UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FíSICA

Faculdade de Agronomia e Engenharia Florestal

Curso: Agro-Economia e Extensão Agrária

Tema 1 – Introdução [Vectores e noções basicas sobre derivadas e integrais]

1.1 Noções básicas de Integração de funções

1.1.1 Integral indefinido

1.1.2 Integral definido

1.1.3 Técnicas de integração

1.2 Grandezas Físicas: Vectoriais e escalares

1.2.1 Vectores no plano e no espaço

1.2.1.1 Componentes de um vector

1.2.1.2 Vectores directores

1.2.1.3 Operações sobre vectores

Fernando V. Mucomole

TEMÁTICAS

TEMAS		HORAS									TOTAL
		Contacto Directo					Estudo Independente				
		AT	AP	AL	AC	CD	L	E	PL	EI	
1	**Introdução (Ferramentas Matemáticas para Física)**	2	2	-		4	2	1	-	3	7
2	**Leis de movimento**	2	4	4		10	4	3	1	8	18
3	**Dinâmica de massas pontuais**	2	2	2		6	4	3	1	8	14
4	**Trabalho e energia**	2	2	2		6	2	2	1	5	11
5	**Estática edinamica de corpos rígidos**	2	4	4		10	4	2	1	7	17
6	**Estatica e dinamica de fluidos**	2	2	-		4	2	2	1	5	9
7	**Teoria de gases**	2	2	2		6	2	2	1	5	11
8	**Termodinamica**	4	4	4		12	4	2	1	7	19
9	**Elementos de Bioesfera**	10	4	6		20	5	4	1	10	30
Total: Horas		32	32	32		96	37	27	10	74	170

AT = Aulas Teóricas AP = Aulas Práticas AL = Aulas Laboratoriais AC = Aulas de Consulta CD = Contacto Directo TL = Trabalhos Laboratoriais TG = Trabalhos em Grupo TP = Trabalhos de Prática EI = Total de Horas de Estudo Independente

- # Critérios de avaliação

- Média=40% Teste1 + 40% Teste 2 + 20% TPC’s

- # Data das avaliaçoes
    - **Teste1 –** 14 de Abril de 2023;
    - **Teste 2 –** 02 de Junho de 2023.

- # Bibliografia e recursos

[1]	**H. D. Young e F. R. A, Física I: Mecânica, 12 ed., São Paulo: Addison Wesley, 2008.**
[2]	P. A. Tipler e G. Mosca, Física para Cientistas e Engenheiros, vol. I, LTC, Ed., Rio Grande do Sul, 2009.
[3]	M. Alonso e E. J. Finn, Física- um curso universitário: Mecânica, E. Blucher, Ed., 1981.
[4]	B. P. Demidovitch, Problemas e Exercícios de Análise Matemática, 4th ed., Escolar, Ed., São Paulo, 2010.
[5]	D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, Fundamentos de Física: Mecânica, 8 ed., vol. I, LTC, Ed., Rio de Janeiro, 2008.
[6]	M. Alonso e E. J. Finn, Física um Curso Universitário: Campos e Ondas, 2nd ed., vol. II, Blucher, Ed., 2014.
[7]	F. J. Ramalho, N. G. Ferraro e P. A. d. T. Soares, Os Fundamendos da Física, 9nd ed., Moderna, Ed., São paulo, 2007.
[8]	M. Alonso e E. J. Finn, Física, vol. Colectânia, Escolar, Ed., 2012.

Conteúdos

- 1. Noção de integral de uma função
- Integral como operação inversa da diferenciação;
- Relação diferencial entre primitiva e sua função ;
- Integral como soma especial;
- Propriedades de integração;
- Tabela de integrais básicas.

- 2. Grandezas físicas (escalares e vectoriais)
- Grandezas vectoriais
- Operacões sobre vectores
- 3. Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

Noção de integral de uma função

- Definidas as funções $f\ (x)$ e $F(x)$ no intevalo $x\ \in [a,b]$ e $F\ (x)$
- diferenciável em todos os pontos $[a\,b]$, se para $\frac{dF(x)}{dx} = f\,(x)$, $\forall x\ \in [a,b]$, diz-se que $F(x)$ é primitiva de $f\ (x)$.
- Para a função f dependente de x, define-se diferencial de f, a expressão:

$$df = \frac{df}{dx}dx \tag{1}$$

- Para $\forall$ duas funções $f\ = f\ (x)$ e $y = y(x)$ diferenciáveis, é válida a seguinte relação:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Noção de integral de uma função – cont.

- **Exemplo 1.**
- Velocidade $v = v(t)$ *e a posição* $x = x(t)$*.* Entre as duas variáveis podemos escrever:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}$$

- Por definição, $\frac{dv}{dt} = aceleração\ e\ \frac{dx}{dt} = velocidade.$

Integral como operação inversa da diferenciação

- Integrar uma função f(x) é realizar a operação inversa da diferenciação (derivada) de F(x), ou seja, procurar uma função F(x), tal que a sua derivada é igual a função a integrar.

- Procuremos as primitivas das seguintes funções: $f\ (x) = \cos(x)$ e $f\ (x)\ =\ x^2$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \cos(x) \Rightarrow F(x) = sen(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Relação diferencial entre primitiva e sua função

- Para a função F(x), primitiva de f(x) é válida a seguinte relação diferencial:

$$dF(x) = f(x)dx \tag{3}$$

- Se F(x) é primitiva da função f(x), para ∀ constante C, a soma desta constante com F(x), é também primitiva de f(x);

- ∀ primitiva de f(x), chama-se de integral indefinida de f(x), e representa-se por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

Integral como soma especial

- Espectro discreto (Ai) : Existindo várias entidades semelhantes, para calcular o número total dessas entidades (por exemplo áreas), procede-se a soma $\sum A_i$ ou $\sum_{i=0}^{N} A_i$

- Espectro contínuo (dA): para função continua $f(x)$ num determinado segmento $[a, b]$, $dA = f\ (x)dx$ e $A = \int f\ (x)dx$.

- Integral definida

- Nalguns casos são colocadas as condições iniciais do problema de tal maneira que a constante $\boldsymbol{C}$ fica conhecida. Nestes casos, utiliza-se a integral definida (fórmula Newton-Leibniz):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b \tag{5}$$

Propriedades de integração

- $1 - \int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx, k = constante$
- $2 - \int[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $3 - dx^n = nx^{n-1}dx$
- $4 - d(x \pm k) = dx, k = constante$
- $5 - d(kx) = kdx \rightarrow dx = \frac{1}{k}d(kx)$

Tabela de integrais básicas

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C,$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$
- $\int e^x \, dx = e^x + C,$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C \, ,$
- $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C \, ,$
- $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\mathrm{cotan}\, x + C \, ,$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \, ,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + 1 + C \, ,$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+q}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 + q}\right| + C \, , \mathrm{q} = \mathrm{const.}$

Exemplos de cálculos de integrais

- **Exemplo 2.**
- $\int (3x^2 + x)\, dx = 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

- **Exemplo 3.**
- $\int \frac{1}{x+5} dx = \int \frac{d(x+5)}{x+5} dx = ln|x+5| + C$

- **Exemplo 4.**
- $\int \cos(3x)\, dx = \int \cos(3x)\, d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

- **Exemplo 5.**
- $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = ln|x^2+1| + C$

Exemplos de aplicaçãode integrais

- Exemplo 6.

- Uma particula move-se ao longo de uma linha recta com aceleração que varia com o tempo de acordo com a expressão $a = 4 - t^2$, onde a é a aceleração expressa em m/s^2 e t, o tempo expresso em segundos.
- Obtenha as expressões para a velocidade e a posição, sabendo que no instante $t = 3s$, a velocidade é $v = 2\ m/s$ e $x = 9\ m$.

- Resposta: $v(t) = -\frac{x^3}{3} + 4t - 1\, m/s$ e $x(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4} m$

- Exemplo 7.

- A aceleração de um corpo em movimento rectílneo é dada por $a = -kv$, onde $k = constante$. Para o instante $t = 0$ s, $v = v_0$. Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo.

- Resposta: $v(t) = v_0 e - {}^{kt}$

Exemplos de aplicação de integrais - Cont.

Exemplo 8.

Um corpo move-se ao longo de uma recta. A sua aceleração é dada no S.I. por $a = -2x$, onde x está em metros e a em m/s^2. Obter a relação entre a velocidade e a distância sabendo que para $x = 0m$, a velocidade é $v = 4\ m/s$

Resposta: $v(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

- Grandezas físicas. Operações sobre vectores

Grandezas físicas escalares e vectoriais

- **Escalares:** grandezas cuja informação fica completa quando dado o valor numérico e a respectiva unidade (massa, tempo, distância percorrida, área, volume, pressão, etc).

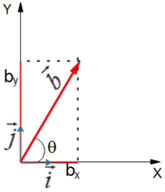
- **Vectoriais:** grandezas cuja informação fica completa, quando para além do valor numérico e unidade, é indicada a direcção e sentido (velocidade, força, quantidade de movimento, etc). Vectores caracterizam-se por ter origem e extremidade, módulo, direcção e sentido.

Grandezas vectoriais

Componentes de um vector

- As componentes de vector são as suas projecções ao longo dos eixos do sistema de coordenadas.

2D



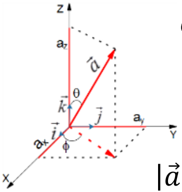
$$b_x = |\vec{b}|\cos\theta$$

$$b_y = |\vec{b}|\sin\theta$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$$

3D



$$a_x = |\vec{a}|\sin\theta\cos\boldsymbol{\phi}$$

$$a_y = |\vec{a}|\sin\theta\sin\boldsymbol{\phi}$$

$$a_x = |\vec{a}|\cos\boldsymbol{\phi}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

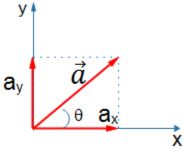
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

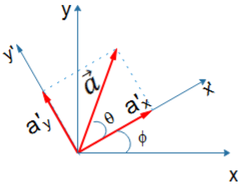
$\vec{i}, \vec{j}\ e\ \vec{k}$ sao vectores unitarios e $|\vec{a}|$ chama-se módulo do vector $\vec{a}$.

Grandezas vectoriais

Componentes de um vector

- Importa referir que para um mesmo vector, mudando o sistema de referência, variam os valores das componentes, mas o módulo do vector mantêm-se igual em ambos os sistemas (veja o caso do plano, para simplificar a complexidade):





$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Grandezas vectoriais
Versor

- Para qualquer vector podemos expressar o vector unitário (versor) relacionado com aquele vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{6}$$

Exemplo 9.:

Determine o versor do vector $\vec{a}$, $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$

Resposta : $\vec{u} = \frac{\sqrt{14}}{14}\left(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}\right)$

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores

- 1 - Soma de vectores (método analitico e geométrico)
- 2 - Multiplicação de vector por escalar
- 3 - Multiplição de vector por vector (produto escalar e produto vectorial)

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Soma (Método analítico)

- A soma ou a diferença de dois vectores $\vec{a}\ e\ \vec{b}$ e um terceiro $\vec{c}$ expressa, respectivamente por:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$$

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} \pm (a_y + b_y)\vec{j} \pm (a_z + b_z)\vec{k} \qquad (7)$$

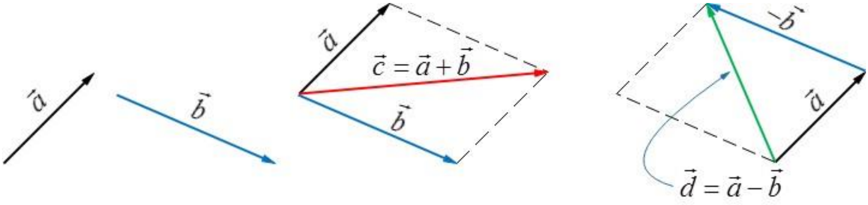
- O módulo do vector resultante $(\vec{c})$ é

$$\vec{c} = \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2 + (a_z \pm b_z)^2} \qquad (8)$$

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Soma (Método geométrico)

- Sejam dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o vector soma $\vec{c}$ e o vestor diferenca $\vec{d}$ conforme se ilustra nos diagramas ii) e iii) respectivamente.



i) Dois vectores ii) Soma iii) Diferença

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação do vector por um escalar

- Multiplicando vector com escalar $(\vec{a}Z)$, obtém-se um vector $(\vec{b})$ paralelo ao vector originário e que obedece as seguintes condições:

$$\left|\vec{b}\right| > |\vec{a}| \; se \quad |Z| > 1$$

$$\left|\vec{b}\right| < |\vec{a}| \; se \quad |Z| < 1$$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem sentidos opostos se $Z < 0$.

$$\vec{a}Z = (Za_x)\vec{\imath} + (Za_y)\vec{\jmath} + (Za_z)\vec{k} \qquad (9)$$

Grandezas vectoriais

Operacoes sobre vectores: Multiplicação (Produto escalar)

Produto escalar

- O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$,$(\vec{a}.\vec{b})$ e um numero definido por:
- $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
- $\vec{a}.\vec{b} = a_y b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (10a)

(10b)

- $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$
- $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 1$
- $\vec{a}.\vec{b} = 1$ – condição de perpendicularidade

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicacão (Produto vectorial)

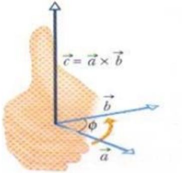
Produto vectorial

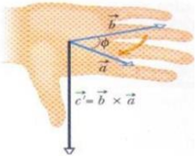
- O produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$,$(\vec{a} \times \vec{b})$, e um terceiro vector $\vec{c}$ definidopor:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin \boldsymbol{\phi} . \vec{n}$$

Onde, **n̂**- vector unitario ⊥ ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$; φ– é o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b}$=0 - **condição de paralelismo**





$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

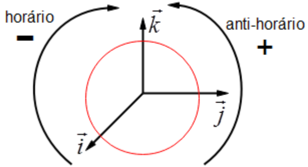
Grandezas vectoriais

- Operaçoes sobre vectores: Multiplicação (Produto vectorial)
- Analiticamente, o produto vectorial corresponde à:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \qquad (12)$$

ou

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}; \qquad \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$$
$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}; \qquad \vec{k} \times \vec{\jmath} = \overrightarrow{-\imath}$$
$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}; \qquad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto Misto)

- Geometricamente, o módulo do produto vectorial equivale à área do paralelogramo formado na base dos dois vectores.

Escalar-vectorial

- O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c}.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \qquad (13)$$

Vectorial duplo

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{c}.\vec{a}\right) - \vec{c}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right) \qquad (14)$$

- Operador diferencial vectorial (operador nabla)

Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

- Suponhamos que temos uma função escalar dependente de três variáveis, isto é, $f = f(x, y, z)$. A sua derivada total é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy + \frac{\partial f}{\partial x}dz \qquad (15)$$

- Sabe-se que o vector posição de uma partícula no espaço é:

$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, pelo que:

$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}, \qquad (16)$$

- Conjugando as Eqs. 16 e 15, e tendo em consideração a expressão do produto escalar (Eq.10b), a derivada total da função f é:

$$df = \nabla f . d\vec{r} \qquad (17)$$

- onde

$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ e operador nabla em coordenadas rectangulares.

Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

$$\nabla f \ \sim gradiente\ de\ f\ (gradf) \tag{18a}$$

$$\nabla . \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \sim divergencia\ de\ \vec{a}\ (div\vec{a}) \tag{18b}$$

$$\nabla \times \vec{a} \sim rotacional\ de\ \vec{a}\ (rot\vec{a}) \tag{18c}$$

Fim do Tema # 1