UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

# FíSICA I

## Faculdade de Engenharia

- **Tema 2: Cinemática**

- Movimento mecânico, sistema de referência, trajectória;
- Posição, deslocamento, velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea;
- Movimento curvilíneo;
- Movimento relativo.

Félix F. Tomo

# Movimento mecânico

- Na natureza os objectos ocupam uma determinada posição no espaço e as interacções entre o objecto e o ambiente que o rodeia ocorrem sempre no tempo ⇒

⇒ É impossível separar o espaço do tempo.

Em mecânica, chama-se movimento à mudança de posição de de uma partícula (objecto de estudo) relativamente a um refererencial (sistema de referência);

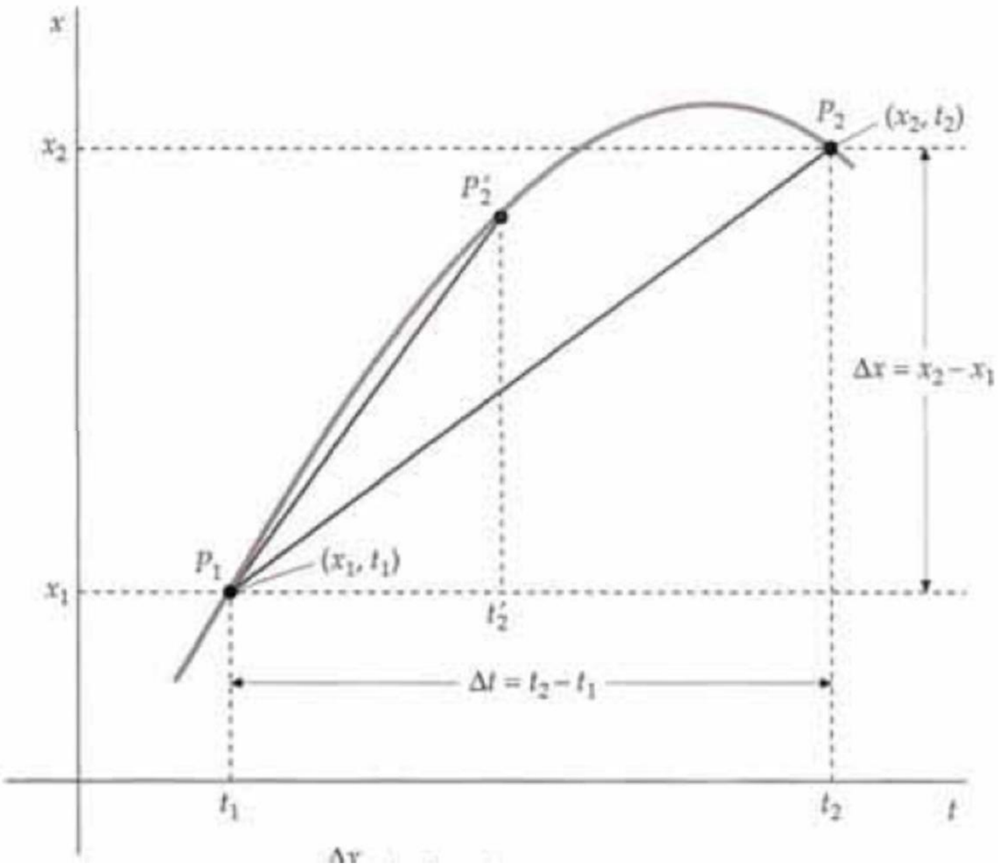
Quando a posção não varia, diz-se que o objecto está em repouso

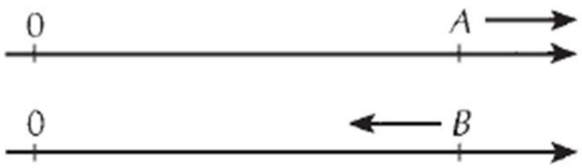
- Qual é a importância do sistema de referência?
  - O repouso e o movimento noções relativas; um mesmo objecto pode estar simultaneamente em repouso e em movimento para diferentes sistemas de referência (ex: o você estava em repouso relativamente ao carro que o trouxe à Faculdade, mas em movimento relativamente a estrada, as árvores e outros objectos que você vê moverem-se enquanto o carro está em movimento)

# Trajectória rectilínea

- Trajectória- linha imaginária descrita pelo móvel (partícula) durante o seu movimento.

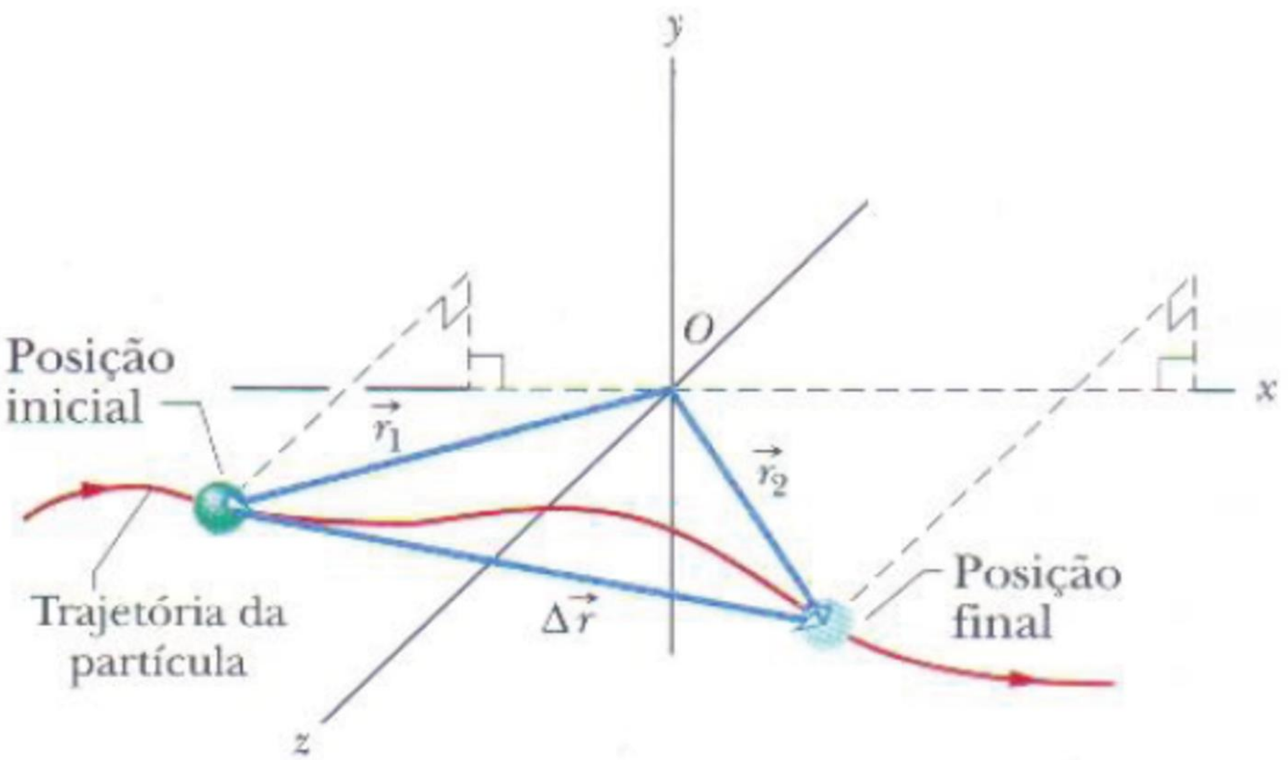
❖ Trajectória rectilínea (mov. rectilíneo)

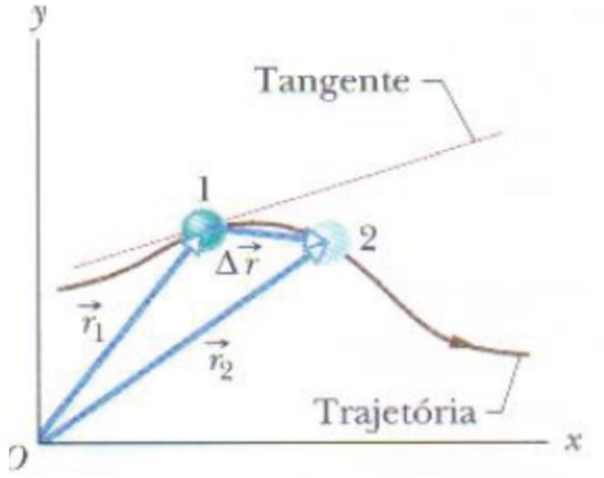


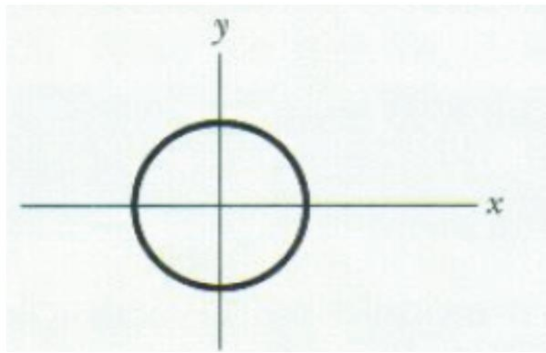



# Trajectória curvilínea

- Trajectória curvilínea (mov. Curvilíneo)
  - Trajectória circular (mov. circular)



# Posição

- No movimento rectilíneo, a posição, relativamente a um referencial, é indicada através de uma única variável (ex: $x$ para um movimento horizontal ou $y$ para movimento vertical):

$$x = x(t)$$

- Nota: ao escrever as equações horárias é preciso considerar que dependendo da relação direcção do eixo $x$ e a direcção da velocidade $v$, o sinal de $v$ e da aceleração $a$ pode ser positivo ou negativo.
- Para o movimento curvilíneo a posição indica-se por meio de um raio vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Ou

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

# Posição de equações paramétricas

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Exemplo 1: $\vec{r}(t) = 3\sin(2t)\vec{\imath} + 4\cos(2t)\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} x = 3\sin(2t) \\ y = 4\cos(2t) \end{cases}$$

Trajectória do movimento:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \to Elipse$$

Trajectória em termos matemáticos é a relação entre variáveis do espaço (sem o tempo)

# Deslocamento no movimento rectilíneo

- Deslocamento- variação da posição em função do tempo:
$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1);\ t_2 > t_1$$

- $\Delta x$ − pode ser positivo (objecto afasta-se da origem), negativo (aproxima-se a origem) e nulo, se as posições inicial e final coincidirem.

- O percurso (distância percorrida), *d*, é sempre positivo

# Deslocamento no movimento curvilíneo

- Sendo a posição um vector, o deslocamento também será um vector:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) =$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{\imath} + \Delta y\vec{\jmath} + \Delta z\vec{k}$$

- Exemplo 2: Achar o vector deslocamento de uma partícula que move-se de $\vec{r}(t_1) = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ para $\vec{r}(t_2) = 9\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 8\vec{k}$

Resp: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 12\vec{\imath} + 3\vec{k}$

# Velocidade

- Velocidade média- é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$v_{med.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ - mov rectilíneo

- Diferenciar da velocidade escalar média

$$v_{escalar,med.} = \frac{d_{tot.}}{t_{tot.}}$$

Ou

$$v_{escalar,med.} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$$

$$\vec{v}_{med.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{\imath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

Ou

$$\vec{v}_{med.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{\imath} + \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{\imath} + \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{k}$$

# Velocidade (cont)

- Velocidade instantânea: Quando se fala da velocidade de um corpo, em geral refere-se à velocidade num instante arbitrário, o valor para o qual tende a velocidade média quando $\Delta t$ tende para zero:

$v = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ - movimento rectilíneo

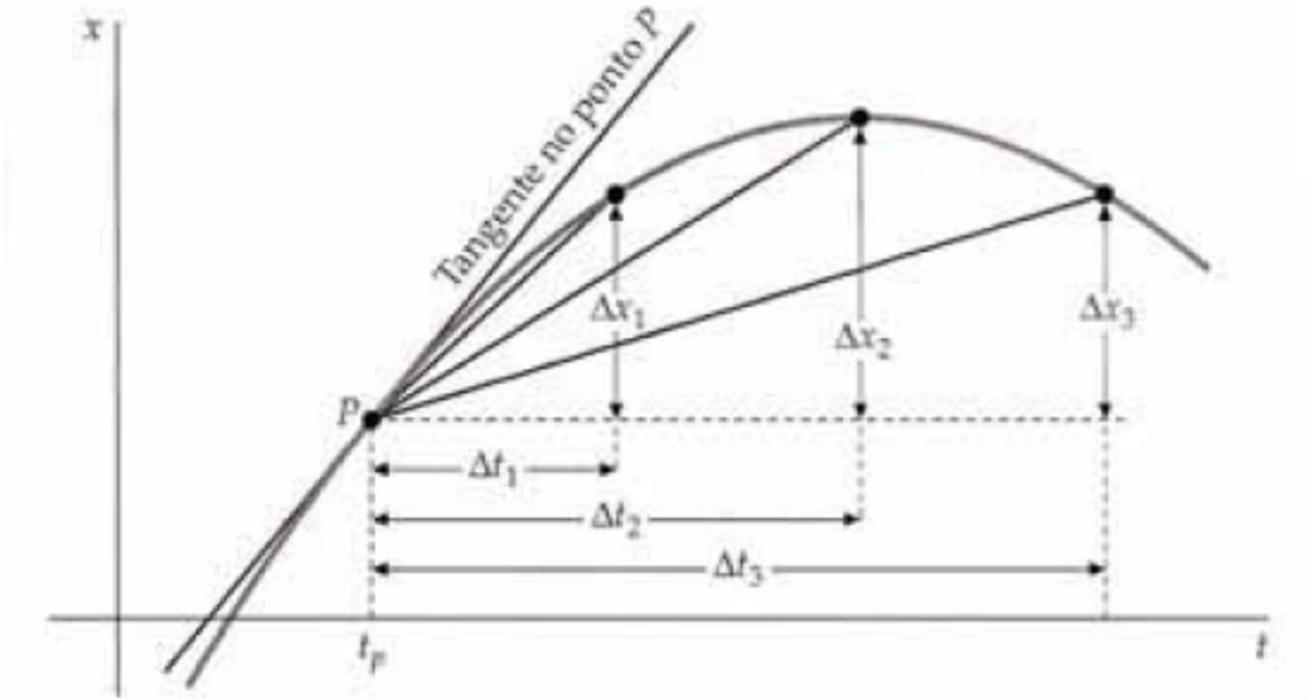
Ou $\vec{v}(t) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ - no caso mais geral caso mais geral

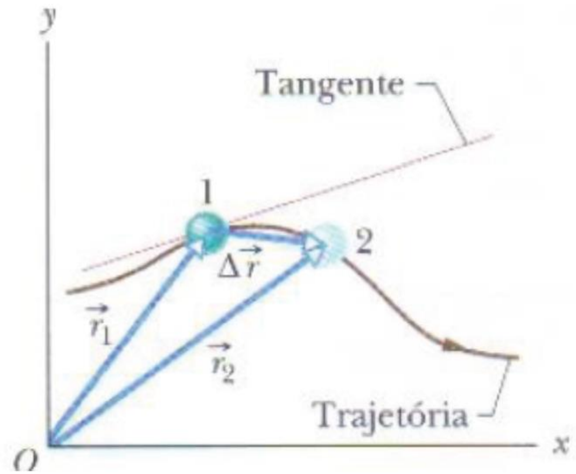
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

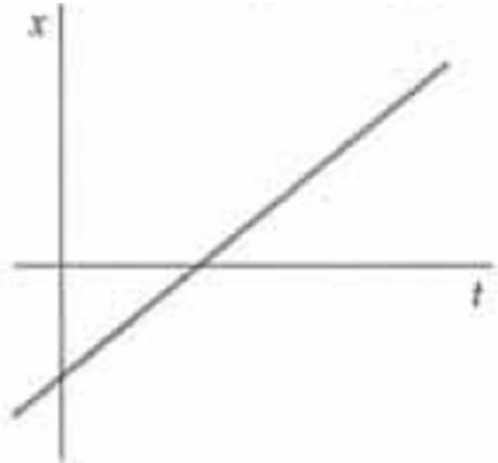
Ou,

- $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$
- Comparando estas últimas duas expressões conclui- se que as componentes (projecções nos eixos) do vector velocidade encontram-se derivando as componentes do vector posição.

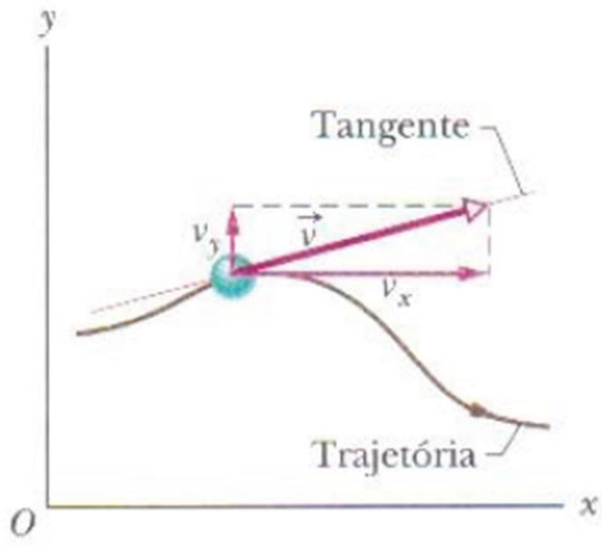
A direcção da velocidade instantânea v é sempre tangente à trajectória seguida pela partícula no ponto onde ela se encontra.



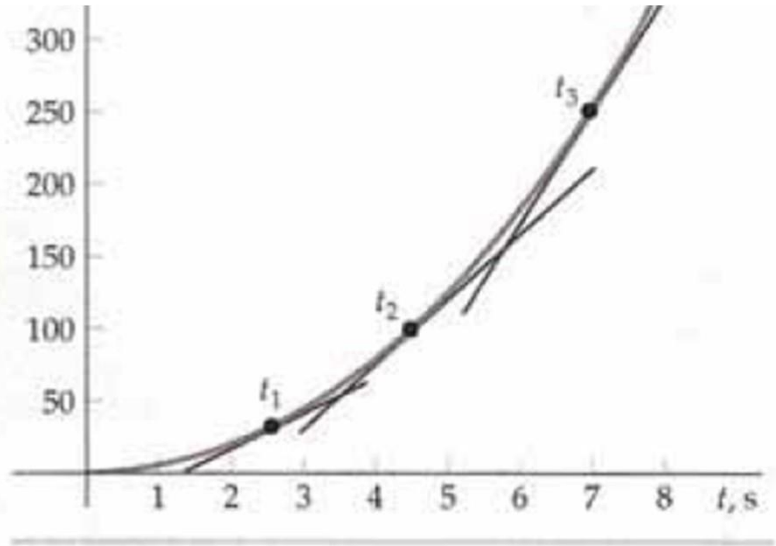





x
t

Tangente
$\vec{v}$
$v_y$
$v_x$
Trajetória
y
x
O

300
250
200
150
100
50
$t_1$
$t_2$
$t_3$
1 2 3 4 5 6 7 8
t, s

- Exemplo 2: Para no instante t = 15 s, Calcule a velocidade de um coelho que desloca-se de acordo com as seguintes equações paramêtricas (expressas no SI):

$$x(t) = -0.31t^2 + 7.2t + 28 \; e \; y(t) = 0.22t^2 - 9.1t = 30$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -0.62t + 7.2; \; v_x(15) = -2.1(m/s)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 0.44t - 9.1; \; v_y(15) = -2.5(m/s)$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

$$v(15) = \sqrt{(-2.1)^2 + (-2.5)^2}$$

$$v(15) = \sqrt{(-2.1)^2 + (-2.5)^2}$$

$$\vartheta = arctan\left(\frac{-2.5}{-2.1}\right) = arctan(1.19) = 49.96° \approx 50°$$

Relativamente ao eixo $x$, o ângulo é $\beta = \pi + 50° = 130°$

# Aceleração

- A aceleração é a taxa de variação temporal da velocidade. Resulta da variação da velocidade (pisando no acelerador ou no travão de um carro por exemplo).
- Aceleração média define-se como sendo a razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo correspondente a essa variação:

$$a_{med.} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$ caso unidimensional

$$\vec{a}_{med.} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$ caso geral

Aceleração instantânea: quando o intervalo de tempo tende para zero, a aceleração média tende para a aceleração instantânea.

$$a \equiv a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

ou

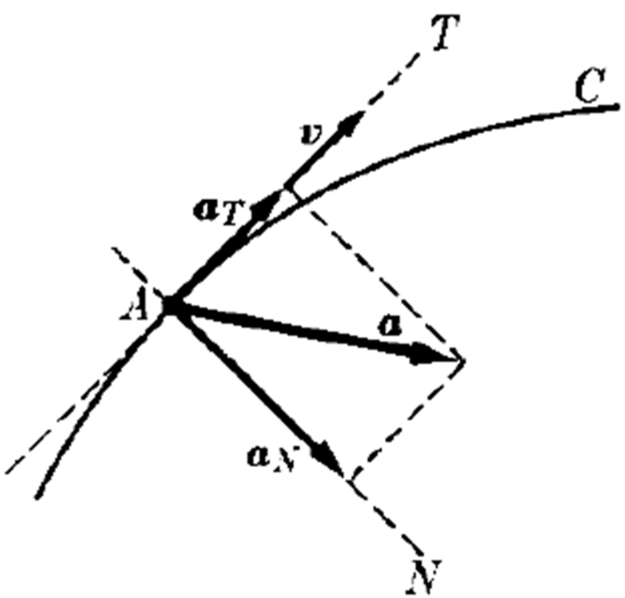
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

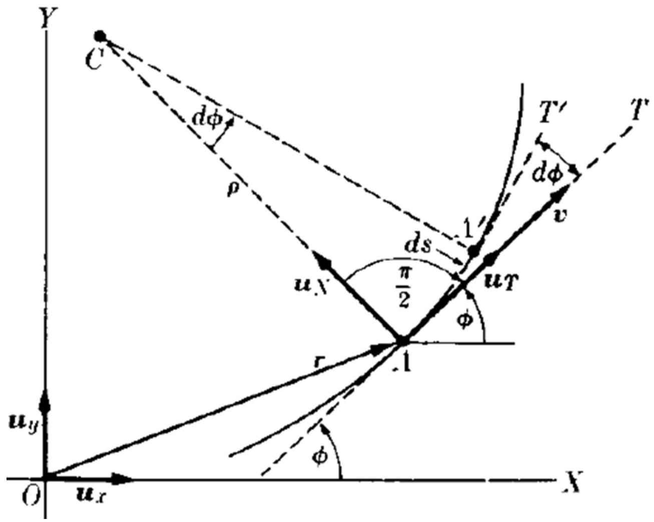
- No movimento curvilíneo a aceleração total é a soma vectorial das componentes tangencial$(a_r)$ e normal $(a_n)$:

$$a = a_r u_r + a_n u_n$$

Onde $u_r$ e $u_n$- vectores unitários ortogonais entre sí.

$$a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_n}^2}$$



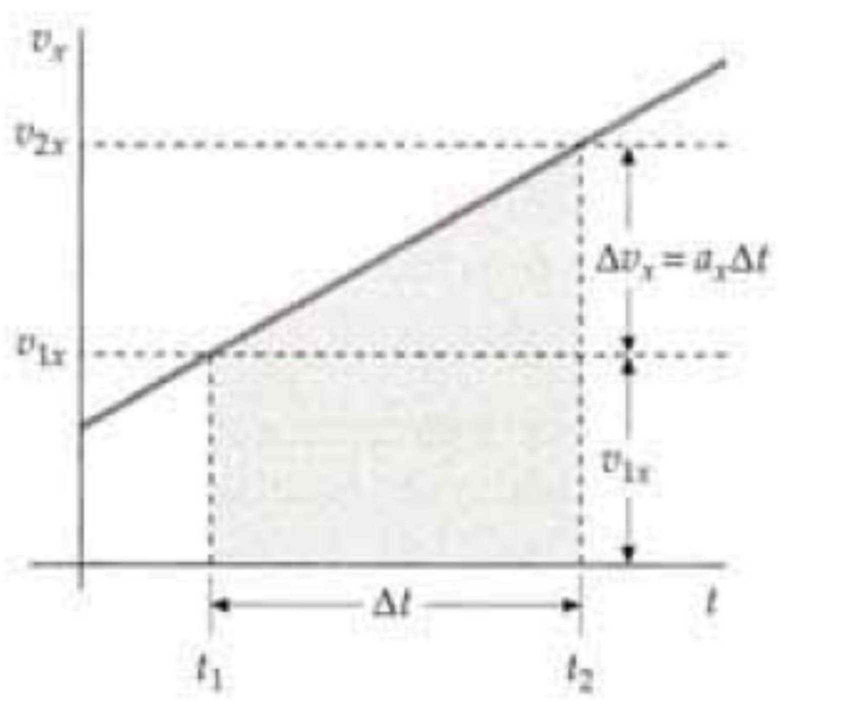



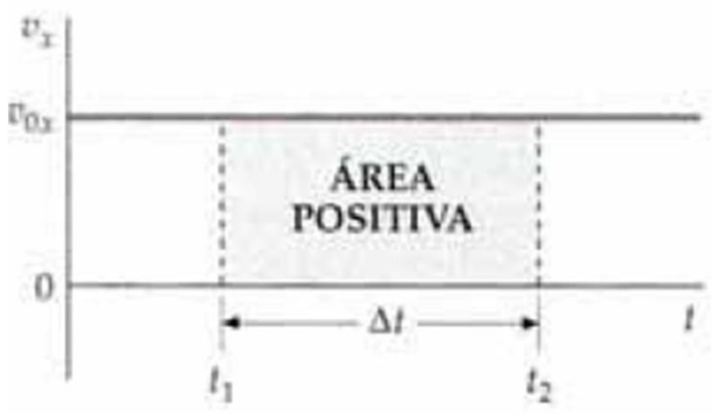
$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \qquad e \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

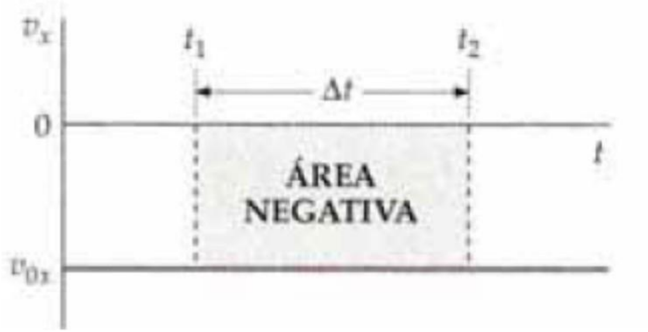
$\rho$ – raio de curvatura da trajectória ($p = R$ para movimento circular)

Nota: veja suplemento sobre componentes normal e tangencial e componentes radial e transversal.

- Interpretação geométrica: Num gráfico $v = f(t)$ a aceleração é sempre tangente à curva no ponto considerado. E a área sob o gráfico representa o deslocamento.



- O movimento considera-se acelerado quando os vectores v e a têm o mesmo sentido; caso contrário o movimento será retardado.

Exemplo: Lançamento vertical para cima com eixo *y* dirigido para cima ( $v > 0 e\ a < 0$).

$$y\ (t) = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para o mesmo lançamento mas com eixo dirigido para baixo ($v < 0 e$ $a > 0$).

$$y\ (t) = y_o - v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para baixo:

$$y\ (t) = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para cima:

$$y\ (t) = y_o - v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

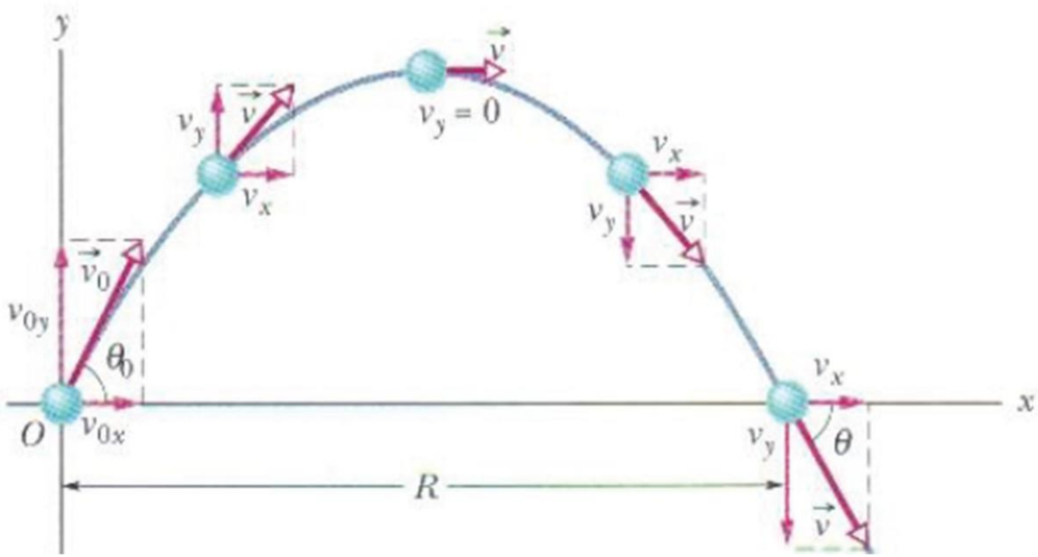
# Composição de movimentos – movimento em duas dimensões

- Quando a partícula movimenta-se num plano ou no espaço tridimensional, o movimento pode ser analisado separadamente pelos eixos de coordenada (equações paramétricas).

- Movimento  de projéteis ( oblíquo e Lançamento horizontal)

# Lançamento oblíquo - caso especial 1

- Caso especial do movimento bi-dimensional em que a partícula move-se no plano vertical com velocidade inicial $v_0$ e aceleração constante e igual à da queda livre g. Para lançamento centrado em $x_o = Y_o = 0$, teremos:



# Lançamento oblíquo - trajectória

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\vartheta \\ v_y = v_0 \sin\vartheta - gt \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Integrando em função de $t$

obtem-se as coordenadas x e t do vector posição:

$x(t) = v_0(\cos\vartheta)t$

$$y(t) = v_0(\sin\vartheta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

- $\Rightarrow$ isolando t em x e substituíndo em $y$ obtem-se a trajectória do movimento:

$$y(x) = x tan\vartheta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos\vartheta)^2}$$

-parábola

# Lançamento oblíquo - altura maxima e alcance

- Para encontrar a altura máxima, consideremos que nesse instante $v_y \; = 0 = v_o \sin\vartheta - g_{t_1} \Rightarrow$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\vartheta}{g}$$

.Substituíndo este tempo em *y*, obtem-se:

$$y(t_1) \equiv H = \frac{(v_0 \sin\vartheta)^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\vartheta}{g}\right)^2 =$$

$$H = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\vartheta}{g}\right)^2$$

- Para achar o alcance, precisamos de encontrar o tempo de trânsito (tempo total de observação) e depois substituímos em *x*:

Atingido o alcance, nesse instante $y = 0$. Logo,

$$y(t_t) = v_0(\sin\vartheta)t_t - \frac{1}{2}gt_t^2 . ou,$$

$$\frac{2v_0(\sin\vartheta)}{g}t_t - t_t^2 = 0, \text{cuja a solucao é}$$

$$logo, \quad t_t\left(\frac{2v_0(\sin\vartheta)}{g} - t_t\right) = 0 \rightarrow t_t = 0 \; ou \; t_t = \frac{2v_0(\sin\vartheta)}{g}$$

$$x(t_t) \equiv R = v_0(\cos\vartheta)\frac{2v_0(\sin\vartheta)}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\vartheta$$

Conclui-se que o máximo valor de $R$ atinge-se para $2\vartheta = 90°$.

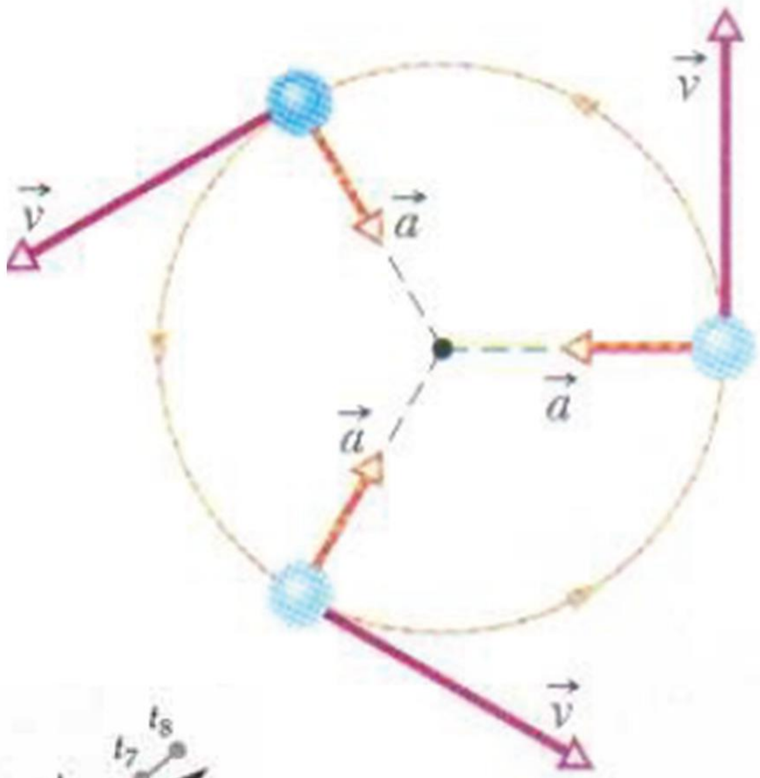
Discutir efeito do ar sobre o movimento do projéctil!

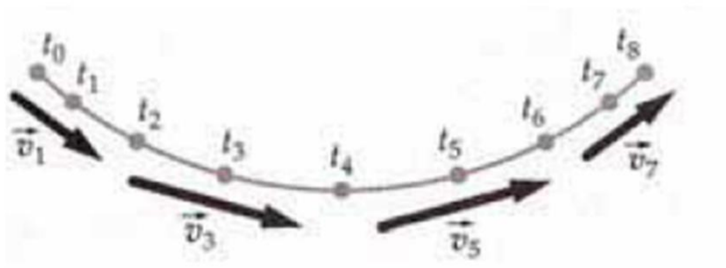
# TPC #1

- Lançamento horizontal
- Organizar-se em grupos de 3 estudantes, e fazer trabalho sobre o tema acima.
- Entregar o trabalho na semana 13 á 17, ao docente das aulas práticas, durante a aula prática.

# Movimento circular - caso especial 2

- Quando uma partícula está em movimento circular, ela descreve uma circunferência ou um arco de cincunferência.

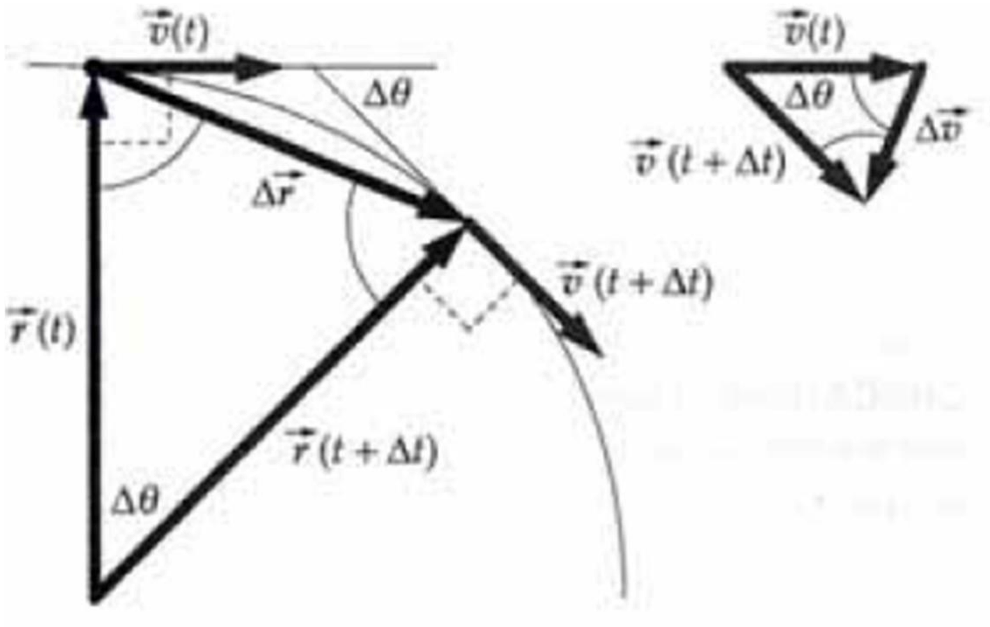


- Mesmo que a velocidade escalar seja constante, num movimento circular sempre há aceleração devido à variação do vector velocidade.
- Suponhamos que a velocidade escalar (o módulo do vector velocidade) é constante. Num dado instante $t$ a posição e a velocidade da partícula , relativamente ao referencial localizado no centro de circunferência, representa-se por $\vec{r}(t)$ a velocidade $\vec{v}(t)$, respectivamente. Num outro instante, $t' = t + \Delta t$ a posição e a velocidade serão $\vec{v}(t + \Delta t)$ e $\vec{v}'(t + \Delta t)$, tal como indica a figura abaixo.

- Sendo semelhantes os dois triângulos podemos estabelecer a relação:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

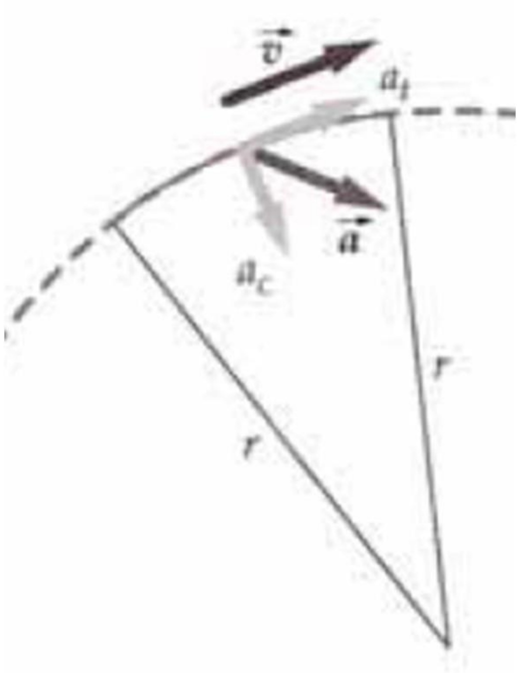



Ou

$$\frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta t|} = \frac{v}{r}.\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \rightarrow a_c = \frac{v^2}{r}$$

- Sendo a velocidade linear (escalar) o rácio entre o arco descrito $\Delta s$ *e o intervalo de tempo* $\Delta t$, $v = \Delta s/\Delta t$ , conclui-se que para $\Delta t = T$ , $\Delta s = 2\Delta r$. *Logo,*

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$




Se a velocidade linear for variável, a aceleração terá duas componetes perpendiculares entre sí, tangencial devido a variação do módulo e normal (centrípeta), devido a variação da direcção do vector velocidade:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_N$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \frac{v^2}{r}$$

- Em geral no movemento circular avaliam-se as relações angulares,nomeadamente:

$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ - velocidade angular $\Rightarrow$ $\vartheta = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$

$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0)$ para velocidade angular fixa

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$$

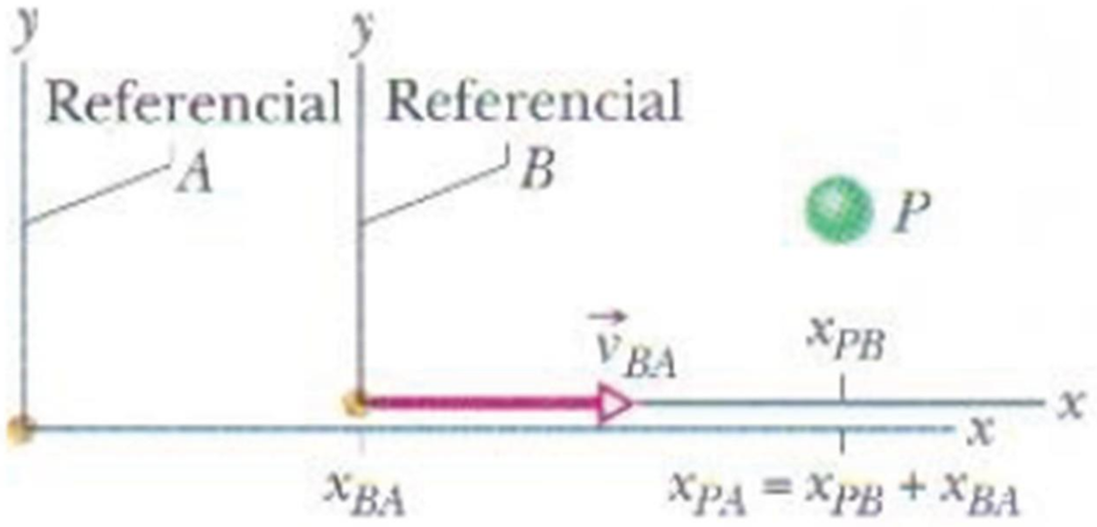
$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \quad e$$
$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

# Movimento relativo

- A velocidade de uma partícula depende do referencial do observador (medidor de velocidade). Normalmente assumem-se como referencias, pontos fixos, como por exemplo uma árvore ou um poste de iluminação. Consequentemente, para um radar da polícia devidamente calibrado, medir correctamente a velocidade de um carro que se aproxima, é necessário que esteja em repouso relativamente ao solo.

# Movimento relativo- unidimensional

- Suponhamos que dois observadores inerciais, O (A no desenho) e O´(B no desenho) situados nas origens dos sistemas de referência A e B respectivamente, observam o movimento de uma partícula P. O´ desloca-se à velocidade constante $u$
  $= v_{BA}$.



- $v_P$ - velocidade da partícula medida pelo observador O e $V'_P$- velocidade da mesma partícula medida pelo observador móvel O´:

$$v_P = u + v'_P$$

A velocidade medida por O é a soma da velocidade medida por O´ mais a velocidade do observador O´mediada por O.

Para relacionar as aceleraçõs medidas pelos dois observadores inerciais, teremos que derivar a equação:

$$\frac{dv_P}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv'_p}{dt} \leftrightarrow a_P = a'_P$$

A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes refrerenciais inerciais é invariante (os dois medem a mesma aceleração).

- Exemplo 3: a velocidade do referencial inecrial O´medida por O é $u = 52\ km/h$. Determine a velocidade da partícula v medida por O´, se o observador O lê *v = -78 km/h*.

*Resp:*

$$x(t) = ut + x'(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(t)}{dt} + \frac{dx'(t)}{dt}$$

$v = u + v'$; onde $u > 0$ e

$v < 0 \Rightarrow$

$$\acute{v} = v - u = +(-78) - 52 = -130 km/h$$

$\acute{v} = 130 km/h$; $(-)$ significa que op sentido de movimento da partícula é no sentido contrário ao do eixo x.

# Movimento relativo- bi-dimensional

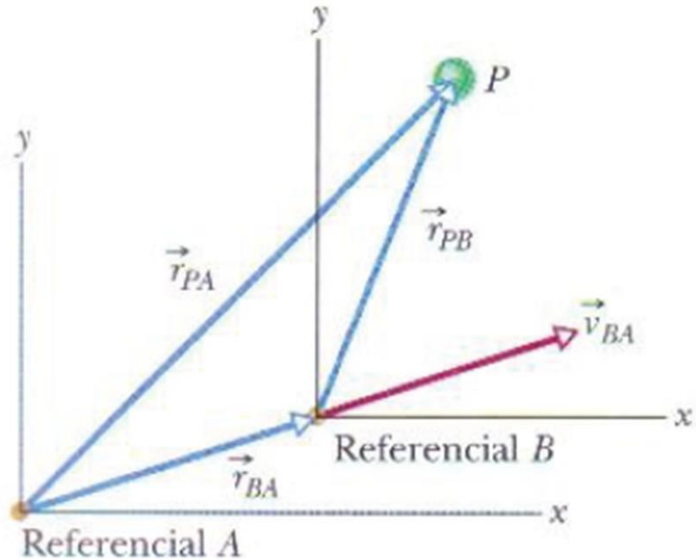
- No caso bi-dimensional, a relação de eventos medidos pelos dois observadores O e O´é:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{BA} + \overrightarrow{r'}_P$$

- Derivando termo a termo a equação, encontramos a Relação de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{BA} + \overrightarrow{v'}_P$$

- Analogamente,



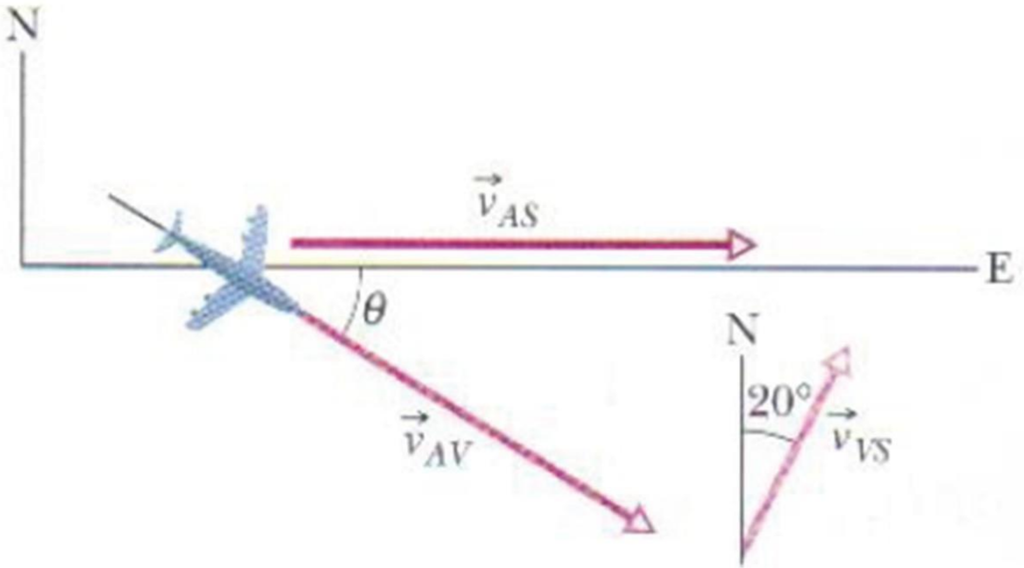

$$\vec{a}_P = +\vec{a}'_P$$

Os dois observadores medem a mesma aceleração!

- Exemplo 4: Um avião move-se para o Leste enquanto o piloto direcciona o aparelho para o Sudeste de modo a compenasar um vento constante que sopra para o Nordeste. A velocidade do avião relativamente ao vento é de 215 km/h, formando um ângulo $\theta$ com o Sudeste. A velocidade do vento u relativamente ao solo é de 65 km/h e forma um ângulo de 20° com o Nordeste. (a) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo? (b) Qual é o valor de $\theta$?

- (i) Desenhar um diagrama que ilustre a situação de modo a visualizar os vectores.
- (ii) a partir do diagrama, usar convenientemente as equações que relacionam eventos nos dois referenciais:

$v_{AS} = v,$
$v_{VS} = u \ e$
$v_{AV} = v'$



- Analisando o diagrama conclui-se que:

$$OX \equiv Leste;\ OY \equiv Norte. \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{v'}$$

$$v_x = v' \cos\theta + u \sin\varphi$$
$$v_y = v' \sin\theta\,\theta + u\cos\varphi$$

- ou

$$v_x = 215\cos\theta + 65\sin(20°)$$
$$v_y = -215\sin\theta\,\theta + u\cos(20°)$$

- Da segunda equação obtem-se:

$\sin\theta = \frac{65}{215}\cos(20°) \Rightarrow 16{,}5°$ logo,

$$\begin{cases} v_x \equiv v = 215\cos(16{,}5°) + 5\sin(20°) = 228\,km/h \\ v_y = 0 \end{cases}$$