



**FACULDADE DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE CADEIRAS GERAIS**

Experiência Laboratorial Nº 3 – **Estudo da Sobreposição de Oscilações Harmónicas**

**Unidade curricular:** Física II    **Ano:** 2023    **1º Semestre**

---

**Objectivos**

- ❖ Estudar as leis da sobreposição de oscilações harmónicas realizadas ao longo da mesma Direcção.
- ❖ Obter as pulsações ou batimentos, com o auxilio do osciloscópio
- ❖ Medir as suas características;
- ❖ Obter as figuras de Lissajous, produzidas pelas sobreposições de oscilações harmónicas perpendiculares entre si, com o auxilio do osciloscópio, e medir as suas características.

**Resumo teórico**

**Oscilações**, é a classe de movimentos que se repetem no tempo, quer seja de forma ordenada ou não. As mesmas podem-se dividir em dois tipos, nomeadamente mecânicas e electromagnéticas.

**Oscilações mecânicas** – são aquelas cujas grandezas físicas são mecânicas e variam em função do tempo (t). caso particular: pêndulos, vibrações de cordas, etc.

**Oscilações electromagnéticas** – são aquelas cujas grandezas físicas são eléctrica ou magnéticas e também variam em função do tempo (t). caso particular: intensidade da corrente, etc.

**Movimento harmónico simples (MHS)**

Um movimento é considerado como sendo MHS se a sua posição como função do tempo tiver a forma:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Onde A é a chamada amplitude do movimento, que é a distancia entre o ponto medio ( $x = 0$ ) e o ponto de retorno ( $x = A$  ou  $x = -A$ ) e  $\omega$  é a frequência angular. É de salientar que A,  $\omega$  e  $\varphi$  são constantes. A grandeza  $(\omega t + \varphi)$  é a fase de movimento e denomina-se constante de fase. A frequência angular  $\omega$  está relacionada como período do movimento T pela relação:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Repare que  $x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \sin\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ , pode ser representado por uma função seno quando mudamos a fase constante e de outro modo como  $x = A \cos(\omega t + \varphi) = (A \cos \varphi) \cos \omega t - (A \sin \varphi) \sin \omega t$ , expressando o MHS como sobreposição de funções senos e cossenos.

### Sobreposição de oscilações harmônicas ao longo da mesma Direcção:

#### Com frequências iguais

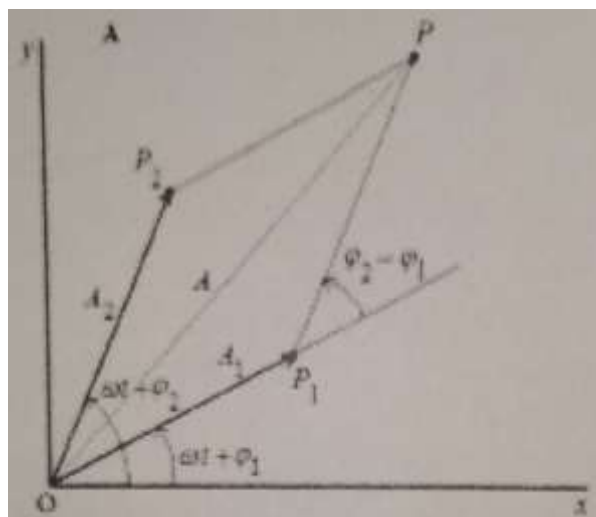
Consideremos a existência de dois dados MHS das mesma frequência angular  $\omega$ , mas com amplitudes diferentes, descritas pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ e } x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (3)$$

Para oscilação resultante tem-se:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Observando a figura A,  $OP_1$  é um vector de comprimento  $A_1$  girando com um angulo em relação ao eixo  $x$  que varia no tempo como  $(\omega t + \varphi_1)$  e de forma análoga  $OP_2$  é um vector de comprimento  $A_2$  girando com um angulo em relação ao eixo  $x$  que varia no tempo como  $(\omega t + \varphi_2)$ . Desta feita, a soma vetorial de  $OP_1$  e  $OP_2$  é o vector  $OP$ .



**Figura A:** Decomposição dos vetores das amplitudes das oscilações.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo  $OP_1P$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5)$$

A equação (5) permite determinar o valor do módulo de A. Aplicando a lei dos cossenos ao mesmo triângulo, tem-se:

$$\frac{A_2}{\sin \beta} = \frac{A}{\sin(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))} \Leftrightarrow \sin \beta = \frac{A_2}{A} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (6)$$

Com (6) pode-se determinar  $\beta$ , que somando a  $\varphi_1$  nos da  $\varphi$ .

### Com frequências diferentes

Sejam consideradas as equações:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

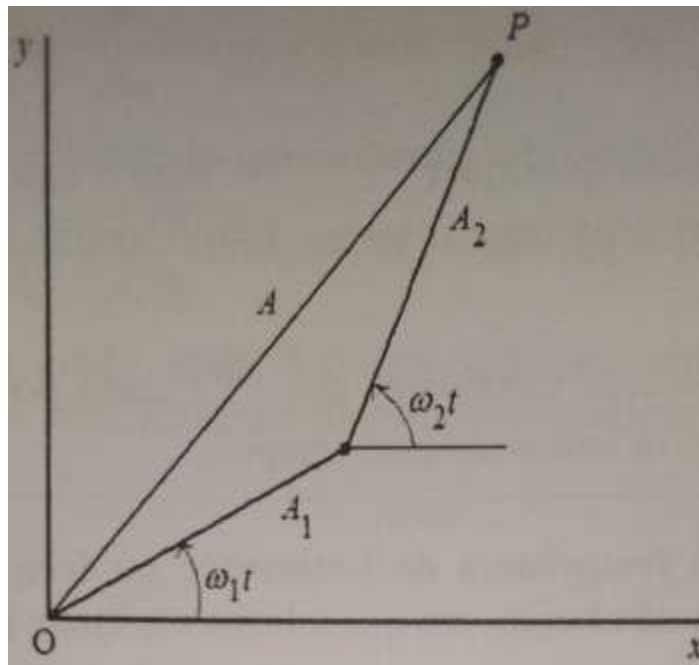
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Para simplificar o problema, iremos supor que as fases iniciais sejam iguais a zero  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  tal que para as equações (7) resulta,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \quad (7)$$

Em um instante arbitrário, o resultado da sobreposição entre as duas oscilações e mostrado na figura a seguir,



**Figura B:** Superposição entre duas oscilações com frequências diferentes.

De modo geral, a superposição entre  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  será uma função complicada t, podendo nem ser um movimento periódico.

Um caso especial acontece quando os dois MHS tem frequências muito próximas uma da outra, ocorrido um fenômeno conhecido como batimento

Com a mesma amplitude

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (9)$$

Para a oscilação resultante, tem-se:

$$x(t) = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (10)$$

Considerando que  $\omega_1 > \omega_2$  e definindo  $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$  e  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \\ \omega_2 &= \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo em (10), resulta:

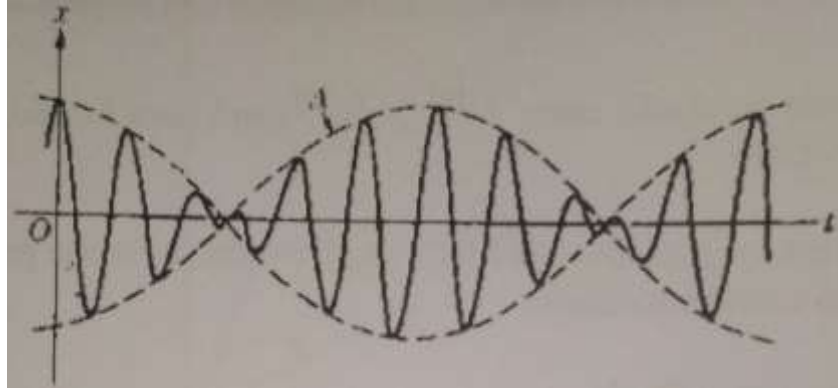
$$x(t) = A \left[ \cos \left( \bar{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t \right) + \cos \left( \bar{\omega}t + \frac{\Delta\omega}{2}t \right) \right] \quad (12)$$

Usando a identidade trigonométrica resulta:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \\ x(t) &= 2A \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2}t \right) \cos \bar{\omega}t \end{aligned} \quad (13)$$

A equação (13) é geral e válida para quaisquer  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Para o caso em que  $\Delta\omega \ll \omega_1 + \omega_2 \gg$ , isto é quando as duas frequências forem muito próximas, o termo  $\cos \bar{\omega}t$  oscila muito mais rapidamente que o termo  $2A \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2}t \right)$ . Sendo assim, pode-se considerar que  $x(t)$  dado por (13) é uma oscilação de frequência angular  $\bar{\omega}$  com amplitude que varia lentamente no tempo.

A frequência  $\Delta\omega$  é a chamada frequência de batimento ou frequência de pulsação. A equação (13) pode ser representada graficamente abaixo, em que a linha tracejada ilustra a modulação da amplitude:



**Figura C:** batimentos no caso em que as duas amplitudes são iguais

Sobreposição de oscilações harmónicas perpendiculares

Com frequências idênticas

$$X = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (14)$$

$$Y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (15)$$

Os movimentos ao longo de OX e OY, tem amplitudes e fases iniciais diferentes. E preciso achar a forma da trajetória resultante, isto é  $Y = F(x)$ . Pode-se considerar (14) e (15) como as equações que dão a trajetória resultante na forma paramétrica (o tempo  $t$  e um parâmetro). Assim sendo, para se encontrar  $Y = F(x)$  é necessário eliminar o tempo  $t$ .

Reescrevendo as equações (14) e (15):

$$\frac{X}{A_1} = \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1 \quad (16)$$

$$\frac{Y}{A_2} = \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2 \quad (17)$$

Multiplicando a equação (16) por  $\cos \varphi_2$  e a equação (17) por  $\cos \varphi_1$ , e substituindo uma na outra, resulta:

$$\frac{X}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{Y}{A_2} \cos \varphi_2 = \sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (18)$$

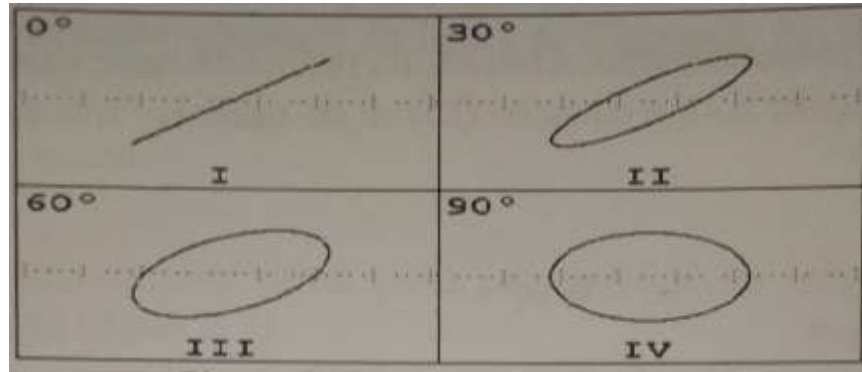
Multiplicando (16) por  $\sin \varphi_2$  e a equação (17) por  $\sin \varphi_1$ , e achando a diferença entre os resultados da multiplicação, ter-se-á:

$$\frac{X}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{Y}{A_2} \cos \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (19)$$

Elevando (18) e (19) ao quadrado e somando os dois resultados, obtém-se:

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} - \frac{2XY}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (20)$$

A equação (20) expressa, de modo geral, a forma da trajetória do movimento resultante. Como é sabido analiticamente, esta representada a equação de uma elipse (Figura D).



**Figura D:** Figuras de Lissajous

Alguns casos particulares

- a) Se  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  (as fases iniciais são iguais), as equações 920) simplifica-se da seguinte forma

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} - \frac{2XY}{A_1A_2} = \left(\frac{X}{A_1} - \frac{Y}{A_2}\right)^2 = 0$$

Ou finalmente:

$$Y = \frac{A_2}{A_1} X \quad (21)$$

A equação (21) representa a equação de uma recta com coeficiente de inclinação  $A_2/A_1$  que é a tangente do ângulo de inclinação da recta com o eixo OX, ou seja  $\tan \alpha = \frac{A_2}{A_1}$  (observar primeiro quadrante da figura D).

- b) Se  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , neste caso obtém-se

$$Y = -\frac{A_2}{A_1} X \quad (22)$$

a recta estará situada no segundo e quarto quadrantes (ver figura D)

- c) Se  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  a equação será da seguinte forma:

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} = 1 \quad (23)$$

A equação (23) representa a equação reduzida de uma elipse com semieixos  $A_1$  e  $A_2$ , e quando  $A_1 = A_2 = A$ , a elipse transforma-se numa circunsferencia:

$$X^2 + Y^2 = A^2 \quad (24)$$

- d) Se  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$ , evidentemente, a trajectoria resultante neste caso também sera elíptica, porem se a equacao resultante coincidir com a equação (23). e de sublinhar que existe uma diferença entre os dois últimos casos.

com efeito, suponha que:  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

As equações (14) e 915) podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X &= A_1 \cos \omega t \\ Y &= A_2 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -A_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (25)$$

No instante  $t=0$ , o ponto com coordenadas  $X$  e  $Y$  esta na posição  $P$  (figura). Nos instantes seguintes a coordenada  $X$  diminui e a coordenada  $Y$  será negativa. Portanto o movimento do ponto considerado vai ocorrer no sentido horário.

$$V_y(0) = (\pi - A_2 \sin \omega t) = -A_2 \omega < 0 \quad (26)$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

De forma análoga, se:

$$X = A_1 \cos \omega t$$

Obtém-se:

$$Y = A_2 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -A_2 \sin \omega t \quad (27)$$

$$V_y(0) = (A_2 \sin \omega t) = A_2 \omega > 0 \quad (28)$$

De maneira semelhante, pode se concluir que o movimento ocorre num sentido arbitrário.

No caso em que as frequências das oscilações perpendiculares se distinguem da grandeza infinitesimal  $\Delta\omega$ , pode-se considerar como oscilações com a mesma frequência, mas com uma diferença de fase que varia lentamente. Sendo as equacoes (14) e 915) podem-se representar do seguinte modo:

$$X = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$Y = A_2 \cos[\omega t + (\Delta\omega + \varphi_2)] \quad (29)$$

Onde a expressão  $(\Delta\omega + \varphi_2)$  desempenha o papel do desvio de fase variável em função do tempo.

O movimento resultante realiza-se neste caso ao longo de uma curva que passa sucessivamente por todas as posições que correspondem a todas diferenças de fase de 0 até  $2\pi$ .

Se as frequências das oscilações não forem iguais, então a trajetória do movimento resultante terá a forma de uma curva muito complexa, chamada de figura de Lissajous. Na figura E, mostram-se algumas das trajetórias mais simples, quando:

Quando  $\varphi_1 = \varphi_2$ , a figura transforma-se numa curva não fechada, ao longo da qual se move o ponto oscilante, para trás e para frente (figura E.2)

Quando a razão  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  cresce, a trajetória será mais complexa. Na figura E.3 esta mostrada a curva para  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}$  e  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

Existem dois métodos equivalentes para determinar a razão  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  a partir das figuras de Lissajous.

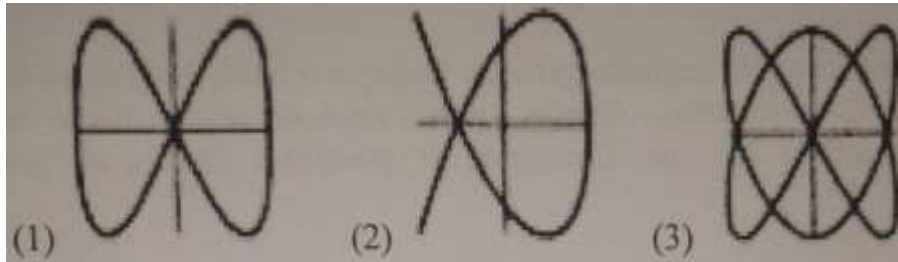
**Método 1:** Os números dos pontos tangentes ao longo das direções dos eixos OX e OY serão:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_{OY}}{N_{OX}} = \frac{3}{4}$$

(Para o caso da figura E.3)

**Método II:** traça-se arbitrariamente duas rectas ortogonais entre si e para elas aos eixos OX e OY (ver a figura E.3). posteriormente calcula-se os pontos dos cruzamentos entre as figuras de Lissajous e as rectas, isto é, os números  $N_{OX}$  e  $N_{OY}$ . Desta forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_{OY}}{N_{OX}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$



**Figura E:** Figuras de Lissajous

### Equipamento necessário

- ❖ Um osciloscópio



- ❖ Dois geradores de sinais de funções idênticas
- ❖ Dois cabos BNC blindados

### **Modo de execução**

- 1 – Ligue o sinal do primeiro gerador de sinais (a esquerda) ao CH1 do osciloscópio. Ligue o segundo gerador de sinais (a direita) ao CH2 do osciloscópio;
- 2 – Ligue o osciloscópio a rede de corrente. Para isso deve primar a tecla “Power”;
- 3 – Prima a tecla “Power ON” do gerador de sinais situado a esquerda do osciloscópio e conecta ao canal CH1. O MODE do osciloscópio posicionado no CH1;
- 4 – Variando a frequência e a amplitude do gerador de sinais observar-se-á no ecrã do osciloscópio um sinal sinusoidal. Recomenda-se uma frequência de 300 Hz. Com o botão POSITION centralize o sinal obtido e determine a amplitude, o período e a frequência do sinal. Desenhe a figura observada.

<b>Nº</b>	<b>Amplitude</b>	<b>Frequência</b>	<b>Período</b>
<b>1</b>			
<b>2</b>			
<b>3</b>			
<b>4</b>			
<b>5</b>			
<b>6</b>			
<b>7</b>			
<b>8</b>			
<b>9</b>			
<b>10</b>			

- 5 – Prima o botão “Power ON” do segundo gerador. Coloque o botão MODE no canal CH2. Com as mesmas indicações anteriormente descritas, obtenha o novo sinal sinusoidal, sendo necessário que a frequência escolhida seja próxima a anterior. Determine as grandezas citadas no ponto 3 (três). Desenhar a figura observada.
- 6 – Troque o botão MODE para a posição DUAL e variando ligeiramente a frequência do segundo gerador, obtenha as figuras típicas de batimentos.

7 – Prima os botões de 100 Hz para ambos geradores. Gire o botão TIME/ DIV do osciloscópio para a posição XY. Variando ligeiramente a frequência do segundo gerador obtenha a circunferência, a recta e a eclipse descrita no fundamento teórico.

8 – Obtenha as figuras de Lissajous representadas na figura do resumo da teoria, tendo em conta as razões das frequências de ambos geradores. Desenhar as figuras obtidas.

9 – Calcular os números  $N_{OX}$  e  $N_{OY}$  e as suas razões. Comparar as razões  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ , assim obtida, com o seu valor segundo a escala do gerador.

### Questões de controle

1 – Qual é a oscilação resultante no caso da sobreposição de oscilações do mesmo sentido da mesma frequência?

2 – Qual é a frequência dos batimentos?

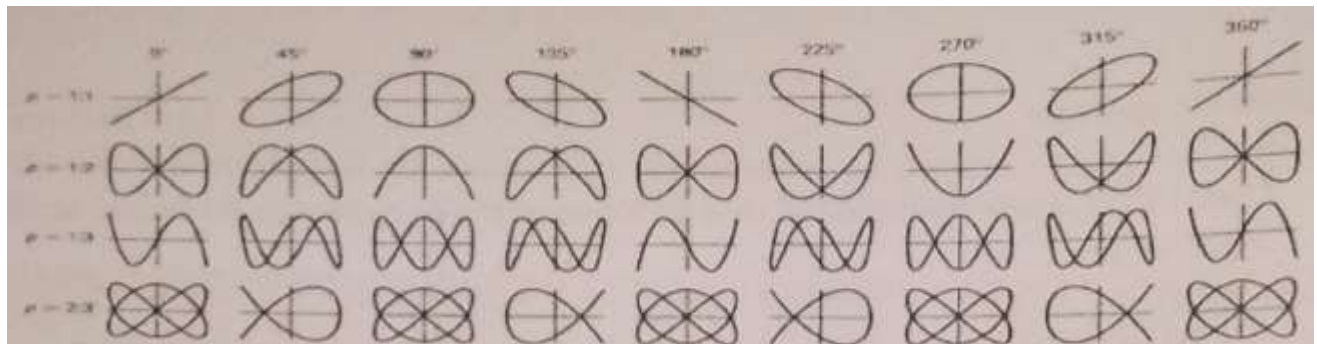
3 – Explique as diferenças teóricas e experimentais entre as pulsações ou batimentos e as figuras de Lissajous.

4 – Como se pode calcular a razão de frequências, usando as figuras de Lissajous?

5 – Deduzir a formula básica (20)

### ANEXO

#### Figuras de Lissajous



### Referências bibliográficas

1. Roque, A. (2010). Ondas, Fluidos e termodinâmica. Disponível em [sisne.org/Disciplinas/grad?fisica2fisMed/aula6.pdf](http://sisne.org/Disciplinas/grad?fisica2fisMed/aula6.pdf)