



FAEF

Departamento de Física

Disciplina de Física I

Docente – Dr. Fernando Mucomole

FICHA TEORICA 1. CÁLCULO VECTORIAL.

1. Conceito de vector

Os **vectores** representam grandezas físicas que para além do módulo (valor) possuem uma direcção e um sentido. **Exemplos:** deslocamento, velocidade, força, aceleração, campo eléctrico e campo magnético.

Grandezas que podem ser especificadas completamente apenas por um número e uma unidade, são chamadas **grandezas escalares**. **Exemplo:** A massa de 5kg, a temperatura de 100°C, a energia de 180J, etc.

Um **vector** é um segmento orientado caracterizado por 4 **elementos**, nomeadamente:

- um **ponto de aplicação** (A) que é a origem do vector;
- uma **direcção** que neste exemplo é a direcção da recta (podendo ser por exemplo horizontal, vertical ou oblíqua);
- um **sentido** dado pela seta localizada na outra extremidade (B) do segmento (que pode ser da esquerda para a direita ou de cima para baixo) e
- um **módulo** que corresponde ao comprimento do vector segundo uma certa escala.

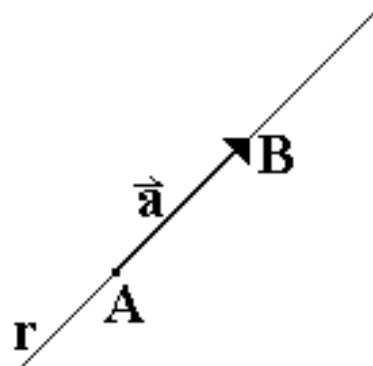


Figura 1. Representação de um vector

Assim: $\vec{a} = \overline{AB}$

2. Operações com vectores

2.1. Adição de vectores

Sejam dados dois vectores \vec{a} e \vec{b} , por exemplo:

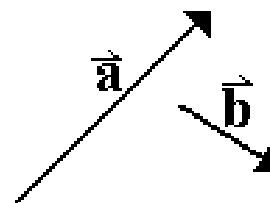


Figura 2. Representação de dois vectores

A **soma** dos dois vectores $\vec{a} + \vec{b}$ será igual à um outro vector \vec{c} (vector soma).

Este vector soma $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ pode ser obtido de duas maneiras:

1) Método do paralelogramo

2) Método do polígono

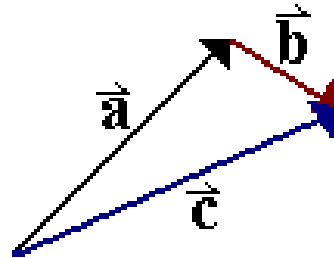


Figura 3A.
Representação do vector
soma de dois vectores.

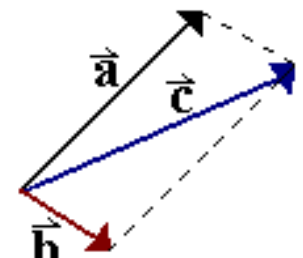


Figura 3B.

Se tivermos um terceiro vector \vec{c} o vector soma \vec{s} será a adição dos 3 vectores.

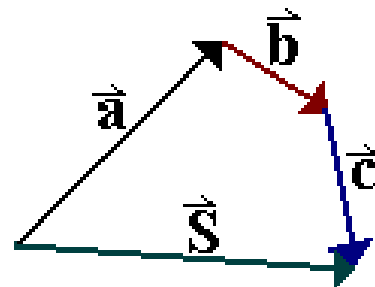


Figura 4. Representação do vector
soma de três ou mais vectores.

2.2. Subtracção de vectores

A subtracção de vectores será a operação inversa a adição dos mesmos. Também se pode obter de duas maneiras: $\vec{s} = \vec{b} - \vec{b}$

a) unir os dois pontos de aplicação dos dois vectores e traçar o vector subtracção da extremidade do vector subtrativo para a extremidade do vector subtraendo.

b) considerando que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ então, pelo método do polígono significará ligar na extremidade do primeiro vector \vec{a} o segundo vector \vec{b} com sentido oposto, ou seja $(-\vec{b})$

As duas operações obedecem as propriedades **comutativa** e **associativa**:

Comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Associativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

2.3. Representação analítica de vectores/ componentes de um vector

Consideremos um vector \vec{a} localizado numa superfície.

Se traçarmos um sistema de coordenadas cuja origem coincide com a origem do vector podemos decompor este nas suas componentes ao longo das dimensões x e y.

a_x e a_y são componentes cartesianas do vector \vec{a} .

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

onde a_x e a_y são as coordenadas do vector \vec{a} .

Os **módulos** das componentes a_x e a_y ou **coordenadas** do vector \vec{a} podem ser encontradas a partir das seguintes equações: $a_x = a \cos \theta$ e $a_y = a \sin \theta$ e onde θ é o ângulo que o vector \vec{a} faz com o eixo ox .

Conhecidos os módulos das componentes pode-se determinar o módulo do vector \vec{a} aplicando o teorema

de Pitágoras. $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ e o ângulo θ obtém-se

pela razão $\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$

No espaço tridimensional teremos 3 componentes do vector \vec{a} .

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ onde a_x , a_y e a_z são componentes do vector \vec{a} sobre os eixos x, y e z. As respectivas coordenadas são a_x , a_y e a_z .

As coordenadas do vector \vec{a} ou os módulos das componentes do vector \vec{a} são dadas geometricamente pelas seguintes equações:

$$a_x = a \sin \theta \cdot \cos \phi ;$$

$$a_y = a \sin \theta \cdot \sin \phi$$

$$a_z = a \cos \theta$$

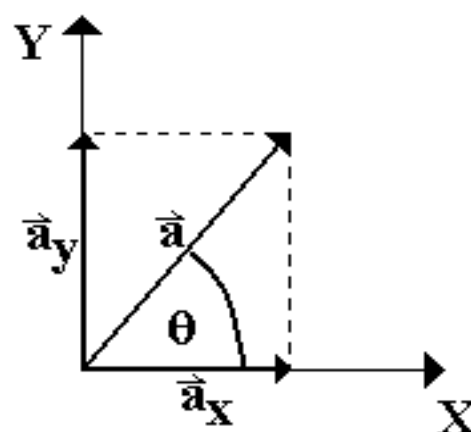


Figura 5. Representação dos Componentes de um vector .

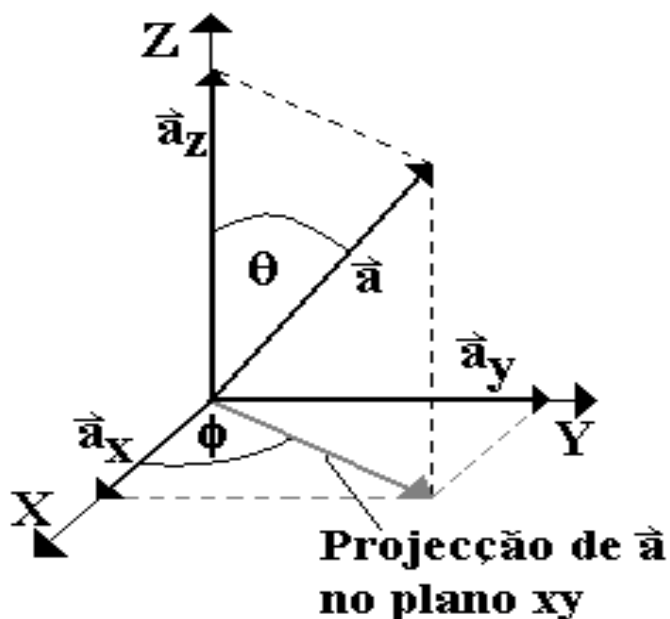


Figura 6. Representação do vector com três componentes.

O módulo do vector \vec{a} quando conhecidos os módulos das suas componentes será dado pela

expressão:
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Na expressão analítica dos vectores é frequente a representação das componentes do vector com ajuda de vectores unitários \vec{i} ; \vec{j} e \vec{k} orientados nas direcções x, y e z respectivamente. Assim

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

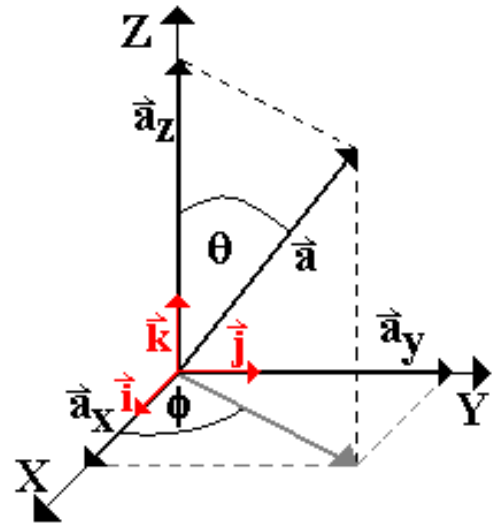


Figura 7. Representação dos vectores Unitários.

2.4. Adição e subtracção de vectores na forma analítica

A **adição** e **subtracção** analítica de dois ou mais vectores faz-se pela adição das componentes de cada vector na mesma direcção. Sejam dados dois vectores \vec{a} e \vec{b} .

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ e } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \text{ então:}$$

$$\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k} \quad (1)$$

$$\text{Ou } \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b}) = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k} \quad (2)$$

2.5. Multiplicação de vectores

Vamos considerar 3 operações diferentes na multiplicação de vectores:

2.5.1. Multiplicação de um vector por um escalar ou seja por um número.

Quando se multiplica um vector \vec{a} com um escalar n o resultado é um novo vector cujo módulo é n vezes o módulo de \vec{a} .

O novo vector $n\vec{a}$ tem a direcção e sentido de \vec{a} se n for positivo, e sentido oposto se n for negativo.

2.5.2. Multiplicação de dois vectores de forma que resulte um escalar

O produto de dois vectores \vec{a} e \vec{b} deste carácter é escrito assim $\vec{a} \cdot \vec{b}$ é denominado produto escalar.

O produto escalar de 2 vectores é dado pela expressão $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$ onde a e b são respectivamente os módulos de \vec{a} e \vec{b} e θ o ângulo entre os dois vectores.

Analiticamente, isto é, com ajuda das componentes dos vectores escrevemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3)$$

Cálculo do ângulo entre 2 vectores:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (4)$$

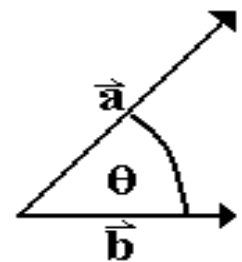


Figura 8. Produto Escalar.

2.5.3. Multiplicação de dois vectores de forma que o resultado seja um vector

A este produto dá-se o nome de **produto vectorial** e representa-se assim $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

O **módulo** de \vec{c} é dado por $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ onde θ é o ângulo entre os vectores \vec{a} e \vec{b}

Lê-se \vec{a} vectorial \vec{b} ou \vec{a} cruzamento \vec{b} .

A **direcção** do vector \vec{c} , produto de $\vec{a} \times \vec{b}$ é definido como perpendicular ao plano formado pelos vectores \vec{a} e \vec{b} .

O **sentido** do vector \vec{c} é dado pela **regra da mão direita**, ou **regra do saca-rolhas** ou ainda **regra do parafuso**.

Trocando a ordem dos vectores teremos

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c}$$

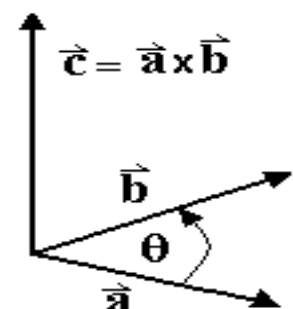


Figura 8. Produto Vectorial



O produto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ pode também ser expresso através de **determinantes/ matrizes** do tipo 3×3 .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$