FENG
Departamento de Cadeiras Gerais

FICHA TEORICA 1. CÁLCULO VECTORIAL.

1. Conceito de vector

Os **vectores** representam grandezas físicas que para além do módulo (valor) possuem uma direcção e um sentido. **Exemplos**: deslocamento, velocidade, força, aceleração, campo eléctrico e campo magnético.

Grandezas que podem ser especificadas completamente apenas por um número e uma unidade, são chamadas **grandezas escalares**. **Exemplo:** A massa de 5kg, a temperatura de 100ºC, a energia de 180J, etc.

Um **vector** é um segmento orientado caracterizado por **4 elementos**, nomeadamente:

- um **ponto de aplicação** (A) que é a origem do vector;
- uma **direcção** que neste exemplo é a direcção da recta (podendo ser por exemplo horizontal, vertical ou obliqua);
- um **sentido** dado pela seta localizada na outra extremidade (B) do segmento(que pode ser da esquerda para a direita ou de cima para baixo) e
- um **módulo** que corresponde ao comprimento do vector segundo uma certa escala.

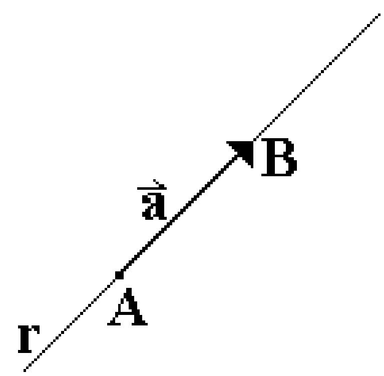

Figura 1. Representação de um vector

Assim: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

2. Operações com vectores

2.1. Adição de vectores

Sejam dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, por exemplo:

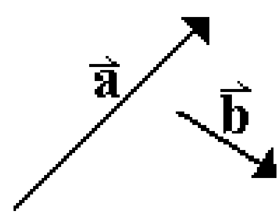

Figura 2. Representação de dois vectores

A **soma** dos dois vectores $\vec{a} + \vec{b}$ será igual à um outro vector $\vec{c}$ (vector soma).

Este vector soma $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ pode ser obtido de duas maneiras:

1) Método do paralelogramo

2) Método do polígono

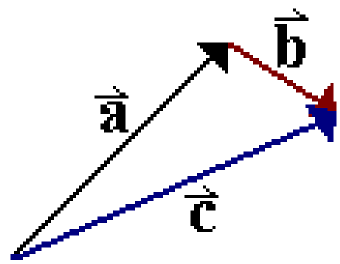

Figura 3A. Representação do vector soma de dois vectores.

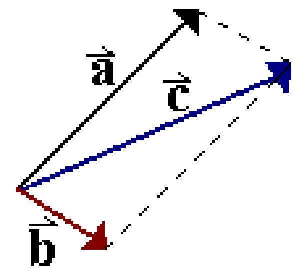

Figura 3B.

Se tivermos um terceiro vector $\vec{c}$ o vector soma $\vec{s}$ será a adição dos 3 vectores.

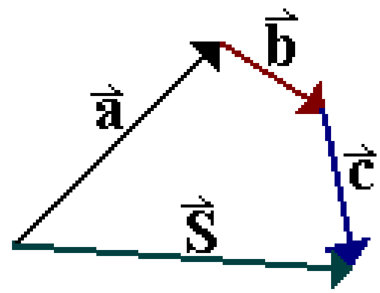

Figura 4. Representação do vector soma de três ou mais vectores.

2.2. Subtracção de vectores

A subtracção de vectores será a operação inversa a adição dos mesmos. Também se pode obter de duas maneiras: $\vec{S} = \vec{b} - \vec{b}$

a) unir os dois pontos de aplicação dos dois vectores e traçar o vector subtracção da extremidade do vector subtractivo para a extremidade do vector subtraendo.

b) considerando que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ então, pelo método do polígono significará ligar na extremidade do primeiro vector $\vec{a}$ o segundo vector $\vec{b}$ com sentido oposto, ou seja $(-\vec{b})$

As duas operações obedecem as propriedades **comutativa** e **associativa**:

Comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Associativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{(a + b)} + \vec{c}$

2.3. Representação analítica de vectores/ componentes de um vector

Consideremos um vector $\vec{a}$ localizado numa superfície.

Se traçarmos um sistema de coordenadas cuja origem coincide com a origem do vector podemos decompor este nas suas componentes ao longo das dimensões x e y.

a_x e a_y são componentes cartesianas do vector $\vec{a}$.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

onde a_x e a_y são as coordenadas do vector $\vec{a}$.

Os **módulos** das componentes a_x e a_y ou **coordenadas** do vector $\vec{a}$ podem ser encontradas a partir das seguintes equações: $a_x = a\cos\theta$ e $a_y = a\,sen\theta$ e onde θ é o ângulo que o vector $\vec{a}$ faz com o eixo *ox*.

Conhecidos os módulos das componentes pode-se determinar o módulo do vector $\vec{a}$ aplicando o teorema de Pitágoras. $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ e o ângulo θ obtém-se pela razão $tg\,\theta = \frac{a_y}{a_x}$

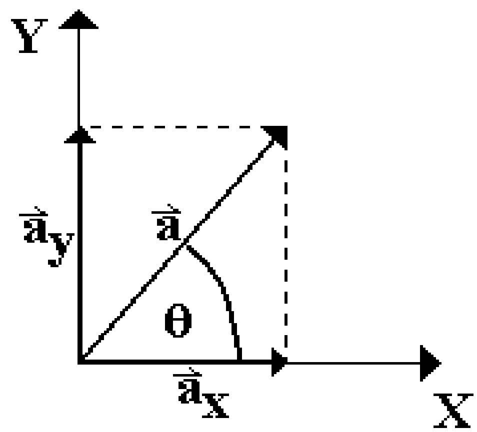

Figura 5. Representação dos Componentes de um vector .

No espaço tridimensional teremos 3 componentes do vector $\vec{a}$. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ onde a_x, a_y e a_z são componentes do vector $\vec{a}$ sobre os eixos x, y e z.As respectivas coordenadas são a_x, a_y e a_z.

As coordenadas do vector $\vec{a}$ ou os módulos das componentes do vector $\vec{a}$ são dadas geometricamente pelas seguintes equações:

$a_x = a\,sen\theta \cdot \cos\phi$;

$a_y = a\,sen\theta \cdot sen\phi$ e

$a_y = a\cos\theta$

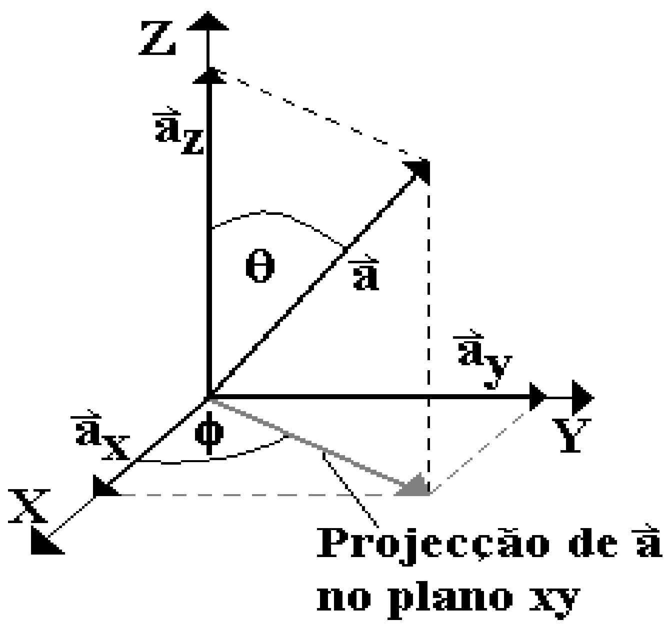

Figura 6. Representação do vector com três componentes.

O módulo do vector $\vec{a}$ quando conhecidos os módulos das suas componentes será dado pela expressão: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Na expressão analítica dos vectores é frequente a representação das componentes do vector com ajuda de vectores unitários $\vec{i}$; $\vec{j}$ e $\vec{k}$ orientados nas direcções x, y e z respectivamente. Assim

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

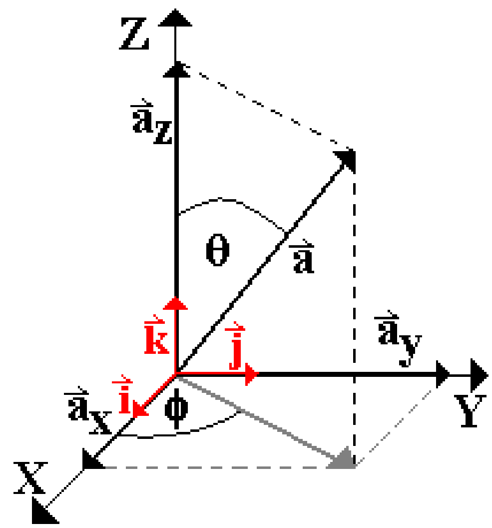

Figura 7. Representação dos vectores Unitários.

2.4. Adição e subtracção de vectores na forma analítica

A **adição** e **subtracção** analítica de dois ou mais vectores faz-se pela adição das componentes de cada vector na mesma direcção. Sejam dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ e $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ então:

$$\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \qquad (1)$$

Ou $\vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} \qquad$ **(2)**

2.5. Multiplicação de vectores

Vamos considerar 3 operações diferentes na multiplicação de vectores:

2.5.1. Multiplicação de um vector por um escalar ou seja por um número.

Quando se multiplica um vector $\vec{a}$ com um escalar n o resultado é um novo vector cujo módulo é n vezes o módulo de $\vec{a}$.

O novo vector $n\vec{a}$ tem a direcção e sentido de $\vec{a}$ se n for positivo, e sentido oposto se n for negativo.

2.5.2. Multiplicação de dois vectores de forma que resulte um escalar

O produto de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ deste carácter é escrito assim $\vec{a}\cdot\vec{b}$ é denominado produto escalar.

O produto escalar de 2 vectores é dado pela expressão $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ onde a e b são respectivamente os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e θ o ângulo entre os dois vectores.

Analiticamente, isto é, com ajuda das componentes dos vectores escrevemos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3)$$

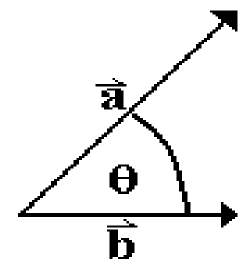

Figura 8. Produto Escalar.

Cálculo do ângulo entre 2 vectores:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \quad (4)$$

2.5.3. Multiplicação de dois vectores de forma que o resultado seja um vector

A este produto dá-se o nome de **produto vectorial** e representa-se assim $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$

O **módulo** de $\vec{c}$ é dado por $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,sen\theta$ onde θ é o ângulo entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Lê-se $\vec{a}$ vectorial $\vec{b}$ ou $\vec{a}$ cruzamento $\vec{b}$.

A **direcção** do vector $\vec{c}$, produto de $\vec{a}\times\vec{b}$ é definido como perpendicular ao plano formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

O **sentido** do vector $\vec{c}$ é dado pela **regra da mão direita**, ou **regra do saca-rolhas** ou ainda **regra do parafuso**.

Trocando a ordem dos vectores teremos

e $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{b}\times\vec{a}) = -\vec{c}$

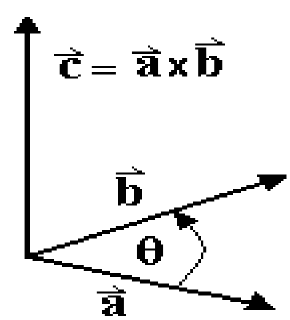

Figura 8. Produto Vectorial

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

O **produto vectorial** $\vec{a} \times \vec{b}$ pode também ser expresso através de **determinantes/ matrizes** do tipo 3×3 .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y)\vec{k}$$

Exercícios.

1. Para os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, definido como $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b}$ como $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, demostrar que: $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

2. Dois vectores são dados por **a** = **i** – 2**j** +**k** e **b** = 2**i** + **j** – 2**k**. Determine **a** + **b**, **a** – **b** , 3**a** – 2**b** , **a**.**b** e o ângulo entre **a** e **b.**

3. Considerando o problema anterior, desenhe num sistema dextrógiro (direito) de coordenadas cartesianas ortogonais XYZ todos os vectores obtidos.

4. No sistema dextrógiro (direito) de coordenadas cartesianas ortogonais determine os seguintes produtos vectoriais: **i** x **i**, **i** x **j**, **i** x **k**, **j** x **j**, **k** x **i**, **k** x **k**, **j** x **k**, **k** x **j**.

5. As coordenadas de três pontos são dadas por A (-2, 2, 3), B (1, 0, -3) e C (1, 3, -1). Considere um vector $\overrightarrow{CA}$ = **a** e um outro vector $\overrightarrow{BA}$ = **b**, determine:

   a) os módulos de **a** e **b** ,
   b) **a**.**b** ,
   c) o ângulo entre **a** e **b** ,
   d) o vector **c** = **a** x **b** ,
   e) o módulo de **c**.

6. Dado o vector **a** = 4**i** + 4**j** + 2**k** e sabendo que o módulo do vector **b** é 3, com componentes $b_x < 0$, $b_z = 0$, e **b** $\perp$ **a**, calcule o vector **b**.

7. Achar o volume do paralelepípedo cujas arestas são representadas por

a = 2**i** – 3**j** +4**k**, **b** = **i** + 2**j** – **k** e **c** = 3**i** – **j** + 2**k**.

8. Determinar o valor de d tal que os vectores **a** = 2**i** – d**j** + **k** e **b** = 4**i** - 2**j** – 2**k** sejam perpendiculares.

9. Se $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}$, mostrar que

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

10. Três vectores são dados por **a** = 2**i** – 3**j** – **k**, **b** = **i** – **j** – **k** e **c** = i + **j** – 2**k**. Determine:
    a) **a** . (**b** x **c**)
    b) **a** . (**b** - **c**)
    c) **a** x (**b** - **c**)

11. Mostre que quando dois vectores são iguais em módulo (módulo igual a **V**), e formam entre sí um ângulo **θ**, o módulo da soma é dado por **S = 2Vcos(θ/2**) e o da diferença por **D = 2Vsen(θ/2)**.

12. Mostre que quando o módulo da soma de dois vectores a e b é igual ao módulo da diferença desses mesmos vectores, então os dois vectores são perpendiculares entre si.