Teorija informacij in sistemov, predavanje 12

Uroš Lotrič

Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za računalništvo in informatiko

7.7 Teorem vzorčenja 1

- **Nyquist-Shannonov teorem** pravi, da vsak signal, ki je omejen na določen frekvenčni pas, lahko natančno rekonstruiramo iz vzorcev. Pomembno je le, da je perioda vzorčenja dovolj majhna. Izkaže, se da moramo za popolno rekonstrukcijo signala, v katerem je najvišja frekvenca ν_c, vzorčiti s frekvenco $\nu_s = 2\nu_c$.
- Skica dokaza: vseh harmonikov je $\nu_c T$, za njihov opis rabimo dvakrat toliko koeficientov. Enakost frekvenčnega in časovnega prostora.

7.7 Teorem vzorčenja 2

- Dokaz bolj zares:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

  saj je $X(\nu)$ frekvenčno omejena.
- $t \to \frac{n}{2\nu_c}$:

$$x(\frac{n}{2\nu_c}) = \int_{-\nu_c}^{\nu_c} X(\nu) e^{i2\pi \frac{n}{2\nu_c} \nu} d\nu$$

- Razvoj $X(\nu)$ v Fourierovo vrsto v frekvenčnem prostoru!

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n \frac{1}{T} t} \to X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{1}{W} \nu}$$

7.7 Teorem vzorčenja 3

- Podobno lahko zapišemo za koeficiente:

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n \frac{1}{T} t} dt \to C_n = \int_{-W/2}^{W/2} X(\nu) e^{-i2\pi n \frac{1}{W} \nu} d\nu$$

- Za $W = 2\nu_c$ sled $x(\frac{n}{2\nu_c}) = C_{-n}$
- Vzorci v časovnem prostoru $n = 0, 1, \ldots$ definirajo Fourierove koeficiente funkcije $X(\nu)$ in jo tako popolnoma določajo.
- Iz $X(\nu)$ lahko brez težav popolnoma rekonstruiramo $x(t)$.

7.7 Rekonstrukcija signala 1

- Funkciji v frekvenčnem prostoru $X(\nu) = 1/(2\nu_c)$, ki je omejena na interval $[-\nu_c, \nu_c]$, ustreza funkcija $x(t) = \frac{\sin(2\pi\nu_c t)}{2\pi\nu_c t}$ v časovnem prostoru.
- Zamik funkcije v času ne spremeni transformiranke.
- V splošnem zato vsak neničelni vzorec ustreza funkciji $\sin(2\pi\nu_c t)/(2\pi\nu_c t)$, ki jo zamaknemo tako, da ima center v točki vzorčenja (t_n), $\sin(2\pi\nu_c(t-t_k))/(2\pi\nu_c(t-t_k))$.
- Iz vzorcev tako lahko rekonstruiramo dejanski signal po enačbi:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(2\pi\nu_c(t-k\Delta))}{2\pi\nu_c(t-k\Delta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin(\pi\nu_s(t-k\Delta))}{\pi\nu_s(t-k\Delta)}$$

$$\nu_c = \frac{\nu_s}{2} = \frac{1}{2\Delta} \quad , x_k = x(k\Delta)$$

7.7 Prekrivanje frekvenc (aliasing) 1

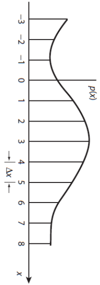
- Če ne vzorčimo dovolj pogosto, lahko pride do prekrivanja frekvenc
- Primer: vzorčenje 1 Hz in 5 Hz signala s 4 Hz in rekonstrukcija (slika)
- Porazdelitev moči na druge frekvence (slika)

7.7 Ločevanje frekvenčnih vrhov

- Dlje časa kot vzorčimo, lepši frekvenčni spekter signala dobimo.
- Koliko časa moramo vzorčiti, če želimo v frekvenčnem spektru ločiti bližnje vrhove?
- Spomnimo se razvoja v Fourierovo vrsto. Predpostavimo, da sta frekvenčna vrhova, ki sta si najbližja, sosednja harmonika s frekvencama $\nu_a = m\nu_0$ in $\nu_b = (m+1)\nu_0$.
- Hitro vidimo, da je osnovna frekvenca $\nu_0 = \nu_b - \nu_a$ in zato potreben čas vzorčenja $T = 1/\nu_0$.
- Število vzorcev, ki jih moramo v tem primeru zajeti, je $N = T/\Delta = \nu_s / \min_{a,b} |\nu_b - \nu_a|$, $\nu_s >> \min_{a,b} |\nu_b - \nu_a|$

7.8 Entropija zveznega kanala 1

- Entropijo zveznega kanala lahko izpeljemo iz entropije diskretnega kanala.
- Naj bo $p(x)$ verjetnostna porazdelitev za $-\infty < x < \infty$. Velja $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.
- Za začetek vzemimo, da je zvezen signal kvantiziran s korakom Δx. Vrednosti, ki jih pošiljamo po kanalu so tako $x_k = i\Delta x$, $-\infty < i < \infty$.



7.8 Entropija zveznega kanala 2

- Verjetnost, da pošljemo znak x_i je $p_i = p(x_i)\Delta x$
- Iz definicije entropije sledi:

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_i p_i \log(p_i) \\
&= -\sum p(x_i) \log[p(x_i)]\Delta x - \log[\Delta x]
\end{aligned}
$$

- **Entropija zvezne porazdelitve** je definirana kot končni člen v prejšnji enačbi. Torej

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log[p(x)] dx$$

  Večkrat govorimo o **diferencialni entropiji**
- Primer. Vzemimo, da je

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \begin{cases} 1/a & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{drugace} \end{cases} \\
H(p) &= \log a \qquad (1)
\end{aligned}
$$

7.8 Entropija in Gaussova porazdelitev 1

- Primer. Gaussova porazdelitev (najbolj uporabljana porazdelitev)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- Entropija Gaussove porazdelitve (dokaz):

$$H(p) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2$$

- Če želimo ohraniti maksimalno stopnjo prenosa informacije, moramo poskrbeti, da je porazdelitev Gaussova. Dokaz: optimizacija z Lagrangeovimi multiplikatorji ($L = -\int p(x) \log[p(x)] dx + \lambda_1(\int p(x) dx - 1) + \lambda_2(\int x^2 p(x) dx - P)$), odvod po porazdelitvi, dobimo Gaussovo porazdelitev s $\sigma^2 = P$.

7.9 Kapaciteta zveznega kanala 1

- Vzemimo, splošen zvezen kanal. Moč signala (X) je omejena na S. Signali so popačeni s šumom (Z) z močjo N. Šum je neodvisen od signala. Velja $Y = X + Z$
- Medsebojna informacija je

$$I(X;Y) \quad = \quad H(X+Z) - H(Z)$$

- Kapaciteta je maksimalna medsebojna informacija
- Vemo že, da maksimalno entropijo da Gaussova porazdelitev
- Predpostavimo, da ima tudi šum Gaussovo porazdelitev
- Sledi (postopek):

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

7.9 Kapaciteta zveznega kanala 2

- Kako pa je s kapaciteto kanala z omejeno pasovno širino (vzemimo, da so frekvence omejene na interval $[-W, W]$)?
- Iz teorema vzorčenja sledi, da lahko signal na izhodu iz kanala rekonstruiramo, če ga vzorčimo s frekvenco $2W$, oziroma, če vzamemo $2W$ vzorcev vsako sekundo.
- Kapaciteta kanala za en vzorec je $C_1 = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$
- Merjeno na časovno enoto, je kapaciteta kanala z omejeno pasovno širino enaka $C = 2WC_1$

$$C = W \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

- Primer: Po protokolu V.34 je pasovna širina na kateri dela modem približno 3400 Hz. Razmerje S/N je običajno okrog 3.000. Teoretična kapaciteta je $C = 3400 \log(3001) = 39274$ bit/s. Dejansko so modemi delovali na 33.4 kbit/s.

7.9 Termalni šum

- Šum je prisoten pri vsakem elektronskem prenašanju sporočil.
- Med šum štejejo interference, navzkrižno pošiljanje, približki pri zajemu podatkov, osvetljevanje in termični šum na nivoju elektronike
- Vzrok za termični šum so naključna gibanja elektronov, ki so bolj izrazita pri višji temperaturi. Običajno ga modeliramo kot **beli šum**, ki ima enakomerno gostoto porazdelitve, $p(\nu) = E, -W \leq \nu \leq W$.
- Stopnjo belega termičnega šuma podaja Boltzmanova enačba $E = kT$, kjer je $k = 1,38\,10^{-23}$, T pa termperatura v kelvinih.
- Primer: radijski sprejemnik v sobi:
  20^0 C$= 273 + 20 = 293$ K, Boltzmanova energija je $E = 4\,10^{-21}$ J. Če je pasovna širina radijske postaje $W = 20$ kHz, potem je $N = E \cdot W = 8\,10^{-17}$ W.

7.10 Razmazani spekter 1

- $E = kT$ je termični šum pri enem prenosu. Njegovo moč lahko ocenimo z $N = WkT$.

$$C = W \log\left(1 + \frac{S}{kTW}\right)$$

- Kapaciteta z naraščajočim W narašča do nasičenja (slika)
- Večanje kapacitete z večanjem pasovne širine izkoriščajo mnogi današnji sistemi na več načinov
- Pogost je ta, da signal pred prenosom pomnožijo s psevdonaključnim signalom z bistveno višjo frekvenco. Če sprejemnik pozna psevdonaključni signal lahko rekonstruira osnovni signal.
- Za to se uporabljajo psevdonaključni generatorji.
- Za večuporabniške sisteme je pomembno, da so psevdonaključni signali (kode) med seboj ortogonalni. V tem primeru lahko dosežemo, da isti kanal uporablja hkrati več uporabnikov. Ideja: $c_a = (1, 1, -1, -1)$ in

7.10 Razmazani spekter 2

- TDMA: vsak od K uporabnikov dobi kanal za čas $1/K$. Da na časovno enoto potroši moč S, mora v času $1/K$ oddajati signal z močjo KS. Kapaciteta za K uporabnikov je
  $C = K \cdot \left[\frac{1}{K} \cdot W \log\left(1 + \frac{KS}{kTW}\right)\right] = W \log\left(1 + \frac{KS}{kTW}\right)$.
- FDMA: vsi uporabniki delajo hkrati, vendar ima vsak na voljo samo W/K frekvenčnega pasu;
  $C = K \cdot \left[\frac{W}{K} \log\left(1 + \frac{S}{kTW/K}\right)\right] = W \log\left(1 + \frac{KS}{kTW}\right)$.
  Enako kot pri TDMA.
- CDMA: vsi hkrati na celotnem območju. Nov moment šuma: interferenca z ostalimi uporabniki:
  $C = K \cdot W \log\left(1 + \frac{S}{kTW+(K-1)S}\right)$.
  Za $K \to \infty \longrightarrow KW \log(e) \ln(1 + 1/K) \approx W \log(e)$.
- CDMA ima edini omejeno kapaciteto glede na K. Prednost: ni treba popravljati območij, ko pride/odide uporabnik. OK, če je uporabnikov malo (kar je večina časa). CDMA uporablja mobilna telefonija.