

## Faculdade de Engenharia

- **Tema # 3 \_ Dinâmica de uma partícula**
  - **3.1. Massa e Peso.**
  - **3.2. Segunda lei de Newton.**
    - **3.2.1. Quantidade de movimento.**
    - **3.2.2. Princípio de conservação da quantidade de movimento.**
  - **3.3. Impulso linear de uma força.**
    - **3.2.1. Teorema de impulso linear.**
  - **3.4. Colisões**

Prof. Félix F. Tomo

- **Introdução: Força e movimento**
- A **dinâmica** ocupa-se ao estudo da relação entre o movimento e as suas causas- as forças: acção ou efeito que um determinado objecto pode sofrer podendo ter uma deformação, variar sua trajectória ou em geral, experimentar uma aceleração.
- Usa-se a dinâmica para prever o movimento causado pelas forças aplicadas ao objecto, ou para determinar as forças necessárias para produzir um determinado tipo de movimento.
- Ela está assente em três leis de movimento estabelecidas por Newton (mecânica classica):

- **Primeira lei de Newton (lei da inércia):** Se a resultante de todas as forças que actuam sobre um objecto for nula, o corpo estará em repouso, ou em movimento rectilíneo uniforme.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = 0$$

- **Segunda lei de Newton (equação do movimento):** Um objecto que sofre a acção de uma força resultante diferente de zero, adquire uma aceleração proporcional à força aplicada e na mesma direcção e sentido.

$$\vec{F}_r = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2) \quad \text{ou}$$

$$\vec{F}_r = m\vec{a} \quad (2')$$

- **Terceira lei de Newton (acção-reacção):** Se sobre um corpo A actuar uma força como resultado da interacção com um outro corpo B, simultaneamente sobre o objecto A actuará uma força de igual magnitude e direcção, mas de sentidos opostos.

$$\frac{d}{dt}(m_A \vec{v}_A) = -\frac{d}{dt}(m_B \vec{v}_B), \text{ ou}$$

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A} \quad (4)$$

- A mecânica newtoniana é considerada caso especial da mecânica relativista
- (que obedece a lei de relatividade restrita de Einstein)
- em que os objectos movem-se com velocidades relativamente muito baixas em relação à velocidade da luz e da mecânica quântica, a qual é aplicada para objectos muito pequenos como átomos ou electrões

- **Massa e Peso**

Todo o objecto material é constituído por átomos (ex: átomo de hidrogénio) os quais se agrupam em moléculas (ex: molécula de H<sub>2</sub>O).

Os átomos por sua vez são constituídos por um núcleo (com protões e neutrões) e electrões que orbitam em torno do núcleo segundo determinadas regras.

**A massa de um determinado objecto refere-se a quantidade de substância que compõe esse objecto (a soma da massa de todos os átomos que compõem o objecto):**

$$M = \sum_{i=1}^N m_{atomo,i} = \sum_{i=1}^M m_{Protão,i} + \sum_{i=1}^M m_{electrão,i} + \sum_{i=1}^L m_{Neutrão,j}$$

$$m_p = 1,673 \times 10^{-27} kg, \quad m_e = 9,11 \times 10^{-31} kg \quad e \quad m_n = 1,674 \times 10^{-27} kg$$

A massa é a mera da inércia de um corpo: quanto maior for a massa, maior será a resistência do corpo a ser acelerado.

A unidade internacional da massa é o  $kg$ , cujo padrão (barra cilíndrica de Platina e Irídio ) está guardado bem Sévres, na França.

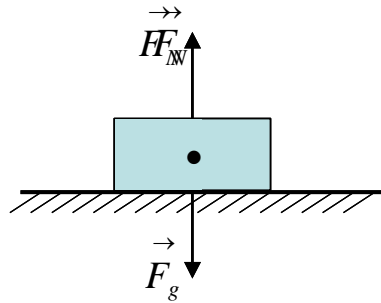
Em Física nuclear e atômica a unidade padrão conveniente é a unidade unificada de massa atômica ( $u$ ):

$$1 u = 1.660540 \times 10^{-27} kg$$

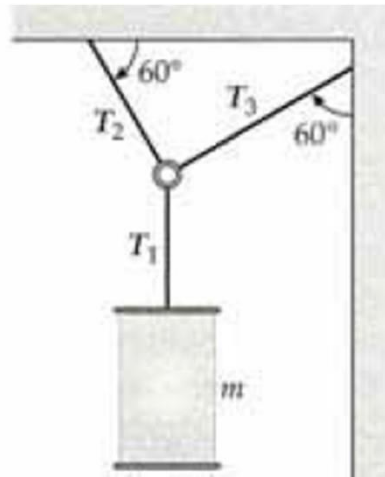
**Objectos de diferentes massas agindo sobre eles força de determinada intensidade, receberão acelerações diferentes.**

- **Peso:** o peso é a força que determinado objecto exerce, perpendicularmente, sobre uma superfície de sustentação (a & c) ou sobre ponto de suspensão (b). O peso nunca actua sobre o próprio objecto e nem sempre é igual a força de gravidade.

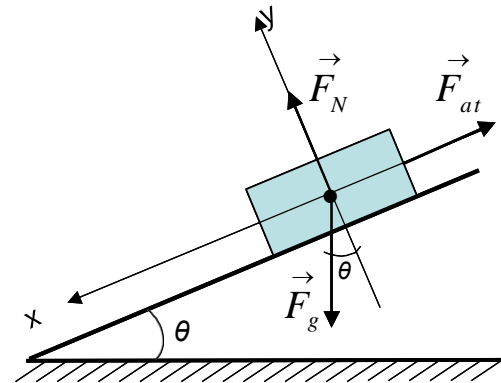
(a)



(b)



(c)



- Calculemos o peso do objecto para cada uma das 3 situações.

$$(a) F_N - P = 0 \quad (3^{\text{a}} \text{ lei de Newton}) \text{ e}$$

$$F_N - F_g = 0 \quad (1^{\text{a}} \text{ lei de Newton}). \text{ Logo,}$$

$$P = mg$$

$$(b) T_1 - P = 0 \quad (3^{\text{a}} \text{ lei de Newton}) \text{ e}$$

$$T_1 - F_g = 0 \quad (1^{\text{a}} \text{ lei de Newton}). \text{ Consequentemente,}$$

$$P = mg$$

$$(c) F_N - P = 0 \quad (3^{\text{a}} \text{ lei de Newton}) \text{ e}$$

$$F_N - F_g \cos(P) = 0 . \text{ Logo,}$$

$$P = mg \cos(P)$$

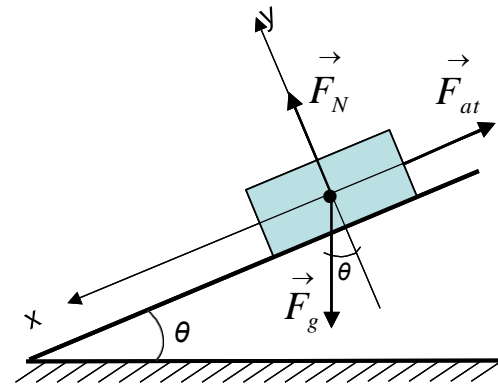
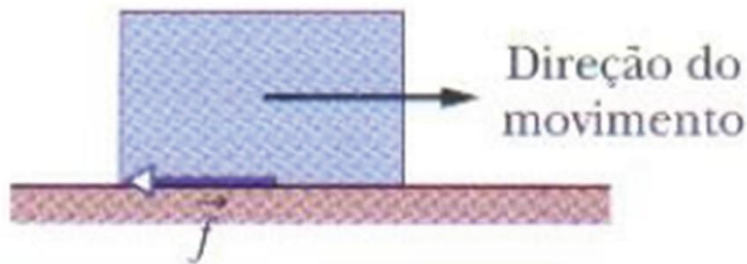


- **Algumas forças mecânicas especiais**
- **Força gravidade ( $\vec{F}_g$ )**: força que a Terra exerce sobre determinado objecto;
- **Força normal ( $\vec{F}_N$ )**: força que a superfície de sustentação exerce sobre um objecto, em reacção ao peso que o objecto exerce sobre a superfície. É uma força de contacto e é sempre perpendicular à superfície;
- **Força de atrito ( $\vec{F}_{at}$ )**: força de contacto entre um objecto e a superfície em que este está apoiado. Actua paralelamente à superfície no sentido oposto ao da tendência do movimento do corpo.

Entre as duas forças de contacto (normal e de atrito) é válida a seguinte equação material:

$$F_{at} = \mu F_N$$

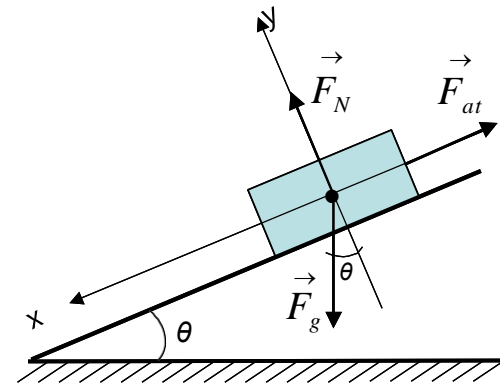
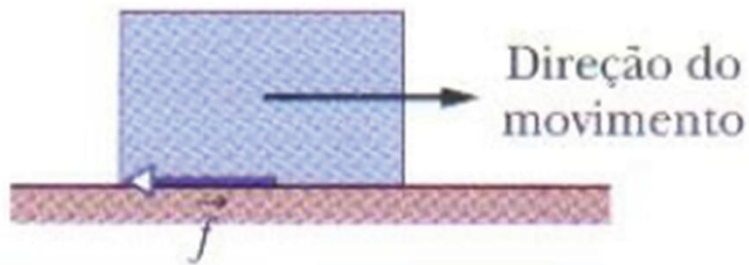
$\mu$  – coeficiente de atrito dependente da natureza dos materiais e estado das superfícies.



Numa superfície completamente lisa o **atrito é desprezível**.

Distingue-se o atrito estático-força de atrito que actua enquanto o objecto está em repouso, ela aumenta com o aumento da força aplicada, sendo máxima no limiar do movimento:

- **Força de atrito ( $\vec{F}_{at}$ )** : força de contacto entre um objecto e a superfície em que este está apoiado. Actua paralelamente à superfície no sentido oposto ao da tendência do movimento do corpo;

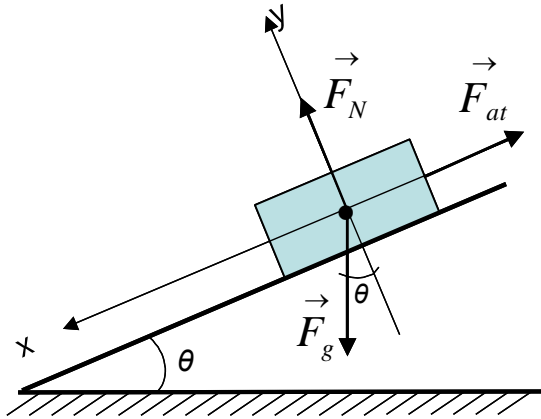


$$F_{at,e,max} = \mu_e F_N$$

- Uma vez iniciado o movimento a força de atrito reduz ligeiramente, passando a ser de atrito cinético:

$$F_{at,c} = \mu_c F_N$$

- **Exemplo 1:** Um bloco de massa  $m$  desliza à velocidade constante sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Avalie o coeficiente de atrito cinético.



$$\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_{at} = 0$$

Projectemos esta equação nos eixos de coordenada (veja que o eixo x foi escolhido para baixo e y cima ):

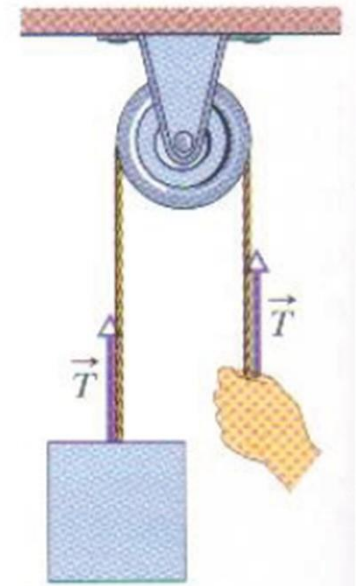
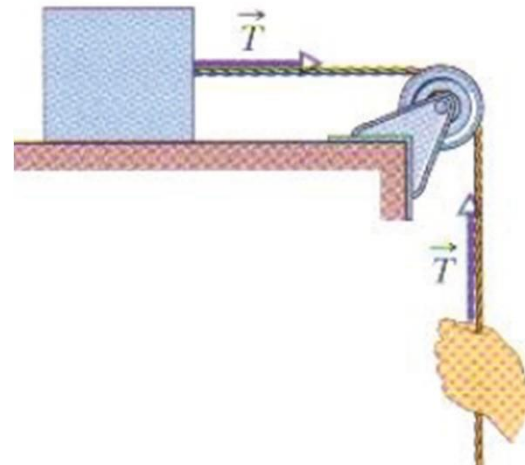
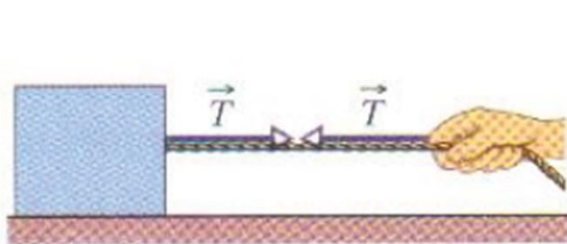
$$\begin{cases} x: F_{g,x} - F_{at} = 0 \\ F_N - F_{g,y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x: mg \sin \theta - F_{at} = 0 \\ y: F_N - mg \cos \theta = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$F_{at} = \mu_c F_N \Rightarrow \begin{cases} x: mg \sin \theta - \mu_c mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

—  
ou

$$\tan \theta = \mu_c$$

- **Tracção** (Tensão num cabo): Quando uma corda está sob tensão, cada extremidade exerce força sobre o objecto.



- **Força elástica:** força de reacção exercida por objectos com propriedades elásticas a objectos que tendem a comprimi-los (compressão) ou alonga-los (tracção). Quando a elongação é proporcional a força aplicada, tem lugar a lei de Hooke:

$$F_{el} = kx$$

$$x = |l - l_0| ;$$

- $l$  e  $l_0$  – é, respectivamente, a dimensão final e inicial do objecto elástico e
- $k$  – constante elástica que depende da natureza dos materiais que compõem a mola, bem como do comprimento da mola e da espessura das espiras.

# Força de arrasto e velocidade terminal

Quando um objecto move-se num determinado fluído (líquido ou gás), o objecto experimenta uma força de arrasto ( $\vec{F}_{arrast.}$ ), representada muitas vezes por  $\vec{D}$  (drag force na lingua inglesa).

A força sendo de resistência ao movimento, é oposta ao movimento relativo.

Para corpos com configuração esférica, movendo à velocidade relativa pequena temos:

$$D = 6\pi\eta r v \text{ (lei de Stokes)}$$

$r$ —raio da partícula,  $\eta$ —coeficiente de viscosidade e  $v$  — velocidade relativa.



- Em geral, sobre um corpo que se move num fluído viscoso sob a acção de uma força constante  $F$ , a equação do movimento (2a lei Newton) é:

$$F - D = ma$$

**Ex: Obter a velocidade, em função do tempo, de uma partícula que se move em linha recta através de um fluído viscoso. Suponha que  $D$  seja proporcional à velocidade ( $D = K\eta v$ ).**

Primeiro vamos escrever a lei do movimento:

$$m \frac{dv}{dt} = F - K\eta v$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - K\eta v$$

- ou

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - K\eta v}{m} = -\frac{K\eta}{m} \left( v - \frac{F}{K\eta} \right) \Leftrightarrow dv = -\frac{K\eta}{m} \left( v - \frac{F}{K\eta} \right) dt$$

- ou

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left( v - \frac{F}{K\eta} \right)} = -\frac{K\eta}{m} \int_{t_0}^t dt$$

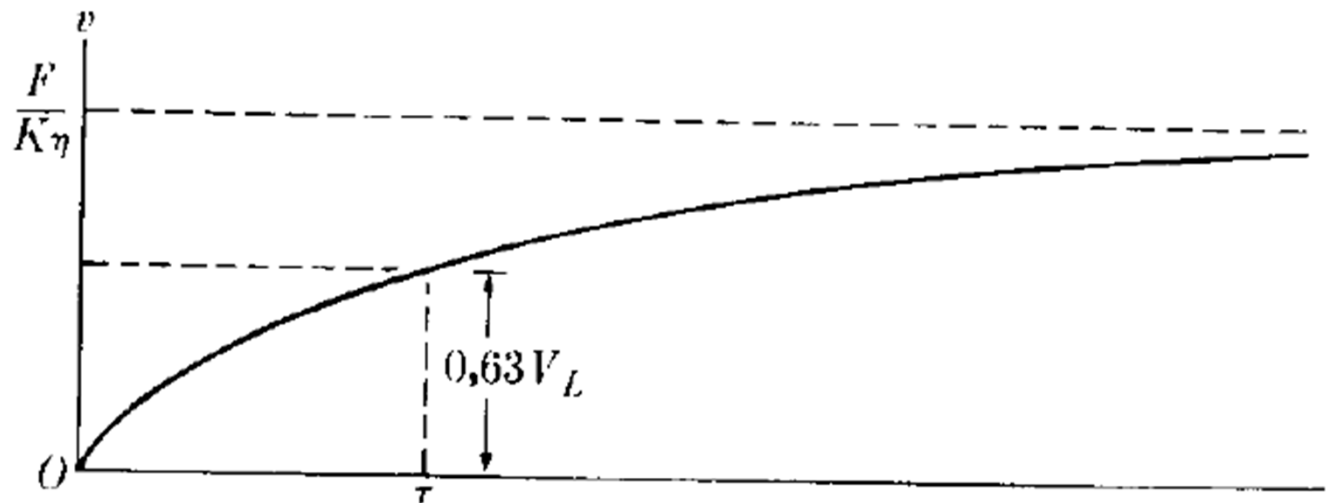
$$\ln \left( \frac{v - \frac{F}{K\eta}}{v_0 - \frac{F}{K\eta}} \right) = -\frac{K\eta}{m} t \quad \text{ou} \quad \frac{v - \frac{F}{K\eta}}{v_0 - \frac{F}{K\eta}} = e^{-\frac{K\eta}{m} t}$$

- ou

$$v(t) = \frac{F}{K\eta} + \left( v_0 - \frac{F}{K\eta} \right) e^{-\frac{K\eta}{m} t}$$

O segundo termo decresce muito rapidamente, pelo que pode-se desprezar, e a velocidade limite será:

- $v_L = \frac{F}{K\eta}$  e é independente da velocidade inicial.
- Para  $v_0 = 0$ ,  $v(t) = \frac{F}{K\eta} \left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)$



- Para **velocidades suficientemente consideráveis** capazes de provocar turbulência, a dependência relativamente à velocidade é quadrática:

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

- $C$ - coeficiente de arrasto;  $\rho$ - densidade do fluido e  $A$  – área de secção recta. Um corpo ao movimentar-se verticalmente num determinado fluido sofre a acção da força de gravidade e a de arrasto (desprezando a impulsão). **Nesse movimento, o aumento da velocidade implica aumento de  $D$ .**
- Passado algum tempo o movimento deixa de ser acelerado devido ao equilíbrio entre as duas forças. A velocidade constante desse movimento denomina-se **velocidade terminal**:

$$D - mg = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} C \rho A v^2 - mg = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2mg}{C \rho A}}$$

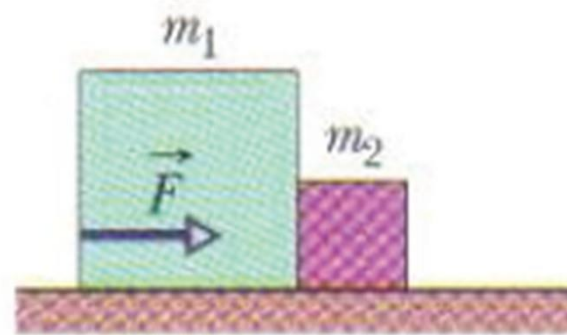
Os animais, esquiadores e paraquedistas usam eficientemente seu corpo para variar  $D$  de acordo com as circunstâncias.

# Estratégias para resolver problemas típicos da dinâmica

- ✓ Esquematizar o problema apresentado (desenho);
- ✓ Representar todas as forças que actuam sobre o(s) objecto(s). Represente através das origens das forças para evitar indicação de uma mesma força com nomes diferentes;
- ✓ Escrever equação vectorial que traduz a lei de Newton a aplicar de acordo com a classificação do problema;
- ✓ Projectar nos eixos de coordenada a equação escrita no ponto anterior.
- ✓ Ressolver a equação ou sistema de equações e analisar a solução.

## Exemplo:

- Dois blocos estão em contacto numa mesa horizontal e completamente lisa. Uma força  $\vec{F}$  é aplicada ao corpo da esquerda. (a) Se  $m_1 = 2.3 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$  e  $F = 3.2 \text{ N}$ , determine o módulo da força que actua entre os blocos.



- Representemos todas as forças que agem sobre cada um dos objectos não se esquecendo da que cada um dos objectos age sobre o outro (acção-reacção). Começemos por alínea a):

- **Para  $m_1$  temos:**

$$\begin{cases} x: F - F_{2,1} = m_1 a \\ y: F_{N1} - m_1 g = 0 \end{cases}$$

- **Para  $m_2$  temos**

$$\begin{cases} x: F_{1,2} = m_2 a \\ y: F_{N,2} - m_2 g = 0 \end{cases}$$

- Usemos as equações em  $x$  para resolver o problema, já que não se pede a força normal e a força de atrito é nula:

$$\begin{cases} \text{x: } F - F_{2,1} = m_1 a \\ \text{x : } F_{1,2} = m_2 a \end{cases}$$

Somando estas duas equações achamos a aceleração, e com ela determinaremos as forças de contacto ( $F_{1,2}/F_{2,1}$ ).

$$F = (m_1 + m_2)a \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m_1 + m_2} & \text{e} & & F_{1,2} &= m_2 \frac{F}{m_1 + m_2} = 1,2 \frac{3,2}{2,3 + 1,2} \\ &= 1,097 \approx 1.1 \text{ N} \end{aligned}$$



# • Quantidade de movimento

- **Quantidade de movimento**, também conhecida por momento linear, é uma grandeza vectorial  $\vec{p}$  dada pela expressão:  
$$\vec{p} = m\vec{v}$$
- A direcção e sentido de  $\vec{p}$  é definida pela direcção e sentido do vector velocidade. Esta grandeza dá informação de maior qualidade do que a velocidade.
- **Exemplo:** dois automóveis de massas diferentes e movendo-se à mesma velocidade, para iguais intervalos de tempo experimenta-se diferentes variações da quantidade de movimento, sendo por isso mais difícil acelerar ou travar o carro de maior massa.
- **A quantidade de movimento expressa-se em kg.m/s.**
- A taxa de variação temporal da quantidade de movimento é igual a resultante das forças que actuam sobre a partícula e tem a mesma orientação que a força:

$$\vec{F}_r = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ caso } \vec{v} \text{ seja constante}$$

$\vec{v}$  muda se existir força e se esta não existir,  $\vec{p}$  será constante.

- **Conservação da quantidade de movimento**

- Quando a força resultante externa aplicada a um objecto é nula, a quantidade de movimento desse objecto será constante.
- Ou Para um sistema isolado a quantidade de movimento permanece constante:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow$$

- Se a força externa total exercida é nula,

- então a quantidade de movimento é constante:

$$\vec{p} = \text{constante}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

- Esta formulação constitui a lei de conservação da quantidade de movimento.

- O que acontece se a partícula não é isolada? Suponhamos que a partícula A interage com a partícula B e ambas estão isoladas do resto do universo.
- Neste caso a quantidade de movimento do conjunto será conservado:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

- A quantidade de movimento de um sistema composto de duas partículas sujeitas apenas às suas interações mútuas permanece constante. Generalizando, a conservação da quantidade de movimento implica:
- $\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} + \cdots + \vec{p}_{N,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} + \cdots + \vec{p}_{N,f}$

- **Impulso linear de uma força**

- Chama-se de impulso à variação da quantidade de movimento num dado intervalo de tempo:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

Usando a segunda lei de Newton na sua forma mais geral **(teorema do momento linear)**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext.}$$

- Conclui-se  $\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F}_{ext.} dt$  - representa o efeito da força ao longo do tempo. Para força externa constante:
- $\Delta\vec{p} = \vec{F}_{ext.}(t - t_0)$  se a força externa resultante for constante

- **Colisões**

- Numa colisão a força exercida sobre o objecto é de curta duração, mas as intensidades das forças envolvidas são elevadas, tal que a quantidade de movimento muda bruscamente. Distinguem-se dois tipos de **colisões** ou choques: **inelásticas e elásticas**.
- Na **colisão inelástica** não há conservação de energia cinética, entretanto, se o sistema for fechado e isolado, haverá conservação da quantidade de movimento:

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}$$

Durante a colisão, a quantidade de movimento no instante imediatamente antes da colisão é igual à quantidade de movimento do sistema no instante imediatamente após a colisão.

Se após a colisão os objectos envolvidos na colisão movem-se juntos (com a mesma velocidade), a colisão chama-se de perfeitamente inelástica.

- Na **colisão elástica** conserva-se a quantidade de movimento e **conserva-se também a energia cinética**:

- No caso de 2 objectos teremos:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

- $\frac{m_i v_i^2}{2} = E_{c,i}$  -Energia cinética e  $m_i \vec{v}_i$  quantidade de movimento

$$\frac{p_i^2}{2m_i} = E_{c,i}$$

- Dependendo de se tratar colisão unidimensional ou bidimensional, a primeira equação torna-se numa única equação escalar ou duas equações escalares, as quais são obtidas por projeção da equação vectorial nos eixos de coordenada.