Diskretne strukture UNI
Vaje 12

1. Definiran je graf $G = (V, E)$, kjer je

$$
\begin{aligned}
V &= \{1,2,3,4,5,6\},\\
E &= \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{1,6\},\{1,3\},\{3,6\},\{4,6\}\}.
\end{aligned}
$$

   (a) Nariši graf G.

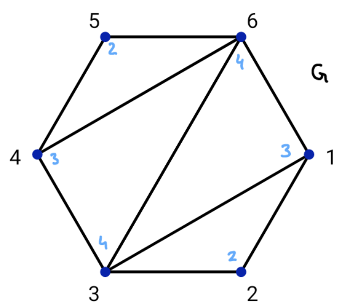
   (b) Določi zaporedje stopenj točk grafov G in $\overline{G}$ ter najmanjšo ter največjo stopnjo točk grafov G in $\overline{G}$.

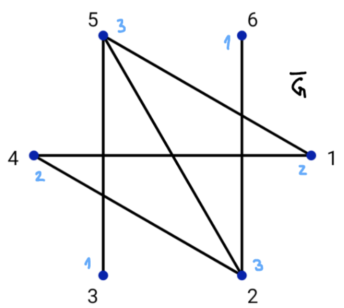
   (c) Koliko ciklov dolžin 3 in 4 vsebuje graf G?

   (d) Ali je graf G dvodelen?

   (e) Ali je graf G Eulerjev?

(a) Nariši graf G.



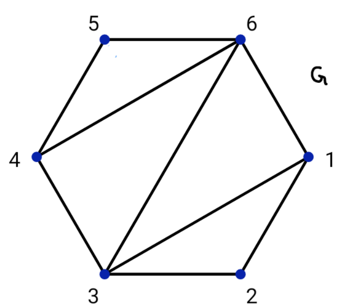


(b) Določi zaporedje stopenj točk grafov G in $\overline{G}$ ter najmanjšo ter največjo stopnjo točk grafov G in $\overline{G}$.

G: 443322 $\qquad$ $\overline{G}$: 332211

$\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 2$ $\qquad$ $\Delta(\overline{G}) = 3$, $\delta(\overline{G}) = 1$

(c) Koliko ciklov dolžin 3 in 4 vsebuje graf G?



3-cikli: 123, 136, 346, 456 $\rightsquigarrow$ 4

4-cikli: 1236, 1346, 3456 $\rightsquigarrow$ 3

(d) Ali je graf G dvodelen?

Ne, ker vsebuje lihe cikle, potrebujemo vsaj 3 barve.

(e) Ali je graf G Eulerjev?

Ne, ker vsebuje vozlišča lihih stopenj.

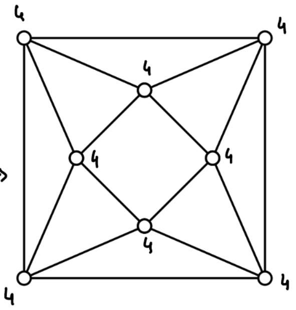
določimo vrstni red barv

1
2
3
4
5
6
7
⋮

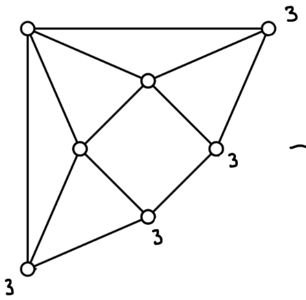
2. Pri požrešni metodi za barvanje grafov graf G pobarvamo tako, da vozlišča G pobarvamo v nekem izbranem vrstnem redu – vozlišče v_i pobarvamo s prvo barvo, ki je še nismo uporabili za sosednja vozlišča iz seznama $v_1, \ldots, v_{i-1}$. Ena možnost za izbiro vrstnega reda je ta: Iz G odstranimo vozlišče najnižje stopnje, nato iz dobljenega grafa odstranimo vozlišče najnižje stopnje, itn. Vozlišča nato pobarvamo s požrešno metodo v obratnem vrstnem redu.

Graf na spodnji sliki pobarvaj na ta način. Določi $\chi(G)$.

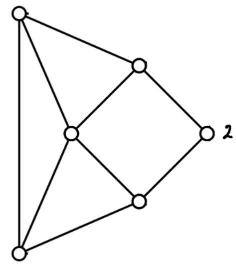
določimo vrstni red vozlišč



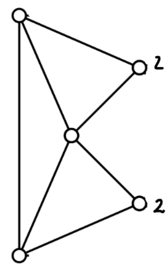
Vsa iste stopnje, odstranimo poljubno (in ga poimenujemo v_1).



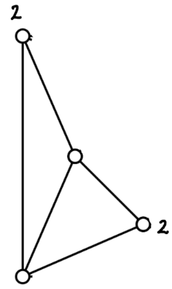
4 kandidati za v_2, spet izberemo poljubno.



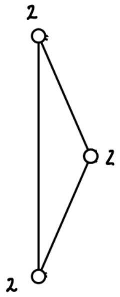
v_3 je zdaj enolično določen.



2 možnosti za v_4

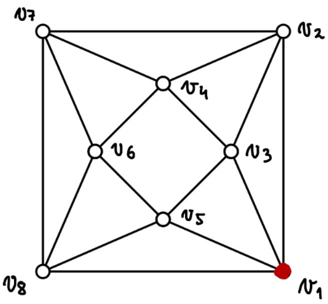


2 možnosti za v_5

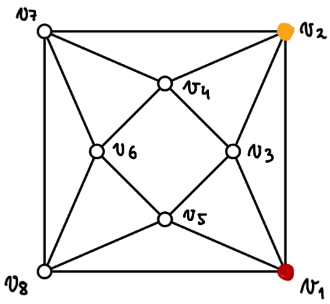


Zadnje 3 poljubno.

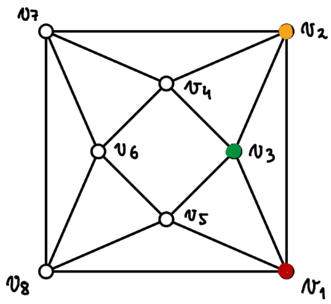
barvamo



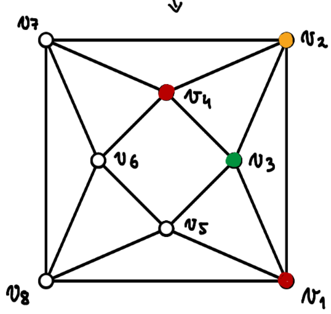
v_1 z barvo 1



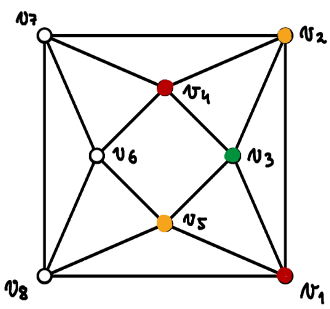
v_2 s prvo možno barvo (2)



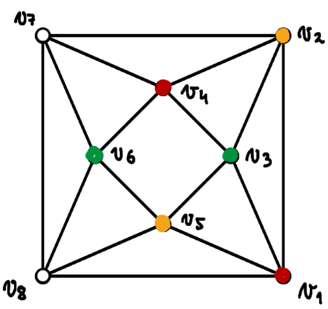
v_3 s prvo možno barvo (3)



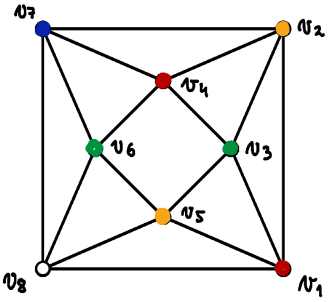
v_4 s prvo možno barvo (1)



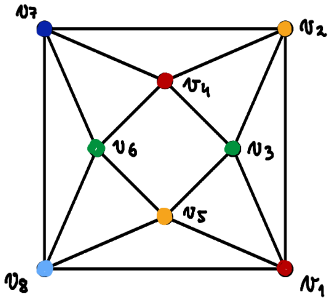
$v_5 = 2$



$v_6 = 3$

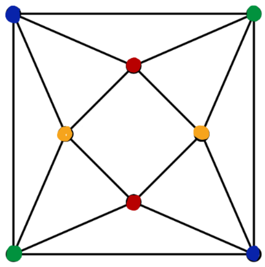


$v_7 = 4$



$v_8 = 5$

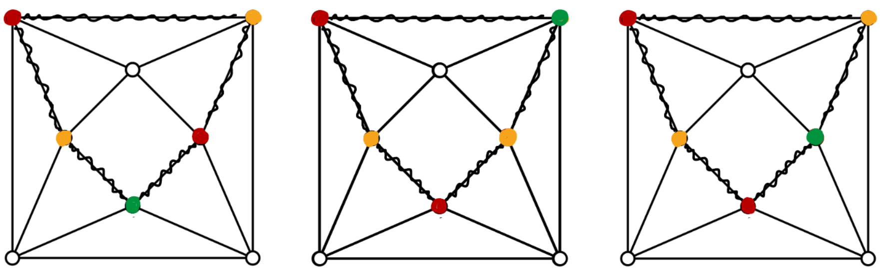
⇝ 5 barv (ni optimalno)

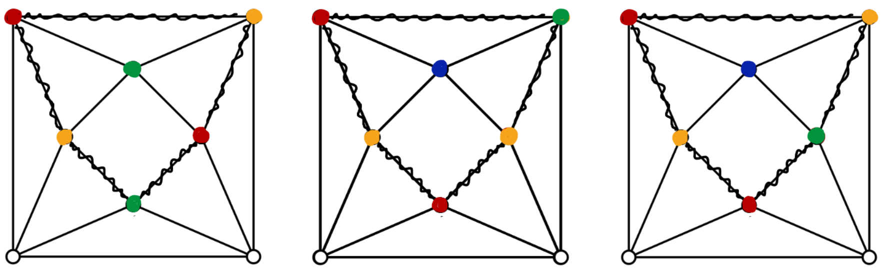


4 barve

Bi šlo z manj kot 4 barvami?

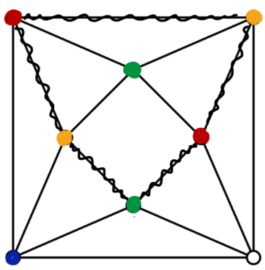
Za označeni lihi cikel vsaj 3 barve (vsa možna barvanja do simetrije natančno so spodaj).





V dveh primerih od treh takoj potrebujemo četrto barvo.

$\chi \geq 4$ $\chi \geq 4$



$\chi \geq 4$

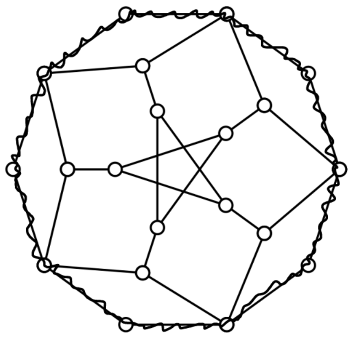
V tretjem primeru potrebujemo vsaj 4 barve na naslednjem koraku (na koncu celo 5).

$\chi \geq 4$

⇝ + barvanje zgoraj ($\chi \leq 4$)

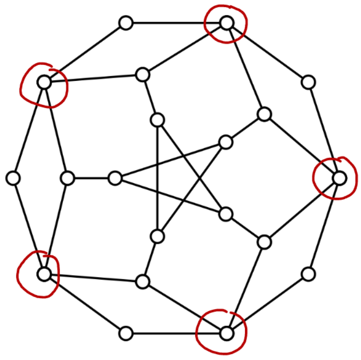
$\underline{\underline{\chi = 4}}$

3. Je spodnji graf Hamiltonov? Določi njegovo kromatično število.



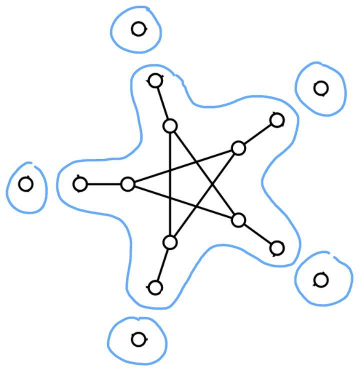
Hamiltonov cikel bi moral vsebovati vse povezave, sosednje točkam stopnje 2, ampak te že tvorijo cikel, ki pa ne obišče vseh vozlišč. Graf zato ni Hamiltonov.

Izrek (o razpadu). Če obstaja $S \subseteq V(G)$, $|S| = k$, za katero $G-S$ razpade na $k+1$ kosov, potem G ni Hamiltonov.

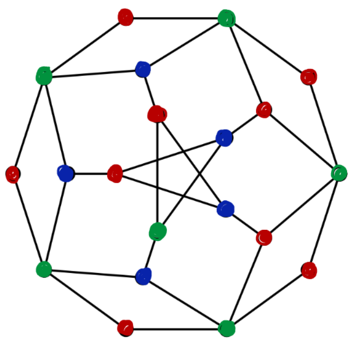


-5 vozlišč

$\Rightarrow$ 6 komponent



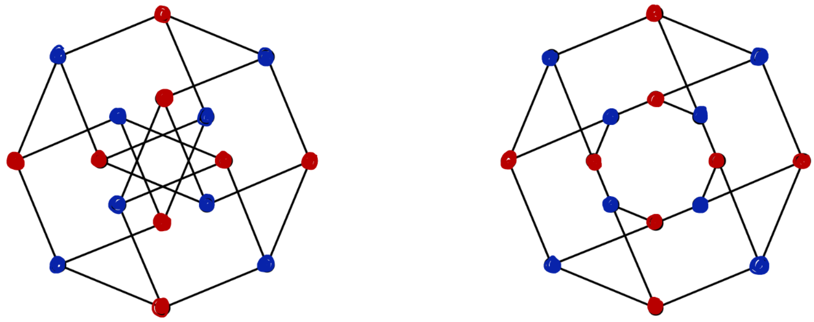
$\rightsquigarrow$ Po izreku o razpadu ni Hamiltonov.



$$\left.\begin{array}{l}\text{na sredini lihi cikel } (C_5) \Rightarrow \chi \geq 3 \\ \text{barvanje s 3 barvami na sliki} \Rightarrow \chi \leq 3\end{array}\right\} \chi = 3$$

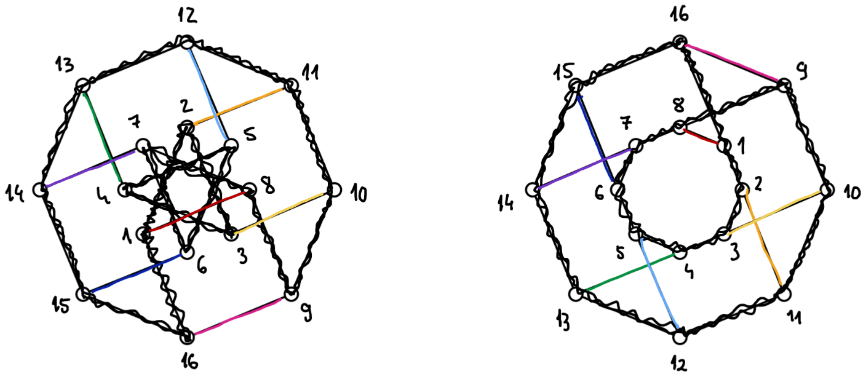
4. (a) Ali sta spodnja grafa dvodelna?
   (b) Ali sta Hamiltonova?
   (c) Ali sta izomorfna?

a)



Oba sta dvodelna, barvanji z 2 barvama sta zgornji sliki.

b)



Oba sta Hamiltonova. Cikla, ki vsebujeta vsa vozlišča, sta označena na zgornji sliki.

c) Oba imata enako poimenovan H. cikel. Prvi ima še povezave (1,8), (2,11), (3,10), (4,13), (5,12), (6,15), (7,14), (9,16).

Drugi ima poleg cikla še povezave (1,8), (2,11), (3,10), (4,13), (5,12), (6,15), (7,14), (9,16).

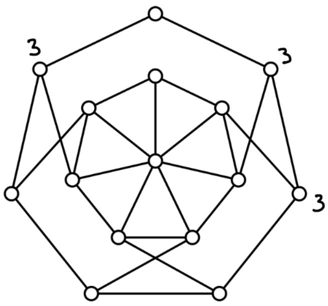
Ker je $V(G_1) = V(G_2)$ in $E(G_1) = E(G_2)$, sta izomorfna in zgornje številčenje je izomorfizem $G_1 \to G_2$.

5. (a) Ali je spodnji graf Eulerjev?

(b) Ali je Hamiltonov?

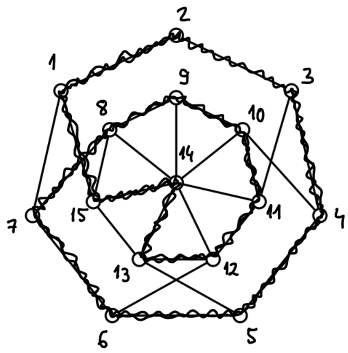
(c) Določi kromatično število tega grafa.

a)



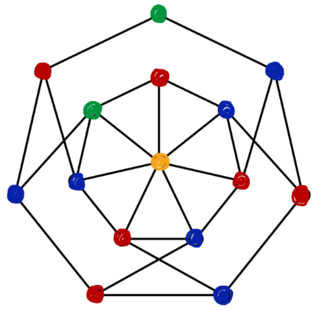
Ni Eulerjev, ker ima vozlišča lihih stopenj.

b)



Je Hamiltonov.

c)



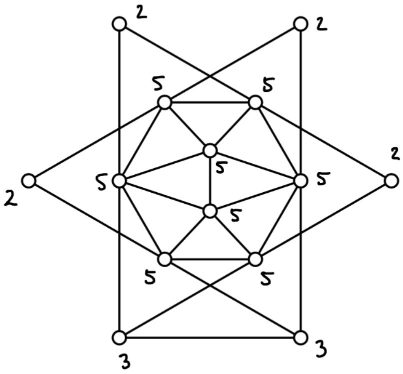
$\left.\begin{array}{l}\text{liho kolo} \Rightarrow \text{vsaj 4 barve} \\ \text{na sliki barvanje s 4 barvami}\end{array}\right\} \Rightarrow \chi = 4$

6. (a) Ali je spodnji graf Eulerjev? Ali je Hamiltonov?

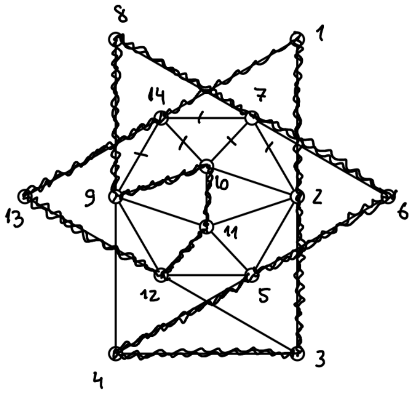
   (b) Ali obstaja tako vozlišče u, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišče u, dvodelen?

   (c) Ali obstajata taki vozlišči u in v, da bo graf, ki ga dobimo, če grafu G odstranimo vozlišči u in v, dvodelen?

a)

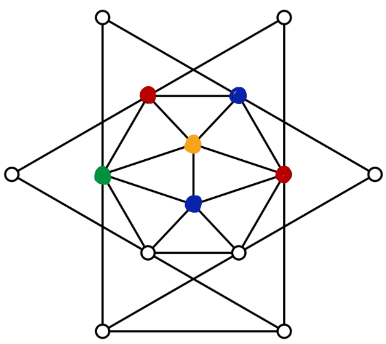


Ni Eulerjev, ker vsebuje vozlišča lihih stopenj.



Je Hamiltonov.

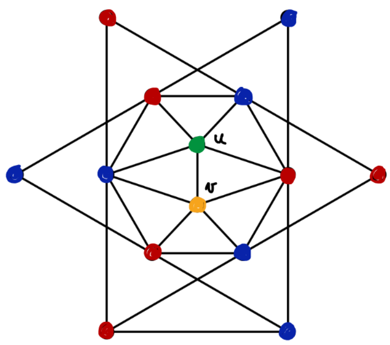
b)



Graf vsebuje liho kolo, zato bo $\chi \geq 4$.

Če odstranimo eno vozlišče, bo še vedno $\chi \geq 3$. Torej po odstranitvi enega vozlišča graf ne bo dvodelen (ne bo $\chi = 2$).

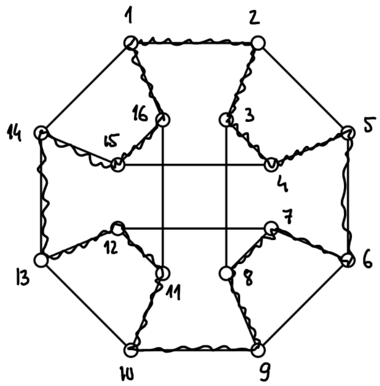
c)



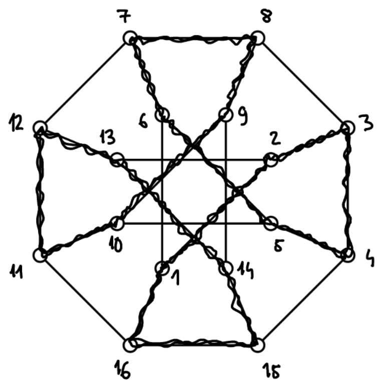
$G \setminus \{u,v\}$ je dvodelen (barvanje na sliki pokaže, da je $\chi(G \setminus \{u,v\}) = 2$).

7. (a) Ali je kateri od spodnjih grafov Hamiltonov?
   (b) Za vsakega določi njegovo kromatično število.
   (c) Koliko ima vsako vozlišče sosedov? Koliko je za vsako vozlišče vozlišč, ki so na razdalji 2?
   (d) Ali sta grafa izomofna?

a)

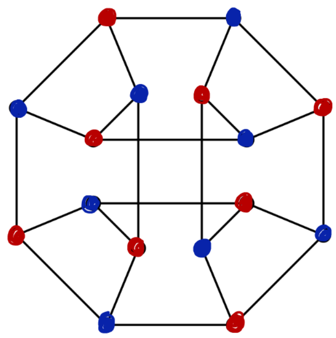


Je Hamiltonov.

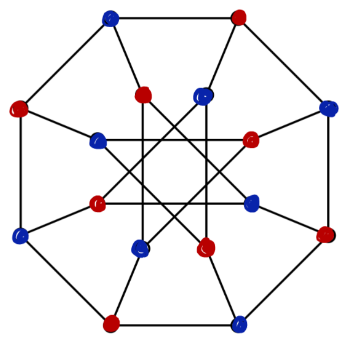


Je Hamiltonov.

b)

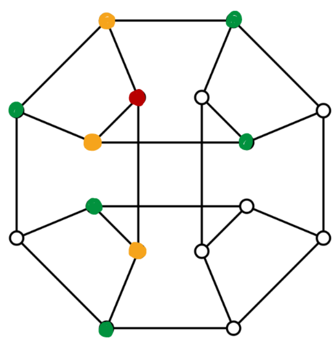


$\chi = 2$

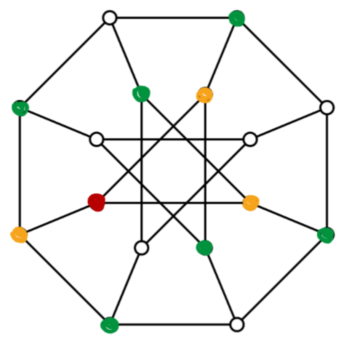


$\chi = 2$

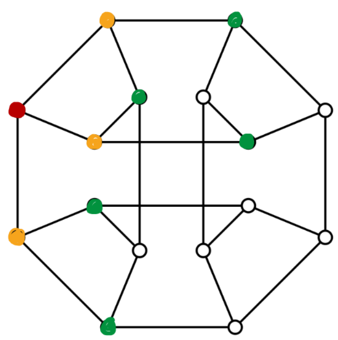
c)

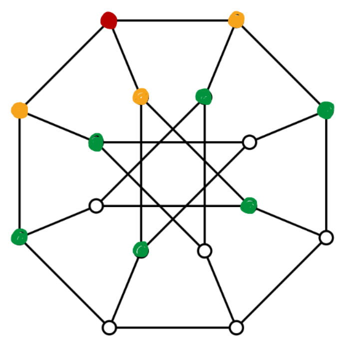


Vsako vozlišče ima 3 sosede in $\underline{\underline{5}}$ sosedov sosedov.



Vsako vozlišče ima 3 sosede in $\underline{\underline{6}}$ sosedov sosedov.





d) Grafa nista izomorfna, ker ima vsako vozlišče v prvem 5 vozlišč na razdalji 2, v drugem pa 6.