

Tema 1 – Vectores e noções básicas sobre derivadas e integrais

1.1 Noções básicas de Integração de funções

1.1.1 Integral indefinido

1.1.2 Integral definido

1.1.3 Técnicas de integração

1.2 Grandezas Físicas: Vectoriais e escalares

1.2.1 Vectores no plano e no espaço

1.2.1.1 Componentes de um vector

1.2.1.2 Vectores directores

1.2.1.3 Operações sobre vectores

Félix F. Tomo

TEMÁTICAS

TEMAS		HORAS									TOTAL
		Contacto Directo					Estudo Independente				
		AT	AP	AL	AC	CD	L	E	PL	EI	
1	Ferramentas Matemáticas para Física	2	2	-		4	2	1	-	3	7
2	Cinémática de um ponto material	2	4	4		10	4	3	1	8	18
3	Dinâmica de uma partícula	2	2	2		6	4	3	1	8	14
4	Trabalho, energia e potência mecânica	2	2	2		6	2	2	1	5	11
5	Dinâmica de um sistema de partículas	2	2	4		8	4	3	1	8	16
6	Dinâmica de um corpo rígido	2	4	4		10	4	3	1	8	18
7	Estática de uma partícula e de um corpo rígido	2	4	4		10	4	2	1	7	17
8	Campo gravitacional	2	2	-		4	2	2	1	5	9
9	Elasticidade e movimento oscilatório	2	2	2		6	2	2	1	5	11
10	Hidrostática e Hidrodinâmica	4	4	4		12	4	2	1	7	19
11	Calor e Termodinâmica	10	4	6		20	5	4	1	10	30
Total: Horas		32	32	32		96	37	27	10	74	170

AT = Aulas Teóricas

AP = Aulas Práticas

Trabalhos Laboratoriais

AC = Aulas de Consulta

TG = Trabalhos em Grupo

EI = Total de Horas de Estudo Independente

TP = Trabalhos de Prática

AL = Aulas Laboratoriais

CD = Contacto Directo

TL =

• Critérios de avaliação

- Média=30% Teste1 + 30% Teste 2+ 25% Lab + 15% TPC's

• Data das avaliações

- Teste1 – 15 de Abril de 2023;
- Teste 2 – 27 de Maio de 2023.

• Bibliografia e recursos

[1]	H. D. Young e F. R. A, Física I: Mecânica, 12 ed., São Paulo: Addison Wesley, 2008.
[2]	P. A. Tipler e G. Mosca, Física para Cientistas e Engenheiros, vol. I, LTC, Ed., Rio Grande do Sul, 2009.
[3]	M. Alonso e E. J. Finn, Física- um curso universitário: Mecânica, E. Blucher, Ed., 1981.
[4]	B. P. Demidovitch, Problemas e Exercícios de Análise Matemática, 4th ed., Escolar, Ed., São Paulo, 2010.
[5]	D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, Fundamentos de Física: Mecânica, 8 ed., vol. I, LTC, Ed., Rio de Janeiro, 2008.
[6]	M. Alonso e E. J. Finn, Física um Curso Universitário: Campos e Ondas, 2nd ed., vol. II, Blucher, Ed., 2014.
[7]	F. J. Ramalho, N. G. Ferraro e P. A. d. T. Soares, Os Fundamendos da Física, 9nd ed., Moderna, Ed., São paulo, 2007.
[8]	M. Alonso e E. J. Finn, Física, vol. Colectânia, Escolar, Ed., 2012.

Conteúdos

- 1. Noção de integral de uma função
 - Integral como operação inversa da diferenciação;
 - Relação diferencial entre primitiva e sua função ;
 - Integral como soma especial;
 - Propriedades de integração;
 - Tabela de integrais básicas.
- 2. Grandezas físicas (escalares e vectoriais)
 - Grandezas vectoriais
 - Operações sobre vectores
- 3 • 3. Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

Noção de integral de uma função

- Definidas as funções $f(x)$ e $F(x)$ no intervalo $x \in [a, b]$ e $F(x)$
- diferenciável em todos os pontos $[a, b]$, se para $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$,
 $\forall x \in [a, b]$, diz-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$.
- Para a função f dependente de x , define-se diferencial de f , a expressão:

$$df = \frac{df}{dx} dx \quad (1)$$

- Para \forall duas funções $f = f(x)$ e $y = y(x)$ diferenciáveis, é válida a seguinte relação:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

Noção de integral de uma função – cont.

- Exemplo 1.

- Velocidade $v = v(t)$ e a posição $x = x(t)$. Entre as duas variáveis podemos escrever:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dx}$$

- Por definição, $\frac{dv}{dt} = \text{aceleração}$ e $\frac{dx}{dt} = \text{velocidade}$.

Integral como operação inversa da diferenciação

- Integrar uma função $f(x)$ é realizar a operação inversa da diferenciação (derivada) de $F(x)$, ou seja, procurar uma função $F(x)$, tal que a sua derivada é igual a função a integrar.
- Procuremos as primitivas das seguintes funções: $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = x^2$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \text{sen}(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Relação diferencial entre primitiva e sua função

- Para a função $F(x)$, primitiva de $f(x)$ é válida a seguinte relação diferencial:

$$dF(x) = f(x)dx \quad (3)$$

- Se $F(x)$ é primitiva da função $f(x)$, para \forall constante C , a soma desta constante com $F(x)$, é também primitiva de $f(x)$;
- \forall primitiva de $f(x)$, chama-se de integral indefinida de $f(x)$, e representa-se por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (4)$$

Integral como soma especial

- Espectro discreto (A_i) : Existindo várias entidades semelhantes, para calcular o número total dessas entidades (por exemplo áreas), procede-se a soma $\sum A_i$ ou $\sum_{i=0}^N A_i$
- Espectro contínuo (dA): para função contínua $f(x)$ num determinado segmento $[a, b]$, $dA = f(x)dx$ e $A = \int f(x)dx$.
- Integral definida
- Nalguns casos são colocadas as condições iniciais do problema de tal maneira que a constante C fica conhecida. Nestes casos, utiliza-se a integral definida (fórmula Newton-Leibniz):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad (5)$$

Propriedades de integração

- 1 - $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, k = \text{constante}$
- 2 - $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- 3 - $dx^n = nx^{n-1} dx$
- 4 - $d(x \pm k) = dx, k = \text{constante}$
- 5 - $d(kx) = kdx \rightarrow dx = \frac{1}{k} d(kx)$

Tabela de integrais básicas

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$
- $\int e^x dx = e^x + C,$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
- $\int \cos x dx = \sin x + C,$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotan x + C,$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + 1 + C,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+q}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+q}\right| + C, q = \text{const.}$

Exemplos de cálculos de integrais

- Exemplo 2.

- $$\int (3x^2 + x) dx = 3 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

- Exemplo 3.

- $$\int \frac{1}{x+5} dx = \int \frac{d(x+5)}{x+5} dx = \ln|x+5| + C$$

- Exemplo 4.

- $$\int \cos(3x) dx = \int \cos(3x) d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

- Exemplo 5.

- $$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$$

Exemplos de aplicação de integrais

- Exemplo 6.

- Uma partícula move-se ao longo de uma linha recta com aceleração que varia com o tempo de acordo com a expressão $a = 4 - t^2$, onde a é a aceleração expressa em m/s^2 e t , o tempo expresso em segundos.
- Obtenha as expressões para a velocidade e a posição, sabendo que no instante $t = 3s$, a velocidade é $v = 2 m/s$ e $x = 9 m$.

- Resposta:** $v(t) = -\frac{t^3}{3} + 4t - 1 m/s$ e $x(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4}m$

- Exemplo 7.

- A aceleração de um corpo em movimento rectilíneo é dada por $a = -kv$, onde $k = constante$. Para o instante $t = 0 s$, $v = v_0$. Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo.

- Resposta:** $v(t) = v_0 e^{-kt}$

Exemplos de aplicação de integrais - Cont.

Exemplo 8.

Um corpo move-se ao longo de uma recta. A sua aceleração é dada no S.I. por $a = -2x$, onde x está em metros e a em m/s^2 . Obter a relação entre a velocidade e a distância sabendo que para $x = 0m$, a velocidade é $v = 4 m/s$

Resposta: $v(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

- **Grandezas físicas. Operações sobre vectores**

Grandezas físicas escalares e vectoriais

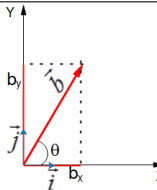
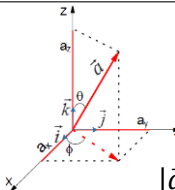
- **Escalares:** grandezas cuja informação fica completa quando dado o valor numérico e a respectiva unidade (massa, tempo, distância percorrida, área, volume, pressão, etc).
- **Vectoriais:** grandezas cuja informação fica completa, quando para além do valor numérico e unidade, é indicada a direcção e sentido (velocidade, força, quantidade de movimento, etc). Vectores caracterizam-se por ter origem e extremidade, módulo, direcção e sentido.



Grandezas vectoriais

Componentes de um vector

- As componentes de vector são as suas projecções ao longo dos eixos do sistema de coordenadas.

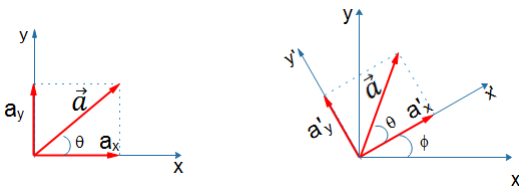
2D	3D
 $b_x = \vec{b} \cos \theta$ $b_y = \vec{b} \sin \theta$ $ \vec{b} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$	 $a_x = \vec{a} \sin \theta \cos \phi$ $a_y = \vec{a} \sin \theta \sin \phi$ $a_z = \vec{a} \cos \theta$ $ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

\vec{i}, \vec{j} e \vec{k} são vectores unitarios e $|\vec{a}|$ chama-se módulo do vector \vec{a} .

Grandezas vectoriais

Componentes de um vector

- Importa referir que para um mesmo vector, mudando o sistema de referência, variam os valores das componentes, mas o módulo do vector mantêm-se igual em ambos os sistemas (veja o caso do plano, para simplificar a complexidade):



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

Grandezas vectoriais

Versor

- Para qualquer vector podemos expressar o vector unitário (versor) relacionado com aquele vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (6)$$

Exemplo 9.:

Determine o versor do vector \vec{a} , $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Resposta : $\vec{u} = \frac{\sqrt{14}}{14} (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores

- 1 - Soma de vectores (método analítico e geométrico)
- 2 - Multiplicação de vector por escalar
- 3 - Multiplicação de vector por vector (produto escalar e produto vectorial)

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Soma (Método analítico)

- A soma ou a diferença de dois vectores \vec{a} e \vec{b} e um terceiro \vec{c} expressa, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \vec{a} \pm \vec{b} \\ \vec{c} &= (a_x + b_x)\vec{i} \pm (a_y + b_y)\vec{j} \pm (a_z + b_z)\vec{k}\end{aligned}\tag{7}$$

- O módulo do vector resultante (\vec{c}) é

$$c = \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2 + (a_z \pm b_z)^2}\tag{8}$$

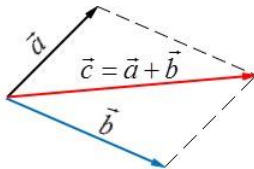
Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Soma (Método geométrico)

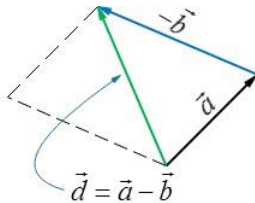
- Sejam dados dois vectores \vec{a} e \vec{b} , o vector soma \vec{c} e o vector diferença \vec{d} conforme se ilustra nos diagramas ii) e iii) respectivamente.



i) Dois vectores



ii) Soma



iii) Diferença

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação do vector por um escalar

- Multiplicando vector com escalar ($\vec{a}Z$), obtém-se um vector (\vec{b}) paralelo ao vector originário e que obedece as seguintes condições:

$$|\vec{b}| > |\vec{a}| \text{ se } |Z| > 1$$

$$|\vec{b}| < |\vec{a}| \text{ se } |Z| < 1$$

\vec{a} e \vec{b} tem sentidos opostos se $Z < 0$.

$$\vec{a}Z = (Za_x)\vec{i} + (Za_y)\vec{j} + (Za_z)\vec{k} \quad (9)$$

Grandezas vectoriais

Operacoes sobre vectores: Multiplicação (Produto escalar)

Produto escalar

- O produto escalar de \vec{a} e \vec{b} , $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ é um numero definido por:
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (10a)
- $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ (10b)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – condição de perpendicularidade

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto vectorial)

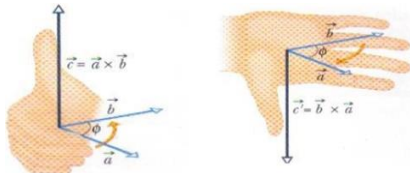
Produto vectorial

- O produto vectorial de \vec{a} e \vec{b} , $(\vec{a} \times \vec{b})$, é um terceiro vector \vec{c} definido por:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \phi \cdot \vec{n}$$

Onde, \vec{n} - vector unitário \perp ao plano formado por \vec{a} e \vec{b} ; ϕ - é o menor ângulo entre \vec{a} e \vec{b}

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ - condição de paralelismo



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

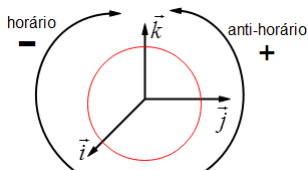
Grandezas vectoriais

- Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto vectorial)
- Analiticamente, o produto vectorial corresponde à:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \quad (12)$$

ou

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto Misto)

- Geometricamente, o módulo do produto vectorial equivale à área do paralelogramo formado na base dos dois vectores.

Escalar-vectorial

- O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (13)$$

Vectorial duplo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (14)$$

- Operador diferencial vectorial
(operador nabla)

Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

- Suponhamos que temos uma função escalar dependente de três variáveis, isto é, $f = f(x, y, z)$. A sua derivada total é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (15)$$

- Sabe-se que o vector posição de uma partícula no espaço é:
 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, pelo que:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}, \quad (16)$$

- Conjugando as Eqs. 16 e 15, e tendo em consideração a expressão do produto escalar (Eq.10b), a derivada total da função f é:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

- onde

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{e operador nabla em coordenadas rectangulares.}$$

Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

$$\nabla f \sim \text{gradiente de } f \text{ (grad} f\text{)} \quad (18a)$$

$$\nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \sim \text{divergencia de } \vec{a} \text{ (div} \vec{a}\text{)} \quad (18b)$$

$$\nabla \times \vec{a} \sim \text{rotacional de } \vec{a} \text{ (rot} \vec{a}\text{)} \quad (18c)$$

Fim do Tema # 1