Diskretne strukture UNI
Vaje 7

1. Ali velja

   (a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$,

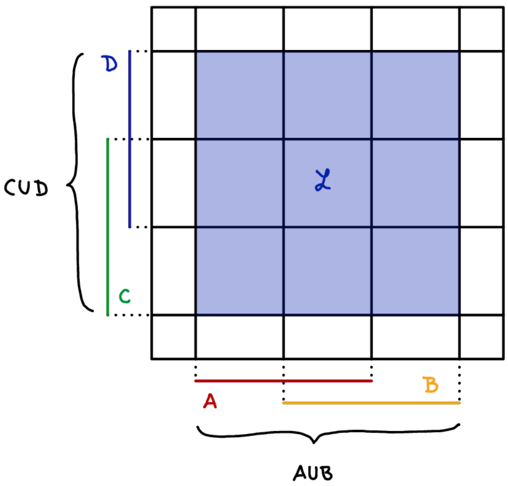
   (b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (C \times D)$,

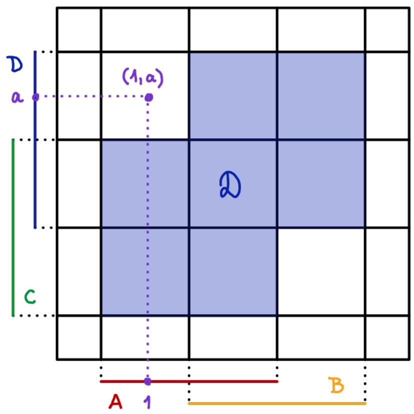
   (c) $(A + B) \times (C + D) = (A \times C) + (B \times D)$,

   (d) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$,

   (e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$?

(a) $(A \cup B) \overset{\mathcal{L}}{\times} (C \cup D) = (A \times C) \overset{\mathcal{D}}{\cup} (B \times D)$





$\mathcal{L} \neq \mathcal{D}$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$

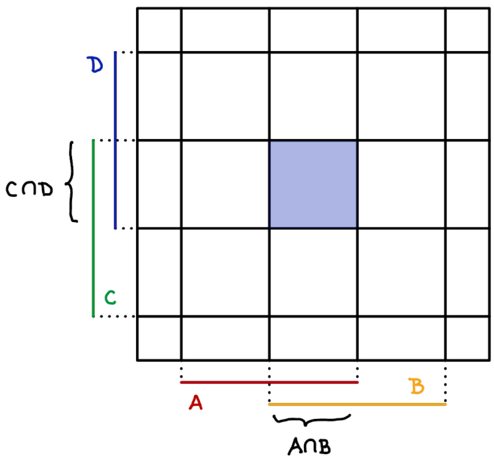
$C = \{b\}$, $D = \{a\}$

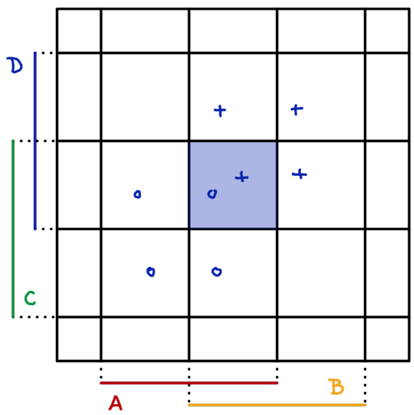
$\mathcal{L} = \{1,2\} \times \{a, b\} =$
$= \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

$\mathcal{D} = \{1,2\} \times \{b\} \cup \{2\} \times \{a\} =$
$= \{(1,b), (2,b)\} \cup \{(2,a)\} =$
$= \{(1,b), (2,b), (2,a)\} \neq \mathcal{L}$

$\mathcal{L} \neq \mathcal{D}$

(b) $(A \cap B) \underset{\mathcal{L}}{\times} (C \cap D) = (A \overset{\circ}{\times} C) \underset{\mathcal{D}}{\cap} (B \overset{+}{\times} D)$





$\mathcal{L} = \mathcal{D}$

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$: Naj bo $(x,y) \in \mathcal{L}$. Torej je

$(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Sledi, da je $x \in A \cap B$ in $y \in C \cap D$, zato je $x \in A$ in $x \in B$ in $y \in C$ in $y \in D$.
Ker je $x \in A$ in $y \in C$, je $(x,y) \in A \times C$. Ker je $x \in B$ in $y \in D$, je $(x,y) \in B \times D$.
Torej je $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D) = \mathcal{D}$.

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$: Naj bo $(x,y) \in \mathcal{D}$. Iz

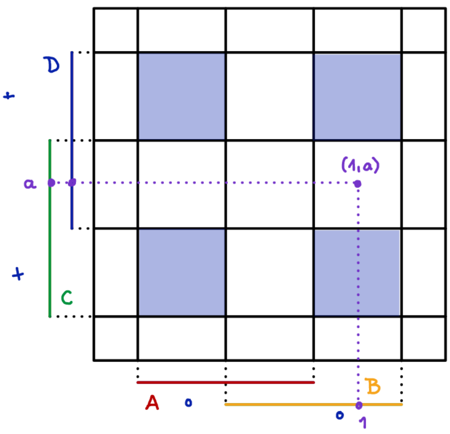
$(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

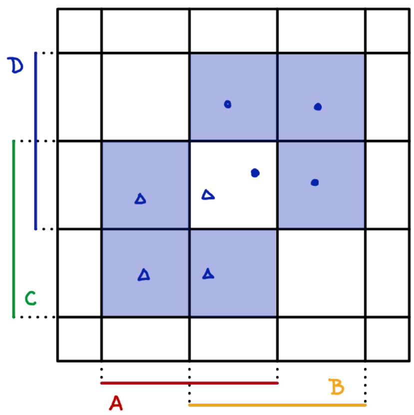
sledi, da je $(x,y) \in A \times C$ in $(x,y) \in B \times D$.
Zato je $x \in A$, $y \in C$, $x \in B$ in $y \in D$. Ker je $x \in A$ in $x \in B$, je $x \in A \cap B$. Ker je $y \in C$ in $y \in D$, je $y \in C \cap D$. Torej je

$(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) = \mathcal{L}$.

Ker je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$ in $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$, je $\mathcal{L} = \mathcal{D}$. ∎

(c) $(A + B) \times (C + D) = (A \times C) + (B \times D)$





$\mathcal{L} \neq \mathcal{D}$

$A = \{2,3\} \quad B = \{1\}$

$C = \{a\}, \ D = \{a,b\}$

$\mathcal{L} = (\{2,3\} + \{1\}) \times (\{a\} + \{a,b\}) =$

$= \{1,2,3\} \times \{b\} =$

$= \{(1,b),(2,b),(3,b)\}$

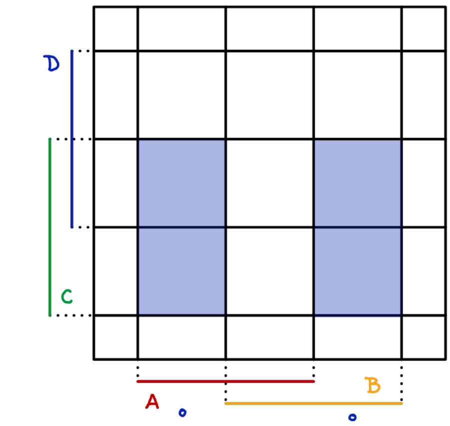
$\mathcal{D} = \{2,3\} \times \{c\} + \{1\} \times \{a,b\} =$

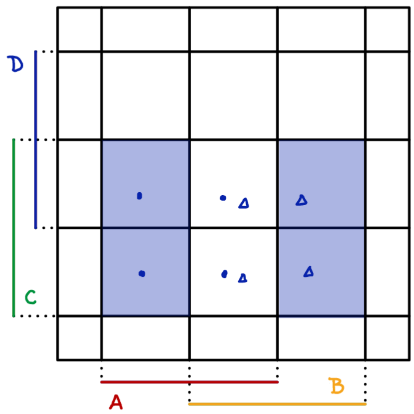
$= \{(2,c),(3,c)\} + \{(1,a),(1,b)\} =$

$= \{(2,c),(3,c),(1,a),(1,b)\} \neq \mathcal{L}$

$\mathcal{L} \neq \mathcal{D}$

(d) $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$





$\mathcal{L} = \mathcal{D}$

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$: Naj bo $(x,y) \in \mathcal{L}$. Potem je $x \in A+B$ in $y \in C$. Ker je $x \in A+B$, je $x \in A$ in $x \notin B$ ali pa $x \notin A$ in $x \in B$. V prvem primeru je $(x,y) \in A \times C$ in $(x,y) \notin B \times C$, v drugem pa $(x,y) \notin A \times C$ in $(x,y) \in B \times C$. Torej je $(x,y) \in A \times C + B \times C = \mathcal{D}$.

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}$: $(x,y) \in \mathcal{D} \Rightarrow$

$(x,y) \in A \times C + B \times C \Rightarrow$

$(x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \notin B \times C \ \vee \ (x,y) \notin A \times C \wedge (x,y) \in B \times C \Rightarrow$

$(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \ \vee \ (x \notin A \vee y \notin C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \Rightarrow$

$(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \ \vee \ (x \notin A \wedge x \in B \wedge y \in C) \vee (y \notin C \wedge x \in B \wedge y \in C) \Rightarrow$

$(x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge y \in C) \Rightarrow$

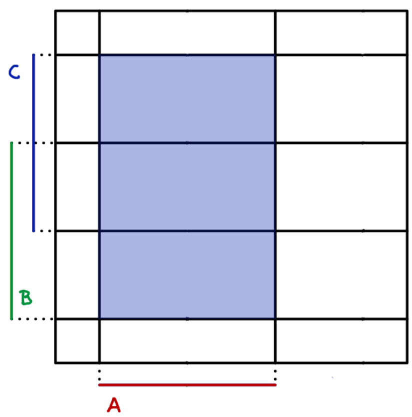
$(x \in A \wedge x \notin B \ \vee \ x \notin A \wedge x \in B) \wedge y \in C \Rightarrow$

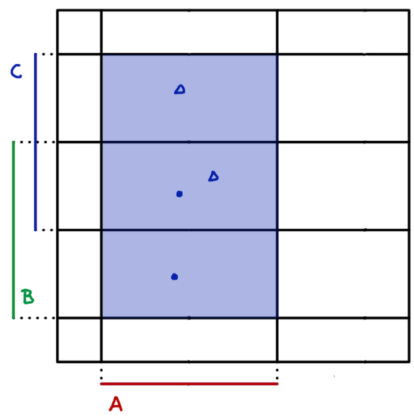
$(x \in A + B) \wedge y \in C \Rightarrow$

$(x,y) \in (A+B) \times C = \mathcal{L}$.

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \wedge \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{D}$. ∎

(e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$





$\mathcal{L} = \mathcal{D}$

$(x,y) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$

$(x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge y \in B \cup C \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow$

$(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow$

$(x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \Leftrightarrow$

$(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Leftrightarrow$

$(x,y) \in \mathcal{D}$. ∎

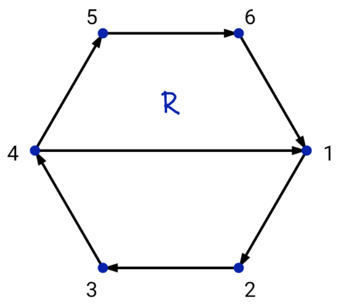
2. Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definiramo relacijo

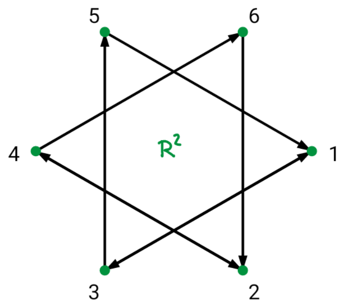
$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,1), (4,1)\}.$$

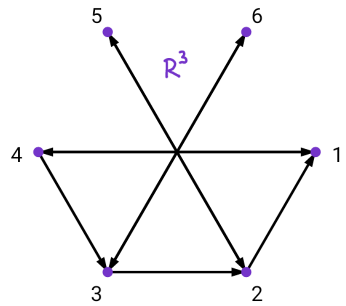
(a) Nariši grafe relacij R, $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.

(b) Katere izmed zgornjih relacij so refleksivne, simetrične in/ali tranzitivne?

(a) Nariši grafe relacij R, $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.







R^2 = v grafu za R naredimo natanko 2 koraka

R^3 = v grafu za R naredimo natanko 3 korake

(b) Katere izmed zgornjih relacij so refleksivne, simetrične in/ali tranzitivne?

	refleksivna	simetrična	tranzitivna
R	NI $\neg 1R1$	NI $1R2 \wedge \neg 2R1$	NI $1R2 \wedge 2R3 \wedge \neg 1R3$
R^2	NI $\neg 1R^2 1$	NI $3R^2 5 \wedge \neg 5R^2 3$	NI $6R^2 2 \wedge 2R^2 4 \wedge \neg 6R^2 4$
R^3	NI $\neg 1R^3 1$	NI $4R^3 3 \wedge \neg 3R^3 4$	NI $5R^3 2 \wedge 2R^3 1 \wedge \neg 5R^3 1$

$\boxed{R \text{ refleksivna} \Leftrightarrow \forall x : xRx}$

V grafu imajo vsa vozlišča zanko.

$\boxed{R \text{ simetrična} \Leftrightarrow \forall x,y : (xRy \Rightarrow yRx)}$

Če je → od x do y, je → od y do x (vse povezave so dvosmerne).

$\boxed{R \text{ tranzitivna} \Leftrightarrow \forall x,y,z : (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)}$

Če lahko gremo po → od x do y in od y do z, potem imamo tudi bližnjico x → z.

R ni refleksivna $\Leftrightarrow \exists x : \neg xRx$

R ni simetrična $\Leftrightarrow \exists x,y : (xRy \wedge \neg yRx)$

R ni tranzitivna $\Leftrightarrow \exists x,y,z : (xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$

3. Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ definiramo relacijo

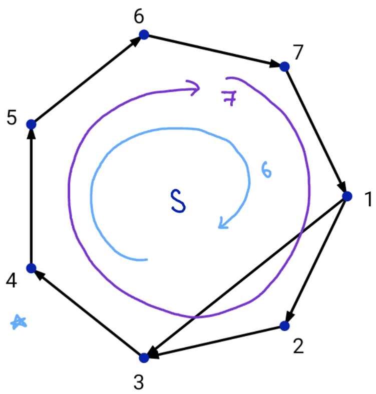
$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,1)\}.$$

(a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1,3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.

(b) Pokaži, da je $S^{2019} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).

(c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a,b)\}$, kjer je (a,b) poljuben urejen par, ki *ni* v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2019} = U_A$.

(a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1,3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.



S^{10} = točno 10 korakov po grafu S

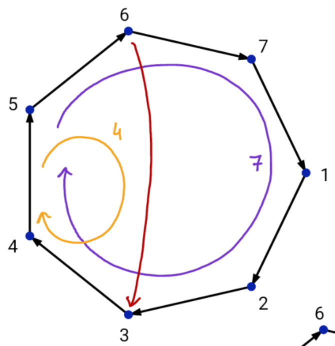
- če začnemo v 1:
  - 7 korakov po 7-ciklu in še 3 $\Rightarrow (1,4)$
  - 7 korakov po 7-ciklu, 1 po bližnjici in še 2 $\Rightarrow (1,5)$
  - 2-krat po bližnjici $\Rightarrow (1,6)$
- če začnemo v 2:
  - 0× po bližnjici: $(2,5)$
  - 1× po bližnjici: $(2,6)$
- ...

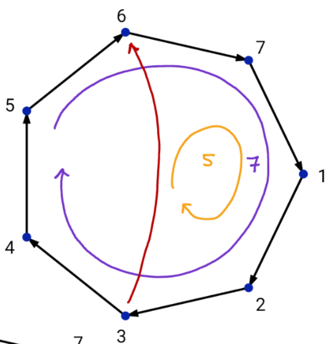
$S^{10} = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),$
$(3,6),(3,7),(4,7),(4,1),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(6,2),(6,3),(6,4),$
$(7,3),(7,4),(7,5)\}$

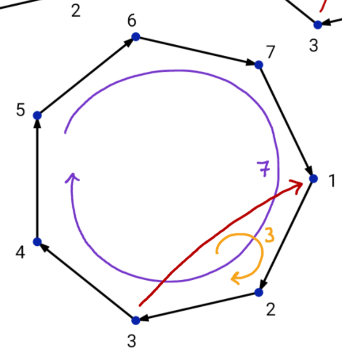
(b) Pokaži, da je $S^{2019} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).

Če imamo na voljo točno 2019 korakov, lahko bližnjico uporabimo 0×, 1×, ..., 6×. Ker je $2019 \% 7 = 3$ $(2019 = 288 \cdot 7 + 3)$, lahko zato iz vsake točke pridemo 3, 4, 5, 6, 7(=0), 8(=1), 9(=2), 10(=3), 11(=4), ... korakov "naprej" po 7-ciklu. Torej lahko pridemo iz vsake točke v vsako drugo. $\Rightarrow R^{2019} = A \times A$.

(c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a,b)\}$, kjer je (a,b) poljuben urejen par, ki *ni* v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2019} = U_A$.







* npr. $2019 - (x \cdot 7 + y \cdot k) = 4$

$\Updownarrow$

$7x + ky = 2023$

diofantska enačba, ki je rešljiva, ker je $\gcd(k,7) = 1$

Ne glede na to, kam dodamo dodatno povezavo in v katero smer kaže, bomo poleg 7-cikla dobili še k-cikel za nek $k \in \{3,4,5,6\}$.

Ker lahko s števili oblike

$$2019 - (x \cdot 7 + y \cdot k)$$ *

izrazimo vsa števila iz $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, se lahko iz vsake točke premaknemo za $0, 1, \ldots, 5, 6$ korakov "naprej" po 7-ciklu. Torej lahko pridemo iz vsake začetne točke v vsako drugo in je $T^{2019} = A \times A$.

4. Na množici $A = \{1, 2, \ldots, 18\}$ definiramo relacijo R:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ je praštevilo.}$$

(a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.

(b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$.

(a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.

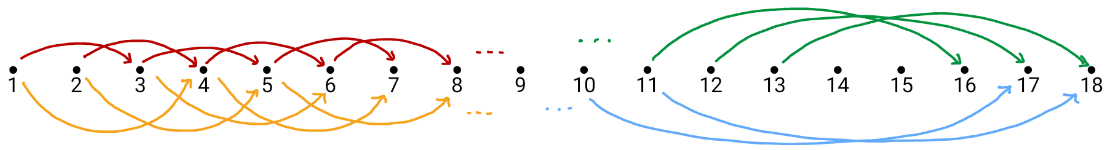
$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{D}_R &= \{x \in A;\ xRy \text{ za nek } y \in A\} \\ \mathcal{Z}_R &= \{y \in A;\ xRy \text{ za nek } x \in A\} \end{aligned}}$$

$\mathcal{D}_R$ = začetki puščic, $\mathcal{Z}_R$ = konci puščic

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$

$xRy \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{P}$

$\overset{x}{\circ} \longrightarrow \overset{y}{\circ} \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{P} \quad \Leftrightarrow$ od x do y je skok praštevilske dolžine



Vsa števila od 1 do (vključno) 16 so začetki puščic $n \to n+2$, 17 in 18 pa nista začetka nobene puščice, ker so vse povezave v desno k večjim številom.

$\Rightarrow \mathcal{D}_R = \{1, 2, \ldots, 16\}$

Vsa števila od 3 do 18 so konci puščic $n \to n+2$, v 1 in 2 pa se ne konča nobena puščica.

$\Rightarrow \mathcal{Z}_R = \{3, 4, \ldots, 18\}$

(b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$.

$\{y \in A;\ 10Ry\} = \{y \in A;\ y - 10 \in \mathbb{P}\} = \{12, 13, 15, 17\}$

5. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na $\mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$

(a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

(b) Poišči [2] in [2016].

(c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

(a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

$\boxed{R \text{ je ekvivalenčna } \Leftrightarrow R \text{ je refleksivna, simetrična in tranzitivna}}$

- R je refleksivna: $\forall a : aRa$

$\underset{\sim}{aRa} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} : (\underbrace{p|a \Leftrightarrow p|a}_{1}) \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} : 1 \Leftrightarrow \underset{\sim}{1}$ ✓

- R je simetrična: $\forall a \forall b : (aRb \Rightarrow bRa)$

$\underset{\sim}{aRb} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b) \Rightarrow \forall p \in \mathbb{P} : (p|b \Leftrightarrow p|a) \Rightarrow \underset{\sim}{bRa}$ ✓

- R je tranzitivna: $\forall a \forall b \forall c : (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

$\boxed{\forall x : P \wedge \forall x : Q \sim \forall x : (P \wedge Q)}$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{aRb \wedge bRc} &\Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}\, (p|a \Leftrightarrow p|b) \wedge \forall p \in \mathbb{P}\, (p|b \Leftrightarrow p|c) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}\, (p|a \Leftrightarrow p|b \wedge p|b \Leftrightarrow p|c) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}\, (p|a \Leftrightarrow p|c) \Rightarrow \underset{\sim}{aRc} \; ✓
\end{aligned}$$

Ker je R refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.

$\boxed{[n] = \{a \in A ;\, aRn\} = \{a \in A ;\, nRa\}}$

(b) Poišči [2] in [2016].

$[2] = \{a \in \mathbb{N} ;\, 2Ra\} = \{a \in \mathbb{N} ;\, \forall p \in \mathbb{P} : (p|2 \Leftrightarrow p|a)\} =$

$= \{a \in \mathbb{N}$; a ima natanko iste praštevilske delitelje kot $2\}$

$= \{2^k ;\, k = 1, 2, 3, 4, \dots\} = \underline{\underline{\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}}}$

2016	2
1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$[2016] = \{a \in \mathbb{N}$; a ima natanko iste praštevilske delitelje kot $2016\} =$

$= \underline{\underline{\{2^x \cdot 3^y \cdot 7^z ;\, x, y, z = 1, 2, 3, \dots\}}}$

(c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

Za splošen $[n]$ velja: če $p \in \mathbb{P}$ deli n, potem bodo v $[n]$ med drugim vsa števila oblike $p^k \cdot n$, $k \in \mathbb{N}$.

Torej bo imel $[n]$ neskončno elementov, čim bo n deljiv s kakršnim praštevilom.

Edini potencialni izjemi sta $[0]$ in $[1]$.

0 je deljivo z vsemi praštevili in je edino naravno število s to lastnostjo

$[0] = \{a \in \mathbb{N}$; a ima natanko iste praštevilske delitelje kot $0\} = \{0\}$

$[1] = \{a \in \mathbb{N}$; a ima natanko iste praštevilske delitelje kot $1\} = \{1\}$

1 ni deljivo z nobenim praštevilom in je edino naravno število s to lastnostjo

$\Rightarrow [0] = \{0\}$ in $[1] = \{1\}$ sta razreda z enim samim elementom, vsi ostali ekvivalenčni razredi pa imajo neskončno elementov

6. Na $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom

$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$

(a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

(b) Poišči $[4]$.

(c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

(a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

- R je refleksivna: $\forall a : aRa$

$$aRa \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 : (\underbrace{2^k|a \Leftrightarrow 2^k|a}_{1}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : 1 \Leftrightarrow 1 \;\checkmark$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$

- R je simetrična: $\forall a \forall b : (aRb \Rightarrow bRa)$

$$aRb \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b) \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 : (2^k|b \Leftrightarrow 2^k|a) \Rightarrow bRa \;\checkmark$$

- R je tranzitivna: $\forall a \forall b \forall c : (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b) \wedge \forall k\in\mathbb{N}_0 (2^k|b \Leftrightarrow 2^k|c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b \wedge 2^k|b \Leftrightarrow 2^k|c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}_0 (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|c) \Rightarrow aRc \;\checkmark$$

Ker je R refleksivna, simetrična in tranzitivna, je ekvivalenčna.

(b) Poišči $[4]$.

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$[4] = \{a\in A;\ 4Ra\} = \{a \in A;\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|4 \Leftrightarrow 2^k|a)\} = \{a\in A;$ a je deljiv z $1, 2, 4$, ne pa z $8, 16, 32, \ldots\} =$

$= \{a \in A;$ a je deljiv s 4 in ne z $8\} = \{4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100\}$

(c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

$[1] = \{a\in A;$ a ni deljiv z $2\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 97, 99\}$

$[2] = \{a \in A;$ a je deljiv z 2 in ne s $4\} = \{2, 6, 10, 14, 18, \ldots, 90, 94, 98\}$

$[4] = \{4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100\}$

$[8] = \{a\in A;$ a je deljiv z 8 in ne s $16\} = \{8, 24, 40, 56, 72, 88\}$

$[16] = \{a \in A;$ a je deljiv s 16 in ne z $32\} = \{16, 48, 80\}$

$[32] = \{a\in A;$ a je deljiv z 32 in ne s $64\} = \{32, 96\}$

$[64] = \{a \in A;$ a je deljiv s 64 in ne z $128\} = \{64\}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

particija (razbitje) A na ekvivalenčne razrede

$\Rightarrow$ 7 ekvivalenčnih razredov

7. Naj bo $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.

   (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.

   (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).

   (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?

   (d) Je relacija $\leq$ simetrična?

(a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.

$A, B \in \mathcal{P}(N)$

$A \leq B \Leftrightarrow$ vsak veznik iz A lahko izrazimo z vezniki iz B

- refleksivnost : $\forall A: A \leq A$

  $\forall A$: vsak veznik iz A lahko izrazimo z vezniki iz A ~ 1 ✓

- tranzitivnost : $\forall A \forall B \forall C: (A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C)$

  $\forall A, B, C$: če lahko vsak veznik iz A izrazimo z vezniki iz B in vsak veznik iz B izrazimo z vezniki iz C, potem lahko vsak veznik iz A izrazimo z vezniki iz C ~ 1 ✓

(b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).

Če je $A \subseteq B$, so vsi vezniki iz A vsebovani v B, torej lahko vse veznike iz A zapišemo z vezniki iz B (narediti ni potrebno nič, ker so že v B). Torej je $A \leq B$.

(c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?

Ker je $A \subseteq B$, po prejšnji točki velja $A \leq B$.

Ali je $B \leq A$? Ali lahko $\neg \in B$ zapišemo le z 0 in $\Leftrightarrow$ iz A? Ja: $p \Leftrightarrow 0 \sim \neg p$. Torej je $B \leq A$.

(d) Je relacija $\leq$ simetrična?

Relacija $\leq$ ni simetrična. Če je A nabor, ki ni poln, B pa poljuben poln nabor, potem je $A \leq B$ in ne $B \leq A$.

Npr. za $A = \{\wedge\}$, $B = \{\neg, \wedge\}$ je $A \leq B \wedge \neg B \leq A$.