UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FíSICA I

Faculdade de Engenharia

- **Tema # V _ Dinâmica de Sistema de Partículas**
  - **Centro de massa;**
  - **Massa reduzida ;**
  - **Coordenadas do centro de massa ;**
  - **Referencial do centro de massa ;**
  - **Cinemática do centro de massa ;**
  - **Segunda lei de Newton para um sistema de partículas ;**
  - **Momento linear de um sistema de partículas ;**
  - **Relação entre variáveis cinemáticas no referencial inercial e no referencial centro de massa**

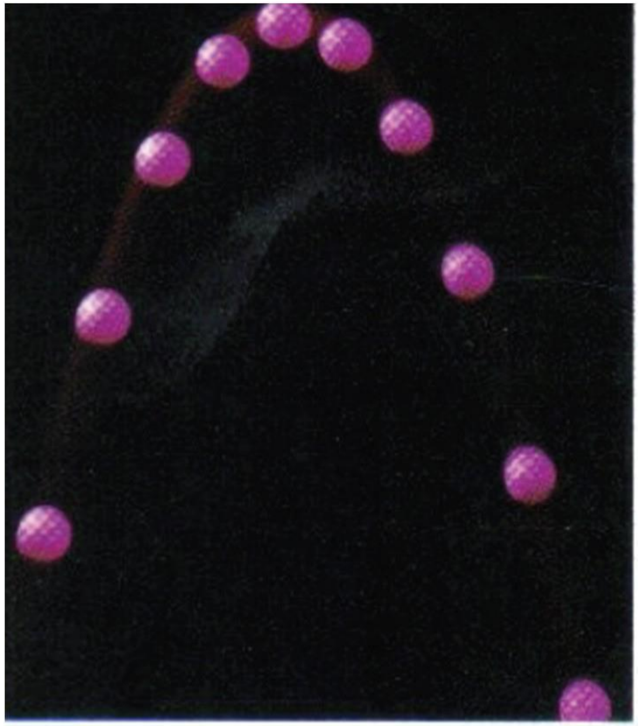
Félix F. Tomo

Introdução

- O objectivo deste capítulo é a simplificação de movimentos complicados de um sistema de objectos que no seu todo não pode ser tratado como partícula, por movimento simples de um ponto especial chamado centro de massa.

- As diferentes partes constituintes do todo podem realizar movimentos complicados, incluindo rotação em torno do centro de massa, mas o centro de massa move-se tal como se se tratasse de partícula.

Movimento simples de uma bola assemelha-se ao de partícula

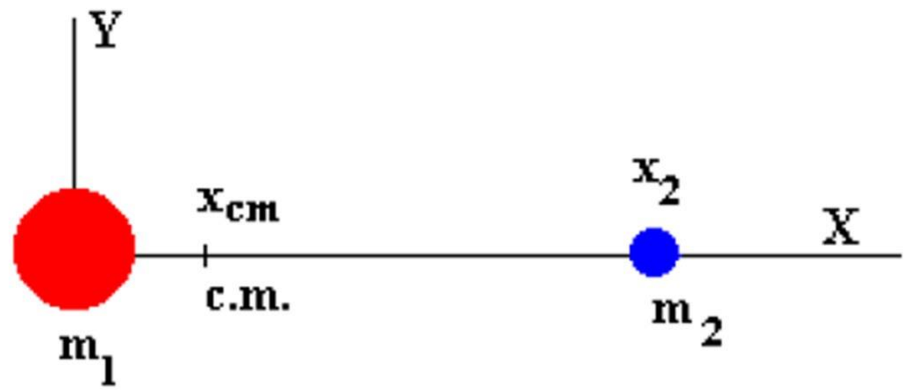


Movimento complicado de taco de baseball, cujo CM tem mov. simples

• Centro de masa (CM)

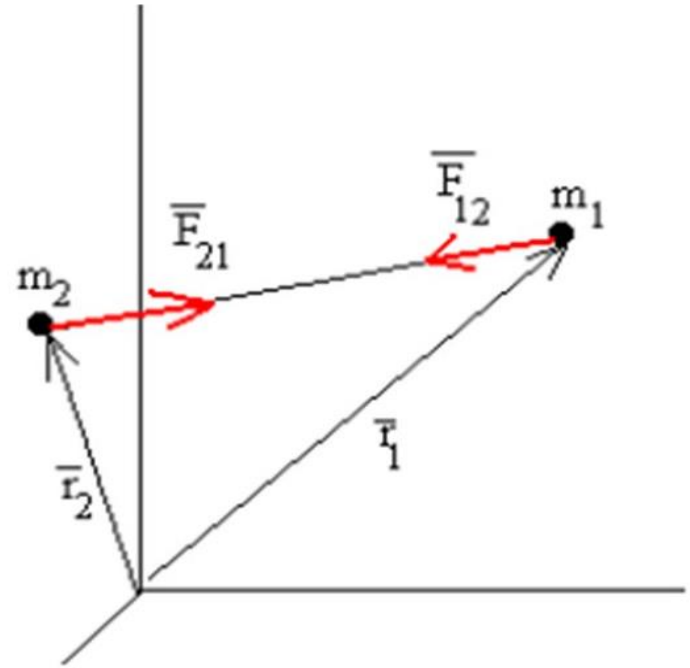
- Centro de massa de um sistema de partículas é um ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto, e se todas as forças externas fossem aplicadas nesse ponto.

- A localização do CM depende da relação entre as massas (próximo a maior massa).



Massa reduzida

- Consideremos um sistema de duas partículas sujeitas apenas às suas interacções mútuas, ou seja, não há forças externas agindo sobre o sistema.
- Neste caso as forças internas mútuas são do tipo acção-reacção.
- Ausência de forças externas Implica que a aceleração do CM é nula $(\vec{v}_{CM} = const.)$



- A equação de movimento para cada partícula relativamente a um observador inercial ”O” localizado na origem do sistema de refência será:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \qquad\qquad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

- Dividindo cada equação pela massa da partícula, teremos a aceleração correspondente:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad\qquad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

- Subtraíndo a segunda da primeira equação, teremos a aceleração relativa das partículas

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

Ou

$$\frac{d(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{dt} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}$$

- A aceleração relativa das partículas é equivalente a razão entre a força mútua de interacção e a massa reduzida μ.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- **O movimento relativo de duas partículas sujeitas apenas as suas interacções mútuas, é relativamente a um observador inercial, equivalente ao movimento de uma partícula de massa igual à massa reduzida sob a acção de uma força igual à força de interacção.**
- Para várias partículas sob a acção de forças mútuas teremos:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_N}$$

• Coordenadas do centro de massa

- Para 2 partículas de massas m_1 e m_2, localizadas nas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ relativamente a um certo referencial, define-se de centro de massa, CM, relativamente ao mesmo referencial, a posição de um ponto definida por:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

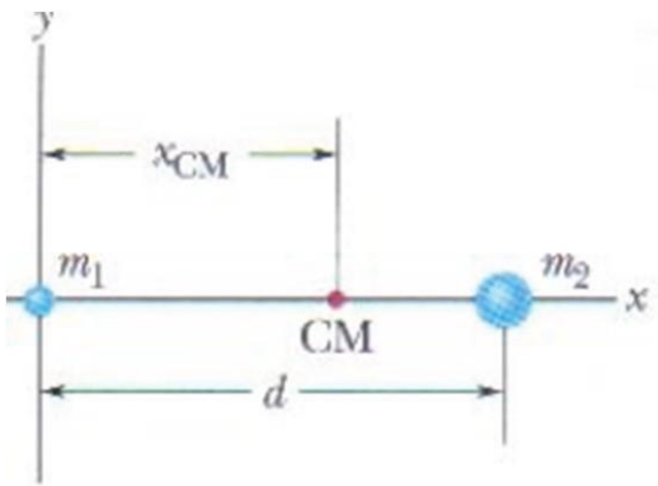
- No caso de várias partículas distribuídas de forma discreta, a equação (1) pode ser estendida para situação mais geral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

- Dependendo da distribuição das partículas numa única linha, no plano, ou no caso tridimensional, a posição do CM pode corresponder a uma, duas ou três equações escalares:

- **Caso unidimensional** (partículas alinhadas ao longo de um só eixo, x por exemplo)

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Ou $X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$

No plano teriamos:

$$\begin{cases} X_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \end{cases}$$

- Analogamente, no caso tridimensional teriamos as seguintes equações escalares:

$$\begin{cases} X_{CM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ y_{CM} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \\ z_{CM} = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \end{cases}$$

- Quando tratamos de um corpo massiço, portanto constituído de muitas partículas, aproxima-se a distribução contínua de massa, tal que cada partícula tem massa elementar (infinitesimal) *dm* cuja posição $d\vec{r}$ é representada pelas correspondentes projecções e vectores unitários

$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

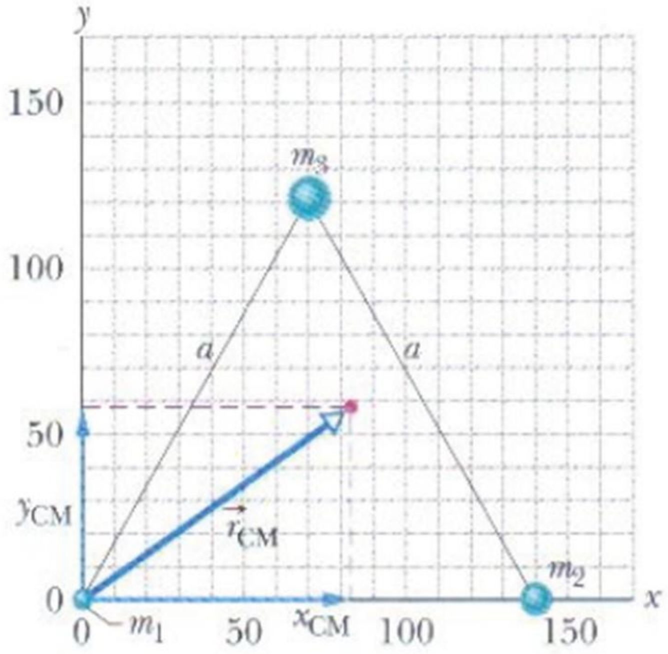
- as coordenadas do CM são representadas por:

$$\begin{cases} X_{CM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int xdm \\ \\ Y_{Cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int ydm \\ \\ Z_{CM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int xdm \end{cases}$$

O elemento de massa dm expressa-se por $dm = \rho dV$

Exemplo 1: Três partículas de massas m_1, m_2 e m_3, de massas iguais a $1.2\ kg, 2.5\ kg\ e\ 3.4\ kg,$ respectivamente, formam um triângulo equilátero de $140\ cm$ de lado. Encontre as coordenadas do CM.

Solução: Uma das formas de simplificar a solução, é colocarmos a origem do sistema de referência de modo a coincidir com a posição de uma das partículas (m_1 por exemplo).



$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$x_{CM} = \frac{1.2 \times 0 + 2.5 \times 140 + 3.4 \times 70}{1.2 + 2.5 + 3.4}$$

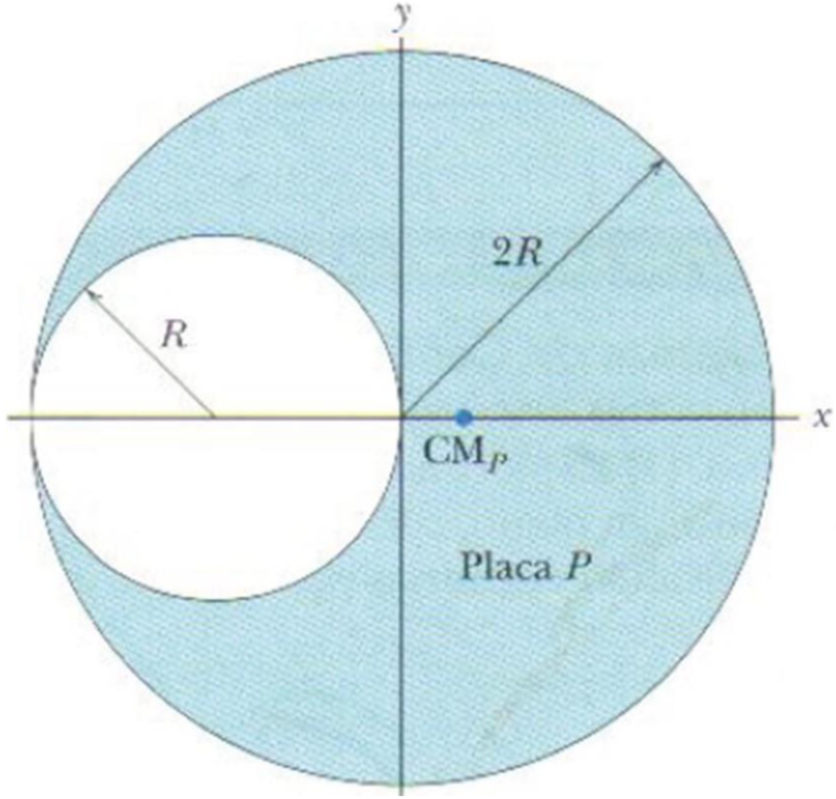
$$x_{CM} = \frac{0 + 350 + 238}{7.1} = 82.82 \approx 83cm$$

$$y_{CM} = \frac{1.2 \times 0 + 2.5 \times 0 + 3.4 \times 121}{7.1} =$$

$$y_{CM} = \frac{411.4}{7.1} = 57.94 \approx 58 \text{ cm}$$

- **Exemplo 2: Uma** placa metálica homogénea de raio 2R, sofreu corte circular de raio R, tal como mostra a figura. Encontre as coordenadas do centro de massa.

- Disco com corte



- **Solução:** sem corte o CM localiza-se no centro geométrico (por ser homogénea ⇒ densidade superficial é constante)

- Designemos por m_D – massa do disco, cujo centro de massa é $x_D = -R$ e m_P – a massa da parte restante cujo centro de massa x_P não é conhecido.
  Antes da retirada do corte circular, o centro de massa do conjunto era $(x_{CM}, ; y_{CM}) = (0, ; 0)$.

  Relativamente ao sistema de referência do CM :

$$m_P x_P - F_D x_D = 0 \to x_P = -\frac{m_D x_D}{m_P} = \frac{\rho V_D x_D}{\rho V_P} = \frac{V_D x_D}{V - V_D}$$

$$x_P = \frac{\pi R^2 h \times (-R)}{\pi(4R^2)h - \pi R^2 h} = \frac{R}{3}$$

Uma forma mais simples de resolver, é aplicar equilíbrio estático que ainda não tratamos (calculando os momentos de força aplicados sobre o objecto):

$$F_P x_P - F_D x_D = 0 \rightarrow x_P = \frac{F_D x_D}{F_P} = \frac{\rho V_D g x_D}{\rho V_P g} = \frac{V_D x_D}{V - V_D}$$

$$x_P = \frac{\pi R^2 h \times R}{\pi(4R^2)h - \pi R^2 h} = \frac{R}{3}$$

- **Referencial do CM**

- Conhecida a posição do CM, a posição de cada partícula relativa à posição do CM do sistema pode ser definida.
- Assim, a posição da partícula i-ésima relativamente ao CM define-se por:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}$$

- Para sistema de 2 partículas teremos:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}$$

E

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{r}_{21}}{m_1 + m_2}$$

Onde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, e $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ Logo, $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$

- **Cinemática do CM e quantidade movimento total de sistema de partículas**

- Consideremos que o sistema composto de partículas de massas $m_1, m_2, \dots, m_N$, vovendo-se com velocidades $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$, respectivamente, em relação a um referencial inercial.
- A velocidade do centro de massa é a taxa de variação temporal da posição do CM.

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}}$$

- Sabendo que $m_i\vec{v}_i$, é a quantidade de movimento da partícula i-ésima, conclui-se que a velocidade do CM pode ser expressa a partir da quantidade de movimento do do sistema:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

- Ou seja,

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM} = \sum \vec{P}_i$$

- Consequentemente, a quantidade de movimento total do sistema de partículas é igual a quantidade de movimento que o sistema teria se toda a massa estivesse concentrada no CM, movendo-se com uma velocidade igual a do CM.

- Sabemos que a quantidade de movimento total de um sistema isolado é contante. Se ligarmos um referencial inercial ao centro de massa de um sistema isolado, notaremos que relativamente a esse sistema o CM estará em repouso. Logo a quantidade de movimento total de um sistema de partículas relativamente ao CM é sempre zero:

$$\vec{P}_{CM} = \sum \vec{P}_1' = 0$$

- **Relativamente ao referencial C** (sistema ligado ao CM) pode ser calculada a velocidade de cada partícula a partir dos valores no referencial L (sistema laboratorial):

$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

- No caso de duas partículas as velocidades referentes ao centro de massa serão:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$$

- A quantidade de movimento cada partícula relativamente ao CM é:

$$\vec{P}_1' = m_1\vec{v}_1' = \frac{m_1 m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2} = \mu\vec{v}_{12}$$

e

$$\vec{P}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\frac{m_1 m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2} = -\mu\vec{v}_{12}$$

Segunda lei de Newton para sistema de partículas

- Imaginemos que *S* seja um sistema de partículas, o qual é rodeado por um outro sistema *S´*. Chamemos de *i* as partículas do sistema S e *j* as do S´.
- Consideremos que todas as partículas de um sistema podem interagir com todas as partículas do outro sistema, tal que a variação da quantidade de movimento da quantidade de movimento de S seja igual à variação ad quantidade de movimento de S´(excepto o sentido):

$$\Delta\vec{P}_S = -\Delta\vec{P}_{S'}$$

- Ou $\sum \Delta\vec{P}_i = -\sum \Delta\vec{P}_j$
- Dividindo termo a termo pelo intervalo de tempo Δt, a equação anterior resultará na força externa média que actuará em cada sistema de partículas. E se o intervalo de tempo tender para zero, as forças médias passarão para forças instantâneas:

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = -\frac{d\vec{P}_{S'}}{dt} \rightarrow \vec{F}_{ext.} = -\vec{F}'_{ext.}$$

$$\vec{F}_{ext.} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa do sistema e sujeito a força externa aplicada ao sistema.

- Para um sistema S composto por apenas duas partículas que interagem entre sí e com todas as partículas do sistema S´teriamos:

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \qquad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

- Somando as duas equações teremos a força externa líquida que age sobre o sistema S:

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \frac{d(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Exemplo 3: Uma granada que cai verticalmente explode em dois fragmentos iguais quando se encontrava a 2000 m e tem uma velocidade de 60 m/s. imediatamente após a explosão, um dos fragmentos move-se para baixo à velociade de 80 m/s. Procure a posição e a velocidade do CM 10 s depois da explosão.

Solução: Escolhamos um sistema de referência com origem no solo e eixo *y* para cima. Usemos a conservação da quantidade de movimento para determinar a velocidade do segundo fragmento imediatamente após a explosão.

$$\vec{P}_{i,antes} = \vec{P}_{i,após} = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

- Projetemos a equação vectorial no eixo escolhido:

$$-mv_0 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Ou

$$-mv_0 = -\frac{m}{2}v'_1 + \frac{m}{2}v'_2 \quad \Rightarrow$$

$$-v_0 = -\frac{1}{2}v'_1 + \frac{1}{2}v'_2 \Rightarrow v'_2 = 2\left(\frac{v'_1}{2} - v_0\right) =$$

$= 2\left(\frac{80}{2} - 60\right) = -40\ m/s$ (significa que move-se para baixo)

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} =$$

$$y_{CM} = \frac{\frac{m}{2}\left(y_0 - v'_1 t - \frac{1}{2}gt^2\right) + \frac{m}{2}\left(y_0 - v'_2 t - \frac{1}{2}gt^2\right)}{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{2}(2y_0 - (v_1 + v_2)t - gt^2) = \frac{1}{2}(2 \times 2000 - (80 + 40) \times 10 - 10 \times 10^2) =$$

$$y_{CM} = \frac{1}{2}(4000 - 1200 - 1000) = 900\ m$$

Analogamente, podemos calcular a velocidade do centro de massa:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m}{2}(v_1(t) + v_2(t))}{m} = \frac{(-80 - 40) - 20t)}{2} = -60 - 10t$$

- Portanto, o CM do sistema desloca-se verticalmente para baixo à velocidade inicial de60 m/s, sendo a velocidade final de 160 m/s, 10 s depois da explosão.

Energia cinética de um sistema de partículas

- A energia cinética total de um sistema de partículas em relação a um referencial inercial é a soma das energias cinéticas das partículas que compõem o sistema:

$$E_{c,tot.} = \sum E_{c,i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Vejamos agora como estão relacionadas a energia cinética total medidas no referencial L com a medida no referencial CM: Comecemos pela relação entre as velocidades:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$$

- Logo, a energia cinética será dada por

$$E_{c,tot.} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i'^2$$

- Ou seja, o termo $\vec{v}_{CM}.\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_1' = 0$ porque o segundo termo representa a quantidade de movimento total do sistema relativamente ao CM que é sempre nula.

- A energia cinética total de um sistema de partículas relativamente ao sistema laboratorial é igual a soma da energia cinética do CM em relação ao sistema laboratorial (energia de translação do sistema) mais a energia cinética do sistema relativamente ao CM (energia cinética interna do sistema).

Para um sistema de partículas o momento angular do sistema será:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_N$$

Onde $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Por outro lado,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext,tot} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext,tot}$ - lei fundamental para dinâmica de rotação.

- Na ausência de forças externas (quando o torque externo total é nulo), o momento angular do sistema é conservado (constante):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_N = const.$$

- Lei de conservação do momento angular.

Para 2 partículas, o momento angular total do sistema relativo ao CM será:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_1' \times \vec{p}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{p}_1'$$

Sabendo que

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12},\ \overrightarrow{P_1'} = \mu\vec{v}_{12}$$

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12}, \vec{p}_2' = -\mu\vec{v}_{12}$$ pode-se demonstrar que

$$\vec{L}_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_{12} \times (\mu\vec{v}_{12}) + (-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{12}) \times (-\mu\vec{v}_{12}) = \mu\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$$