FíSICA I

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

Tema VII - Estática e Gravitação Universal

7.1 Torque

7.2 Equilíbrio de um ponto material e de um corpo rígido

7.3 Campo gravitacional

7.3.1 Leis de Kepler

7.3.2 Lei da gravitação universal

Félix F. Tomo

Equilíbrio estático de um corpo rígido

- Se um corpo estiver estacionário, e permanecer estacionário, diz-se que o corpo esta em **equilíbrio estático**.

<u>Condição de equilíbrio</u>

- A condição necessária para a partícula **permanecer estacionária é a força resultante sobre a partícula ser nula**.

- Neste caso, a partícula não é acelerada, e se a sua velocidade for inicialmente nula, a partícula permanecerá em repouso.
- Esta também é condição necessária de nulabilidade para o equilíbrio de um corpo rígido estático.
- Também **é necessário que o torque resultante em relação ao centro de massa seja nulo**.

Equilíbrio estático de um corpo rígido

Torque

- Se o centro de massa de um corpo **estiver em repouso e se não houver rotação em torno dele, não pode haver rotação em torno de qualquer outro ponto.**

- Tal que para que exista o **equilíbrio estático, o torque resultante sobre um corpo deve ser nulo** em relação a qualaquer outro ponto.

- Esta condição é suficiente e necessária muitas vezes, para resolver problemas práticos.

Equilíbrio estático de um corpo rígido

Torque

- As duas condições necessárias par que o corpo esteja em equilíbrio estático são,

- **1 – A força resultante que actua sobre o corpo deve ser nula**,

$$\vec{F}_{res.} = 0$$

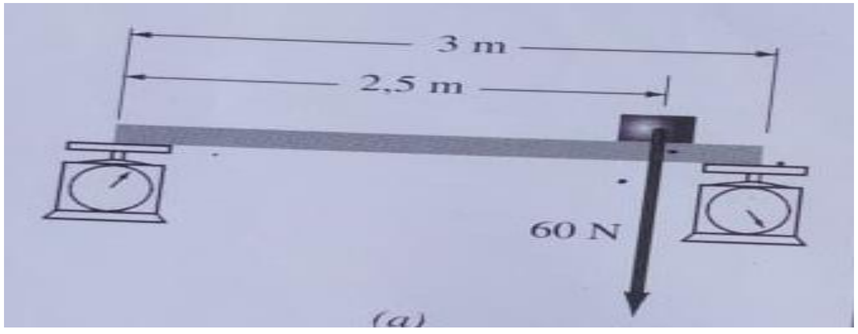
- **2 – O torque externo resultante, em relação a qualaquer ponto, deve ser nulo**,

$$\vec{\tau}_{res.} = 0$$

Equilíbrio estático de um corpo rígido

- **“Para que exista equilíbrio, a soma dos torques que tendem a provocar rotação horária, em torno de um ponto qualquer, deve ser igual a soma dos torques que tendem a provocar rotação anti-horária em torno do mesmo ponto“.**

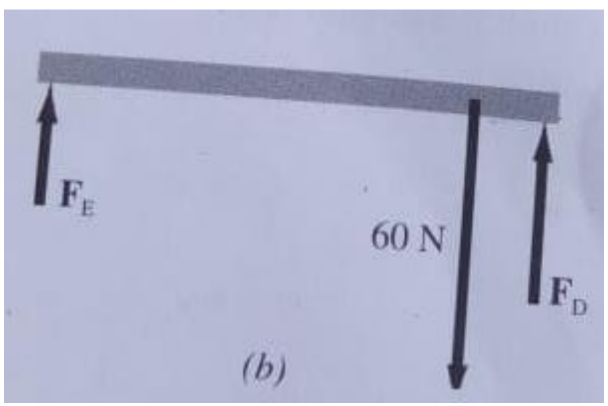
- **Exemplo –** Uma tábua de peso despresivel, esta apoiada pelas extremidades nos pratos de duas balanças, como mostra a Figura 1. Um peso pequeno de 60N, repousa sobre a tabua, a 2,5 m da estremidade da esquerda e a 0,5 m da extremiddae da direita. Determinar as leituras das balanças.



- **Figura 1. –** Tábua de peso despresível.

- **Solução:** Representemos a força $\vec{F}_E$, a força exercida pela balança na extremidade esquerda da tábua, uma vez que a tábua exerce sobre a balança uma força igual, porém oposta, o módulo de $\vec{F}_E$ é a leitura da balança da esquerda, analogamente o módulo de $\vec{F}_D$ e a leitura na balança da direita.
- Tomando a direcção para cima como a positiva, temos pela primeira condição de equilíbrio (a forca resultante deve ser nula).

$$F_E + F_D - 60N = 0$$



- **Figura 2. –** Diagrama de forças do sistema.

- Podemos ter a relação das forças por meio dos toque, um torque horário de módulo $F_E(2{,}5m)$ e outro anti-horário de módulo $F_E(0{,}5\ m)$.

- Tomando o sentido anti-horário,

$$0{,}5.F_D - 2{,}5.F_E = 0$$

- ou

$$F_D = 5.F_E$$

- Levando este resultado na equação anterior,

$$F_E + 5.F_E = 60N$$

- ou

$$F_E = 10N$$

- e

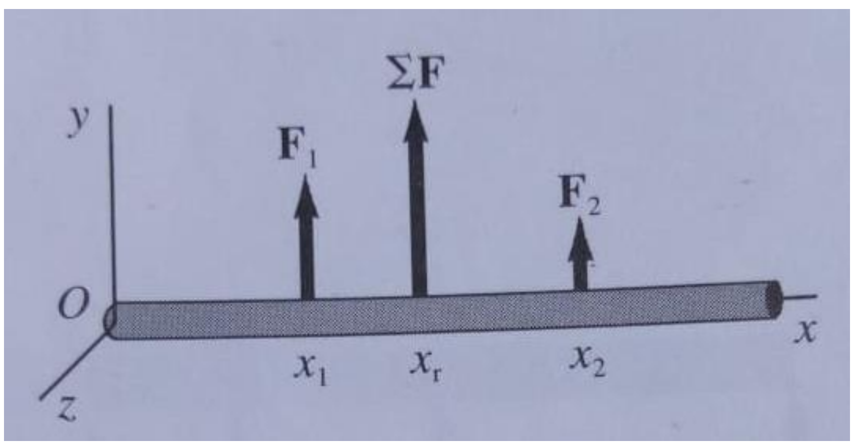
$$F_D = 60N - F_E$$

- Entretanto, as leituras são de 10N á esquerda e 50 N á direita, conforme se espera a balança da direita suporta um peso maior.

O centro de gravidade

- Quando **duas ou mais forças paralelas actuam sobre um corpo**, podem ser **substituídas por uma única força equivalente que é igual a soma das forças e esta aplicada num ponto material** tal que o torque provocado por esta força única seja igual ao torque provocado pelas forças originais.

- Consideremos uma força $\vec{F}_1$ que actua em um barrote no ponto x_1 e uma segunda força $\vec{F}_2$ que actua no ponto x_2.



- **Figura 3. –** Forças paralelas e sua resultante.

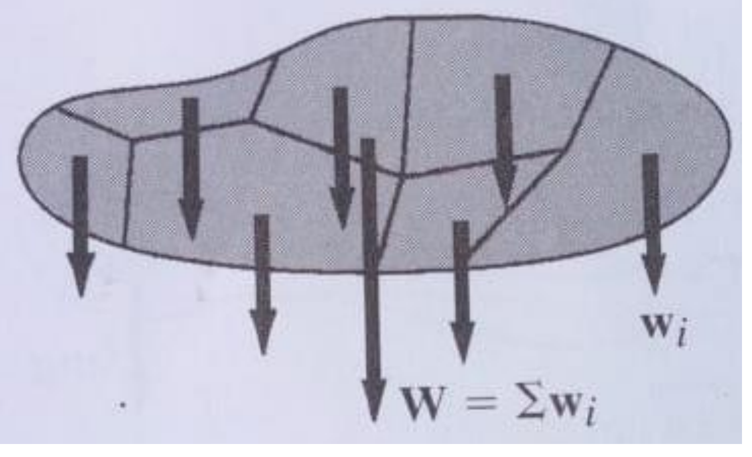
O centro de gravidade

- A força resultante é,

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$x_r \sum F = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

- Podemos usar este resultado em que a F_g actua nas diferentes partes do corpo e pode ser dada como convergente em um único ponto. Na figura a seguir, dividimos em muitos corpos menores,



- **Figura 4. –** Os pesos de todas as partículas de um corpo podem ser substituídos pelo peso total $\vec{W}$ do corpo agindo sobre o centro de gravidade.

O centro de gravidade

- O peso de cada partícula w_i do corpo que compõe o peso total é,

$$\vec{W} = \sum \vec{w}_i$$

- usando $\sum \vec{F} = \vec{W}$, temos para o ponto de aplicação da força resultante X_{cg}.
- Tal que a definição do centro de gravidade será,

$$X_{cg} W = \sum_i w_i x_i$$

- **A equação anterior, define o centro de gravidade, que é um ponto em que actua o peso total de um corpo de modo que o torque que ele provoca, em relação a qualquer ponto, seja igual ao torque provocado pelos pesos das partículas individuais que constituem o corpo.**

O centro de gravidade

- Se a aceleração de gravidade não variar sobre o corpo temos,
- $w_i = m_i g$ e $W = mg$, e calcular o factor comum g,

$$X_{cg} M g = \sum_i m_i g x_i \ \ ou$$

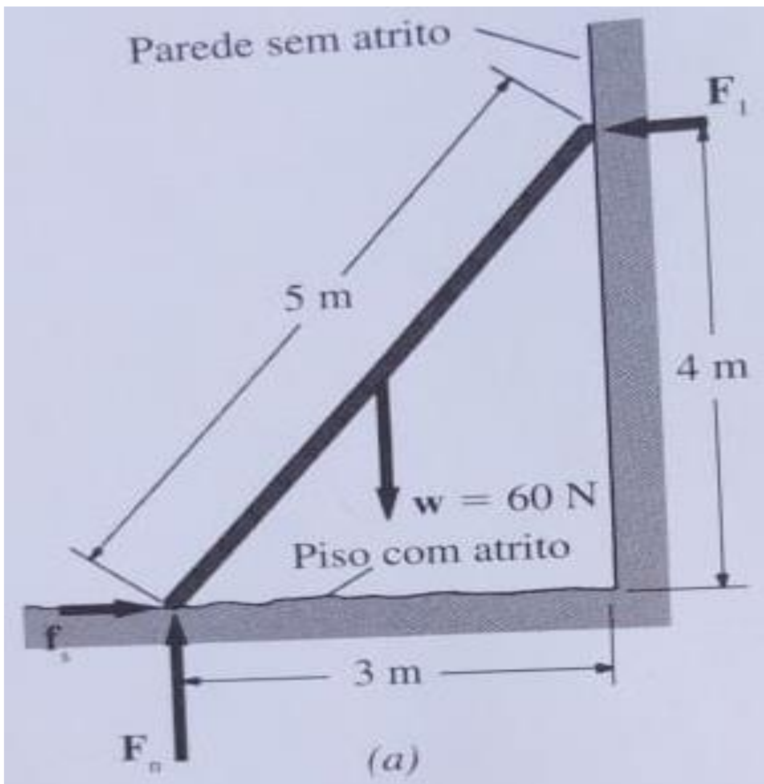
$$M X_{cg} = \sum_i m_i x_i$$

- Se a origem estiver no $X_{cg} = 0$

$$\sum_i w_i x_i = 0$$

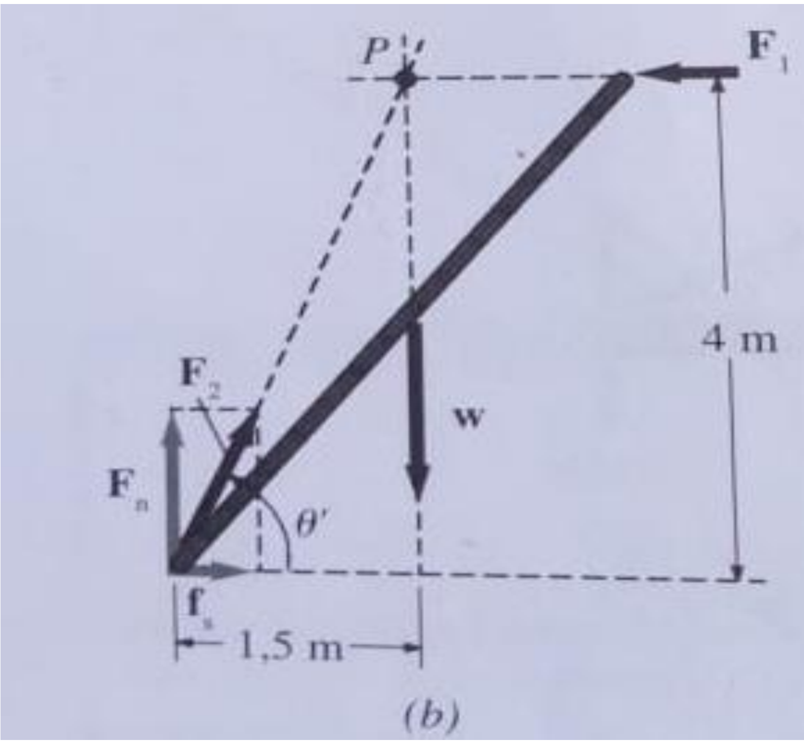
- Podemos considerar **o centro de gravidade de um corpo como o ponto em relação ao qual as forças de gravidade que actuam sobre todas as partículas do corpo provocam um torque nulo**.

- **Exemplo –** Uma escada uniforme de 5m, pesando 60 N, esta apoiada numa parede vertical de atrito despresível, como mostra a Figura. O pé da escada está á 3 m da parede. Qual é o coeficiente de atrito estático mínimo que deve existir entre a escada e o piso para que a escada não escorregue?



- **Figura 5. –** Escada apoida do piso. Diagrama de forcas da escada.

- **Solução:** As forças que actuam sob a escada, são a força de graviddae W que actua para baixo, no centro de gravidade da escada, a força F_1 exercida horizontalmente pela escada, a força normal $\vec{F}_N$, e uma componente horizontal do atrito estático f_s.



- **Figura 6. –** Diagrama de forças da escada.

- Pela condição de equilíbrio

$$F_N = W = 60N \; e \; F_1 = f_s$$

- A segunda condição de equilíbrio estático nos da,

$$F_1(4m) - (60N)(1{,}5m) = 0$$
$$F_1 = 22{,}5N$$

- Este valor é igual ao módulo da força de atrito. Uma vez que a força de atrito $\vec{f}_s$ esta relacionada a força normal $\vec{F}_N$ por,

$$f_s \leq \mu_s F_N$$

- Temos

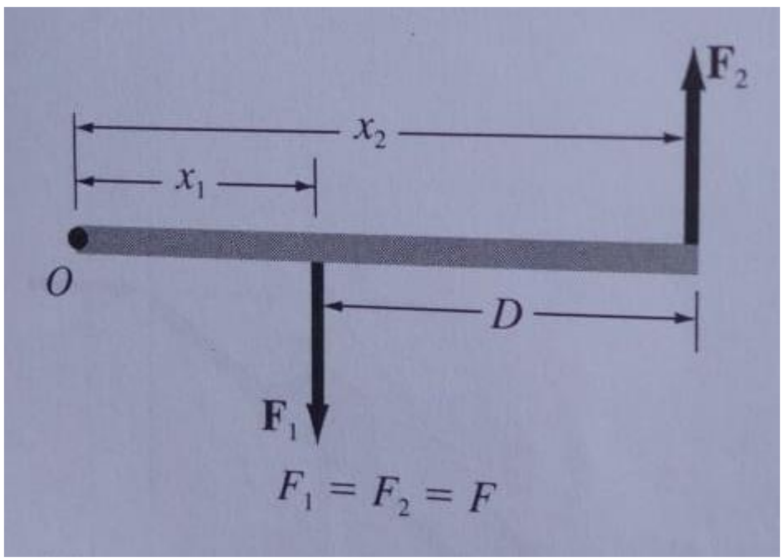
$$\mu_s \geq \frac{f_s}{F_N} = \frac{22{,}5}{60}\frac{N}{N} = 0{,}375$$

- Onde μ_s é o coeficiente de atrito estático.

Pares

- Duas forças que tenham o mesmo módulo, mas direcções opostas e diferentes linhas de acção (anti-paralelas), não podem ser substituidas por uma única força – é denominado de um Par (binário, conjugado) e tende a provocar uma rotação mas a força resultante que lhe esta associada é nula.

$$\tau = Fx_2 - Fx_1 = F(x_2 - x_1) = FD$$



- **Figura 7. –** Duas forças iguais opostas que constituem um par.

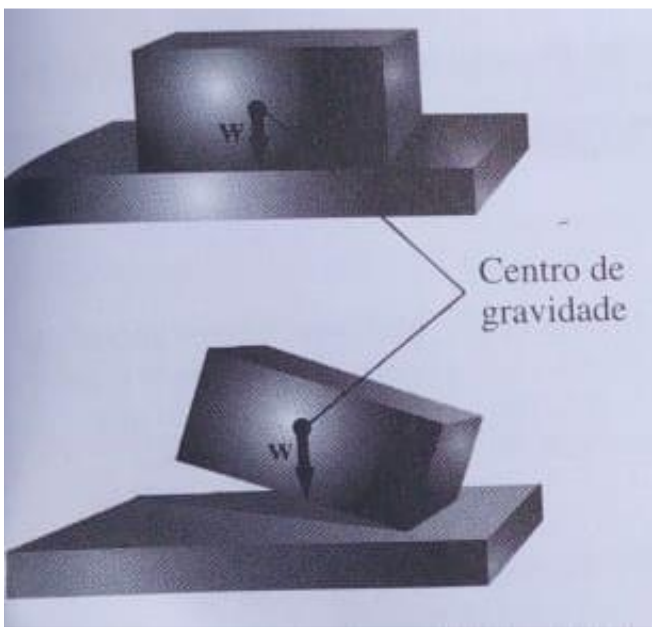
- onde, F é o modulo de qualquer força e $D = x_2 - x_1$é a distância entre elas. Este esultado não depende da escolha do ponto 0.

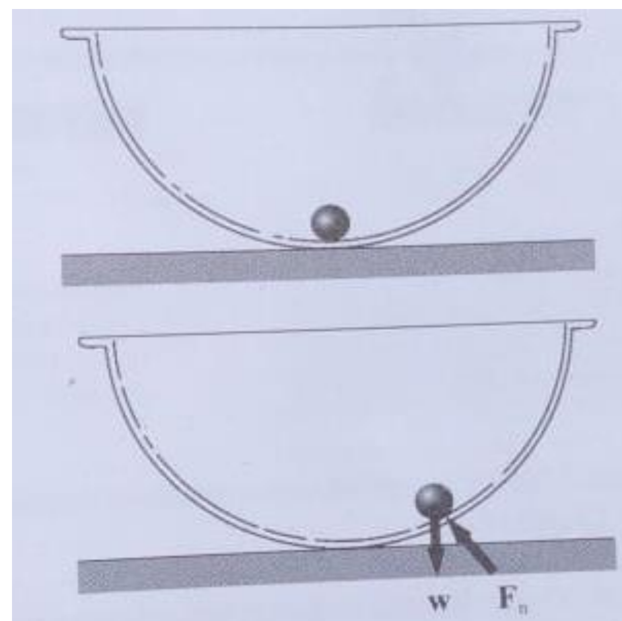
- **“o torque provocado por um par e o mesmo em relação a qualquer ponto do espaço"**

Estabilidade do equilíbrio

- Pode ser classificado em três categorias: **estável, instável e indiferente**.

- **Equilíbrio estável –** ocorre quando os torques ou as forças provocadas por um pequeno deslocamento do corpo actuam de modo a fazer o corpo retornar a posição de equilíbrio.

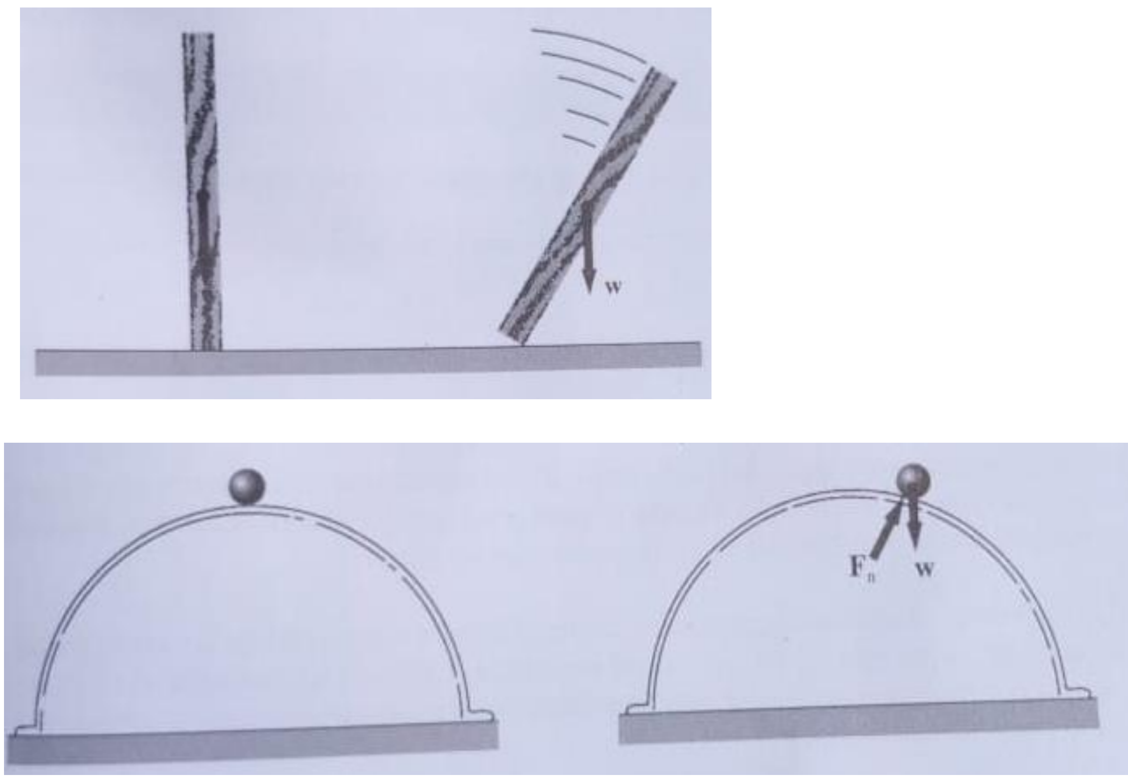




- **Figura 8. –** Equilibrio estável.

Estabilidade do equilíbrio

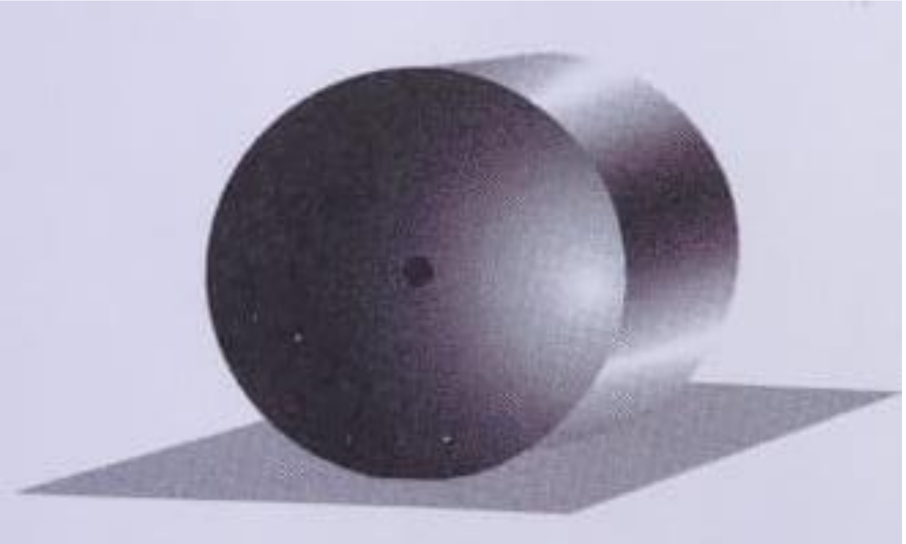
- **Equilíbrio instável –** ocorre quando as forças ou os torques que aparecem com um pequeno deslocamento do corpo em relação a posição de equilíbrio, provocam um afastamento ainda maior do que em relação a esta posição.



- **Figura 9. –** equilíbrio instável.

Estabilidade do equilíbrio

- **Equilíbrio indiferente –** se nem forcas nem torques actuam para modificar a posicao perturbada do sistema.



- **Figura 10. –** Equilibrio indifrente.

Interacção gravitacional

- **Lei de gravitação universal**
- Consideremos dois corpos de massas m e m'

- **Figura 11. –** Interacção entre dois corpos

- **"A interacção gravitacional entre dois corpos pode ser expressa por uma força central, atractiva, proporcionl as massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles".**

$$F \sim mm'$$

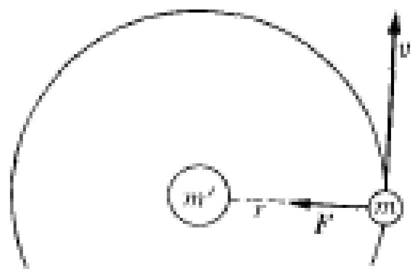
$$F = \frac{\gamma m m'}{r^2}$$

- γ e a connstante de gravitação,

$$\gamma = 6{,}67.\,10^{-11}\, Nm2/kg2 \;\; ou \;\; m^2/kgs^2$$

Interacção gravitacional

- Se a massa m se move ao redor de m'. Como por exemplo o movimento da lua (m) que se move em volta da terra (m'), no movimento planetário,



- **Figura 12. -** Movimento da particula m sob a atraccao gravitacional de m'.

- A força centrípeta com que se descreve,

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

- Sua velociddae é

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$$

- onde T é o período,

Interacção gravitacional

- podemos escrever,

$$F_c = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

- Tomando

$$T^2 = ka^3, T^2 = kr^3$$

- Rescrevendo

$$F_c = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

- A aceleração centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^2 \frac{1}{r}$$

- Isto é,

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

Interacção gravitacional

- A aceleração de graviddae varia com a latitude,

$$r = 3{,}84.\,10^{8} m$$
$$T = 2{,}36.\,10^{6} s$$
$$a_c = 2{,}72.\,10^{-3}\, m/s2$$
$$R_T = 6{,}37.\,10^{6} m$$

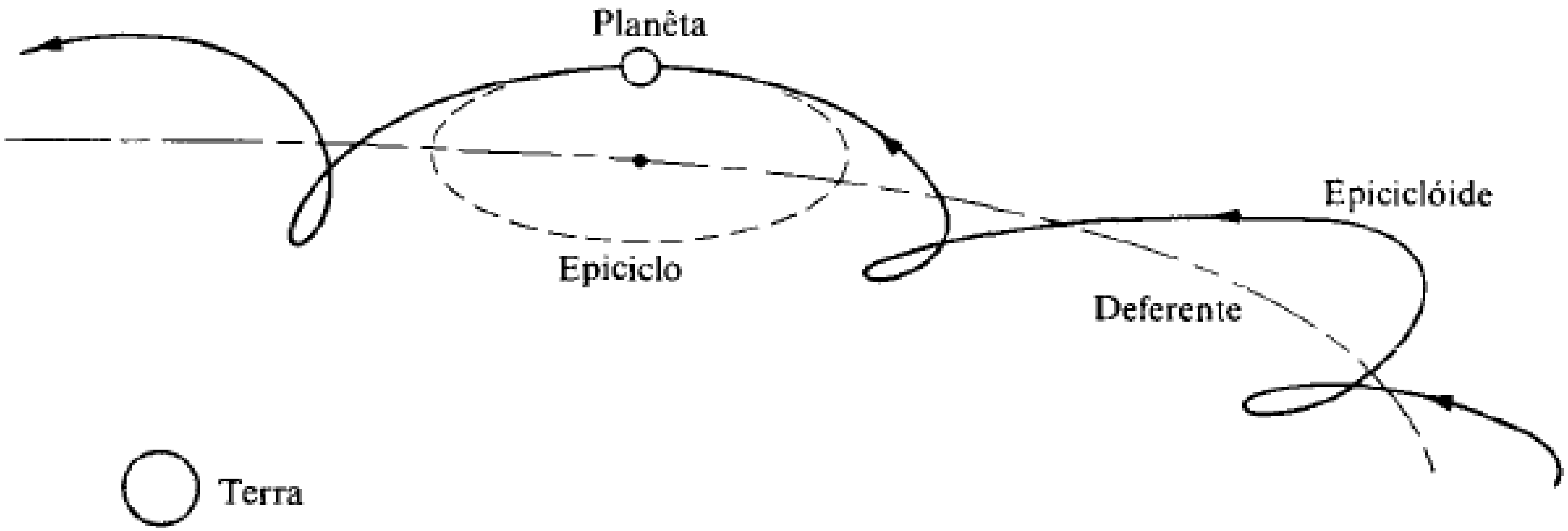
- Tal que e válido

$$\frac{g}{a_c} = \frac{9{,}8}{2{,}72.\,10^{-3}} = 3602 \approx (60)^2$$
$$\left(\frac{r}{R_T}\right)^2 = \left(\frac{384}{6{,}37}\right)^2 \approx (60)^2$$

- entretanto, resulta

$$\frac{g}{a_c} = \left(\frac{r}{R_T}\right)^2$$

• Leis de Kepler



- **Figura 13. –** Modelo dos epiciclos para o movimento planetario referido a terra.

Leis de Kepler

Primeira Lei (Lei das Orbitas)

- Todos os planetas movem-se em orbitas elipticas com o sol localizando-se num dos focos.

Segunda lei (Lei das Áreas)

- A linha traçada do Sol a qualquer planeta descreve áreas iguais em tempos iguais.

Terceira lei (Lei dos Períodos)

- O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média do Sol a esse mesmo planeta.

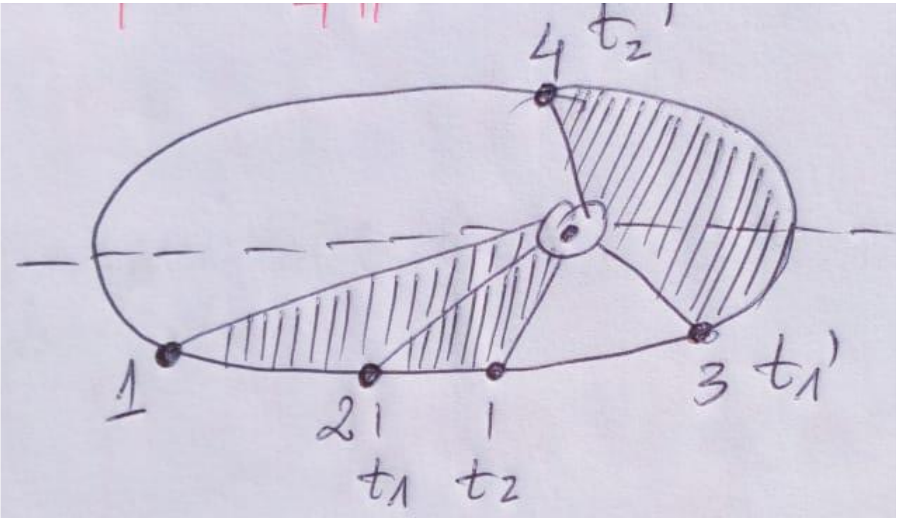
Leis de Kepler

- Demostra-se que,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M_{Sol}}{4\pi^2} \approx 3{,}36.\,10^{-18}\, m^3/s^2$$

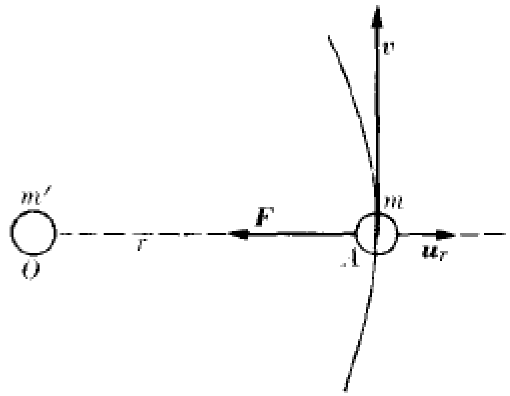
- Pela segunda lei,

$$t_1 = t_1'$$
$$t_2 = t_2'$$
$$\Delta t = \Delta t'$$



- **Figura 14. –** A lei das áreas de Kepler.

Energia potêncial gravitacional



- **Figura 15. –** A atracção gravitacional de massa m tem sentido contrario ao do vector unitário $\vec{u}_r$.

- A força central gravitacional universal,

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

$$F_r = -gradE_p \; ou \;\; F_r = -\nabla E_p$$

- Igualando a gora, $\vec{F}$ a F_r

$$dE_p = \gamma \frac{mm'}{r^2} dr$$

Energia potêncial gravitacional

- Integrando,

$$\int_{E_p=0}^{E_p} E_p = \gamma m m' \int_{r=\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr$$

$$E_p = \gamma m m' \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{\infty}^{r}$$

- Quando a separação entre os corpos a E_p assume total de um sistema cosntituído por dois corpos.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \gamma \frac{m m'}{r}$$

- A energia total de um sistema constituido por massas de dois corpos é,

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 - \gamma \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Energia potêncial gravitacional

- Quando usa-se o sistema CM.

$$E_c = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 - \gamma \frac{mm'}{r}$$

- Tomando a aproximação, $m' \gg m$ e $\mu \approx m$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mm'}{r}$$

$$F = \gamma \frac{mm'}{r^2} = F_e$$

$$\frac{1}{2}\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{2}\gamma \frac{mm'}{r^2} \leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mm'}{2r}$$

$$E = \gamma \frac{mm'}{2r} - \gamma \frac{mm'}{r}$$

Energia potêncial gravitacional

- Resulta,

$$E = -\gamma \frac{mm'}{r}$$

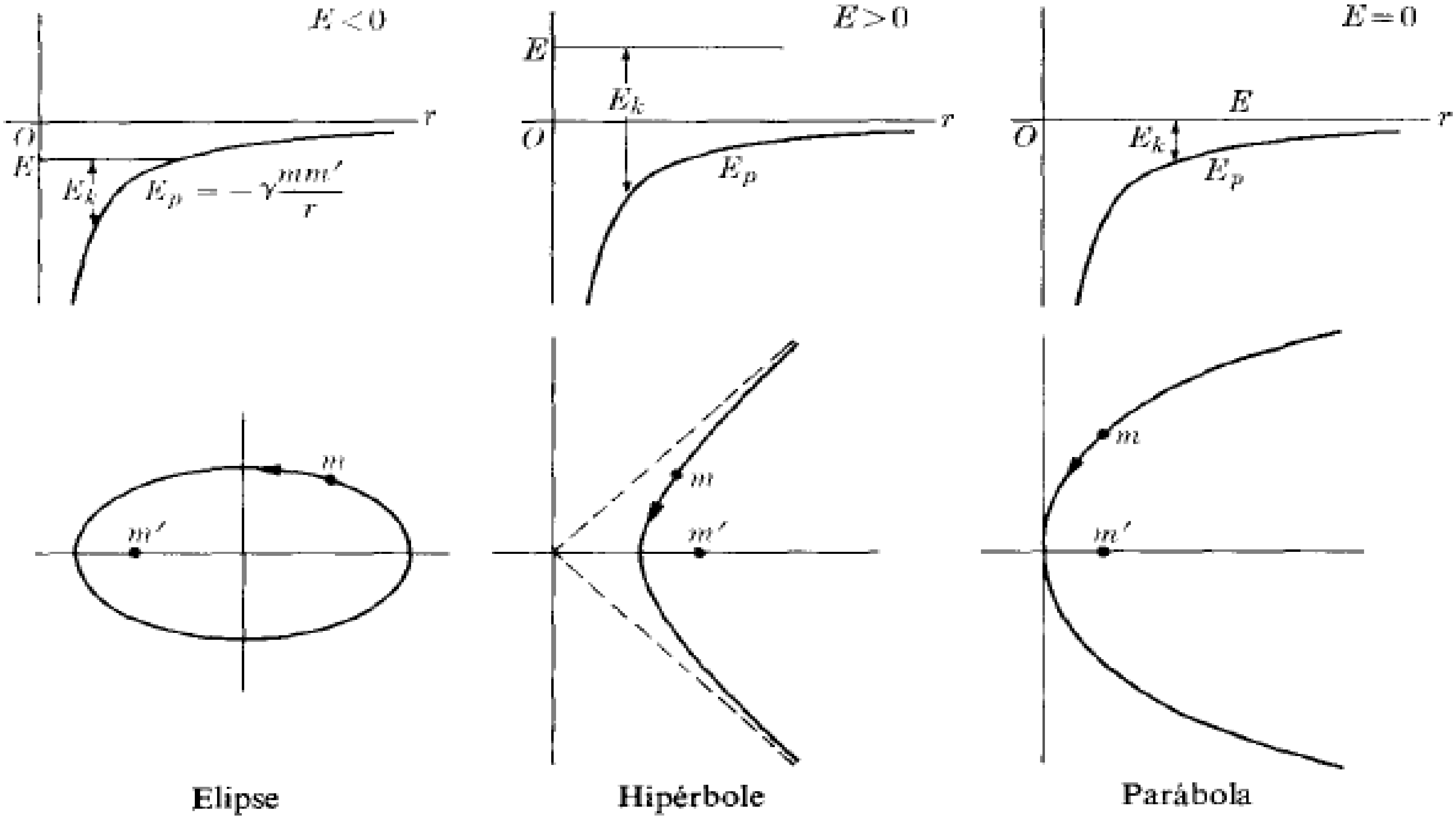
- A energia é negativa em condições de uma orbita fechada ou a energia potencial dessse corpo no infinito é igual a “0“.

- **<u>Velocidade de escape</u>**, é a velocidade na qual a energia cinética de um corpo é igual em magnitude a sua energia potencial em um campo gravitacionnal.

- A velocidade de escape, é tambem a velocidade mínima com a qual um corpo deve ser lançado da terra para que alcançe o infinito,

$$E_T = 0 \; ou \; E_T > 0$$

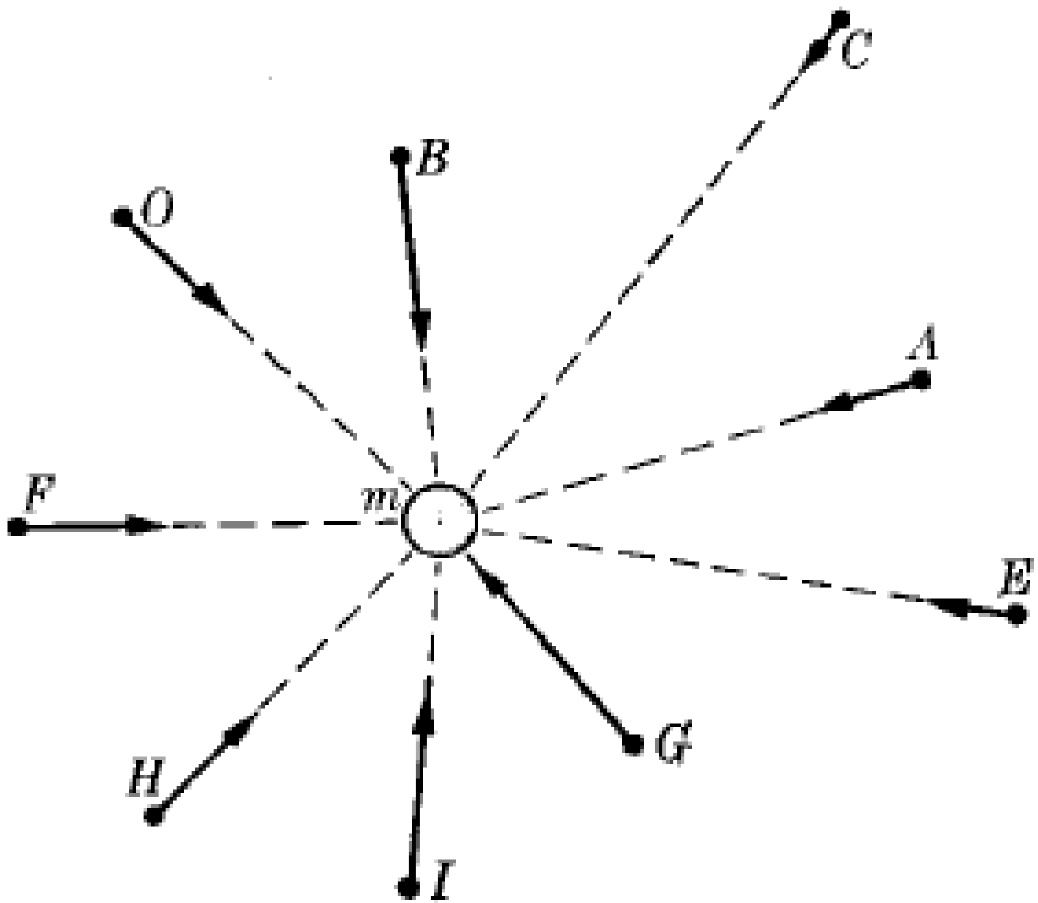
Energia potêncial gravitacional



- **Figura 16. –** Relação entre a energia total e a trajectória.

Campo gravitacional $\vec{G}$

- Suponhamos que temos uma massa m e coloquemos em diferentes posições ao seu redor uma massa m'.



- **Figura 17. –** Campo gravitacional produzido por uma massa puctiforme em diversos pontos.

Campo gravitacional $\overrightarrow{G}$

- A força gravitacional devida com que a massa m esta sujeita é,

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

- **A intensiddae do campo gravitacional $\overrightarrow{\boldsymbol{G}}$, produzido pela massa num ponto $\boldsymbol{P}$, é definida como a força exercida sobre a massa unitária colocada em $\boldsymbol{P}$.**

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m'}$$

- Isto é $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m'} = -\gamma \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r \frac{1}{m'}$, tal que

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

- O sinal negativo, indica que o campo gravitacional é o oposto ao vector $\vec{u}_r$

Campo gravitacional $\vec{G}$

- O campo gravitacional é orientado para a massa que produz.

$$\vec{F} = m'\vec{G}$$

- Unidades do campo gravitacional

$$[G] = \frac{N}{kg} \; ou \;\; m/s^2$$

- Na superfície da terra

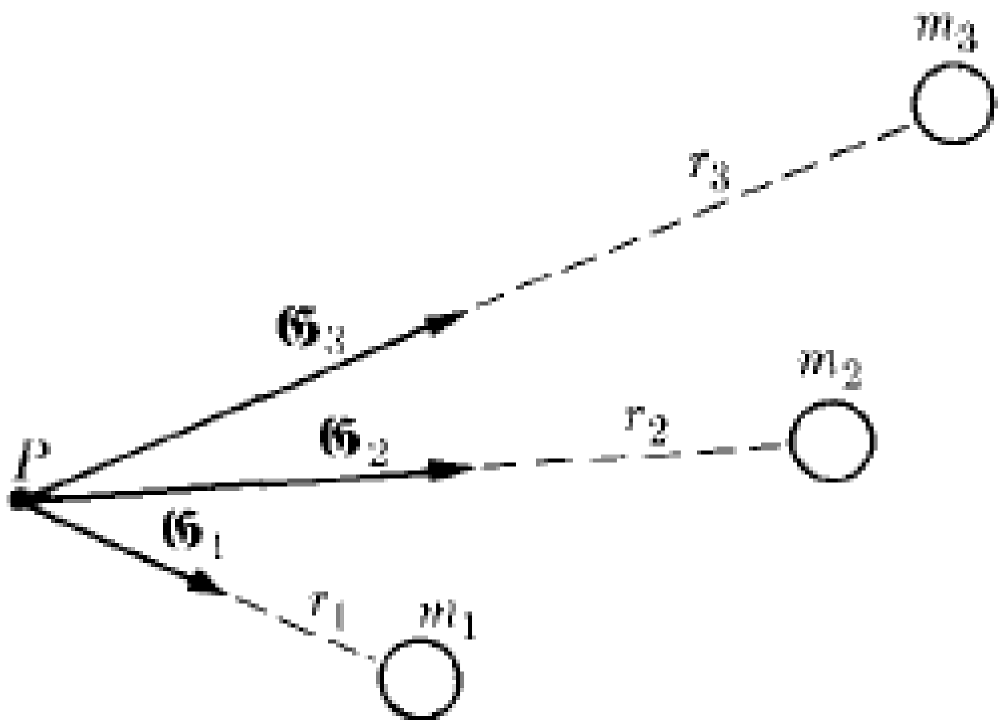
$$\vec{G} = \vec{g}$$

e em geral,

$$\vec{G} = \vec{a}$$

Campo gravitacional $\vec{G}$

- Campo gravitacional criado por varios $\vec{G}$ total num ponto P.



- **Figura 18. –** Campo gravitacional resultante de diversas massas.

Campo gravitacional $\overrightarrow{G}$

- A força gravitacional, é

$$\vec{F} = m\vec{G}$$

$$\vec{F} = m\vec{G}_1 + m\vec{G}_2 + m\vec{G}_3 + \cdots$$
$$\vec{F} = m(\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \cdots)$$

- onde $\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \cdots = \sum G_i = \vec{G}_{Total}$

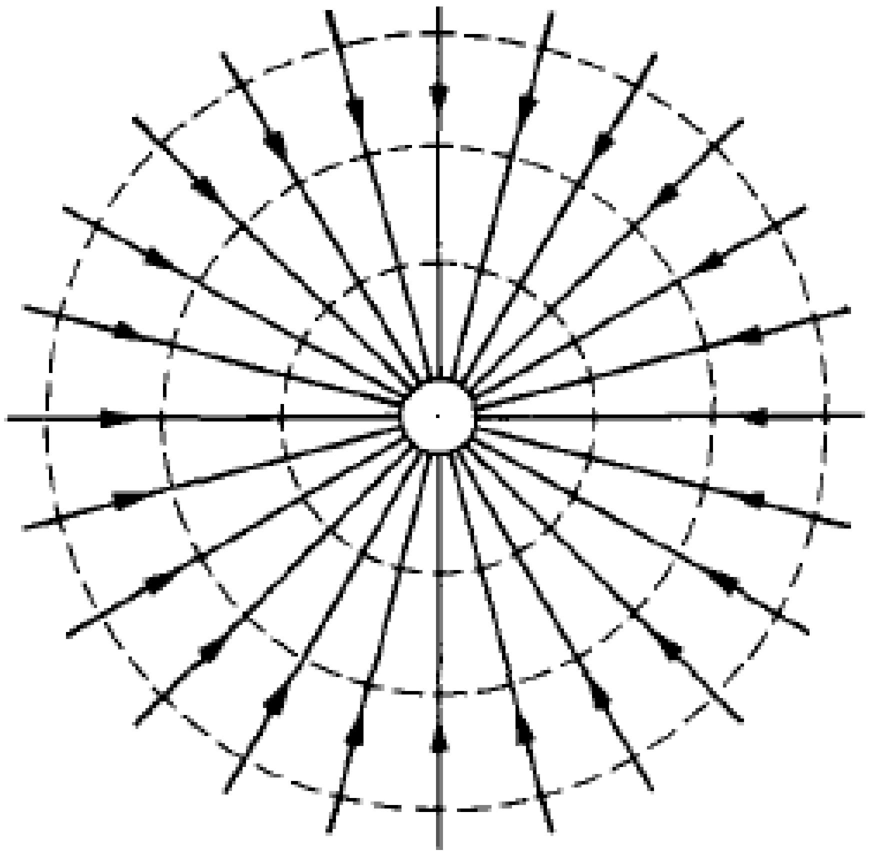
- Resulta a força total escrita como

$$\vec{F}_p = m\vec{G}_{Total}$$

- O campo é uma grandeza vectorial tem módulo direcção e sentido. O campo é sempre tangente as linhas de forças.

Campo gravitacional $\vec{G}$

- Perto da região central, a intensidade do campo é maior. Quanto maior for a distância de afastameto menor é o campo.



- **Figura 19. –** Linhas de forças e superfícies equipotênciais do campo gravitacional de uma massa puctiforme.

- Apenas há convergência no campo gravitacional.

Potencial gravitacional "V"

- Notemos que

$$V = \frac{E_P}{m'}$$

$$V = -\gamma \frac{m}{r}$$

- Entretanto, o potencial gravitacional criado pela massa a uma distância r dela própria, é uma grandeza escalar.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$$

$$V = -\gamma \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} \right)$$

$$V = -\gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i}$$

- Unidades do potencial (V) no SI,

$$[V] = \frac{J}{kg} \ ou \ \frac{m^2}{s^2}$$

Potencial gravitacional “V"

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{u}_r = \vec{G}$$

Então,

$$V = -\gamma \frac{m}{r}$$

$$\vec{G} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\vec{G} = -grad\, V$$

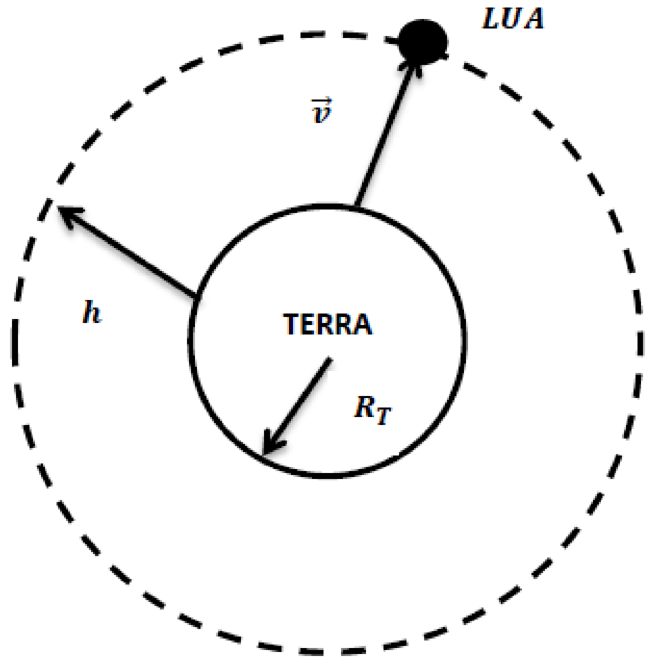
$$F = -gradE_p$$

- $G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ eG_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Velocidade cósmica

- **Satélite estacionário –** quando gravita e em um ponto se mantém a sua velociddae angular (ω).

- Consideremos, m_s a massa do satélite, $v_{inst.}$ a velocidade de inserção, h a altitude e M_T a massa da terra.



- **Figura 20. –** Distância terra lua.

Velocidade cósmica

- A força centripta é,

$$F_c = \frac{m_s v^2}{r}$$

$$F = \gamma \frac{M_T m_s}{r^2}$$

- Igualando,

$$\frac{m_s v^2}{r} = \gamma \frac{M_T m_s}{r^2}$$

- onde $r = R_T + h$

$$v_{inst.}^2 = \gamma \frac{M_T}{R_T + h} = \gamma \frac{M_T}{R_T} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{R_T}\right)}$$

$$v_{inst.} = \left(\gamma \frac{M_T}{R_T + h}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\gamma \frac{M_T}{R_T}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(1 + \frac{1}{R_T}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Velocidade cósmica

$$F_g = mg$$

$$m_s g = \gamma \frac{M_T m_s}{r^2}$$

- Acima dos 160 km de altitude $g = 0$

$$g = \gamma \frac{M_T}{r^2}$$

- Tal que

$$v_{ins.}^2 = gr$$

$$v_{ins.} \cong \sqrt{gR_T} \approx 8.10^3\, m/s$$

- Esta é a primeira velociddae cósmica.

- Se a v for inferior a $v_{ins.}$, o corpo cai e se for igual ela mantém-se.
- **A <u>primeira velocidade cósmica</u> deve ser usada para lançar um satélite.** Colocar o corpo como satelite da terra.

Velocidade cósmica

- **A <u>segunda velocidade</u> serve para tornar o corpo parte do sistema solar, serve para que o corpo afaste se da terra para o infinito.**

$$W' = E_{p,inicio} - E_{P,infinito}$$

$$W' = E_{p,inicio} = \gamma \frac{M_T m}{r}$$

$$W = \gamma \frac{M_T m}{r}$$

- O W existe graças a energia cinética.

$$W = Fd$$

$$W = mgR_T = \frac{mv^2}{2}$$

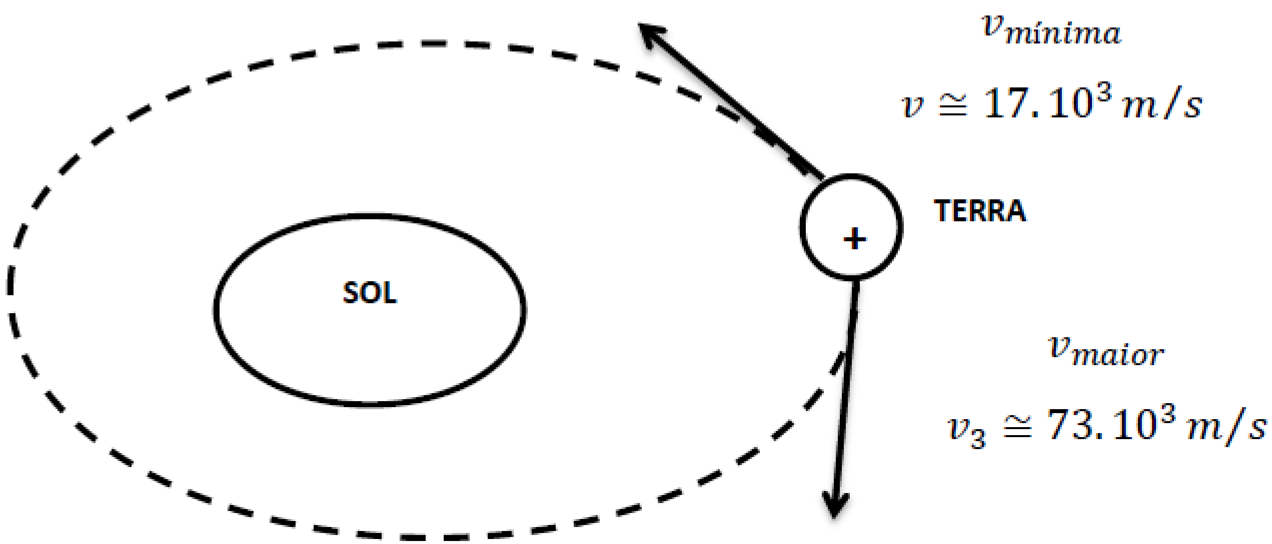
$$v^2 = 2gR_T$$

$$v = \sqrt{2gR_T} \approx 11.10^3\, m/s$$

- $11.10^3\, m/s$ é a velocidade de lançamento a partir da superficie da terra.

Velocidade cósmica

- **A <u>terceira velocidade cósmica</u>, é usada para que o corpo abandona o sistema solar.**



- **Figura 21. –** A terceira velocidade cósmica