

Faculdade de Agronomia e Engenharia Florestal

Curso: Agro-Economia e Extensão Agrária

- **Tema 2: Cinemática**

- Movimento mecânico, sistema de referência, trajectória;
- Posição, deslocamento, velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea;
 - Movimento curvilíneo;
 - Movimento relativo.

Fernando V. Mucomole

Movimento mecânico

- Na natureza os objectos ocupam uma determinada posição no espaço e as interacções entre o objecto e o ambiente que o rodeia ocorrem sempre no tempo \Rightarrow

\Rightarrow É impossível separar o espaço do tempo.

Em mecânica, chama-se movimento à mudança de posição de de uma partícula (objecto de estudo) relativamente a um referencial (sistema de referência);

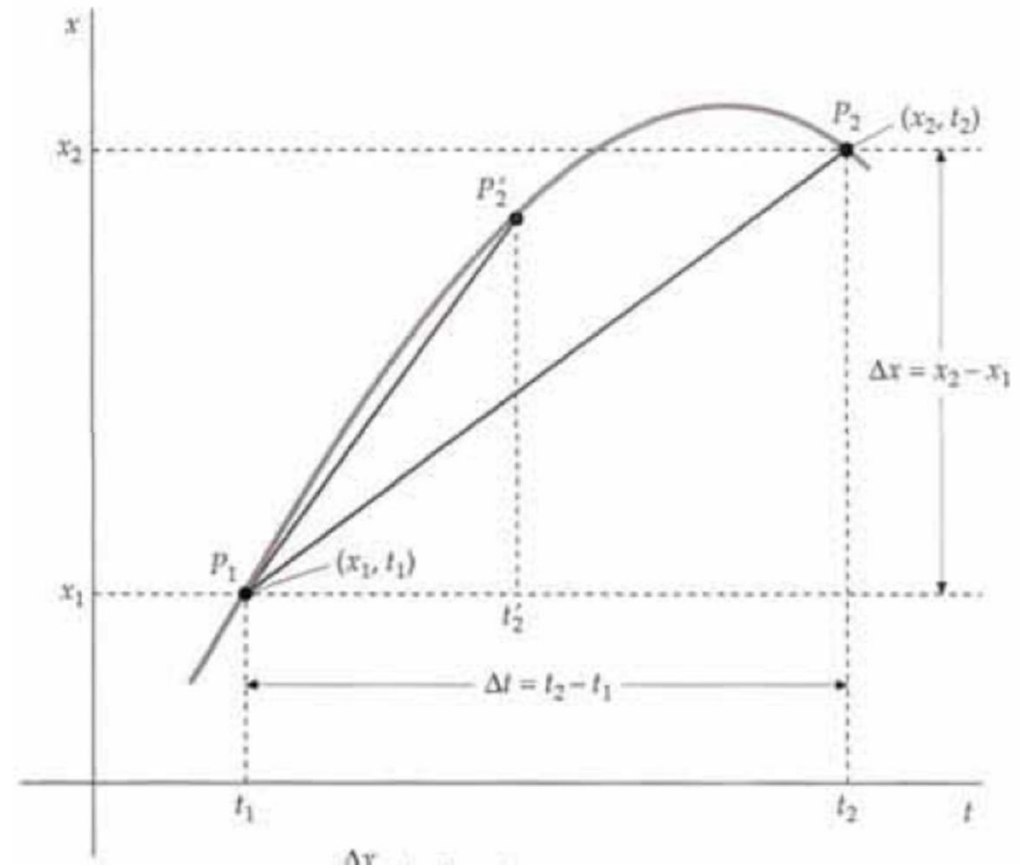
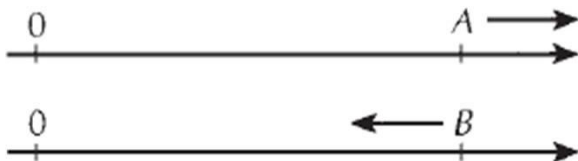
Quando a posição não varia, diz-se que o objecto está em repouso

- Qual é a importância do sistema de referência?
 - O repouso e o movimento noções relativas; um mesmo objecto pode estar simultaneamente em repouso e em movimento para diferentes sistemas de referência (ex: o você estava em repouso relativamente ao carro que o trouxe à Faculdade, mas em movimento relativamente a estrada, as árvores e outros objectos que você vê moverem-se enquanto o carro está em movimento)

Trajectória rectilínea

- **Trajectória**- linha imaginária descrita pelo móvel (partícula) durante o seu movimento.

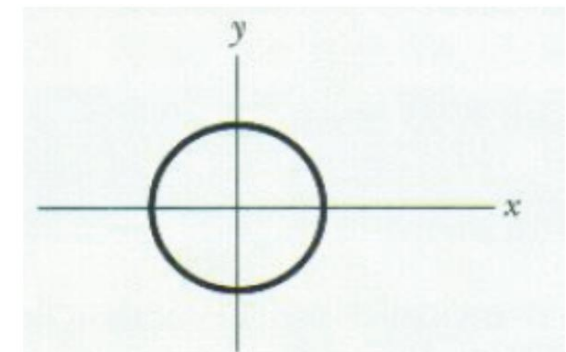
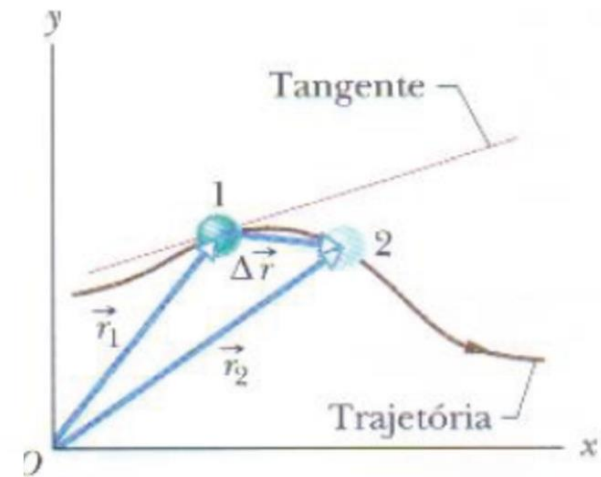
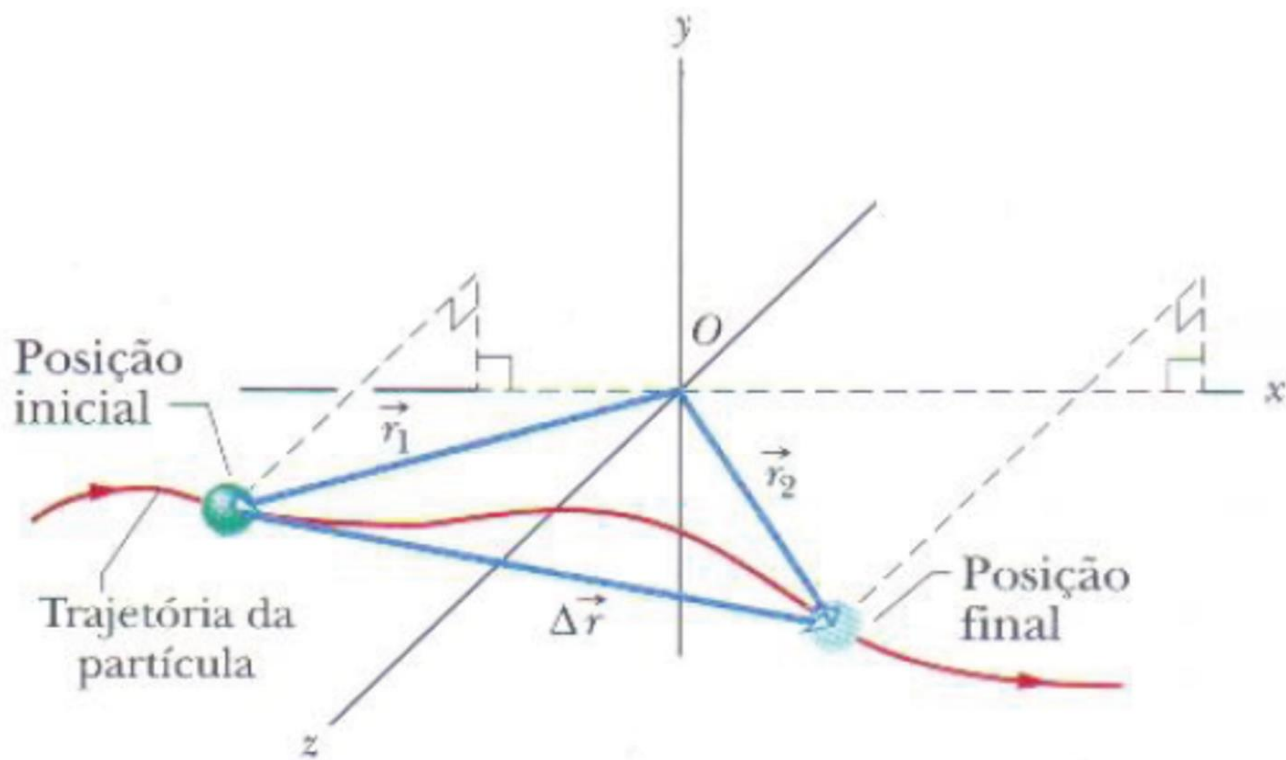
❖ Trajectória rectilínea (mov. rectilíneo)



Trajectória curvilínea

❖ Trajectória curvilínea (mov. Curvilíneo)

❖ Trajectória circular (mov. circular)



Posição

- No movimento rectilíneo, a posição, relativamente a um referencial, é indicada através de uma única variável (ex: x para um movimento horizontal ou y para movimento vertical):

$$x = x(t)$$

- Nota: ao escrever as equações horárias é preciso considerar que dependendo da relação direcção do eixo x e a direcção da velocidade v , o sinal de v e da aceleração a pode ser positivo ou negativo.
- Para o movimento curvilíneo a posição indica-se por meio de um raio vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Ou

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Posição de equações paramétricas

- $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Exemplo 1: $\vec{r}(t) = 3 \sin(2t)\vec{i} + 4 \cos(2t)\vec{j}$

$$\begin{cases} x = 3 \sin(2t) \\ y = 4 \cos(2t) \end{cases}$$

Trajectória do movimento:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \rightarrow \textit{Ellipse}$$

Trajectória em termos matemáticos é a relação entre variáveis do espaço (sem o tempo)

Deslocamento no movimento rectilíneo

- **Deslocamento**- variação da posição em função do tempo:
$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1); t_2 > t_1$$
- Δx – pode ser positivo (objecto afasta-se da origem), negativo (aproxima-se a origem) e nulo, se as posições inicial e final coincidirem.
- O **percurso** (distância percorrida), d , é sempre positivo

Deslocamento no movimento curvilíneo

- Sendo a posição um vector, o deslocamento também será um vector:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) =$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

- **Exemplo 2:** Achar o vector deslocamento de uma partícula que move-se de $\vec{r}(t_1) = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ para $\vec{r}(t_2) = 9\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$

Resp: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 12\vec{i} + 3\vec{k}$

Velocidade

- **Velocidade média**- é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$$v_{med.} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \text{mov retilíneo}$$

- Diferenciar da velocidade escalar média

$$v_{escalar,med.} = \frac{d_{tot.}}{t_{tot.}}$$

Ou

$$v_{escalar,med.} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

$$\vec{v}_{med.} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

Ou

$$\vec{v}_{med.} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{i} + \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{j} + \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{k}$$

Velocidade (cont)

- **Velocidade instantânea:** Quando se fala da velocidade de um corpo, em geral refere-se à velocidade num instante arbitrário, o valor para o qual tende a velocidade média quando Δt tende para zero:

$$v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} - \text{movimento rectilíneo}$$

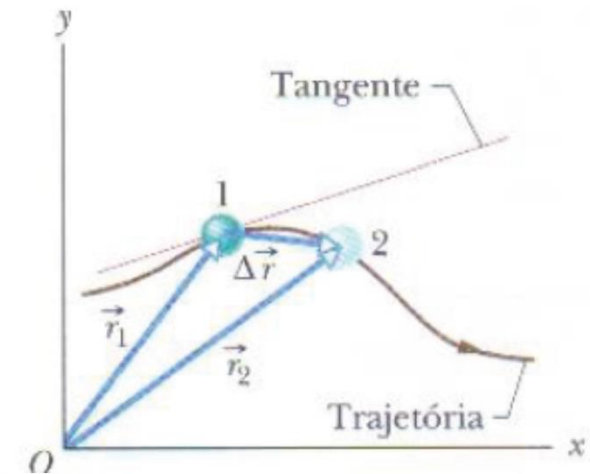
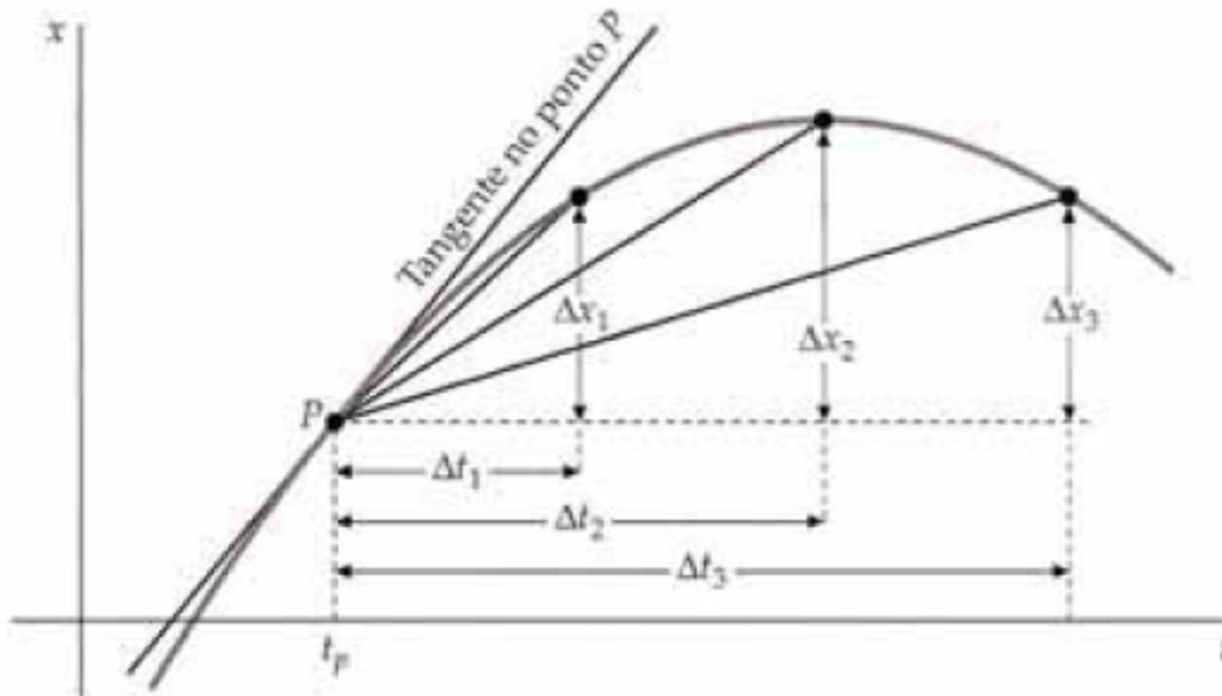
$$\text{Ou } \vec{v}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} - \text{no caso mais geral caso mais geral}$$

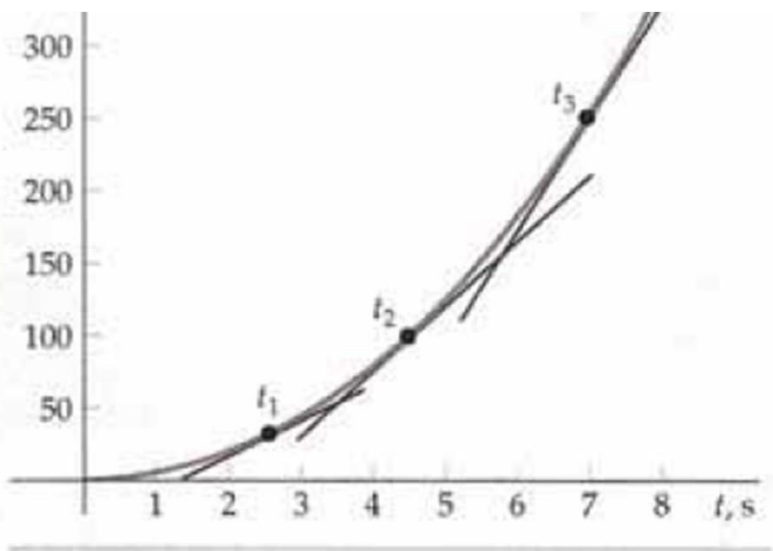
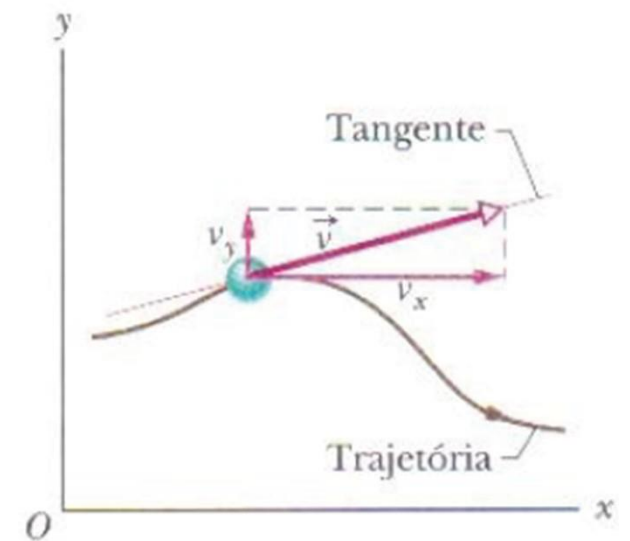
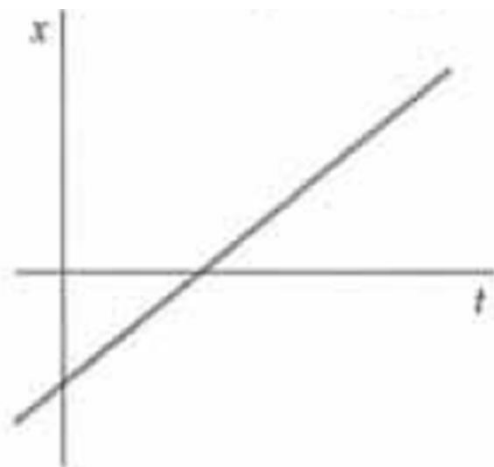
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Ou,

- $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
- Comparando estas últimas duas expressões conclui-se que as componentes (projeções nos eixos) do vector velocidade encontram-se derivando as componentes do vector posição.

A direcção da velocidade instantânea \vec{v} é sempre tangente à trajectória seguida pela partícula no ponto onde ela se encontra.





- **Exemplo 2:** Para no instante $t = 15$ s, Calcule a velocidade de um coelho que desloca-se de acordo com as seguintes equações paramétricas (expressas no SI):

$$x(t) = -0.31t^2 + 7.2t + 28 \text{ e } y(t) = 0.22t^2 - 9.1t = 30$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -0.62t + 7.2; \quad v_x(15) = -2.1(m/s)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 0.44t - 9.1; \quad v_y(15) = -2.5(m/s)$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$v(15) = \sqrt{(-2.1)^2 + (-2.5)^2}$$

$$v(15) = \sqrt{(-2.1)^2 + (-2.5)^2}$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{-2.5}{-2.1}\right) = \arctan(1.19) = 49.96^\circ \approx 50^\circ$$

Relativamente ao eixo x , o ângulo é $\beta = \pi + 50^\circ = 130^\circ$

Aceleração

- A aceleração é a taxa de variação temporal da velocidade. Resulta da variação da velocidade (pisando no acelerador ou no travão de um carro por exemplo).
- **Aceleração média** define-se como sendo a razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo correspondente a essa variação:

$$a_{med.} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{caso unidimensional}$$

$$\vec{a}_{med.} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{caso geral}$$

Aceleração instantânea: quando o intervalo de tempo tende para zero, a aceleração média tende para a aceleração instantânea.

$$a \equiv a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

ou

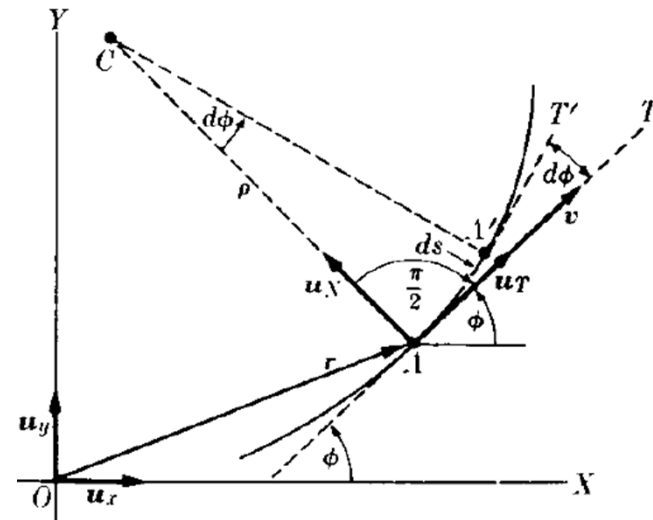
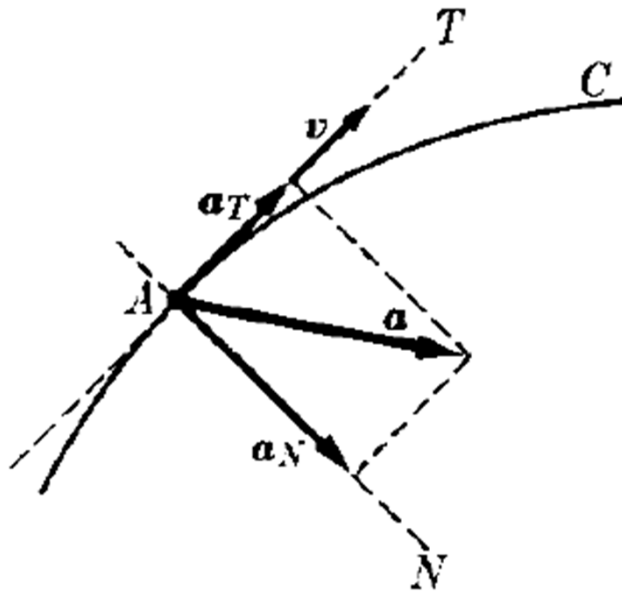
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

- No movimento curvilíneo a aceleração total é a soma vectorial das componentes tangencial(a_r) e normal (a_n):

$$a = a_r u_r + a_n u_n$$

Onde u_r e u_n - vectores unitários ortogonais entre si.

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2}$$

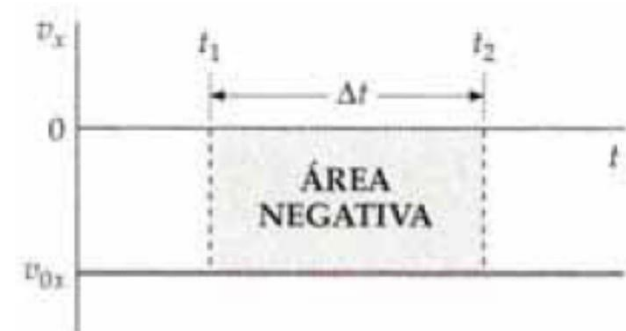
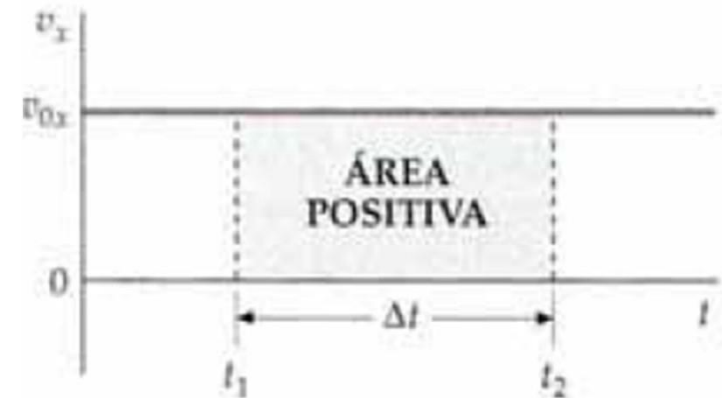
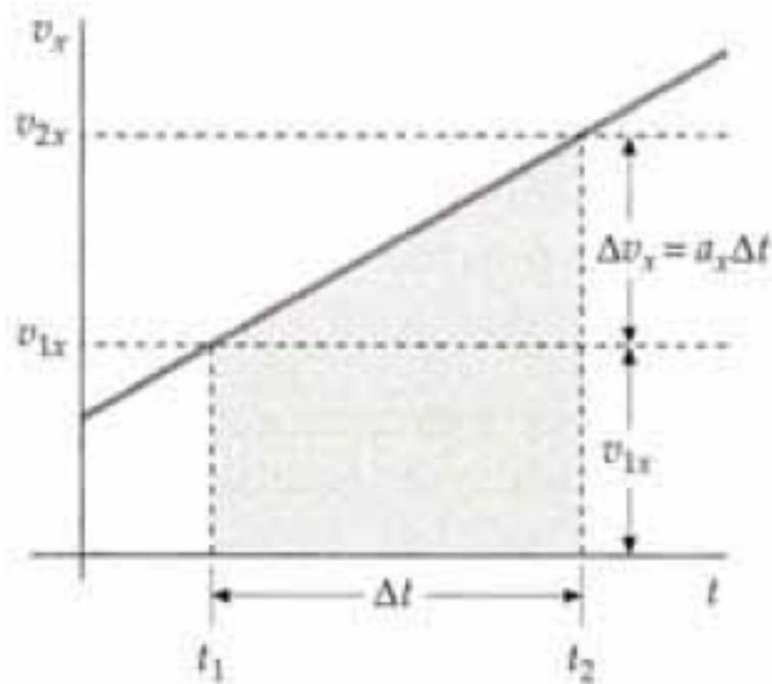


$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad e \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ – raio de curvatura da trajectória ($p = R$ para movimento circular)

Nota: veja suplemento sobre componentes normal e tangencial e componentes radial e transversal.

- **Interpretação geométrica:** Num gráfico $v = f(t)$ a aceleração é sempre tangente à curva no ponto considerado. E a área sob o gráfico representa o deslocamento.



- O movimento considera-se acelerado quando os vectores v e a têm o mesmo sentido; caso contrário o movimento será retardado.

Exemplo: Lançamento vertical para cima com eixo y dirigido para cima ($v > 0$ e $a < 0$).

$$y(t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

Para o mesmo lançamento mas com eixo dirigido para baixo ($v < 0$ e $a > 0$).

$$y(t) = y_o - v_o t + \frac{1}{2}gt^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para baixo:

$$y(t) = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para cima:

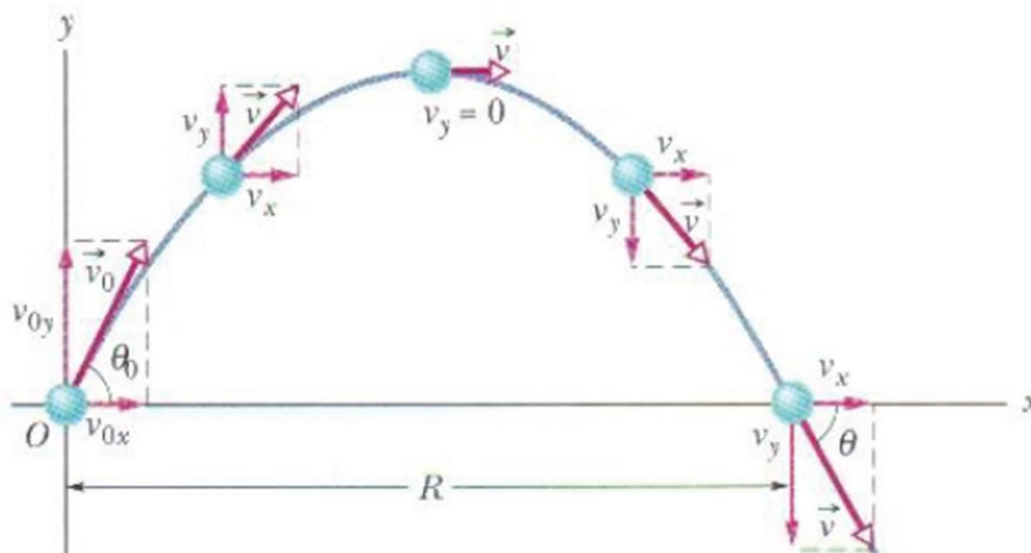
$$y(t) = y_o - v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

Composição de movimentos – movimento em duas dimensões

- Quando a partícula movimenta-se num plano ou no espaço tridimensional, o movimento pode ser analisado separadamente pelos eixos de coordenada (equações paramétricas).
- Movimento de projéteis (oblíquo e Lançamento horizontal)

Lançamento oblíquo - caso especial 1

- Caso especial do movimento bi-dimensional em que a partícula move-se no plano vertical com velocidade inicial v_0 e aceleração constante e igual à da queda livre g . Para lançamento centrado em $x_o = Y_o = 0$, teremos:



Lançamento oblíquo - trajetória

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \vartheta \\ v_y = v_0 \sin \vartheta - gt \end{cases} \Rightarrow \text{Integrando em função de } t$$

obtem-se as coordenadas x e t do vector posição:

$$x(t) = v_0 (\cos \vartheta) t$$

$$y(t) = v_0 (\sin \vartheta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

- \Rightarrow isolando t em x e substituindo em y obtem-se a trajetória do movimento:

$$y(x) = x \tan \vartheta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \vartheta)^2}$$

-parábola

Lançamento oblíquo - altura máxima e alcance

- Para encontrar a altura máxima, consideremos que nesse instante $v_y = 0 = v_0 \sin \vartheta - g t_1 \Rightarrow$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$$

.Substituindo este tempo em y , obtem-se:

$$y(t_1) \equiv H = \frac{(v_0 \sin \vartheta)^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \vartheta}{g} \right)^2 =$$

$$H = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \vartheta}{g} \right)^2$$

- Para achar o alcance, precisamos de encontrar o **tempo de trânsito** (tempo total de observação) e depois substituímos em x :

Atingido o alcance, nesse instante $y = 0$. Logo,

$$y(t_t) = v_0(\sin \vartheta)t_t - \frac{1}{2}gt_t^2. \text{ ou,}$$

$$\frac{2v_0(\sin \vartheta)}{g}t_t - t_t^2 = 0, \text{ cuja a solucao é}$$

$$\text{logo, } t_t \left(\frac{2v_0(\sin \vartheta)}{g} - t_t \right) = 0 \rightarrow t_t = 0 \text{ ou } t_t = \frac{2v_0(\sin \vartheta)}{g}$$

$$x(t_t) \equiv R = v_0(\cos \vartheta) \frac{2v_0(\sin \vartheta)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\vartheta$$

Conclui-se que o máximo valor de R atinge-se para $2\vartheta = 90^\circ$.

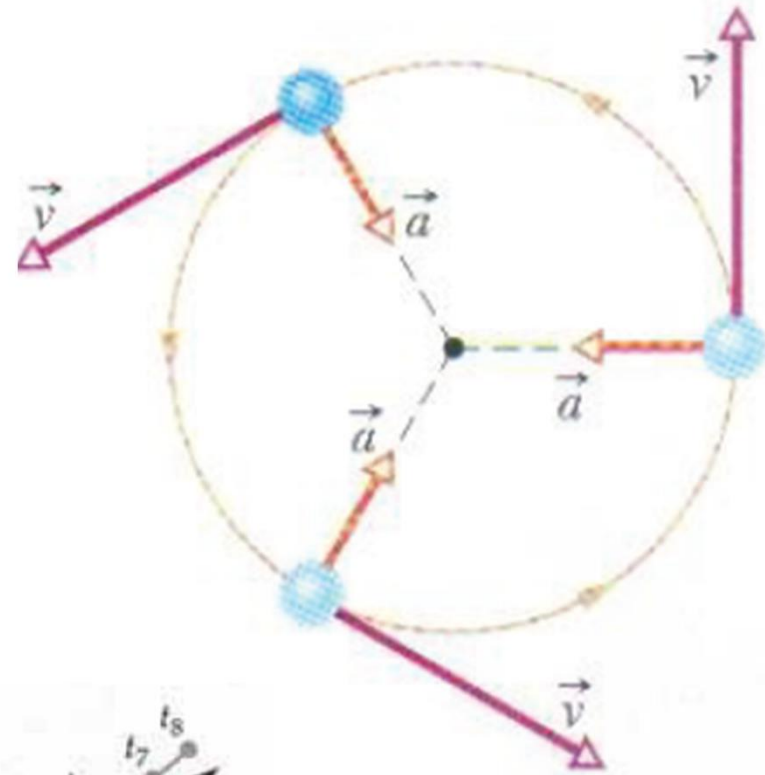
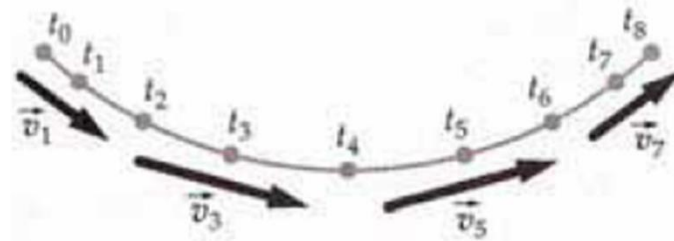
Discutir efeito do ar sobre o movimento do projectil!

TPC #1

- Lançamento horizontal
- Organizar-se em grupos de 3 estudantes, e fazer trabalho sobre o tema acima.
- Entregar o trabalho na semana 13 á 17, ao docente das aulas práticas, durante a aula prática.

Movimento circular - caso especial 2

- Quando uma partícula está em movimento circular, ela descreve uma circunferência ou um arco de circunferência.



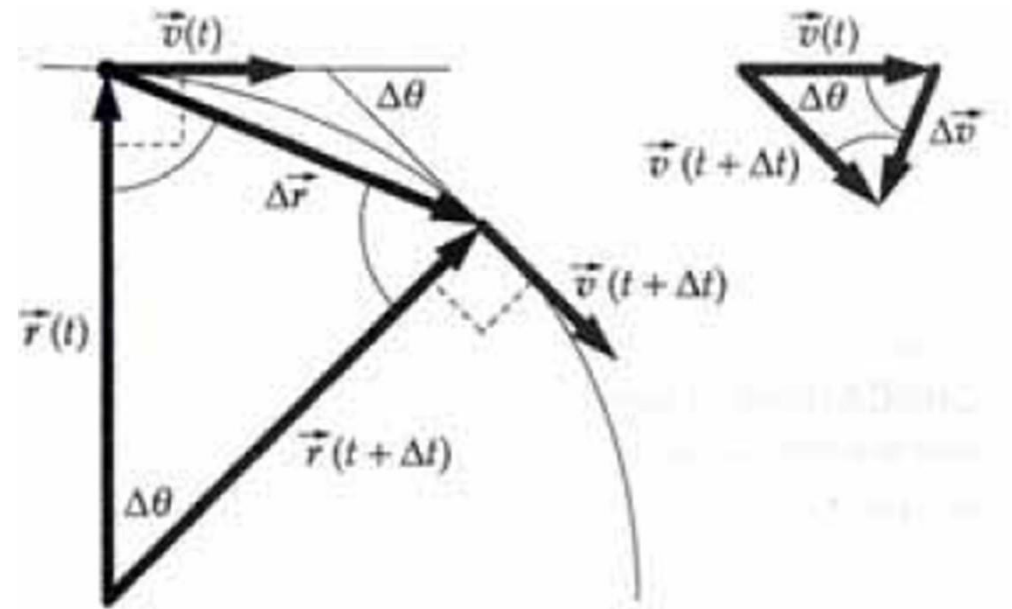
- Mesmo que a velocidade escalar seja constante, num movimento circular sempre há aceleração devido à variação do vector velocidade.
- Suponhamos que a velocidade escalar (o módulo do vector velocidade) é constante. Num dado instante t a posição e a velocidade da partícula, relativamente ao referencial localizado no centro de circunferência, representa-se por $\vec{r}(t)$ a velocidade $\vec{v}(t)$, respectivamente. Num outro instante, $t' = t + \Delta t$ a posição e a velocidade serão $\vec{r}(t + \Delta t)$ e $\vec{v}'(t + \Delta t)$, tal como indica a figura abaixo.

- Sendo semelhantes os dois triângulos podemos estabelecer a relação:

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{|\Delta \vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

Ou

$$\frac{\Delta \vec{v}}{|\Delta t|} = \frac{v}{r} \cdot \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \rightarrow a_c = \frac{v^2}{r}$$



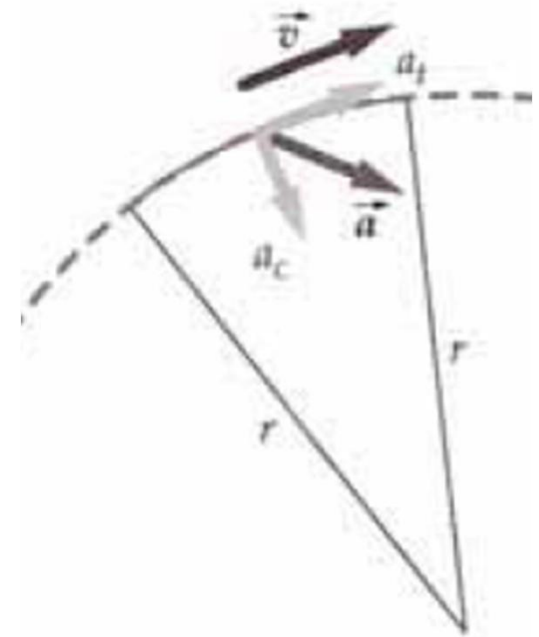
- Sendo a velocidade linear (escalar) o rácio entre o arco descrito Δs e o intervalo de tempo Δt , $v = \Delta s / \Delta t$, conclui-se que para $\Delta t = T$, $\Delta s = 2\pi r$. Logo,

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Se a velocidade linear for variável, a aceleração terá duas componentes perpendiculares entre si, tangencial devido a variação do módulo e normal (centrípeta), devido a variação da direcção do vector velocidade:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_N$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad a_N = \frac{v^2}{r}$$



- Em geral no movimento circular avaliam-se as relações angulares, nomeadamente:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} - \text{velocidade angular} \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0) \quad \text{para velocidade angular fixa}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad \text{e}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

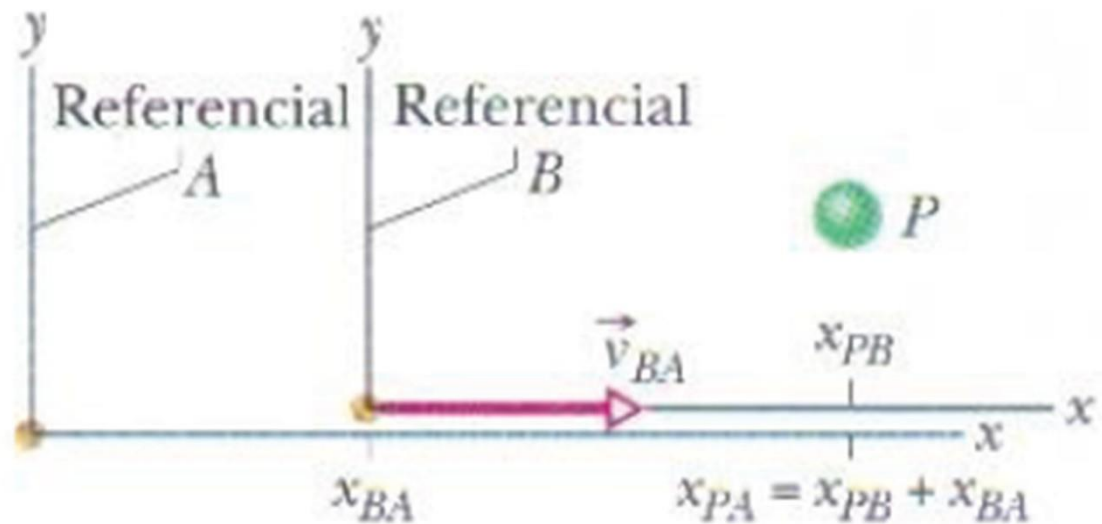
Movimento relativo

- A velocidade de uma partícula depende do referencial do observador (medidor de velocidade). Normalmente assumem-se como referencias, pontos fixos, como por exemplo uma árvore ou um poste de iluminação. Consequentemente, para um radar da polícia devidamente calibrado, medir correctamente a velocidade de um carro que se aproxima, é necessário que esteja em repouso relativamente ao solo.

Movimento relativo- unidimensional

- Suponhamos que dois observadores inerciais, O (A no desenho) e O' (B no desenho) situados nas origens dos sistemas de referência A e B respectivamente, observam o movimento de uma partícula P. O' desloca-se à velocidade constante u

$$= v_{BA}.$$



- v_P - velocidade da partícula medida pelo observador O e v'_P velocidade da mesma partícula medida pelo observador móvel O':

$$v_P = u + v'_P$$

A velocidade medida por O é a soma da velocidade medida por O' mais a velocidade do observador O' medida por O.

Para relacionar as acelerações medidas pelos dois observadores inerciais, teremos que derivar a equação:

$$\frac{dv_P}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv'_P}{dt} \leftrightarrow a_P = a'_P$$

A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais inerciais é invariante (os dois medem a mesma aceleração).

- **Exemplo 3:** a velocidade do referencial inercial O' medida por O é $u = 52 \text{ km/h}$. Determine a velocidade da partícula v medida por O' , se o observador O lê $v = -78 \text{ km/h}$.

Resp:

$$x(t) = ut + x'(t)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(t)}{dt} + \frac{dx'(t)}{dt}$$

$$v = u + v'; \text{ onde } u > 0 \text{ e}$$

$$v < 0 \Rightarrow$$

$$v' = v - u = +(-78) - 52 = -130 \text{ km/h}$$

$v' = 130 \text{ km/h}$; $(-)$ significa que o sentido de movimento da partícula é no sentido contrário ao do eixo x .

Movimento relativo- bi-dimensional

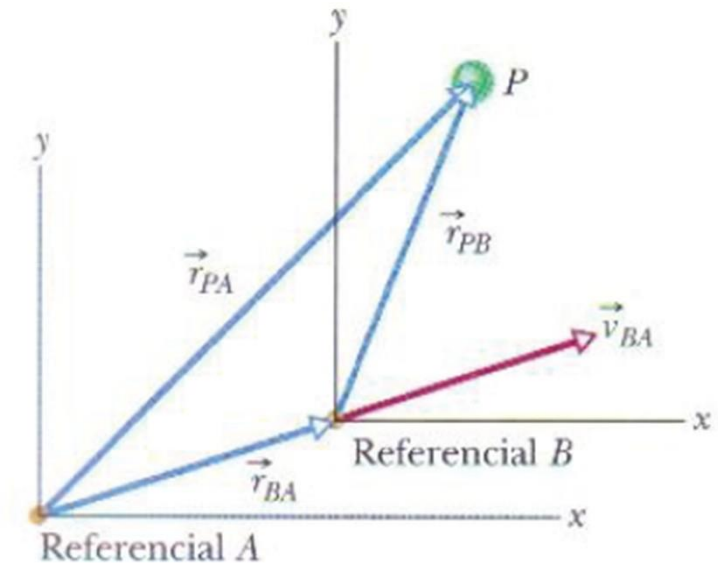
- No caso bi-dimensional, a relação de eventos medidos pelos dois observadores O e O' é:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{BA} + \vec{r}'_P$$

- Derivando termo a termo a equação, encontramos a Relação de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{BA} + \vec{v}'_P$$

- Analogamente,



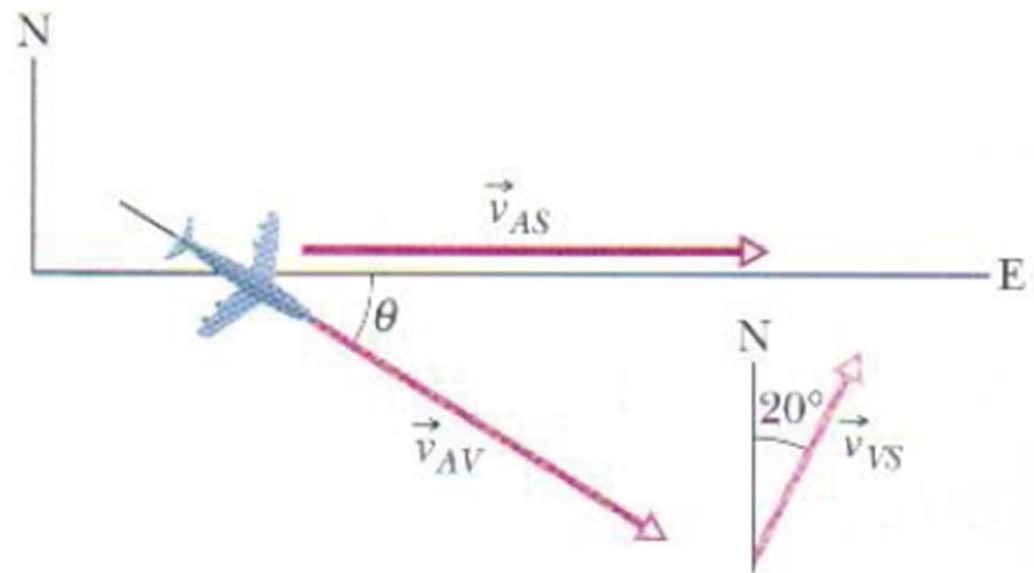
$$\vec{a}_P = +\vec{a}'_P$$

Os dois observadores medem a mesma aceleração!

- **Exemplo 4:** Um avião move-se para o Leste enquanto o piloto direcciona o aparelho para o Sudeste de modo a compensar um vento constante que sopra para o Nordeste. A velocidade do avião relativamente ao vento é de 215 km/h, formando um ângulo θ com o Sudeste. A velocidade do vento u relativamente ao solo é de 65 km/h e forma um ângulo de 20° com o Nordeste. (a) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo? (b) Qual é o valor de θ ?

- (i) Desenhar um diagrama que ilustre a situação de modo a visualizar os vectores.
- (ii) a partir do diagrama, usar convenientemente as equações que relacionam eventos nos dois referenciais:

$$\begin{aligned}v_{AS} &= v, \\v_{VS} &= u \text{ e} \\v_{AV} &= v'\end{aligned}$$



- Analisando o diagrama conclui-se que:
 $OX \equiv Leste; OY \equiv Norte. \Rightarrow$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v'}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v' \cos \theta + u \sin \varphi \\ v_y &= v' \sin \theta + u \cos \varphi \end{aligned} \quad \bullet \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} v_x &= 215 \cos \theta + 65 \sin(20^\circ) \\ v_y &= -215 \sin \theta + u \cos(20^\circ) \end{aligned}$$

- Da segunda equação obtem-se:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{65}{215} \cos(20^\circ) \Rightarrow 16,5^\circ \text{ logo,} \\ \begin{cases} v_x \equiv v = 215 \cos(16,5^\circ) + 5 \sin(20^\circ) = 228 \text{ km/h} \\ v_y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$