UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FíSICA I

Faculdade de Engenharia

Tema VI - Rotação: Dinâmica de um corpo rígido

- **Cinemática de rotação em torno de um eixo fixo;**
- **Momento de inércia de um uma partícula e de um sistema de partículas;**
- **Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner] ;**
- **Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas;**
- **Segunda lei de Newton para um corpo rígido em rotação**
- **Conservação do momento angular;**
- **Trabalho rotacional.**

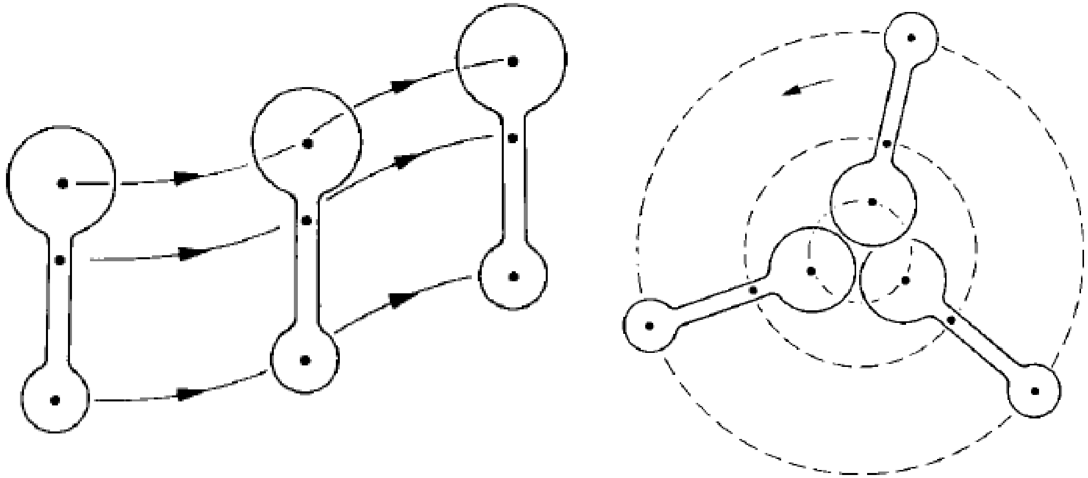
Félix F. Tomo

Cinemática de rotação em torno de um eixo fixo

- ***Corpo rígido***, é um corpo em que as distâncias entre todas as partículas componentes permanecem fixas sobre a acção de uma força ou conjugado (momento de força ou torque).
- Um corpo rígido conserva-se a sua forma durante o movimento.

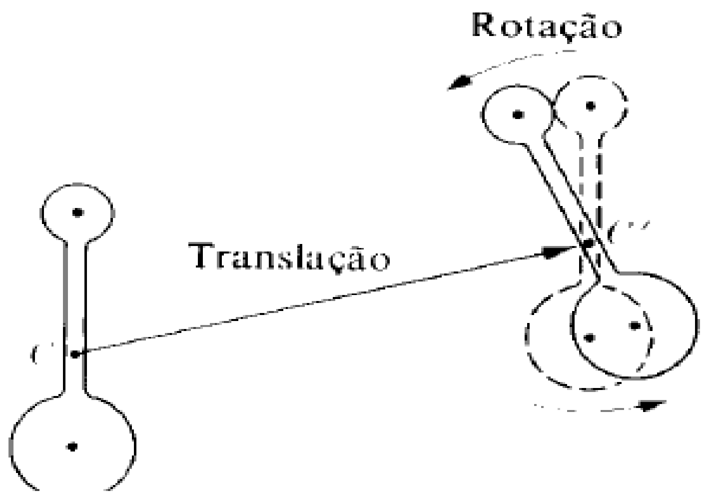
- ***Movimeto e uma translação***, quando todas as partículas descrevem trajectórias paralelas de tal modo que as linhas que unem dois pontos quaisquer do corpo permanecam sempre paralelas a sua posição inicial.

- ***Movimento e uma rotação,*** ao redor de um eixo, quando as partículas descrevem trajectórias circulares ao redor de uma recta chamada eixo de rotação.

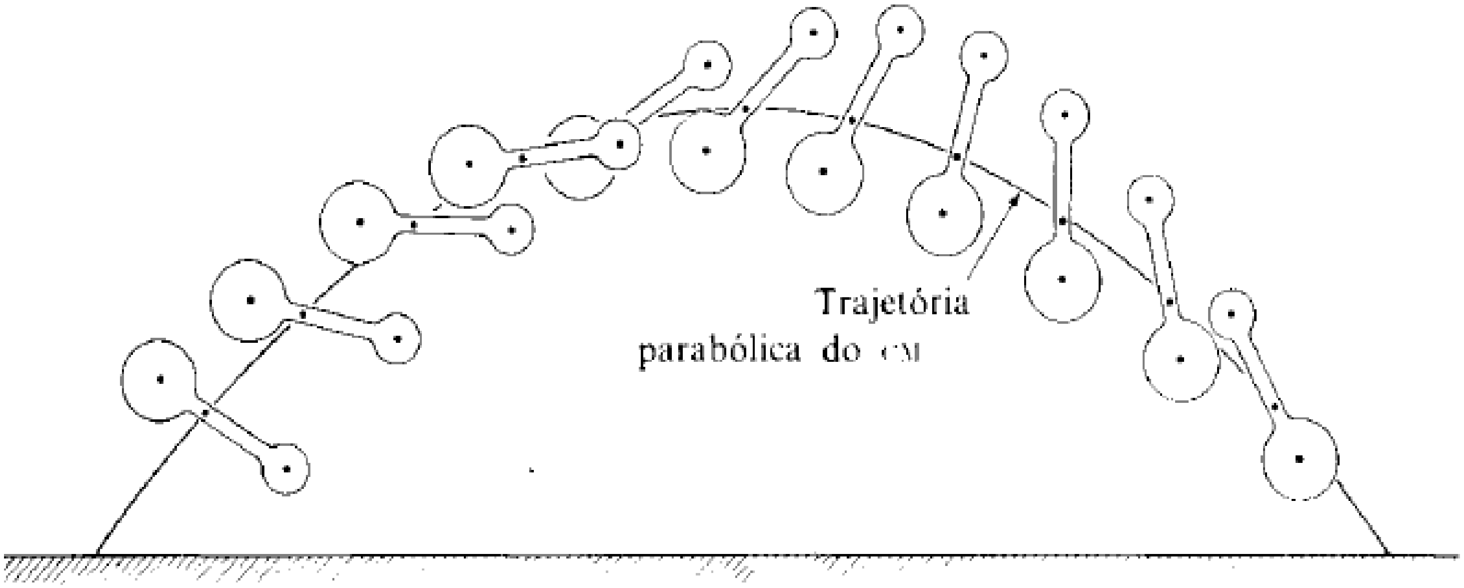


- **Figura 1:** **(a)** Movimeto de translação de um corpo rígido; **(b)** Movimento de rotação de um corpo rígido

- O movimento mais simples e a combinação de uma rotação e translação.



- **Figura 2:** Movimento geral de um corpo rigido



- **Figura 3:** Movimento do corpo rígido sob acção da gravidade

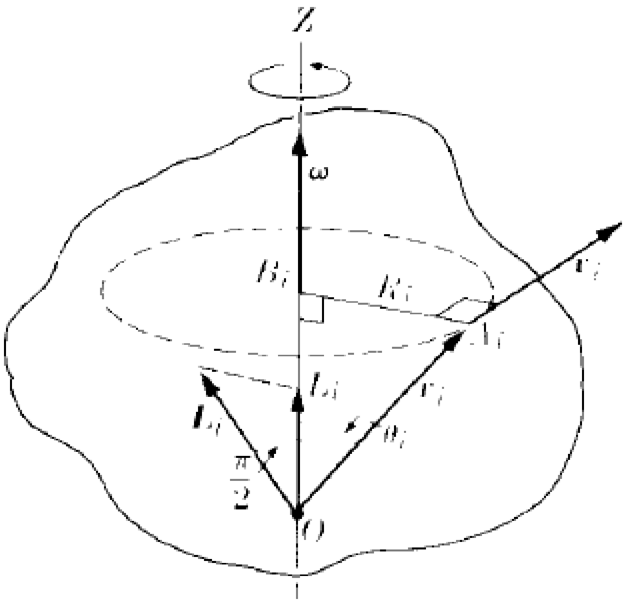
- Ainda é válida a cinemática, tal que

$$M\frac{dv_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext.} \qquad \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

• Movimento angular de um corpo rígido

- Consideremos um corpo que gira em redor do eixo Z, com velocidade ω, a partícula A_i forma um circulo de raio $R_i = A_i B_i$ com velocidade $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \vec{r}_i$ e o vector posição relativo a O.



- **Figura 4:** Momento angular de um corpo rígido em rotação.

- O modulo da velocidade é: $v_i = \omega r_i \sin\theta = \omega R_i$
- O momento angular relativo a O é: $\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

Momento de inércia de um uma partícula e de um sistema de partículas

- L e Z formam angulo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$, o seu modulo L_i e $m_i\vec{r}_i\vec{v}_i$, a sua componente paralela ao eixo Z e,

$$L_{iZ} = (m_i\vec{r}_i\vec{v}_i)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i(r_i \sin\theta_i)(\omega R_i) = m_i R^2 \omega$$

- A componente do L total do corpo em rotacao ao longo do eixo de rotacao de Z.

$$L_{iZ} = L_{1Z} + l_{2Z} + L_{3Z} + \cdots = \sum_i L_{iZ} = (m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + m_3R_3^2 + \cdots)\omega = \left(\sum_i m_i R^2\right)\omega$$

- A quantidade

$$I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + m_3R_3^2 + \ldots = \sum_i m_i R^2$$

- E o chamado **Momento de inercia do corpo**.

Momento de inércia de um uma partícula e de um sistema de partículas

- Tal que

$$L_Z = I\omega$$

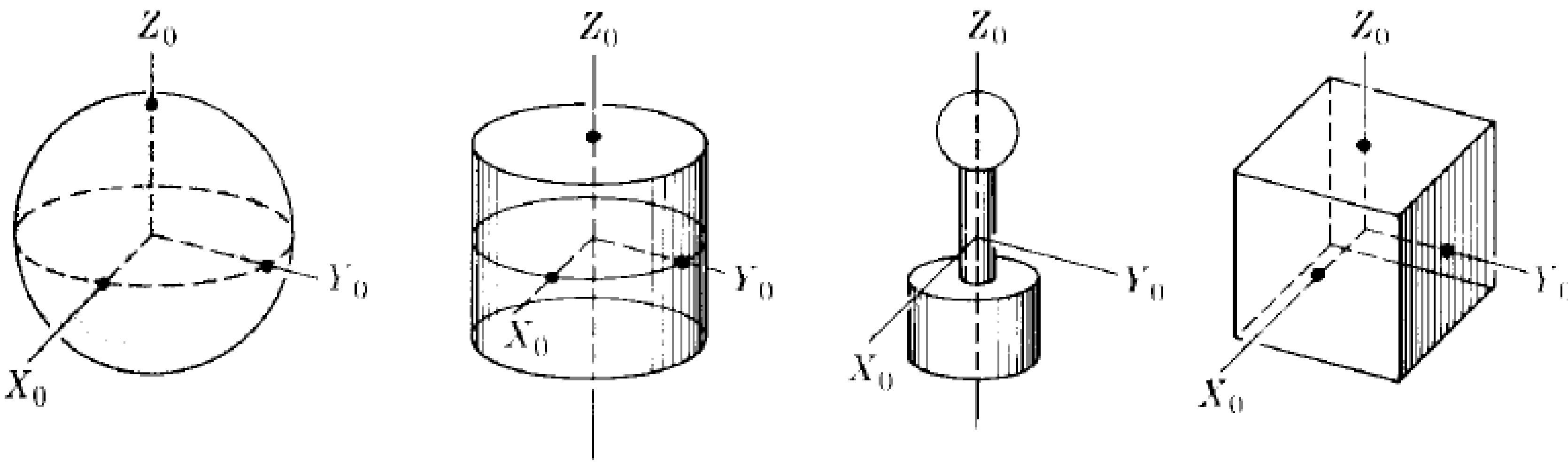
- O L total do corpo em geral paralelo ao eixo de rotação e,

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots = \sum_i \vec{L}_i$$

- As três direcções perpendiculares para os quais o momento angular é paralelo ao eixo de rotação, são chamados eixos principais de inercia $(x_0, y_0\ e\ z_0)$ e os momentos de inercia correspondentes sao chamadpos moementos principais de inercia $(I_1, I_2\ e\ I_3)$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Momento de inércia de um uma partícula e de um sistema de partículas



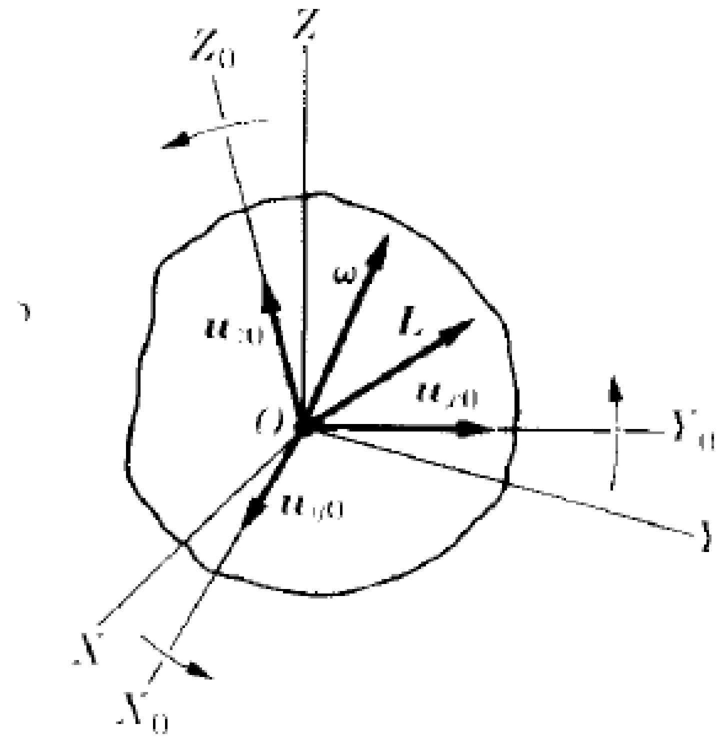
- **Figura 5:** Eixos principais de um corpo simétrico.

Momento de inércia de um uma partícula e de um sistema de partículas

- O momento angular em relação aos eixos principais de inercia, pode ser:

$$\vec{L} = \vec{u}_{x_0} I_1 \omega_{x_0} + \vec{u}_{y_0} I_2 \omega_{y_0} + \vec{u}_{z_0} I_3 \omega_{z_0}$$

- Onde $\vec{u}_{x_0}$, $\vec{u}_{y_0}$ e $\vec{u}_{z_0}$ são os vectores ao longo de X_0, Y_0 e Z_0; w_{x_0}, w_{y_0} e w_{z_0} são as componentes de $\vec{w}$ relativas ao momento de mesmos eixos.



- **Figura 6:** Eixos de ligação ao corpo no laboratório.

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner] Determinação do Momento de Inercia

- Para um corpo composto por um número grande de partículas,

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm$$

- Aqui, ρ e a densiddae do corpo, $dm = \rho dV$, e

$$I = \int \rho R^2 dm$$

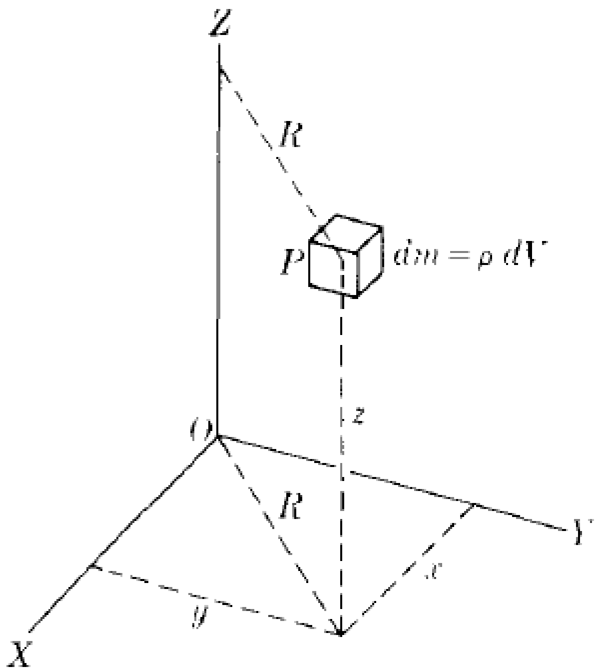
- Se ρ for homogeneo, a sua densidade e constante em vez, podemos escrever.

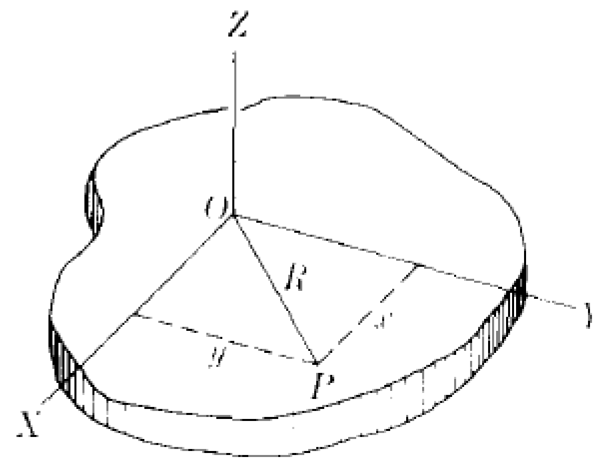
$$I = \rho \int R^2 dV$$

- Se $R^2 = x^2 + y^2$, entao.

$$I_z = \int \rho(x^2 + y^2) dV$$

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]





- **Figura 7:** Corpo homogééneo de densidade constante .

- Se o corpo é uma placa fina, os momentos de inercia relativos aos eixos X e Y podem ser escritos como,

$$I_x = \int \rho y^2 dV \qquad\qquad I_y = \int \rho x^2 dV$$

- Porque a coordenada Z e essencialmente zero.

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

- Se a separação entre os dois eixos, vale a seguinte relação, chamada **Teorema de Steiner.**

$$I = I_c + Ma^2$$

- onde I e I_c são momentos de inercia do corpo relativos a Z e Z_c, M é a massa do corpo.

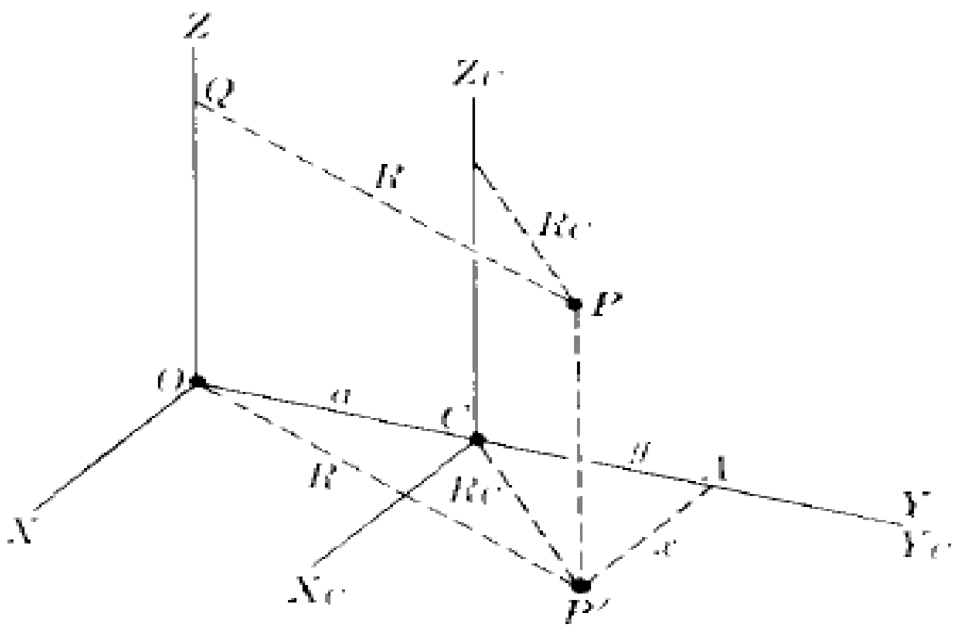


Figura 8: Separação entre os dois eixos

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

- $P'A$ perpendicular a Y_c e $P'A = x, CA = y \; e \; OC = a$, temos

$$R_c^2 = x^2 + y^2$$

$$R_i^2 = x^2 + (y+a)^2 = R_c^2 + 2ya + a^2$$

- O momento de inercia relativo ao eixo Z e,

$$I = \sum mR^2 = \sum m\left(R_i^2 + 2ya + a^2\right) = \sum mR_i^2 + 2a\left(\sum my\right) + a^2 m$$

- O primeiro termo e o momento de inercia Ic relativo ao eixo Zc e no ultimo termo, $\sum m = M$ e a massa total do corpo,

$$I = I_c + 2a\sum my + Ma^2; \; I_c = \sum mR_i^2 \qquad y_{CM} = \frac{\sum my}{\sum m}$$

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

- Unidades nos sistema MKSC: $I = [m^2 . kg]$

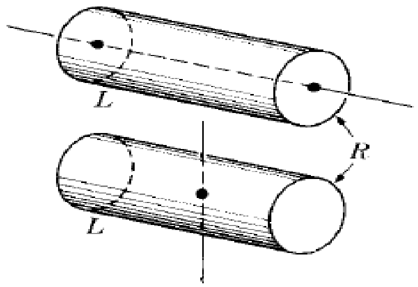
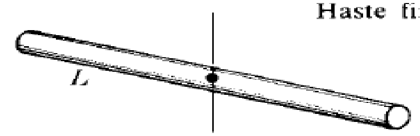
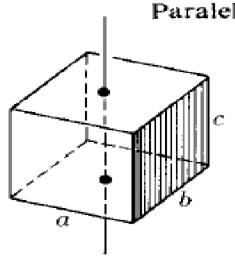
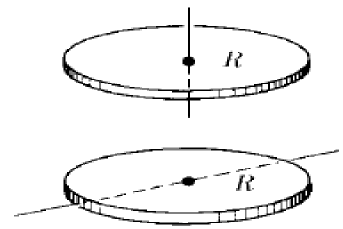
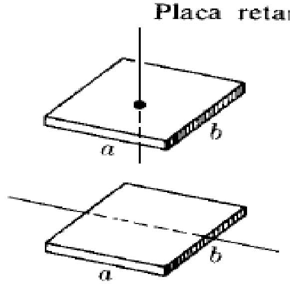
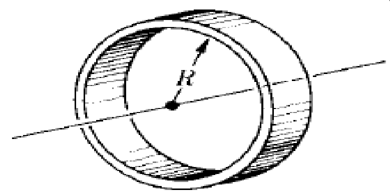
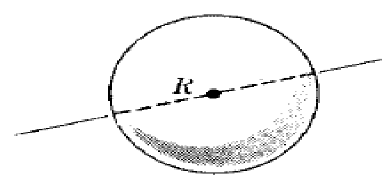
- O raio de giração de um corpo é a quantidade K definida de tal modo que vale a relação,

$$I = MK^2 \qquad ou \quad K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

- onde K representa a distância ao eixo em que tida a massa poderia ser concentrada sem variar o momento de inércia.

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

TABELA 10-1 *Raios de Giração de Alguns Sólidos Simples*

K^2	Eixo	K^2	Eixo
$\frac{R^2}{2}$ $\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}$	Cilindro 	$\frac{L^2}{12}$	Haste fina 
$\frac{a^2+b^2}{12}$	Paralelepípedo 	$\frac{R^2}{2}$ $\frac{R^2}{4}$	Disco 
$\frac{a^2+b^2}{12}$ $\frac{b^2}{12}$	Placa retangular 	R^2	Aro 
		$\frac{2R^2}{5}$	Esfera 

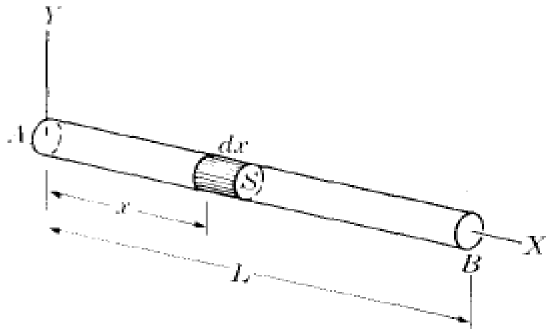
Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

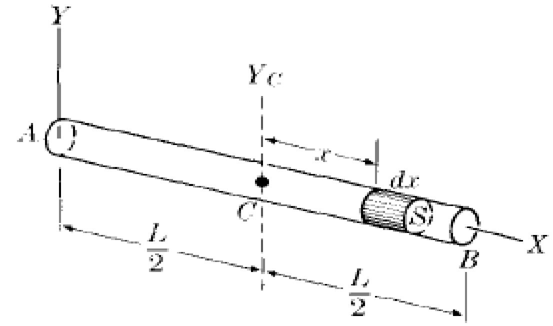
- **Exemplo:** Calcule o momento de inércia de uma haste cilíndrica fina, homogénea, relativamente a um eixo perpendicular a haste e passando (a) por uma extremidade, (b) pelo centro.

- **Solução:** Seja L po comprimento da haste AB, S a sua secção transversal, que supomos ser muito pequena. Tomando a haste em pequenos segmentos de comprimento dx, vemos que o volume de cada segmento e $dV = Sdx$ e a distância de cada elemento ao eixo Y e $R = x$.

$$I_A = \int_0^L \rho x^2 (Sdx) = \rho S \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}\rho L^3$$

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]





- SL é o volume da haste, a sua massa e ρSL.

$$I_A = \frac{1}{3} ML^2$$

- O seu raio de giração é, $K^2 = \frac{1}{3} L^2$
- Para calcular o momento de inercia relativamente a Y_C passando pelo centro C. Podemos proceder de tres maneiras diferentes: uma forma simples e supor a haste dividida em diiuas cada uma das quais de massa $\frac{1}{2} M$ e comprimento $\frac{1}{2} L^2$ com as extremidades tocando em C, e temos

Teorema dos eixos paralelos [Teorema de Steiner]

$$I_C = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

- Outro método seria proceder como anteriormente para a extremidade A, mas integrar de $-\frac{1}{2}L$ á $+\frac{1}{2}L$, desde que a origem esta agora no centro da barra (determine como TPC). Um terceiro modo de resolver e pela aplicação do Teorema de Steiner, que nesse caso, escreve-se

$$I_A = I_C + M\left(\frac{1}{2}L\right)^2$$

- Desde que $a = \frac{1}{2}L$, resulta

$$I_C = I_A - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Energia Cinetica de Rotação

- A energia cinetica de um sistema de particulas e,

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2$$

- Par um corpo que gira, $v_i = \omega R_i$, ondeR_i é a distância entre as partículas.

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2$$

- A definição do momento e inercia é,

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Esta expressão conecta para qualquer eixo principal porque o módulo da velocidade é sempre $v_i = \omega R_i$, como pode ser deduzido.

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Energia Cinetica de Rotação

- $E_k = \frac{1}{2I} I^2 w^2$, sabe-se que que $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- Entao $E_k = \frac{L^2}{2I}$.
- Ao longo dos eixos $X_0 Y_0 Z_0$.

$$E_k = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_{x_0}^2 + I_2\omega_{y_0}^2 + I_3\omega_{z_0}^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{x_0}^2}{I_1} + \frac{L_y^2}{I_2} + \frac{L_{z_0}^2}{I_3}\right)$$

- No caso de um corpo que tem simetria de revolução com relação á z_0

$$E_k = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{I_1}\left(L_{x_0}^2 + L_{y_0}^2\right) + \frac{1}{I_3}L_{z_0}^2\right]$$

$$E_{\vec{k}} = \frac{L^2}{2I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)L_{z_0}^2$$

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Energia Cinetica de Rotação

- A energia de um corpo em um referencial inercial é,

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E_{k,CM}$$

- onde M é a massa total, $\vec{v}_{CM}$ é a velocidade do centro de massa e $E_{k,CM}$ é a energia cinética interna relativamente ao centro de massa.

- No caso do corpo rígido, $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$, tal que a energia relativa ao centro de massa e de rotação.

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c w^2$$

- Onde I_c é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa.

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas Trabalho de Rotação

- Desde que a distância entre as partículas não varia durante o movimento de um corpo rígido, supomos que a energia potencial $E_{p,int.}$ permanece constante,

$$E_k - E_{k,0} = W_{ext.}$$

- Onde $W_{ext.}$ é o trabalho das forças externas, se as forças externas são conservativas,

$$W_{ext.} = \left(E_{p,0} - E_p\right)_{ext.}$$

- Onde $E_{p,ext.}$ é a energia potencial associada as forças externas,

$$E_k - E_p = \left(E_k - E_p\right)_0$$

- Assim, $E = E_k + E_p$, e a energia total de um corpo rigido. Pode ser escrita como,

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Trabalho de Rotação

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c w^2 + E_p = const$$

- Se o corpo cai sob acção da graviddae $E_p = Mgy$, refle a altura do CM do corpo relativamente a um plano horizontal de referência, a energia total é,

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_c w^2 + Mgy = const.$$

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Trabalho de Rotação

- Se algumas ds forças não são conservativas, escrevemos,

$$W_{ext.} = E_{p,0} - E_p + W'$$

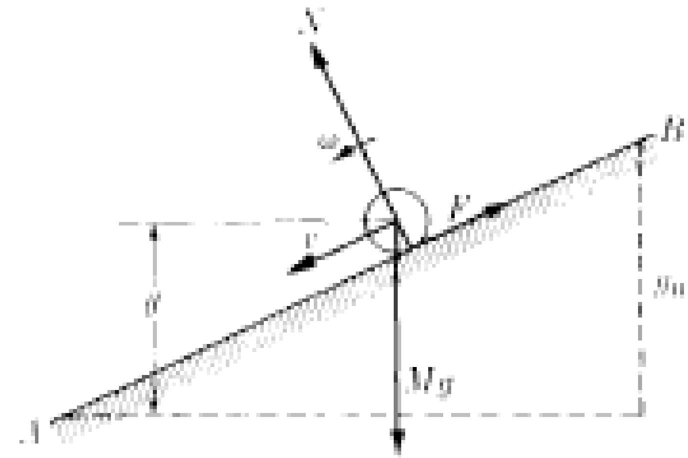
- Onde W' e o trabalho das forças externas não conservativas

$$\left(E_k - E_p\right) - \left(E_k - E_p\right)_0 = W'$$

- Deve ser usada quando além das forças gravitacionais agem as forças de atrito.

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Trabalho de Rotação

- **Exemplo:** Uma esfera, um cilíndro e um anel, todos de mesmo raio, descem rolando um plano inclinado, partindo de uma altura y_0. Determine, em cada caso a velociddade quando eles chegam a base do plano.



- No ponto de partida B, quando o corpo esta em repouso a uma altura y_0, sua energia total e $E = Mgy_0$.
- Ambas movem-se com relação de velocidade,

$$v = R\omega$$

- A enegia total é,

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + Mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{R^2}\right)v^2 + Mgy$$

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Trabalho de Rotação

- O mometo de inercia $I_c = MK^2$ onde K é o raio de giração.

$$E = \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)v^2 + Mgy$$

- Igualando a expresão de energia, com a energia inicial $E = Mgy_0$

$$v^2 = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + \frac{K^2}{R^2}}$$

- Se no lugar do corpo rígido rolante tivermos um corpo deslizante pelo plano abaixo, não deveriamos incluir a energia rotacional e o resultado seria,

$$v^2 = 2g(y_0 - y)$$

- Como para uma partícula em queda.

Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas
Trabalho de Rotação

- O movimento rotacional, resulta num retardamento do movimento translacional.
- $\frac{K^2}{R^2}$ é igual a $\frac{2}{3}$ para a esfera, $\frac{1}{2}$ para o disco, e 1 para anel

$$Esfera \rightarrow v^2 = \frac{2.10.(y_0 - y)}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{20.(y_0 - y)}{7} = \frac{10}{7} g(y_0 - y)$$

$$Disco \rightarrow v^2 = \frac{2.g.(y_0 - y)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2.g.(y_0 - y).2}{3} = \frac{4}{3} g(y_0 - y)$$

$$Anel \rightarrow v^2 = \frac{2.g.(y_0 - y)}{1 + 1} = g(y_0 - y)$$

- A esfera é mais rápida, seguida pelo disco e por fim o Anel.

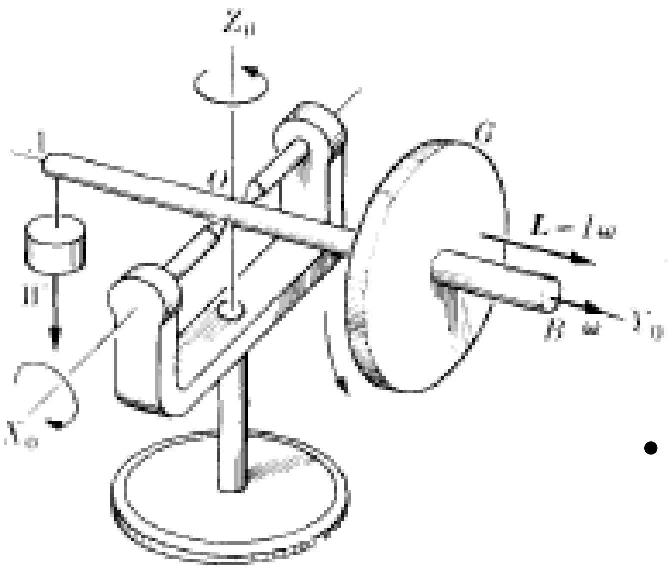
Movimento Giroscópio

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

- $\rightarrow$ Implica em que na ausência de um torque externo $\vec{\tau}$, o momento angular $\vec{L}$ do corpo permanece constante.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- Giroscópio e um arranjo em que um disco girante pode mudar livremente a direccao do seu eixo de rotação.



- **Figura 9:** Giroscópio livre de torques

Movimento Giroscópio

- Se o torque sobre o giroscópio não é nulo, o momento angular sofre uma variação durante o tempo dt,

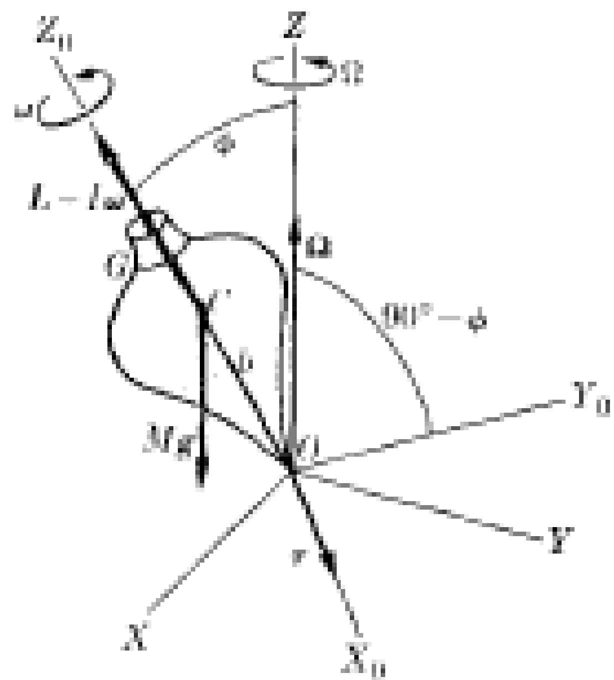
$$d\vec{L} = \vec{\tau}dt$$

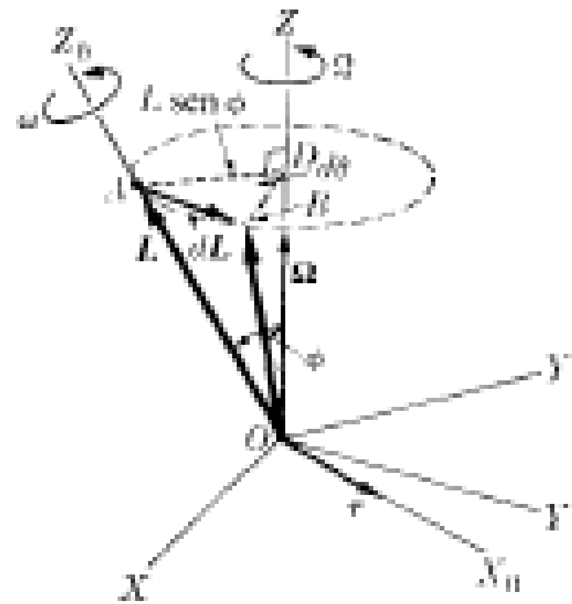
- Isto é a variação do momento angular é smpre na direcção do torque (do mesmo modo que a variação da quantidade de movimento de uma partícula é a direcção da força).

- Se o $\vec{\tau}$ éé **perpendicular** ao momento angular $\vec{L}$, a variação $\mathrm{d}\vec{L}$ é tambem perpendicular a $\vec{L}$ e o momento angular varia em direcção, mas não em modulo.

Movimento Giroscópio

- O movimento do eixo de rotação ao redor de um eixo fixo devido a um torque é chamado Precessão. Por exemplo, o Pião.





- **Figura 10:** Movimento do eixo de rotação

Movimento Giroscópio

- O torque e devido ao peso Mg que age no centro de massa C e é igual ao produto vctorial $\left(\overrightarrow{OC}\right) \times Mg$

$$\vec{\tau} = Mgb \sin \boldsymbol{\phi}$$

- Onde $\boldsymbol{\phi}$ o ângulo entre o eixo de simetria Z_0 e o eixo vertical Z, e $b = OC$ da a posicao do centro de massa.
- $\overrightarrow{\Omega}$ e definida como a rapidez com que o eixo Ozo do corpo gira ao redor do eixo OZ fixo no laboratório, isto é,

$$\overrightarrow{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}$$

- E é representado pelo vector paralelo a POZ

$$\left|d\vec{L}\right| = ADd\theta = (L \sin \boldsymbol{\phi})\left(\overrightarrow{\Omega} dt\right)$$

Movimento Giroscópio

- Temos que $\left|d\vec{L}\right| = \tau dt$, igualando ambos resultados

$$\Omega = \frac{\tau}{L\sin\boldsymbol{\phi}} = \frac{Mgb}{I\omega}$$

- A orientação relativa dos vectores $\vec{\Omega}$, $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$, vemos que pode ser escrita na forma vectorial,

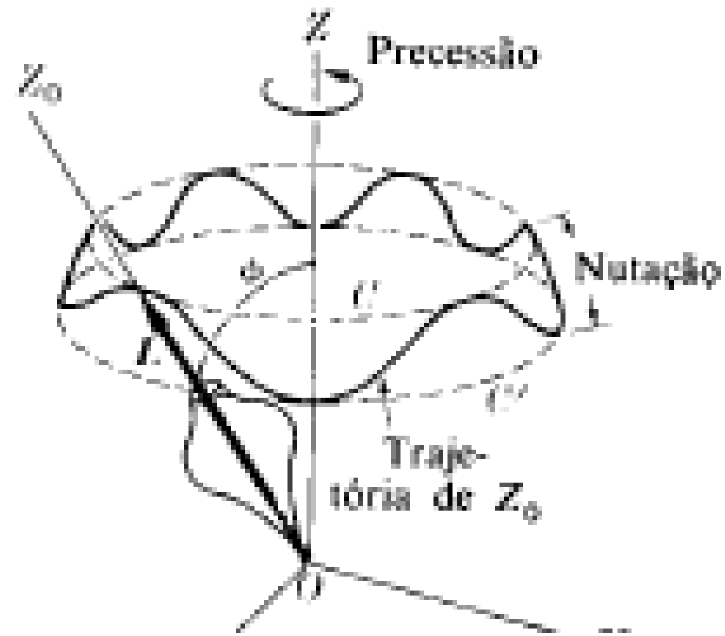
$$\vec{\Omega}\times\vec{L} = \vec{\tau}$$

- E comparada com a expressão semelhante, $\omega \times \vec{P} = \vec{F}$ para o movimento circular.

Movimento Giroscópio

- Nutação surge quando o ângulo ϕ não permanece constante mas oscila entre dois valores fixos de tal modo que a extremidade de $\vec{L}$, ao redor do mesmo tempo que precessa ao redor de Z, e oscila entre dois circulos C e C', descrevendo uma curva inclinada.

- A nutação e a precessão contribuem para o momento angular total, em geral, a sua contribuição é ainda menor do que aquela da precessão.



Movimento Giroscópio

- **Exemplo:** Faça uma estimativa da intensidade do torque que deve ser exercido sobre a terra a fim de produzir a precessão.

- **Solução:**
- Usando $\tau = \Omega L \sin \boldsymbol{\phi}$, onde $\boldsymbol{\phi} = 23^{o}27'$ e $\Omega = 7{,}19 \times 10^{-11} rad.s^{-1}$. E a velocidade angular de precessão da terra.

- Precisamos primeiro calcular o momento angular da terra. Desde que o eixo de rotação da terra desvia-se apenas ligeiramente de um eixo principal, podemos usar a resolução $L = Iw$. O valor w é dado como $7{,}29 \times 10^{-5} rad.s^{-5}$. O momento de inercia da terra (supondo a esfera) é,

Movimento Giroscópio

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{2}{5}(5{,}98 \times 10^{24})(6{,}38 \times 10^{6}m)^2$$
$$I = 9{,}72 \times 10^{37}m^2kg$$

- Portanto,

$$\tau = \Omega L \sin \boldsymbol{\phi}$$
$$\tau = \Omega I\omega \sin \boldsymbol{\phi}$$
$$\tau = (7{,}19 \times 10^{-11}rad.s^{-1})(9{,}72 \times 10^{37}m^2kg\,)(7{,}29 \times 10^{-5}rad.s^{-5}) \sin 23^o 27'$$
$$\tau = 2{,}76 \times 10^{27}Nm$$

Comparação entre a dinâmica de Translação e de Rotação

TABELA 10-2

Comparação Entre a Dinâmica de Translação e a de Rotação

Translação		Rotação	
Quantidade de movimento	$p = mv$	Momento angular	$L = I\omega$*
Força	$F = dp/dt$	Torque	$\tau = dL/dt$
Corpo de massa constante	$F = ma$	Corpo de momento de inércia constante	$\tau = I\alpha$*
Força perpendicular à quantidade de movimento	$F = \omega \times p$	Torque perpendicular ao momento angular	$\tau = \Omega \times L$
Energia cinética	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência	$P = F \cdot v$	Potência	$P = \tau \cdot \omega$

*As fórmulas marcadas com asterisco são válidas somente para rotação em torno de um eixo principal.