UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FíSICA I

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

Tema IX – Mecânica dos fluídos

- **Densidade;**
- **Deformação;**
- **Tensão de corte;**
- **Pressão hidrostática ;**
- **Pressão como função da profundidade ;**
- **Princípio de pascal;**
- **Medidores de Pressão: Manómetros e barómetros ;**
- **Princípio de Arquimedes;**
- **Equação de continuídade no escoamento de fluídos;**
- **Lei de conservação da energia de escoamento de fluídos;**
- **Lei de Newton da viscosidade.**

Félix F. Tomo

- **Introdução**

✓ Chama-se de **fluído** a qualquer substância que não tem forma própria e que estando em repouso não resiste a tensões de sisalhamento (paralelas);

✓ Fazem parte dos fluídos, os líquidos e gases que tem de comum a propriedade de escoar;

✓ Os líquidos escoam de modo a ocupar as partes mais baixas do recipiente em que estão contidos, enquanto que gases expandem-se de modo a ocupar na totalidade o recipiente.

<u>Aplicações</u>:

➢ Acção de fluídos sobre superfícies submersas (barragens, por exemplo);

➢ Equilíbrio de corpos flutuantes (embarcações);

- ➢ Acção do vento sobre construções civis;
- ➢ Estudo de lubrificação;
- ➢ Transporte de sólidos via pneumática ou hidráulica (elevadores hidráulicos);
- ➢ Cálculo de máquinas hidráulicas (bombas, turbinas);
- ➢ Instalações de vapor (caldeiras);
- ➢ Acção de fluídos sobre veículos (aerodinâmica)

- Portanto, engenheiros civis e engenheiros das áreas de automóveis e aeronâutica empregam conhecimentos sobre fluídos de forma diversa: civis-constroem represas que são estruturas bastante largas na base do que em cima descrevemos; os outros usam túneis de vento para simular e avaliar aspectos aerodinâmicos sobre os veículos.

Densidade, Deformação e Tensão de corte

- **Densidade** - é a razão entre a massa de um corpo e o seu volume. É também chamada de massa específica.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (1)$$

- A expressão (1) é válida somente para corpos homogéneos. Quando o corpo é heterogéneo, a densidade varia de um ponto para o outro; por isso, para obter a densidade no ponto particular, mede-se a massa *dm* contida num pequeno elemento de volume *dV*:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad (1')$$

- O peso específico γ é a razão entre o peso do fluído e o seu volume:

$$\gamma = \frac{P}{V} = \rho g \qquad (2)$$

- **Deformação em sólidos:**
- Quando os sólidos estão submetidos a forças tendentes a alongá-los (tracção), comprimi-los (compressão) ou cortá- los, alterando a sua forma.
- Para corpos elásticos, removidas as forças, o corpo volta a forma inicial.
- Chama-se deformação, a variação relativa das dimensões de um corpo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

- A razão entre a tensão (força por unidade de area) τ e a deformação relativa, caracteriza o módulo de elasticidade de um corpo (o módulo de Young):

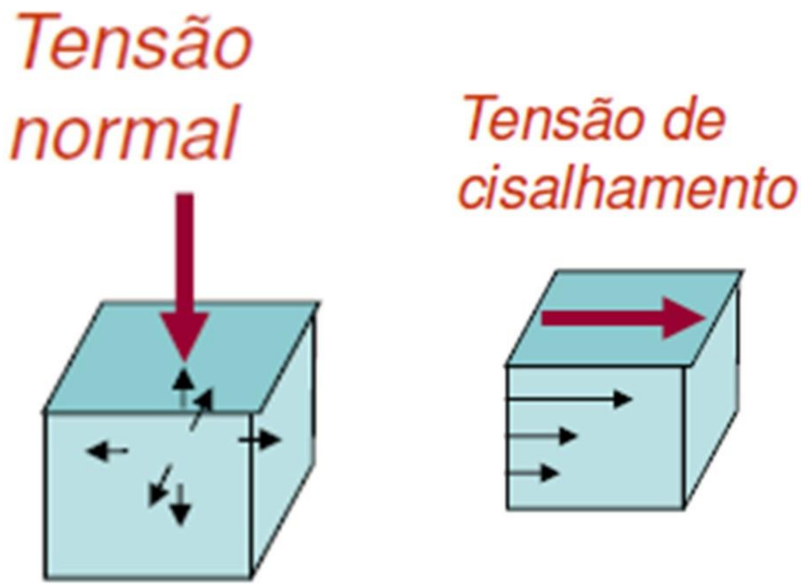
$$Y = \frac{F_\tau / A}{\Delta L / L} \qquad (4)$$

- **Deformação em fluídos**

- Consideremos um elemento de volume de um fluido, com a forma de um cubo e a resposta do fluido a uma força externa aplicada.

- Em resposta à força aplicada desenvolver-se-á uma força interna, agindo a partir dessa área, que é denominada tensão τ_{xy}
- .**Neste capítulo, a tensão significa força por unidade de área.**

- Tensão normal e tensão de cisalhamento



- As **tensões normais** agem perpendicularmente à face do cubo e resultam, na pressão *p*:

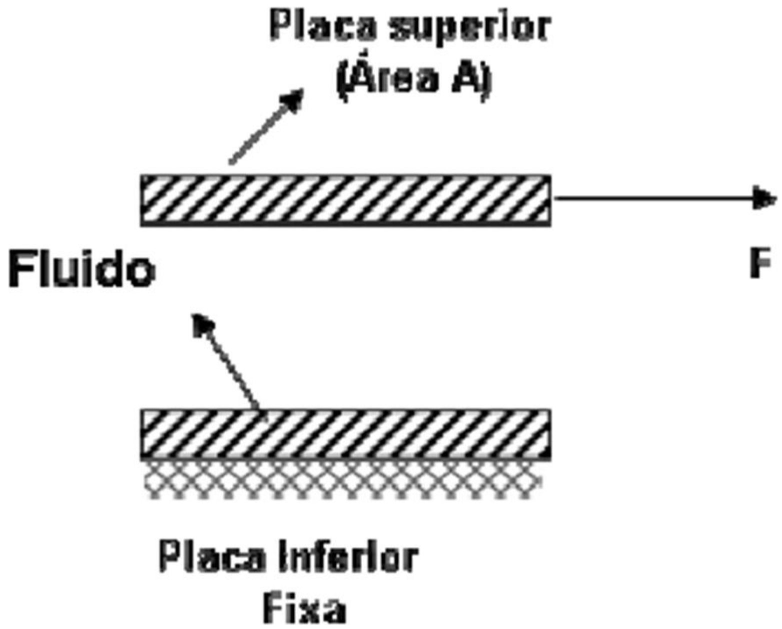
$$p = \frac{F_n}{A} \qquad (5)$$

- As **tensões de cisalhamento** agem tangencialmente à face do cubo, e determina-se como:

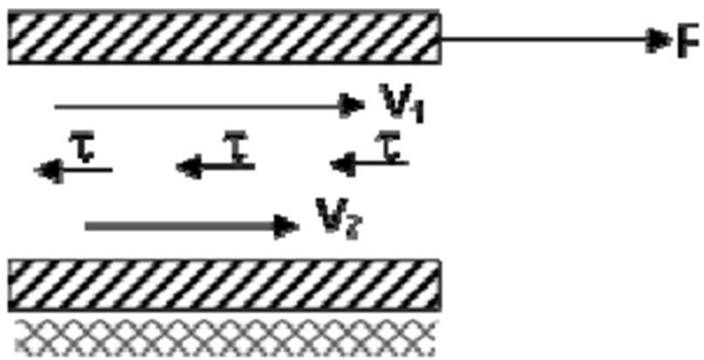
$$\tau = \frac{F_\tau}{A} \qquad (6)$$

- Para descrever a deformação e o escoamento de um fluído usam-se os conceitos de tensão de cisalhamento e gradiente de velocidade.

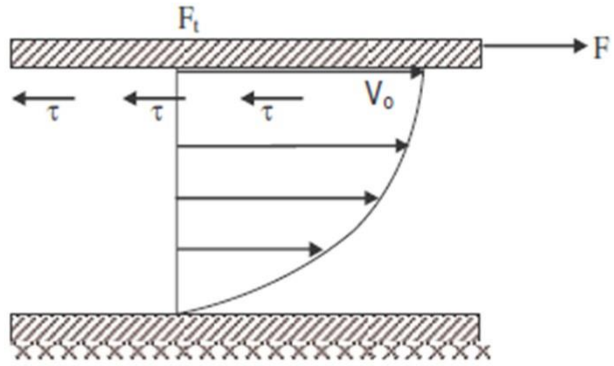
- <u>Princípio de aderência</u>:
- As partículas fluídas junto à superfícies sólidas adquirem as velocidades das superfícies com as quais estão em contacto.



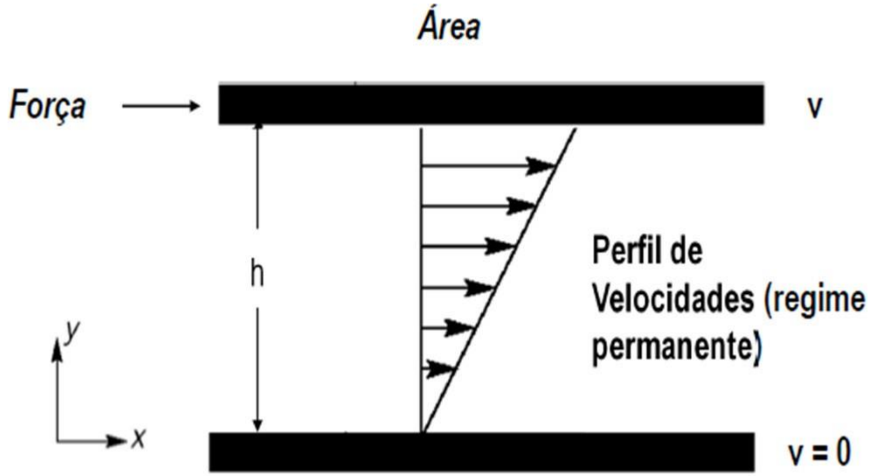
- Junto a placa inferior as partículas tem velocidade nula, enquanto que na placa superior a velocidade é máxima.



- Entre as placas de cima e de baixo existirá atrito (atrito interno) e, como a força é tangencial, dará origem a tensões de cisalhamento, com sentido contrário ao do movimento, como a força de atrito.



- O perfil de velocidades pode ser representado tal como mostram as figuras para tensões de cisalhamento gerais (em cima) e simples (em baixo).



- A **tensão de cisalhamento** $\tau_{xy} = F_\tau / A$ produz um gradiente de velocidade (dv_x/dy) no seio do fluido viscoso.

- A tensão de cisalhamento τ_{xy} é proporcional proporcional ao gradiente de velocidade (dv_x/dy): e

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

- onde Y é a taxa de deformação e μ é viscosidade dinâmica.

- **Pressão hidrostática e sua dependência**

- Quando um fluído como a H_2O está em contacto sobre uma superfície sólida, o fluído exerce força normal sobre a superfície. A força por unidade de área é a pressão P:

$$P = \frac{F}{A} \qquad (8)$$

- No S.I. a pressão expressa-se em N/m^2 (chamado de Pascal- Pa). No sistema americano a pressão expressa em lb/in^2 (libras por polegada ao quadrado).

- Existem unidades técnicas e práticas da pressão, como: Atm (atmosfera); Bar e mmHg.

- Relação entre as diferentes unidades técnicas da pressão e o Pascal:

- Bar = 10^5 Pa
- mm Hg (Torr) = 133.3 Pa
- cm H_2O = 98.1 Pa
- atm = 101,325 kPa
- lb/in^2 (libra por polegada quarada)= 6.69×10^3 Pa

- Se a pressão de um corpo aumenta, a razão entre este aumento ΔP e a diminuição relativa do volume $(-\Delta V/V)$, chama-se módulo volumétrico B:

$$B = -\frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$$

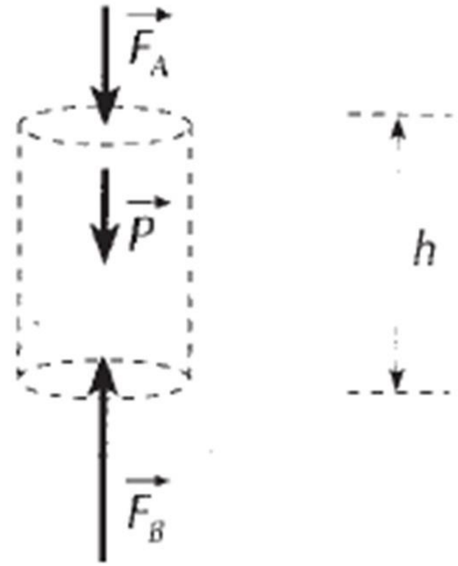
- Quanto mais difícil for comprimir um material, menor será será o decrécimo relativo do volume $(-\Delta V/V)$ para uma dada pressão, consequentemente maior será o módulo volumétrico.
- A **compressibilidade é o inverso do módulo volumétrico.**
- **Sólidos e líquidos são relativamente incompressíveis,** tem valores elevados de B e praticamente independente da pressão e temperatura.
- **Gases são facilmete compressíveis** porque tem valores muito pequenos de B e são fortemente dependentes da temperatura e da pressão

- <u>Teorema de Stevin</u>:
  Consideremos um líquido de densidade ρ, homogéneo e incompressível em equilíbrio.

  $\vec{F}_B$ é a força hidrostática e $\vec{F}_A$ a força exercida na base superior sobre o líquido. Havendo equilíbrio, podemos escrever:

$$F_B = F_A + P$$

- Cilindro líquido de peso $\vec{P}$,sofre a acção de forças $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$.



- O peso do líquido é $P = mg = \rho V g$ e $V = A.h$. Substuíndo tudo na equação anterior obtem-se:

$$F_B = F_A + \rho g A h \qquad (9)$$

- Dividindo a força hidrostática pela área da base segue que:

$$p_B = p_A + \rho g h \qquad (10)$$

- **A pressão em um ponto situado à profundidade h no interior de um líquido em equilíbrio é dada pela pressão na superfície (pressão atmosférica), somada a pressão exercida pela coluna do líquido situada acima do ponto. Esta formulação cosntitui o teorema de Stevin**.

$$p_h = p_{atm} + \rho g \qquad (10')$$

- **Princípio de Pascal e Lei de Arquimedes**

- A equação (10) pode ser reescrita na forma:

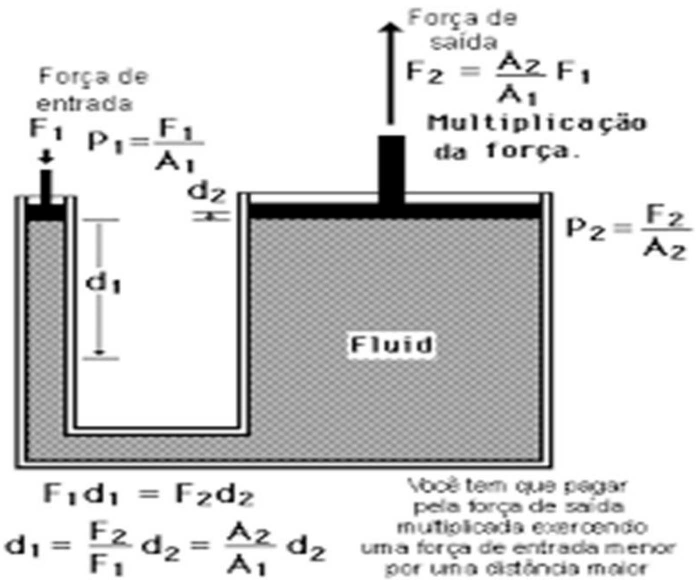
$$p - p' = \rho g \Delta h$$

- sendo p e p´ as pressões em pontos P e P´, respectivamente, de um fluído homogéneo, em repouso.

- O peso específico é independe da cota, logo, se a pressão em P variar, produz-se a mesma variação em P´, de modo que a equção (11) continue válida.
- **Princ. de Pascal: fluídos transmitem integralmente os acréscimos de pressão a todos os pontos.**

- **Elevador (prensa)hidráulico**
- Uma das aplicações do princípio de Pascal é a prensa hidráulica.

- $\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$



- Sobre um corpo mergulhado num fluído em equilíbrio actua uma força ascencional (impulsão ou empuxo) igual e oposta ao peso do líquido deslocado pelo fluído. O ponto de aplicação (centro de impulsão) está sobre a recta que passa pelo centro de gravidade.

$$I = \rho_l g V_d \qquad (12)$$

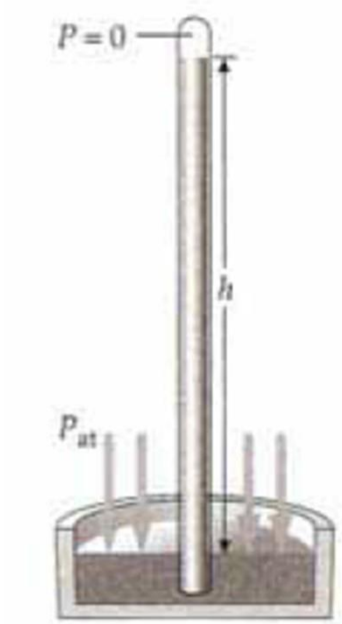
- A força total que age sobre um objecto tatalmente submerso na água é:

$$F = I - F_g \qquad (13)$$

- A impulsão é de extrema importância na natureza: a estrutura do cérebro é tão frágil que não pode suportar o próprio peso no ar. Graças à impulsão, o cérebro tem um peso no fluído contido no interior do crânio, aproximadamente igual a 1/3 do peso no ar. Sendo removido este líquido ($\rho = 1.007\ g/cm^3$), o cérebro pode ficar danificado podendo-se originar dores devido ao excessivo esforço de vasos sanguíneos e nervos.

- # Medidores de pressão

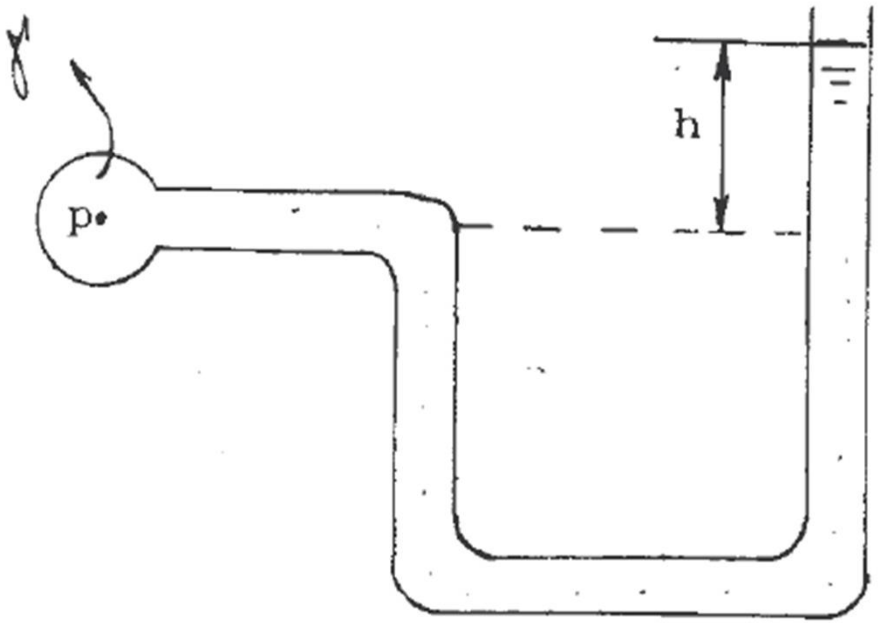
- **a. Barómetro (de mercúrio):** Tubo de vidro com uma extremidade fechada e evacuada de modo que a pressão seja nula. A outra extremidade mergulha-se num frasco contendo Hg, em contacto coma atmosfera. O tubo está graduado em mm, e a pressão atmosférica é dada por:
- $p_{atm} = \rho g h$
- $760\, mm\, Hg = 1\, atm$

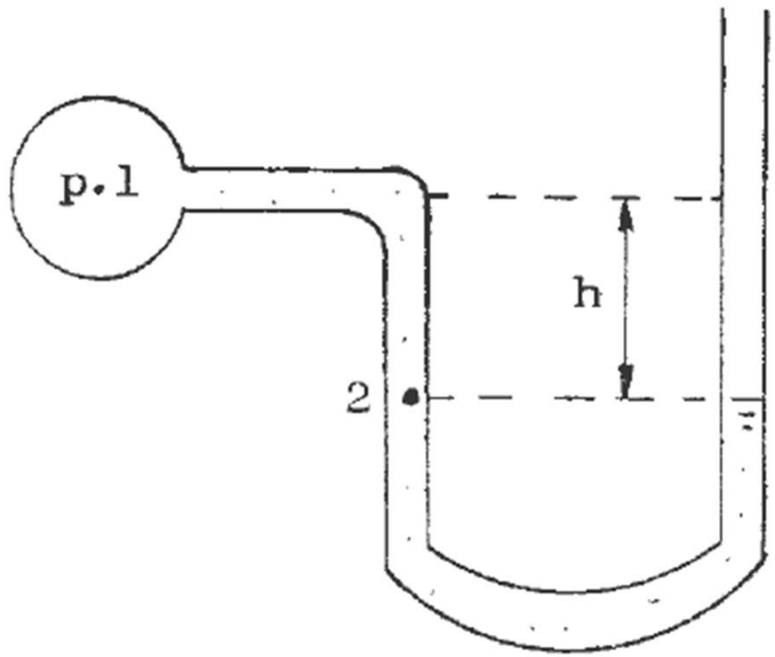


- O valor da pressão atmosférica.
- Depende da altura/profundidade h:
- $p_{atm} = p_0 e^{-\rho g h / p_0}$
- $p_{atm} = p_0$ ao nível do mar

- b. **Manómetros** (com tubo em forma de U)

$p\ = \gamma h$ $\qquad\qquad\qquad$ $p = -\gamma h$

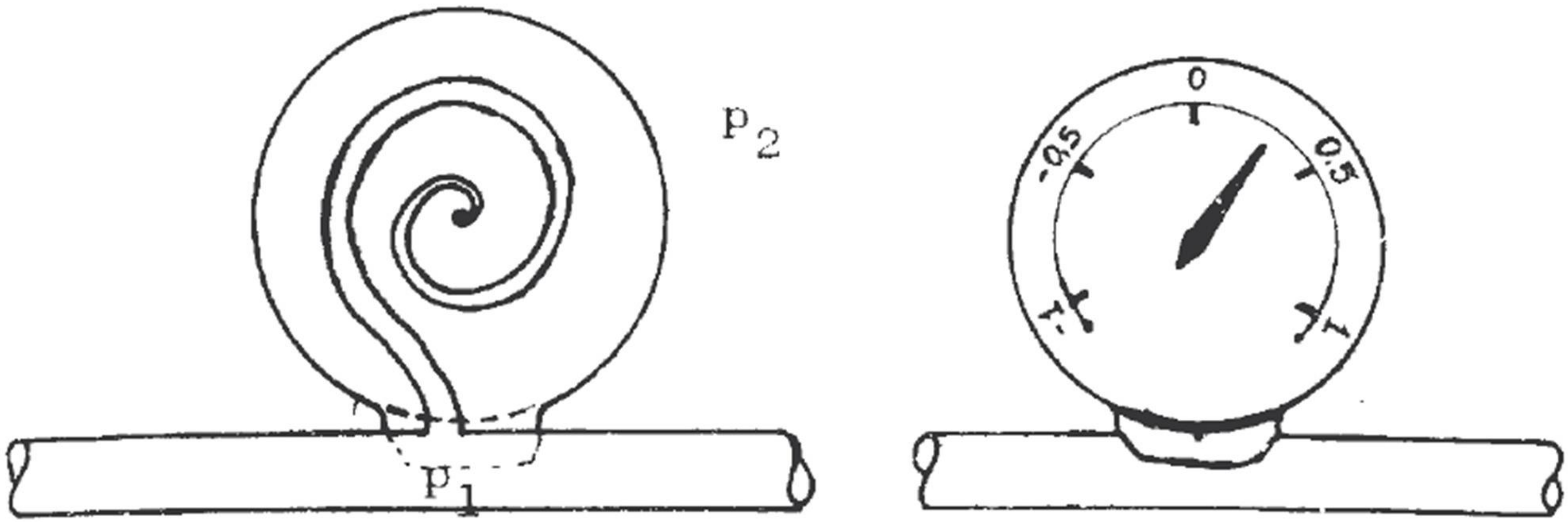




- **Manómetro metálico** (mede também pressões de gases).

$$p_m = p_1 - p_2$$

- Se $p_2 = p_m \Rightarrow p_m = p_1$



- **Equação da continuidade**

- Noções básicas
- Vazão e a quantidade de fluído, Q, que passa por uma secção recta por unidade de tempo.
- A vazão pode ser mássica Q_m ou volumétrica Q_V:

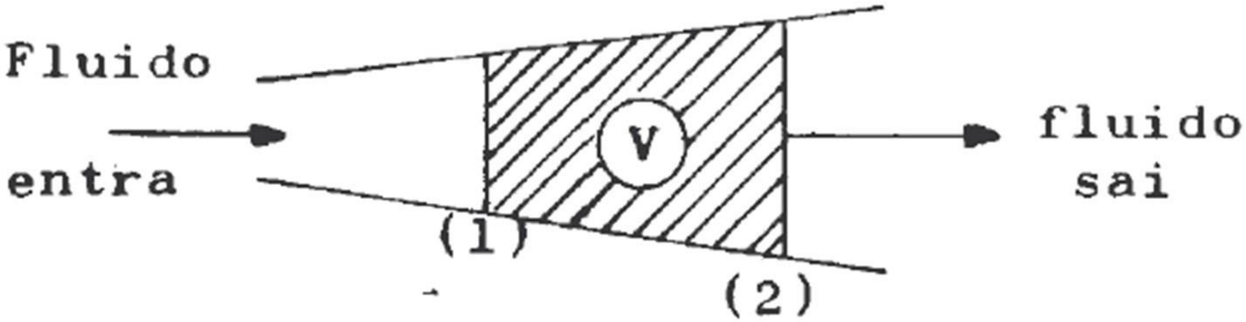
$$Q_m = \frac{m}{\Delta t}\ (kg/s)\ \ ou\ \ Q_V \equiv Q = \frac{V}{\Delta t}(m^3/s) \qquad (14)$$

- Sabendo que o volume em referência V é igual ao produto da área da secção recta pelo deslocamento L ao longo do comprimento da tubagem, podemos reescrever a vazão como:

$$Q_V \equiv Q = \frac{AL}{\Delta t} = A\bar{v} \qquad (15)$$

- Onde v é a velocidade média do fluído na secção considerada.

- **Equação da continuidade**
- Num mesmo intervalo de tempo Δt, a massa do fluído que passa pela secção A_1 é a mesma que vai passar pela secção A_2



$$m_1 = m_2 = m$$

- Ou dividindo pelo tempo de passagem,

$$\frac{m_1}{\Delta t} = \frac{m_2}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} = const. \qquad (16)$$

$$Q_{m1} = Q_{m2} = Q_m = const.$$

- Sabendo que a relação entre a vazão mássica e a volumétrica é $Q_m = \rho Q$, a equação da continuidade pode ser reescrita na forma

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = const.$$

- ou,

$$\rho_1 A_1 \bar{v}_1 = \rho_2 A_2 \bar{v}_2 = const. \quad (17)$$

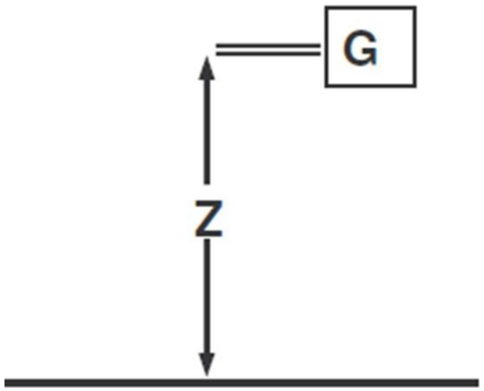
- **No escoamento de um fluído, em movimento permanente, a vasão mássica do fluído que atravessa a secção de escoamento é constante.**
- **Em particular, para um fluído incompressível $(\boldsymbol{\rho = const})$ temos:**

- **O escoamento no qual o moviemnto do fluído não varia com o tempo é todos os pontos chama-se de estacionário.**

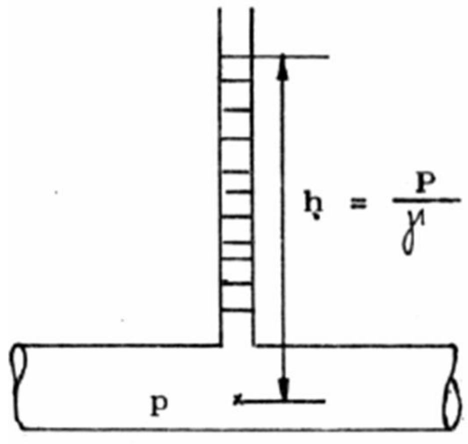
• Equação de Bernoulli

- Em fluídos a energia mecânica, E, subdivide-se em:

✓ potencial, U: que pode ser de posição, U_P(configuração, figura à esquerda) ou de pressão U_{Pr}(figura à direita).



$$U = U_P + U_{Pr}$$



onde,

$$U_P = mgH \ e \ U_{Pr} = mg\frac{p}{\gamma}$$

- Nesta representação $Z = H$, é a altura relativamente ao plano horizontal de referência, e γ é o peso específico $(\gamma = \rho g)$.

✓ Cinética (de movimento do fluído).

- Para um fluído em movimento sem atrito pela tubagem é válida a lei de conservação de Energia (E_1=E_2):

$$mgH_1 + mg\frac{p_1}{\gamma} + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgH_2 + mg\frac{p_2}{\gamma} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

- Se admitirmos que o fluído é incompressível ($\rho = const$), dividindo termo a termo pelo volume teremos:

$$\rho gH_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gH_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

- A soma da energia potencial do fluído por unidade de volume associada à pressão ,*p*, mais a energia potencial do fluído por unidade de volume devido à gravidade, ρgh, mais a energia cinética do fluído por unidade de volume, ½(ρv²) é constante:

$$p_1 + \rho_1 g h_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 \quad (18)$$

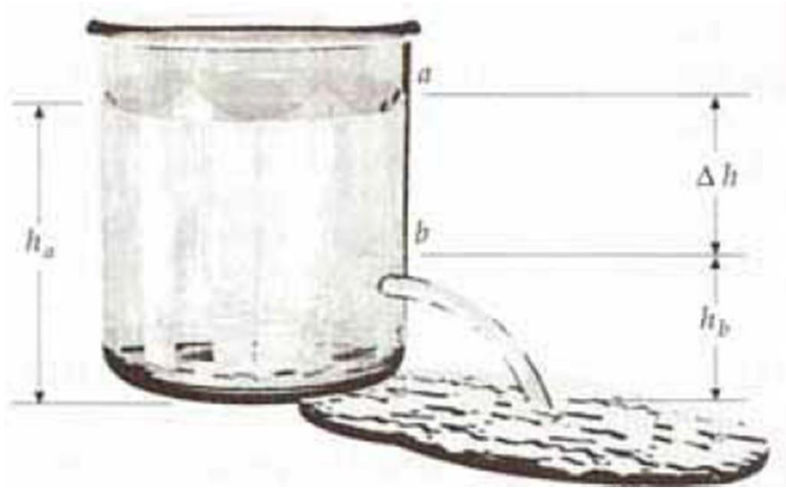
- Para uma tubagem horizontal, temos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 \quad (18')$$

- Lembremos que para fluídos incompressíveis $\rho = const$.

- Aplicações da equação de Bernoulli:

✓ **Lei de Torricelli:** determinação da velocidade de descarga de um tanque aberto por cima e com pequeno orifício lateral à distância Δh.



- **Solução:** A velocidade em a é nula

$$p_a + \rho g h_a = p_b + \rho g h_b + \frac{1}{2}\rho_2 v_b^2 \qquad (19)$$

- As pressões nos pontos a e b são iguais à pressão atmosférica devido a abertura do tanque. Logo, a eq. 19 será:

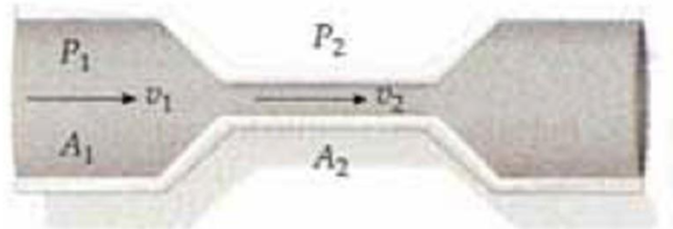
$$\rho g h_a = \rho g h_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \leftrightarrow$$
$$v_b = \sqrt{2g(h_a - h_b)} = \sqrt{2g\Delta h}$$

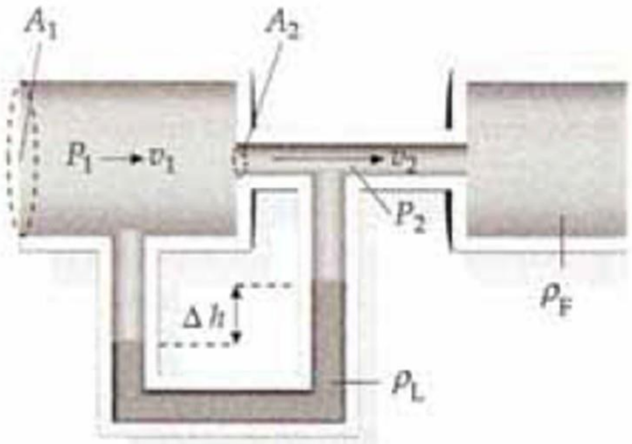
✓ **Efeito de Venturi**

O efeito Venturi observa-se numa tubagem horizontal com duas secções diferentes (uma tubagem com estrangulamento)

- O fluído de massa m passa por um tubo de secção A_1 e pressão p_1. Passando pela secção estrangulada, a velocidade do fluído aumenta para v_2.
- Como o tubo é horizontal, tal aumento ocorre devido a diminuição da pressão para p_2.

- **Tubo e medidor Venturi**





- Apliquemos a equação de Bernoulli em simultâneo com a equação da continuidade:

$$\begin{cases} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ A_1\bar{v}_1 = A_2\bar{v}_2 \end{cases}$$

- Da segunda equação podemos isolar a velocidade média na secção 2.
- $\bar{v}_1 = \frac{A_1}{A_2}\bar{v}_1$e substituir na primeira:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}\bar{v}_1\right)^2$$

- Nas 2 equações (Bernou<u>ll</u>i e continuidade) utiliza-se a velocidade média e não a máxima ($\bar{v}_1 = v_1$) .(Logo, a vellocidade pose ser expressa em função da diferença de pressão e parâmetros do tubo.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(r^2 - 1)}}$$

- r –razão entre as duas secções.

- Usando um manómetro apropriado, é possível medir a diferença de pressão Δp. Sendo um manómetro de mercúrio teriamos que

$$\Delta p = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

- onde qé a densidade do fluído ρ_F.

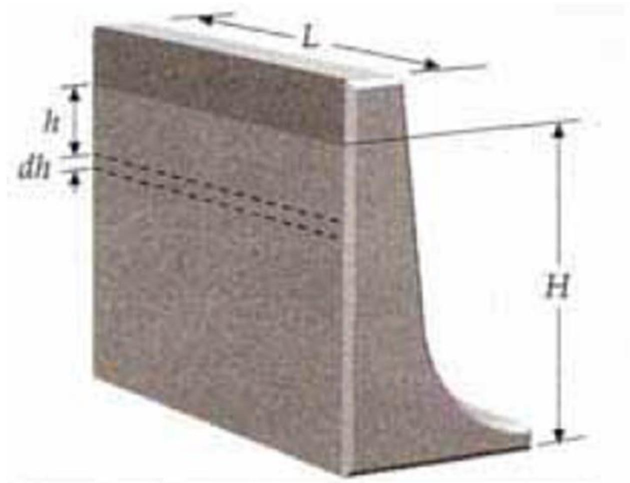
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho) g \Delta h}{\rho(r^2 - 1)}} = k\sqrt{\Delta h}$$

- K dependende unicamente das características do tubo utilizado.

Exemplos

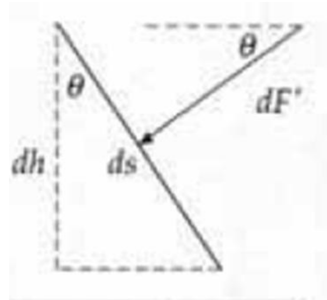
<u>Exemplo 1</u>: Uma represa rexctangular de comprimento $L = 30\ cm$, suporta uma quantidade de água de $25\ m$ de profundidade. Determine a força horizontal total exercida sobre a represa.

- Representação do problema. Nota-se que a força horizontal depende da profundidade.



Solução:

- Já que a pressão depende da profundidade, não podemos fazer a simples multiplicação da pressão p, pela área; devemos encontrar um elemento de área dA = Ldh, para depois integrar o h de zero até 25 m:
- $dF = pdA = (p_{atm} + \rho gh)Ldh$
- $F = \int_0^H (p_{atm} + \rho gh)Ldh =$
- $F \equiv F_{mont} = p_{atm}LH + \rho gL\frac{H^2}{2}$



- Resultado válido para pressão atmosférica independente da profundidade, e neste caso esta força actua sobre a parede vertical (à montante).
- Lembremo-nos que à jusante o perfil da parede não é vertical .

- Logo, a foça elementar exercida pelo ar perpendicularmente a parede sobre a secção de área Lds será F´:

$$dF' = p_{atm.}Lds$$

A componente horizontal será a projecção da equação anterior:

$$dF'_x = p_{atm}Lds\cos\theta$$

Analisando a figura conclui-se que $\cos\theta = \frac{dh}{ds}$. Logo teremos:

$$dF'_x = p_{atm}Ldh \leftrightarrow F'_x \equiv F_{jus} = p_{atm}LH$$

A força horizontal total será:

$$F = F_{atm} - F_{jus} = p_{atm}LH + \rho g L\frac{H^2}{2} - p_{atm}LH = \rho g L\frac{H^2}{2} =$$

$$F = 10^3 \times 9{,}81 \times 30 \times \frac{25^2}{2} = 9{,}2 \times 10^7 N$$

- Consideremos um fluído que escoa de forma lamelar (laminar) por uma tubagem cilíndrica e estreita de raio r e comprimento L.

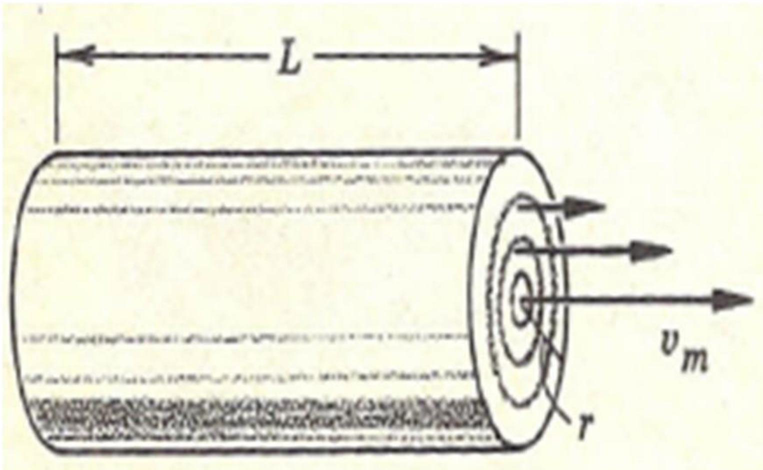
- A velocidade da camada do fluído adjacente às paredes aproxima-se a e zero, a velocidade é max no centro, v_{max};

- Fluído passando por tubagem de raio r comprimento L.

- A velocidade em cada camada concêntrica diminui de v_{max} no centro para zero na camada mais afastada, de modo que a velocidade média é:

$$\bar{v} = \frac{v_{max}}{2}$$

nota: v_m no desenho corresponde a v_{mx}.



- O movimento do fluído no tubo sofre oposição da força viscosa exercida pelo atrito interno entre as diferentes camadas do fluído dentro da tubagem;

- Para superfícies planas, a força viscosa, F_v é:
- $F_{v\,=}\,5Av/d,$
- onde η é coeficiente de viscosidade, *A* é a área da placa, *d* a separação entre as placas e *v* a velocidade do fluído.
- No caso de tubagem cilíndrica a área em contacto com o fluído é área lateral $(A\ =\ 2\pi rL)$. Assim teremos:

$$F_v = \eta\,\frac{2\pi rLv_{max}}{r} = 2\pi\eta Lv_{max}$$

- Análises experimentais mais pormenorizadas indicam que a força real para superfícies cilíndricas é o dobro da calculada, ou seja,

$$F_v = 4\pi\eta L v_{max}$$

- Para manter o fluído em movimento à velocidade constante, é necessária a acção de um força externa de magnitude igual a F_v. Se a gravidade for desprezada, a única força motora será aquela que está associada a pressão do líquido.

- O fluído que entra à esquerda exerce uma força p_1A para a direita ao fluído que se encontra dentro do tubo, e o fluído que abandona o tubo, à direita à pressão p_2, exerce uma força para à esquerda para o fluído que se encontra dentro do tubo;

- Lembrando que neste caso a área A corresponde a secção recta, a força motora resultante será:

$$p_1A - p_2A = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

- Comparando a equação anterior com $F_v = 4\pi\eta L v_{max}$ isto é,

$$4\pi\eta L v_{max} = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

obtem-se:

$$v_{max} = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{4L}$$

- Esta equação expressa a velocidade do fluído no centro da tubagem. Para dada diferença de pressão, v_{max} aumenta com o aumento de r e diminui com o aumento de η e L.

- Substituindo a vazão na última expressão
- $\left(Q = \frac{V}{t} = A \times \frac{l}{t} = \pi r^2 \bar{v}\right)$ obtemos:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^4}{8\eta L}$$

- Expressão conhecida por **lei de Poiseuille**, expressa que a quantidade de fluído que passa por uma tubagem é proporcional ao produto da queda de pressão ao longo dela e do raio do tubo levantado a potência 4.

- $R = 8\eta L/\pi r^4$ - representa a resistência hidrodinâmica

Número de Reynolds

- Renolds realizou repetidas experiências, respeitantes a fluídos em movimento e concluiu que a passagem do regime laminar para o turbulento ocorre quando a velocidade média do fluído for cerca de 2000 vezes superior em relação ao valor crítico dado por:

$$v_c = \mu/(\rho d)$$

- onde d é o comprimento característico do corpo (diâmetro no caso de corpos esféricos) ou diâmetro do tubo para um líquido que escoa através desse tubo.
- A razão entre a velocidade média de escoamento e a velocidade crítica designa-se de número de Reynolds.

$$R_e = \frac{v_m}{v_c} = \frac{2(v_m \rho r)}{\mu} = \frac{\rho d}{\mu} v_m$$

- Para $R \leq 2000$ o escoamento é laminar;

- Para valores de $R > 3000$ o escomento é turbulento;

- E para valores intermediários entre os dois o escoamento é instável, podendo passar de um regime para outro.