UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

Faculdade de Engenharia

FíSICA I

- **Tema IV - Dinâmica de uma partícula. Trabalho e Energia**
- Energia Cinética Energia Potencial;
- Energia Mecânica e sua Conservação Trabalho Mecânico;
- Teorema Trabalho-Energia Cinética;
- Sistemas Conservativos- Trabalho realizado por forças conservativas;
- Potência mecânica;
- Torque e Momento angular de uma partícula.

Félix Tomo

• Introdução

- A energia pode ser definida como sendo a grandeza física que caracteriza o **estado de um ou mais objectos**.

- Ela está associada ao estado do movimento ou de configuração. Se uma força agir sobre um ou mais objectos de modo a move-los de um ponto para outro, a energia do sistema (objecto ou conjuto de objectos) vai variar.

- **A energia não pode ser criada nem destruída do nada.**
- Ela pode ser transformada de uma forma para outra dentro de um mesmo objecto ou para um outro objecto, o que constitui a lei de conservação de energia.

- A energia expressa –se em **Joule (J)** no sistema internacional de unidades.

- Existem outras unidades de energia como kWh, cal, ou BTU:

$$1\,cal\ =\ 4.186\,J;\ 1\,BTU\ =\ 252\,cal;\ 1\,Wh\ =\ 3600J$$

- **Existem duas maneiras de transferir energia:**
  - ✓ **Realização do trabalho mecânico**
  - ✓ **Transferência de calor**

- Neste capítulo vamo-nos concentrar na primeira forma de **transferência de energia- o trabalho mecânico**.

• Energia Cinética

- A energia cinética é a energia associada ao estado do movimento de um corpo. Se o corpo mover-se mais depressa (maior velocidade), ele terá maior energia cinética, e se o corpo estiver em repouso, a sua energia cinética será nula.

- Para um objecto de massa *m*, movendo-se à velocidade *v*, muito menor em relação à velocidade da luz, a energia cinética será:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

• Energia potencial

- A **energia potencial é a energia que um objecto adquire devido ao seu posicionamento, num determinado campo**, em relação a um nível onde ela se assume nula. Ela depende da configuração.

- Escolhido o nível zero de energia potencial, acima desse nível a energia será positiva, e negativa abaixo do nível. Se o campo de forças é gravitacional, a energia será potencial gravitacional. Sendo elástica a força associada ao campo, a energia será potencial elástica.

- No caso da força de gravidade (mg), a energia de um objecto vai depender altura relativa ao solo ou um outro nível em que se adota zero a energia potencial:

$$E_p = mgh$$

• Energia mecânica e sua conservação

- A energia mecânica é soma da energia cinética e enegia potencial de objecto:

$$E_M = E_c + E_p$$

Para um sistema isolado, a energia mecânica mantém-se invariável. Se num dado instante t, ela assumir valor E_M, num outro instante $t' = t + \Delta t$, ela assumirá o valor E'_M, tal que:

$$E_M = E'_M$$

ou,

$$E_c + E_p = E'_c + E'_p$$

A relação matemática

$$E_c + E_p = E_c' + E_p'$$

representa a **lei de conservação de energia**.

Se o sistema não for isolado, se por exemplo ao passar de um estado para outro o objecto sofrer a acção de forças dissipativas, o princípio de conservação de energia assumirá o seguinte aspecto:

$$E_c + E_p = E_c' + E_p' + Q$$

Onde Q é a energia gasta durante o processo. Se a força dissipativa for de atrito, teremos:

$$Q = |W_{atr.}|$$

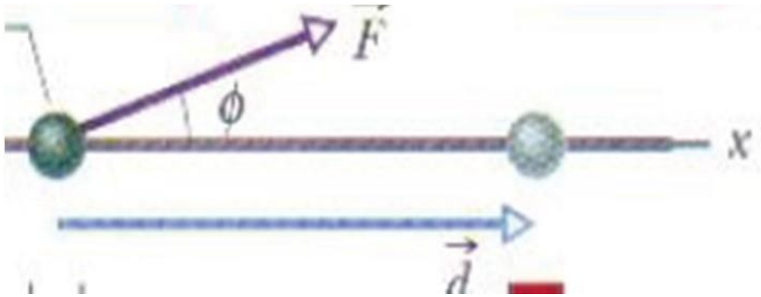
- **Trabalho mecânico**

- Enquanto que a energia é uma grandeza do estado (estado de movimento ou configuração), o trabalho é uma grandeza do processo. Está associado ao processo de transferência de energia de um objecto para outro, como resultado da acção de uma força.

- Para que se realize trabalho é necessário que actue uma força sobre o objecto, e que este se desloque.

Trabalho realizado por uma força constante:

Se $\vec{F}$ for a força aplicada e $\vec{d} = \Delta\vec{r}$ o deslocamento do objecto, o trabalho W será:



$$\overrightarrow{W} = \vec{F}.\vec{d} = F.d\cos\phi \qquad \text{(produto escalar)}$$

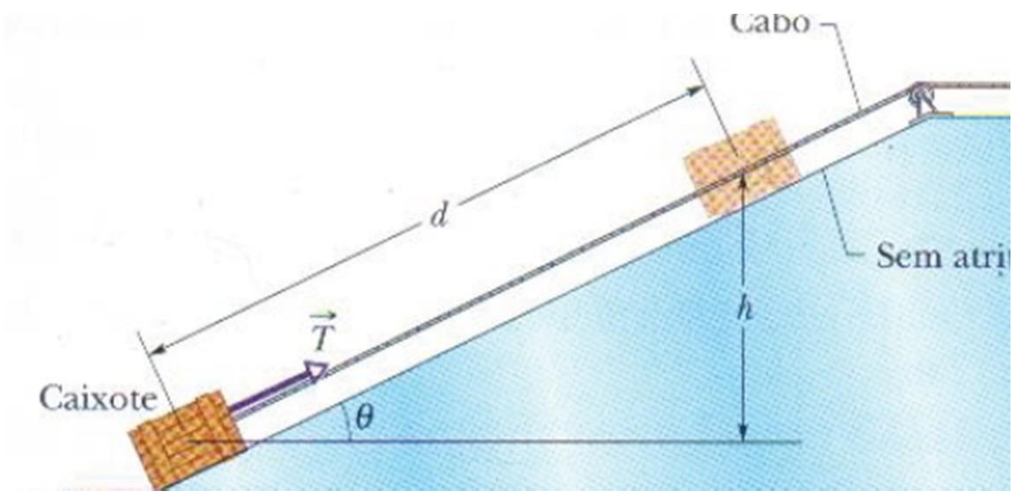
W pode ser positivo, negativo ou nulo (quando a força plicada é perpendicular ao deslocamento).

Quando sobre o objecto actuam várias forças, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ o trabalho total é a soma dos trabalhos realizados por cada uma das forças presentes:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_N$$

A unidade do trabalho é o Joule $(J = N.m)$

- **Exemplo:** Calculemos o trabalho realizado realizado pela força de gravidade, para deslocar um caixote ao longo de um plano inclinado. Considere que a massa do caixote é de $m = 15\ kg$, o deslocamnto é $d = 5{,}7\, m$ e a altura alcançada pelo caixote é de $h = 2{,}5\, m$.



- Notemos que o trabalho realizado pela F_g não é o trabalho total, porque actua também a tensão do cabo e a força de atrito (se não for desprezível). **O trabalho realizado pela força normal é nulo porque esta força é perpendicular ao deslocamento**.

$$W_g = F_g . \sin(\vartheta) . d . \cos(180°)$$
$$= -mg . d . \sin(\vartheta) = -mg . d . \frac{h}{d}$$

$$W_g = -mgh$$

- Note que se o caixote estivesse a descer para a base do plano, haveria coincidência entre o sentido do deslocameento e a projecção da força de gravidade que desloca o caixote. Neste caso,

$$W_g = mgh$$

- De um modo geral, o trabalho realizado por uma força para deslocar um objecto de A para B, é a integração de todos os trabalhos elementares $\left(d\overrightarrow{W} = \vec{F} d\vec{r}\right)$:

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F} d\vec{r}$$

- Para um objecto que se desloca num plano teremos:

- $W = \vec{F}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = F_x \Delta x + F_y \Delta y$ - para força constante, e
- $W = \int_{x_0}^{x} F_x dx + \int_{y_0}^{y} F_y dy$ - para força variável

Se a força variável tiver única componente, por exemplo, apenas componente x, o trabalho dessa força variável será:

$$W = \int_{x_0}^{x} F_x dx$$

- Exemplo de trabalho de força variável numa dimensão :

  Trabalho realizado por uma mola ideal (que obedece a lei de Hooke):

- $F = F_{el.} = -k\,x \Rightarrow$(−) indica que a força elástica aponta no sentido contrário ao da deformação.

$$W = \int_{x_0}^{x} (-kx)dx = -\left(k\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}kx_0^2\right)$$

$$W = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- **Caso tridimensional:**

Suponhamos que a força resultante que actua sobre o objecto seja dada por:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

- Supomos ainda que a partícula tenha um deslocamento elementar d$\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.
- Nesse caso o trabalho elementar será:

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Consequentemente, o trabalho total realizado pela força do ponto A para B será:

$$W = \int_{x_0}^{x} F_x dx + \int_{y_0}^{y} F_y dy + \int_{z_0}^{z} F_z dz$$

Nota: Entende-se que os pontos inicial e final tem coordenadas $A(x_0 , y_0, z_0)$ e $B(x, y, z)$, respectivamente.

Teorema trabalho-Energia Cinética

- O trabalho realizado pela força resultante é igual à variação da energia cinética:

$$W = \Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A}$$

- O teorema pode ser demonstrado de várias maneiras, sendo uma delas a que se segue:

$$\mathrm{W} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \int_A^B \vec{v} d\vec{v}$$

- Lembrando-se que $\vec{v} d\vec{v} = v dv$, temos:

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 \text{-} \frac{1}{2} m v_A^2$$

Exemplo: Um pequeno objecto foi lançado para cima ao longo de um plano inclinado que forma um ângulo de 15° com a horizontal. Achar o coeficiente de atrito se o tempo de subida for 2.0 vezes inferior em relação de descida.

•Estratégia de resolução- teorema trabalho-energia cinética: Subida

$$W_{tot.} = \Delta E_c$$

- Que forças realizam trabalho durante a subida?-Força de atrito e força de gravidade.

$$W_{tot.} = F_{at}.L.\cos(180°) + F_{g,x}.L.\cos(180°)$$

$$F_{at} = \mu F_N = \mu mg\cos(\vartheta) \;\&\; F_{g,x} = mg\sin\vartheta$$

- No ponto mais alto, a velocidade final $(v_f = 0)$ é nula. Logo, o teorema trabalho-energia ssume o seguinte aspecto:

$$-\mu mg\cos\vartheta . L - mg\sin\vartheta . L = 0 - \frac{mv_i^2}{2}$$

Ou

$$\frac{mv_i^2}{2} - (\mu mg.\cos\vartheta + mg.\sin\vartheta).L = 0 \Rightarrow$$

$$0 = v_i^2\text{-}2(\mu g\cos\vartheta + g\sin\vartheta).L = 0 \quad ou$$

$$L = \frac{v_i^2}{2(\mu g\cos\vartheta + g\sin\vartheta)} \qquad (1)$$

- Por outro lado, a partir da cinemática podemos escrever equações horárias da velocidade:

$$0 = v_i - (\mu g\cos\vartheta + g\sin\vartheta)t$$
$$v_i = 2(\mu g\cos\vartheta + g\sin\vartheta)\mathrm{t} \qquad (2)$$

- Combinando as duas equações teremos:

$$L = \frac{(\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)t^2}{2}$$

- Para o regresso do objecto podemos escrever a distância percorrida L, tendo em conta que desta feita a força de atrito age no sentido oposto, ou seja:

$$L = \frac{(-\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)}{2} t^2$$

- Dividindo termo a termo as 2 últimas equações obtemos:

$$1 = \frac{(\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)t^2}{(-\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)t'^2} \Rightarrow$$

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{(-\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)}{(\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta)}$$

Mas pelas condições do problema, $\frac{t}{t'} = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{-\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta}{\mu g \cos\vartheta + g \sin\vartheta} = \frac{-\mu \tan\vartheta}{\mu \tan\vartheta}$$

- Daqui isola-se μ:

$$\mu = \frac{(n^2 - 1)}{1 + n^2} = \frac{3}{5}.\tan 15° = 0.16$$

Forças conservativas

- Uma força é conservativa quando trabalho realizado por ela não depende da trajectória seguida, ou seja o trabalho realizado pela força num circuito fechado (ida-e- volta) é nulo.
- Quando a força que actua sobre o objecto é conservativa, o trabalho realizado por ela é igual a diferença de uma grandeza E_p, que depende apenas das posições inicial e final. E_p – Energia potencial.

$$W = E_{p,i} - E_{p,f}$$

- Ou seja, neste caso $W = -\Delta E_p$.

- Para forças conservativas é válida a relação:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla} E_p$$

A força é igual e de valor oposto ao gradiente da energia potencial.
$\vec{\nabla}$ - operador diferencial direccional (del/nabla).

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- $\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \Delta$ - Laplaciano (operador de L'place)

- **Potência mecânica**

- A potência mecânica é a taxa de variação temporal do trabalho realizado por uma força. Representa a rapidez com que se realiza o trabalho. Se a força realiza trabalho num dado intervalo de tempo, a potência média é:

$$P_{med} = \frac{W}{\Delta t}$$

- A potência instantânea será:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}) \qquad \text{produto escalar)}$$

- A potência expressa-se em Watt (W).

- Normalmente quando temos um dispositivo que realiza trabalho (transfere energia), a potência do dispositivo aparece no catálogo do mesmo e/ou lacrada no própio dispositivo.
- Conhecido o valor da potencia e o tempo de operação do dispositivo, calcula-se a energia transferida pela expressão:

$$E = P.\Delta t$$

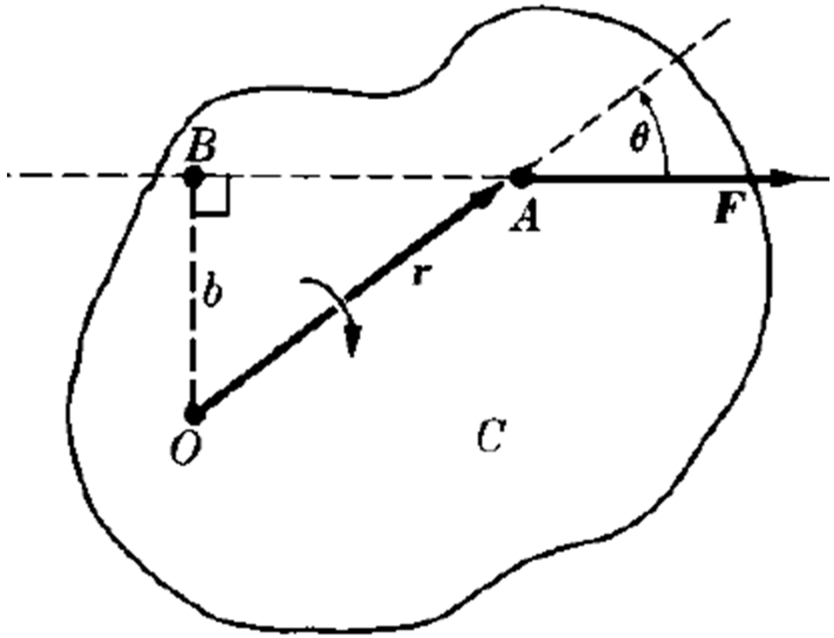
- Uma unidade prática da energia é o kWh (kilowatt- hora). Nas nossas residêncais por exemplo , a factura de energia não é em Joule (J), mas sim em kWh.

$$1\,\mathrm{kW}h = 10^3\ (W) \cdot 60 \cdot 60\ (s) = 3{,}6 \cdot 10^6\, J$$

• Torque e momento angular

Torque ou momento de força é o efeito rotacional que uma força pode causar. Consideremos um corpo *C* que pode girar em torno de um ponto O. Ao aplicar uma força cuja linha de acção não passa pelo ponto O, então a força pode provocar rotação do corpo em torno desse ponto.

Torque de uma força



- Na representação, b- é o braço da força.

$$\tau = F.b$$

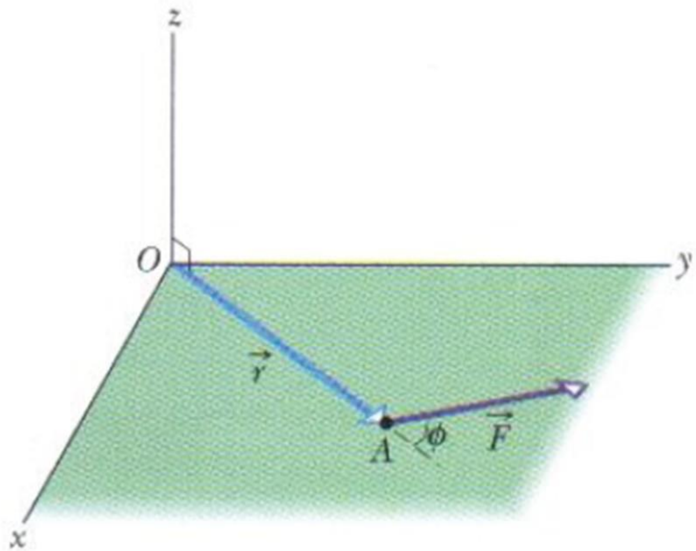
$$[\tau] = N.m$$

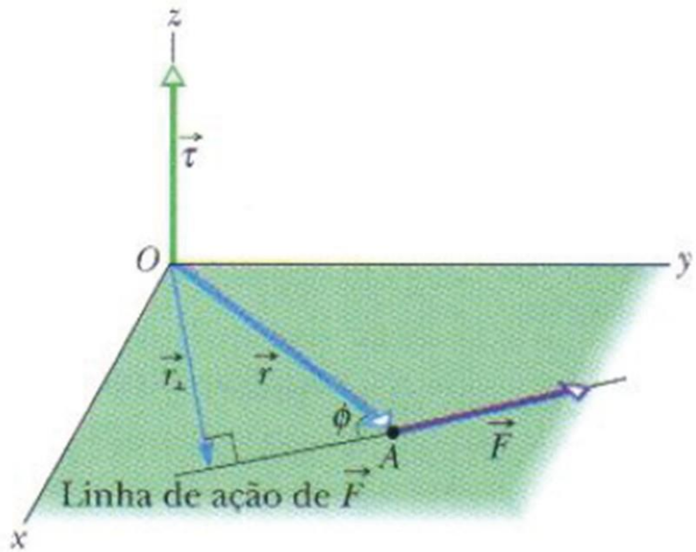
Sendo $b = r\,s\,i\,n\;\theta = r_A$, conclui-se que

$$\tau = F.r.\sin\vartheta$$

Ou, a partir da álgebra vectorial,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$





- Em geral os vectores $\vec{r}\ e\ \vec{F}$ são expressos respectivamente, por
- $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

- Quando $\vec{r}$ & $\vec{F}$ encontram-se no plano OXY $(z = 0\ \&F_z = 0)$, o torque provocado pela força é paralelo ao eixo Z:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

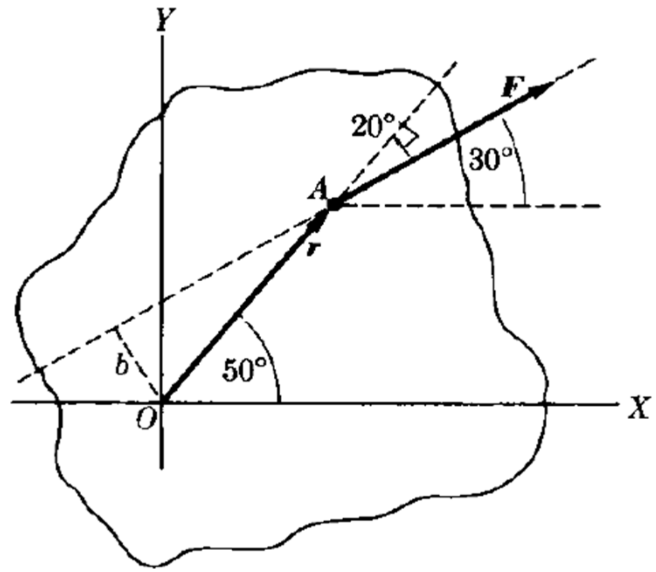
- Existindo várias forças sobre o corpo, e sendo comum o ponto de aplicação de forças, o torque resultante calcula-se achando primeiro a força resultante,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_r = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N\right)$$

- ou alternativamente achando os torques individuais causados por cada força:

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r} \times \vec{F}_N$$

Exemplo: determine o torque aplicado ao corpo representado na figura, sabendo que o módulo da força é de 6 N e faz um ângulo de 30°com o eixo dos X, e o módulo de $\vec{r}$ mede 45 cm e faz 50° com o eixo X.



Resolução:

Método 1: $r = F.b = F.r.\sin 20° =$

$$= 6.0{,}45.\sin(20°) = 6.0{,}1539 = 0{,}924 N.m$$

Método 2: Ja que ambos vectores estão representados no plano OXY, temos:

$$\vec{\tau} = \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}$$

$$\tau \equiv \tau_z = x F_y - y F_x =$$

$$= r\cos\theta . F\sin\varphi - r\sin\theta . \mathrm{F}\cos\varphi =$$

$$= 0{,}45.\cos(50°).6\sin(30°) - 0{,}45.\sin(50°).6\cos(30°) =$$

$$= 0{,}45.6(\cos(50°).\sin(30°) - \sin(50°).\cos(30°)) = 2.7.(0{,}321 - 0{,}663) = -0{,}924\ N.m$$

Nota: O segundo método também da informação do sinal do torque.

- **Momento angular:** Chama-se de **momento angular** de uma partícula L em relação a um ponto fixo O, localizado no eixo de rotação, ao **produto vectorial** entre o **vector posição r⃗** e a **quantidade de movimento** da mesma partícula:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Ou

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

L- é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{p}$

$$L = mrv \sin\varphi$$

- $[L] = \left[kg\,\frac{m^2}{s}\right]$

- Portanto, o momento angular é o efeito rotacional da quantidade de movimento.

- Entre o momento angular $\vec{L}$ e o torque $\vec{\tau}$ ambos os relativos ao mesmo ponto, tem lugar a segunite relação, conhecida por teorema de variação do momento angular:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow$$

$$d\vec{L} = d\vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

- O primeiro termo da equação anterior é nulo pela condição de paralelismo. Consequentemente,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$