Diskretne strukture UNI
Vaje 5

1. Naj bo področje pogovora naravna števila. Dana sta predikata

$$\begin{aligned} P(x): &\quad x \text{ je praštevilo.} \\ D(x,y): &\quad \text{število } x \text{ deli število } y \end{aligned}$$

Določi logične vrednosti formul

(a) $A = \forall x(P(x) \vee D(2,x))$,
(b) $B = \exists x(P(x) \wedge D(2,x))$,
(c) $C = \exists x(P(x) \wedge D(5,x))$,
(d) $D = \forall x(P(x) \Rightarrow \neg D(10,x))$,
(e) $E = \forall x(D(4,x) \Rightarrow D(2,x))$,
(f) $F = \forall x \exists y(P(y) \wedge D(y,x))$,
(g) $G = \exists x \forall y(D(x,y) \Rightarrow \neg P(y))$,
(h) $H = \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y,x))$.

Zapiši še negacije formul.

2. Na otoku ljudje živijo v Severni vasi in Južni vasi. Otočani imajo črne in bele ovce. Zapiši s formulami naslednje izjave.

(a) Vsak prebivalec Severne vasi ima vsaj eno črno ovco.
(b) Vsak prebivalec Južne vasi ima vsaj eno črno ovco in eno belo ovco.
(c) Obstaja prebivalec Severne vasi, ki nima črne ovce.
(d) Vsak prebivalec Severne vasi pozna prebivalca Južne vasi, ki ima belo ovco.
(e) Neki prebivalec Južne vasi pozna prebivalca Severne vasi, ki ima črno ovco.
(f) Neki prebivalec Južne vasi pozna vse prebivalce Severne vasi, ki imajo črno ovco.

3. Katere izmed formul so med sabo enakovredne in katere ne? Odgovore dobro utemelji!

$$A = \forall y \exists x(P(x) \vee \neg Q(y)), \qquad C = \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)),$$
$$B = \forall y(\exists x \neg P(x) \vee Q(y)), \qquad D = \exists y(P(y) \vee \forall x \neg Q(x)).$$

4. Katere izmed spodnjih formul so enakovredne?

$$\begin{aligned} A &= \exists x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y R(x,y)), \\ B &= \exists x(\forall y P(y,x) \Rightarrow \forall y R(x,y)), \\ C &= \exists x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y R(y,x)). \end{aligned}$$

5. Poišči interpretacije, v katerih imajo naslednji pari izjavnih formul nasprotno logično vrednost.

(a) $F_1 = \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ in $F_2 = \exists x(P(x) \Rightarrow R(x))$,
(b) $F_1 = \forall x(P(x) \Leftrightarrow R(x))$ in $F_2 = \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$,
(c) $F_1 = \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$ in $F_2 = 0$,
(d) $F_1 = \forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$ in $F_2 = 1$.

6. Pokaži, da sta F_1 in F_2 enakovredni:

$$\begin{aligned} F_1 &= \neg \exists x((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x))), \\ F_2 &= \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg \exists y R(y). \end{aligned}$$

7. Za področje pogovora $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ je definiran predikat $P(m,n)$. Zanj vemo, da so za vsak par celih števil m in n resnične naslednje izjave:

P0. $P(0,0)$,

P1. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m,n+2)$,

P2. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m+2,n-1)$,

P3. $P(m,n) \Leftrightarrow P(m-1,n-1)$.

Katere od naslednjih izjav so resnične?

(a) $P(1,1)$,

(b) $P(2,5)$,

(c) $\forall m \forall n\, P(m,n)$