov
- vprašanja pri verjetnostnem sklepanju
- odvisnosti v bayesovski mreži
- določanje neodvisnosti v bayesovski mreži
  - nenasledniki
  - ovojnica Markova
  - d-ločevanje
- izražanje in računanje verjetnosti v bayesovski mreži
- ekvivalenca bayesovskih mrež

# Pravila verjetnostnega sklepanja

1. Verjetnost **konjunkcije**:

$$P(X_1 X_2 | C) = P(X_1 | C) \cdot P(X_2 | X_1 C)$$

2. Verjetnost **gotovega** dogodka:

$$P(X | \dots X \dots) = 1$$

3. Verjetnost **nemogočega** dogodka:

$$P(X | \dots \sim X \dots) = 0$$

4. Verjetnost **negacije**:

$$P(\sim X | C) = 1 - P(X | C)$$

5. Če pogoj **vkjučuje naslednika** Y (vzvratno sklepanje), uporabi posplošeno Bayesovo formulo:

$$P(X | YC) = P(X | C) \cdot \frac{P(Y | XC)}{P(Y | C)}$$

6. Če pogoj C **ne vključuje naslednika** od X, potem:

a) če X **nima** staršev:  $P(X | C) = P(X)$

b) če **ima** X starše S:  $P(X | C) = \sum_{s \in \text{stanja staršev}(X)} P(X | S) \cdot P(S | C)$

# Primer

Kolikšna je verjetnost, da se je zgodil vlom, če smo prejeli alarmni klic?

$P(V|K) = ?$

- uporabimo Bayesovo formulo:

$$P(V|K) = P(V) \cdot \frac{P(K|V)}{P(K)}$$

- $P(V)$  je podan

- $P(K|V) = ?$

pogoj ne vključuje naslednika od K, uporabimo pravilo 6b:

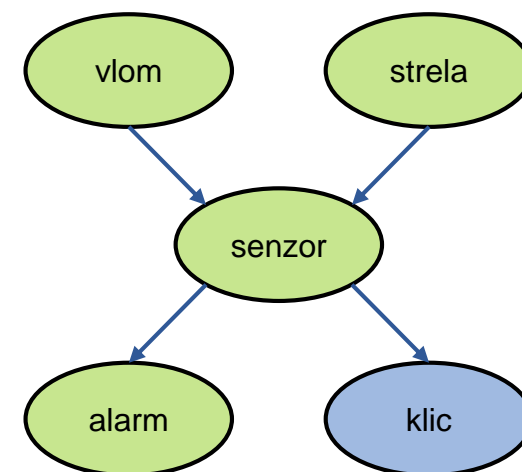
$$P(K|V) = P(K|Se) \cdot P(Se|V) + P(K|\sim Se) \cdot P(\sim Se|V)$$

- $P(Se|V) = ?$

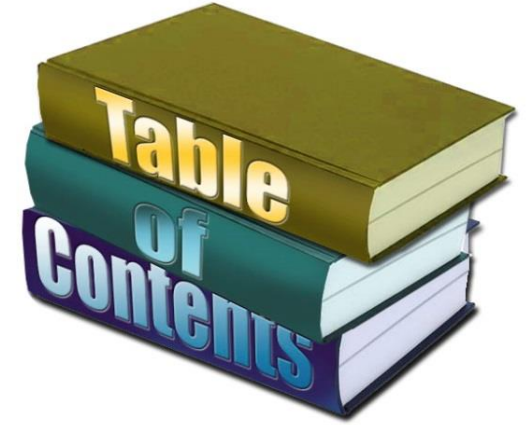
- $P(K) = ?$

ravno tako uporabimo pravilo 6b:

$$P(K) = P(K|Se) \cdot P(Se) + P(K|\sim Se) \cdot P(\sim Se)$$



# Pregled



## IV. VERJETNOSTNO SKLEPANJE z bayesovskimi mrežami

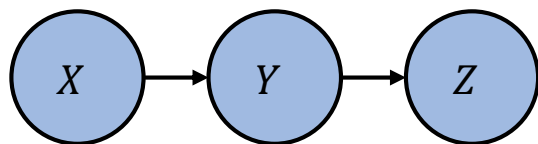
- definicija
- izračun verjetnosti dogodkov
- vprašanja pri verjetnostnem sklepanju
- odvisnosti v bayesovski mreži
- določanje neodvisnosti v bayesovski mreži
  - nenasledniki
  - ovojnica Markova
  - d-ločevanje
- izražanje in računanje verjetnosti v bayesovski mreži
- ekvivalenca bayesovskih mrež



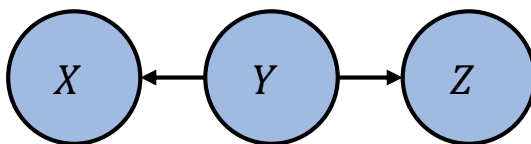
# Ekvivalenca mrež

Za dve mreži pravimo, da sta ekvivalentni, če je **z verjetnostmi ene mreže možno izraziti vse verjetnosti druge mreže**, tako da mreži še vedno izražata iste odvisnosti

- ideja: vzročno ali diagnostično smer sklepanja lahko obrnemo z Bayesovo formulo
- primeri treh ekvivalentnih mrež:



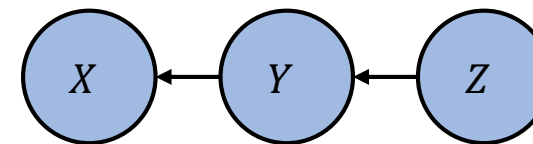
$$P(X), P(Y|X), P(Z|Y)$$



$$P(Y), P(X|Y), P(Z|Y)$$

$$P(X) = P(X|Y) \cdot P(Y) + P(X|\sim Y) \cdot P(\sim Y)$$

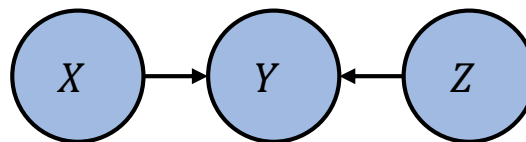
$$P(Y|X) = P(Y) \cdot P(X|Y) / P(X)$$



$$P(Z), P(X|Y), P(Y|Z)$$

(izrazi prvotne verjetnosti za vajo)

- primer neekvivalentne mreže zgornjim:

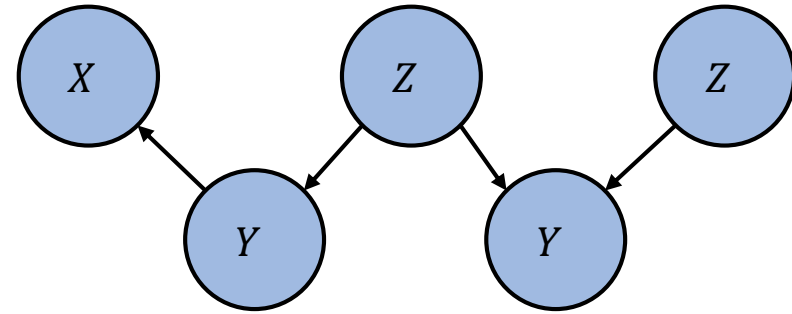
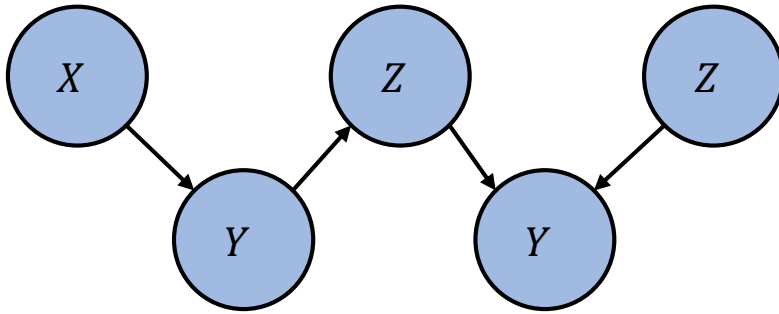


$$P(X), P(Z), P(Y|XZ)$$

# Ekvivalenca mrež

formalno: mreži sta I-ekvivalentni (I-equivalence, independence-equivalence), če:

- imata **enako strukturo** (ob ignoriranju usmerjenosti povezav),
- imata **ista konvergentna vozlišča**.



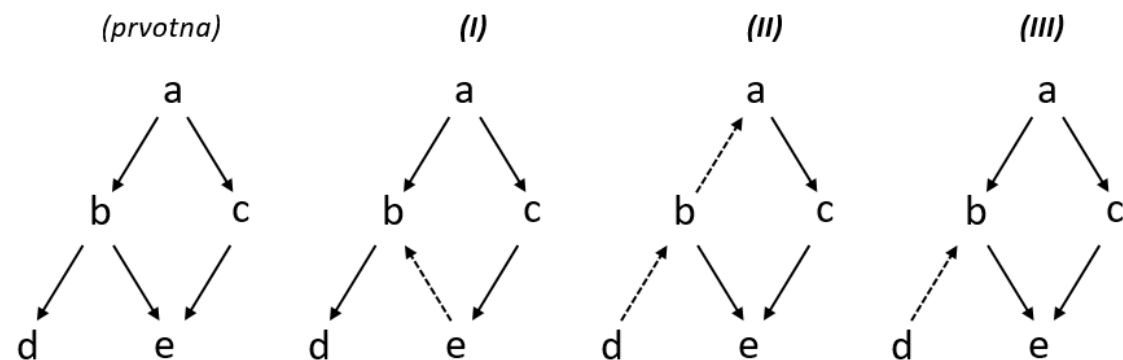
- opomba: obstajajo tudi ekvivalentne bayesovske mreže, ki ne ustrezajo zgornjim zahtevam (npr. polni grafi – ista neusmerjena struktura a drugačna konvergentna vozlišča, ni neodvisnosti)

# Izpitna naloga

- 2. izpitni rok, 15. 2. 2018

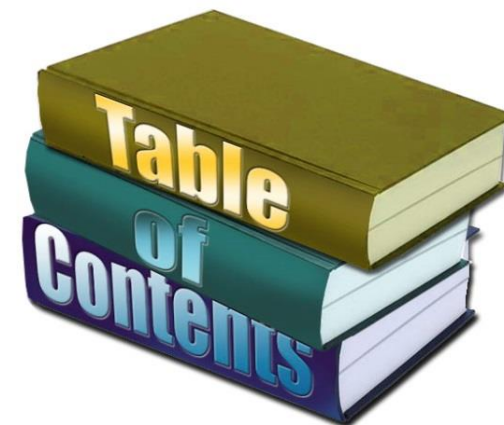
## 3. NALOGA (25t):

Na spodnji sliki je podana prvotna bayesovska mreža (skrajno levo) in tri mreže, ki so izpeljane iz prvotne (označene z rimskimi številkami). Vsaka spremenjena mreža ima drugače usmerjeno eni ali dve povezavi (spremembe so označene s črtkano puščico). Predpostavimo, da so s prvotno mrežo podane vse verjetnosti, ki so potrebne za definiranje te mreže. Za dve mreži pravimo, da sta *ekvivalentni*, če je z verjetnostmi ene mreže možno izraziti vse verjetnosti druge mreže, tako da mreži še vedno izražata iste odvisnosti.



- (4t) Od treh mrež na desni strani je natanko ena ekvivalentna prvotni mreži – katera, zakaj?
- (7t) Izrazi verjetnosti v ekvivalentni spremenjeni mreži (odgovor iz prejšnje točke) z verjetnostmi iz prvotne mreže.
- (7t) Izrazi verjetnost  $P(abcd \sim e)$  z verjetnostmi, ki so podane s prvotno mrežo.
- (7t) Katere množice vozlišč d-ločujejo vozlišči c in d v prvotni mreži?

# Pregled



## IV. VERJETNOSTNO SKLEPANJE z bayesovskimi mrežami

- definicija
- izračun verjetnosti dogodkov
- vprašanja pri verjetnostnem sklepanju
- odvisnosti v bayesovski mreži
- določanje neodvisnosti v bayesovski mreži
  - nenasledniki
  - ovojnica Markova
  - d-ločevanje
- izražanje in računanje verjetnosti v bayesovski mreži
- ekvivalenca bayesovskih mrež

## ZAKLJUČEK

# Cilji predmeta

- kaj je **umetna inteligenca**?
  - kaj si prizadeva?
  - kakšna je definicija?
  - kako dobro nam uspeva doseči te cilje?
  - kakšne so posledice v filozofiji, psihologiji, etiki?
- kaj vse lahko delamo z **metodami umetne inteligence**?
  - vrste problemov
  - načini reševanja problemov
- kako razumeti medije, literaturo in objave s področja umetne inteligence?



# Vsebina predmeta

- strojno učenje:
  - problemski prostor, hipoteze, ocenjevanje učenja
  - gradnja odločitvenih dreves
  - učenje iz šumnih podatkov, rezanje
  - manjkajoči atributi, regresija, naivni Bayes
- reševanje problemov kot preiskovanje grafov
  - neinformirani preiskovalni algoritmi
  - informirani preiskovalni algoritmi
  - lokalno preiskovanje
  - grafi AND/OR, nedeterministično okolje
- igranje iger
- planiranje, razporejanje opravil
- predstavitev negotovega znanja, Bayesovske mreže
- avtomatsko sklepanje



# Kam naprej?



- **dodiplomski študij – modulski predmeti**

63266	Inteligentni sistemi	Marko Robnik Šikonja	Zimski
63267	Umetno zaznavanje	Matej Kristan	Zimski
63268	Razvoj inteligentnih sistemov	Danijel Skočaj	Letni
63251	Uvod v odkrivanje znanj iz podatkov	Blaž Zupan	Letni

- **magistrski študij RI (smer Računalništvo in informatika)**

- modul *Inteligentna analiza podatkov*

63519	Strojno učenje	Igor Kononenko	Zimski
63520	Uvod v bioinformatiko	Blaž Zupan	Zimski
63510	Umetna inteligenca	Ivan Bratko	Letni
63545B	Analiza omrežij	Lovro Šubelj	Letni

# Kam naprej?

- magistrski študij RI (smer Podatkovne vede)

63563	Bayesova statistika	Erik Štrumbelj	Zimski
63564	Načela negotovosti	Erik Štrumbelj	Zimski
63514	Obdelava biomedicinskih signalov in slik	Franc Jager	Zimski
63554	Slikovna biometrija	Peter Peer	Zimski
63519	Strojno učenje	Igor Kononenko	Zimski
63562	Strojno učenje za podatkovne vede 2	Marinka Žitnik	Zimski
63520	Uvod v bioinformatiko	Blaž Zupan	Zimski
63565	Uvod v podatkovne vede	Tomaž Curk	Zimski
63551	Iskanje in ekstrakcija podatkov s spleta	Marko Bajec	Letni, Zimski
63545B	Analiza omrežij	Lovro Šubelj	Letni
63561	Globoko učenje	Danijel Skočaj	Letni
63552	Napredne metode računalniškega vida	Matej Kristan	Letni
63555	Obdelava naravnega jezika	Marko Robnik Šikonja	Letni
63566	Strojno učenje za podatkovne vede 1	Blaž Zupan	Letni
63510	Umetna inteligenca	Ivan Bratko	Letni
63560	Velepodatki	Matjaž Kukar	Letni
63543	Visoko zmogljivo računanje	Uroš Lotrič	Letni





