UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FíSICA I

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

Tema VIII – Elasticidade e Movimento Oscilatório
Oscilações Mecânicas

- **Elasticidade e Movimento oscilatório.**
- **Oscilador Harmónico a uma dimensão (MHS): amplitude, período e frequência angular ;**
- **Solução da equação de movimento oscilatório Força e Energia no MHS;**
- **Alguns osciladores harmónicos simples Superposição de dois MHS.**

Félix F. Tomo

Movimento oscilatório

- Uma **oscilação** é um movimento repetitivo em torno da posção de equíbrio;

- A oscilação ocorre quando um sistema sofre determinada perturbação em torno da posição do seu equilíbrio estável.

- Ou seja, uma determinada força, por exemplo, pode actuar sobre uma partícula presa numa mola, ou num pêndulo matemático (simples), de modo a desvia-la da posição de equilíbrio, e por sí só, a partícula passa a realizar um movimento para cima e para baixo ou para à esquerda e para à direita em torno da posição de equilíbrio.

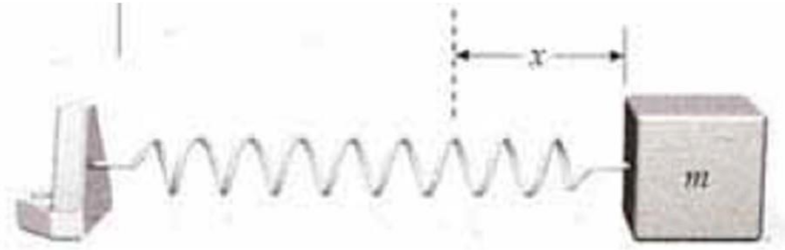
- ✓ O MHS é o mais simples dos movimentos oscilatórios do ponto de vista de descrição matemática;

- ✓ Muitas oscilações encontradas na natureza aproximam-se a MHS;

- ✓ A sua importância reside no facto de que movimentos oscilatórios mais complicados podem ser vistos como sobreposição de vários osciladores harmónicos simples.

Oscilador Harmônico Simples (O.H.S.): Parâmetros de um O.H.S.

- Colocando um objecto sobre uma mola numa plataforma horizontal, sem atrito, nota-se que esta não exercerá nenhuma força sobre o objecto até que este seja desviado da posição de equilíbrio.



- *Fig. 1*

- Deslocando o objecto da posição de equilíbrio em x, (Fig. 1), a mola passará a exercer força sobre o objecto. Considerando que o desvio é pequeno, a relação entre a força e o desvio é (lei de Hooke):

$$F = -kx \qquad (1)$$

- O sinal (-) indica que a força elástica é uma força restauradora (que tende a devolver o objecto à sua posição de equilíbrio estável.

- Sendo esta força a única que actua sobre a partícula, no sentido do movimento, ela será igual à força resultante $(m\,a\ =\ -kx)$, da qual resulta a dependência da aceleração em relação ao deslocamento x:

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad (2)$$

- Ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (2')$$

- No movimento harmónico simples, a aceleração (e portanto a força) a é directamenete proporcional e oposta ao deslocamento x, medido a partir da posição de equilíbrio.

- Parâmetros do MHS:
- **T- período** (s): tempo necessário para a partícula oscilante sair de um ponto extremo para a outra extremidade e voltar para o memo ponto.
- O inverso é a frequência (frequência cíclica, em Hz=s^{-1}) ν.

- **A- Amplitude:** o delocamento máximo (desde o ponto de equilíbrio até uma das posições extremas).
- A Figura 2 mostra o procedimento de obtenção do deslocamento em função do tempo, para o caso de uma massa presa numa mola.
- A equação geral do MHS é dada por:

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi_0)$$

onde

ω - é a frequência angular (mesmo significado que velocidade angular no movimento circular);

O argumento da função $(\omega t + \varphi_0)$ - é a fase do movimento, e

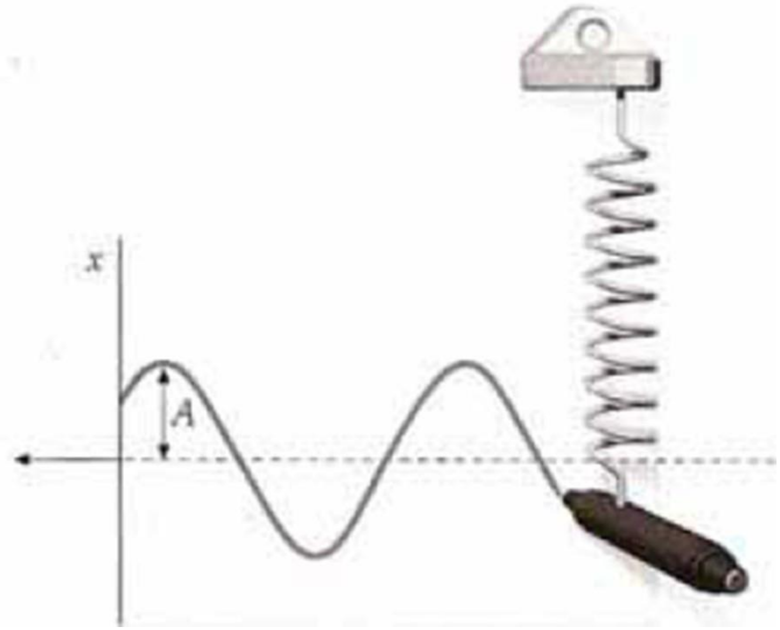


Fig. 2

- φ_0 - Fase inicial (fase para $t = 0$)

• Graficos x(t), v(t) e a(t)

- Comparação de gráficos da posição (elongação), velocidade e aceleração para o mesmo movimento harmónico simples.

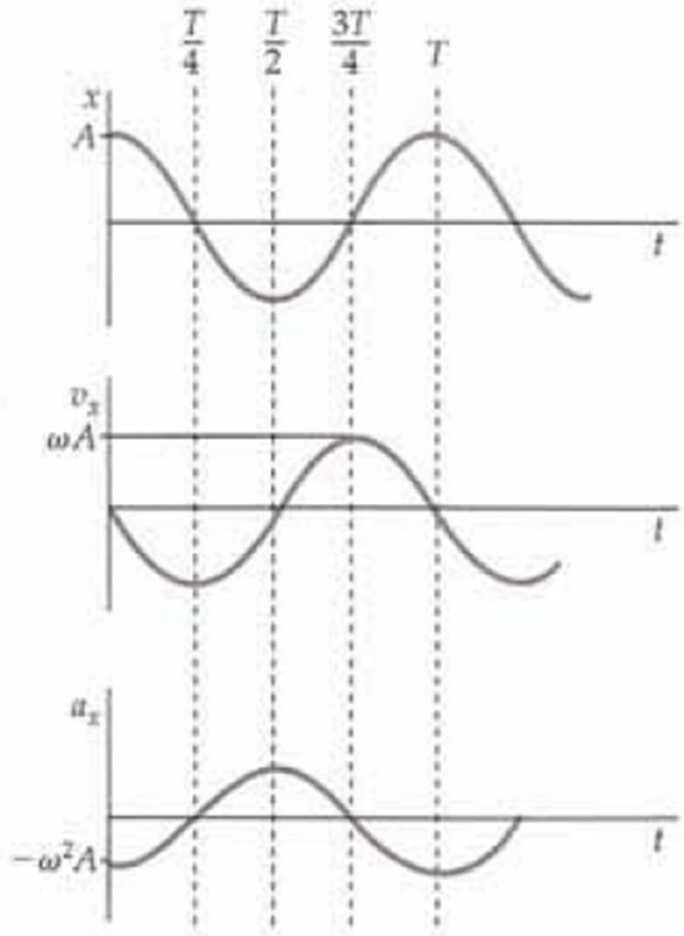
$$x = A\cos(\omega t)$$

$$v = -A\omega sen(\omega t)$$

- Zeros de x são min/max de v

$$a = -A\omega\ ^2\cos(wt)$$

- ou $a = -\omega^2 x$
- x e a têm mesmos zeros



- Sabendo que cosseno e seno são funções complementares entre sí

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Conclui-se que o mesmo MHS pode ser representado por qualquer uma das duas funções, diferenciando-se apenas na fase inicial.
- Para um único oscilador (partícula oscilante) é sempre possível escolher $\varphi_0 = 0$,e representar o movimento por:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

- Para dois osciladores harmónicos simples de mesma frequência,mas de fases diferentes, podemos colocar sempre uma das fases iniciais nula:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t)$$
$$x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Quando a diferença de fases entre os dois osciladores é $\varphi_0 = 0$ ou múltiplo inteiro de 2π, diz-se que os osciladores estão em fase;
- Se a diferença de fases é $\varphi_0 = \pi$ ou múltiplo inteiro de π, diz-se que os osciladores estão em oposição de fases.

Solução da equação de movimento oscilatório

- Suponhamos que sobre uma partícula actue uma força atractiva (restauradora)proporcional ao deslocamento:

$$F = -kx$$

- Sendo única força actuante no sentido do movimento (força resultante) teremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- ou, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

- A expressão (4) é uma equação diferencial do segundo grau e homogénea, com coeficientes constantes (m e k). Muitas vezes a expressão aparece de forma modificada $\frac{k}{m} = \omega^2$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- Mostremos que a equação (3) é solução de (2´). Para o efeito, derivemos duas vezes (3) e substituamos em (2´):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi_0)]$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (5)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \qquad (6)$$

- Para uma mola, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (logo confirmamos que é solução).
- Normalmente, a amplitude e a fase inicial são calculados a partir das condições iniciais (para t=0):

$$x(0) \equiv x_0 = A\cos\varphi_0$$
$$v(0) = v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \qquad \rightarrow \tan\varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0}$$

- Determinação de Amplitude (A) e Período (T):
  No MHS, eventos iguais são repetidos para $t = T$, logo:

$$x(t) = x(t + T)$$

- Ou, substituíndo na equação geral, temos:

$$A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\omega(t + T) + \varphi_0)$$

- Lembremos que os argumentos (as fases das funções) devem ser iguais ou então diferentes em 2π.

$$\omega t + \varphi_0 + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi_0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (7)$$

- ω - é a frequência angular, expressa-se nas mesmas unidades que a velocidade angular no movimento circular (rad/s).
- A relação entre a frequência angular e a frequência cíclica (inverso do período) é:

$$\omega = 2\pi\nu$$

<u>Exemplo 1</u>: O movimento vertical de uma prancha de surf pode ser descrito pelo deslocamento y dado por (todas as grandezas estão expressas no S.I.):

$$y(t) = 0{,}12\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

- (a) Determinar a amplitude, a frequência angular, a constante de fase ou fase inicial e o período.
- (b) Calcule a posição da prancha para t=1,0 s.
- (c) Determine a velocidade e a aceleração como funções do tempo.
- (d) Determine os valores iniciais da posição, velocidade e aceleração.

- Solução:
- (a) Comparemos a equação dada,
- $y(t) = 0{,}12\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ com a equação geral do MHS,
- $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ Da comparação segue que:
- $A = 0{,}12;\ \omega = 0{,}5\, rad/s\,; \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ e o T extrai-se da relação
- entre esta grandeza $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{0{,}5} = 12{,}56s$$

- (b) $y(1{,}0) = 0{,}12\cos\left(\frac{1}{2}\times 1{,}0 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}12\times\cos[(0{,}5 + 0{,}523)rad] =$
- $=0{,}12\times 0{,}52 = 0{,}062m$

Alternativa $y(1{,}0) = 0{,}12\times\cos(°) = 0{,}12\times 0{,}52 = 0{,}062m$

- (c) $\frac{dy}{dt} = v(t) = -0{,}12 \times 0{,}5 \times \sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a(t)$$

$$= -0{,}12 \times 0{,}5^2 \times \cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}03\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(d) $y(0) = 0{,}12\cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}12 \times 0{,}866 = 0{,}104m$

$$v(0) = -0{,}12 \times 0{,}5 \times \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = -0.06 \times 0{,}5 = -0{,}03\, m/s$$

$$a(t) = -0{,}03\cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}03 \times 0{,}866 = -0{,}026\, m/s^2$$

Força e Energia no MHS

- Que força deverá actuar sobre uma partícula de massa m para que esta execute um MHS?

- Apliquemos a 2ª lei de Newton $(F = ma)$ .Sabemos que a aceleração no MHS é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento: $a = -\omega^2 x$.
- Logo

$$F = m(-\omega^2 x) = -kx \qquad (8)$$

- onde $k = m\omega^2$.
- No MHS, a força é proporcional e de sentido contrário ao deslocamento, tal como a aceleração o é. A força aponta sempre para a origem (ponto de equilíbrio). Ou seja, no MHS a força é sempre restaurdora.
- No caso duma partícula presa a uma mola, a partir de $k = m\omega^2$, conclui-se que o período T é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- **A energia cinética** da partícula oscilante é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

- Mas no MHS a velocidade, tal como vimos acima, é
- $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$
- Logo, $E_c = \frac{1}{2}m(-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0))^2 =$

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - (A\cos(\omega t + \varphi_0))^2] =$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - x^2] \quad (9)$$

- $E_{c,max} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$(na origem) e $E_{c,min} = 0$ para $x = \pm A$

- Para obter a energia potencial, lembremo-nos da relação geral entre esta e a posição:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Quando o movimento é unidimensional (como ocorre no MHS), a derivação passa a ser total e não parcial:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\int_0^U dU = -\int_0^x F dx$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

A energia potencial é mínima (nula) na origem e aumenta com o afastamento da partícula oscilante da origem, sendo máxima nos extremos.

Consequentemente, a energia mecânica total de um oscilador harmónico simples é:

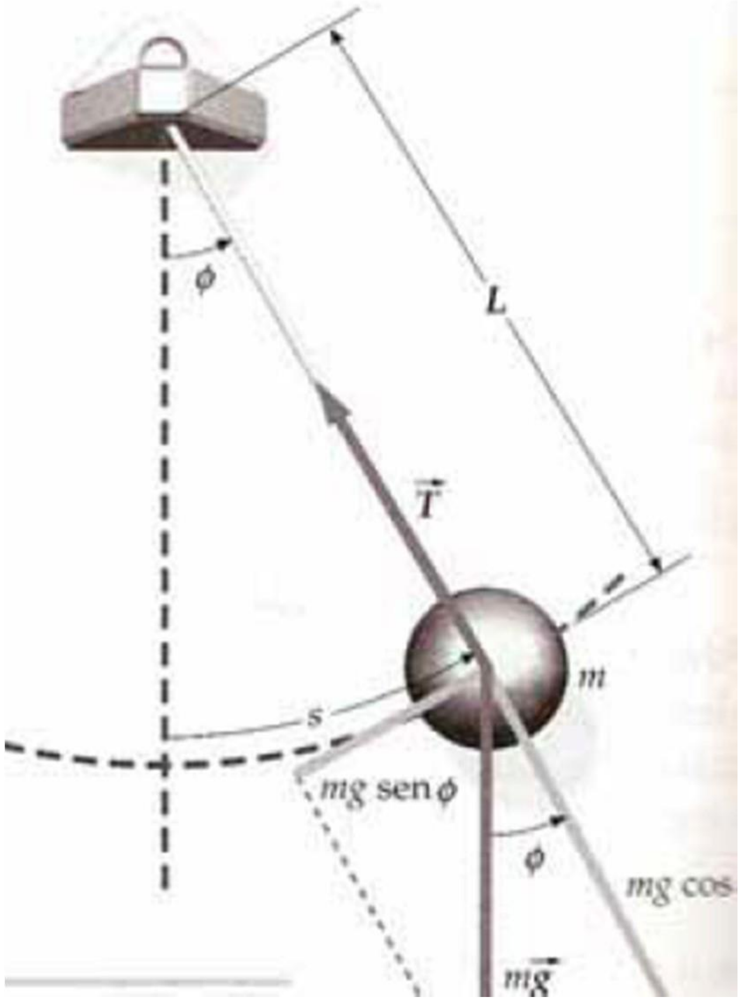
$$E = U + E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (12)$$

• Alguns osciladores harmónicos

- **Pêndulo simples**: Trata-se de uma partícula de massa *m* presa na extremidade livre de um fio de comprimento *L* e massa desprezível.

- Afastando a partícula da posição de equilíbrio num pequeno ângulo ϕ, o pêndulo irá oscilar entre 2 posições extremas.

- A equação do movimento da partícula que se movimenta ao longo de um arco é:



$$F_\tau = -mg \sin \phi \quad (13)$$

- Igualando esta força (força tangencial) à força resultante teremos:

$$ma_\tau = -mg\sin\phi$$

- Ou, usando a relação entre a aceleração tangencial e a aceleração angular ($a_\tau = R\alpha \equiv L\alpha$), podemos rescrever a equação anterior na forma:

$$L\frac{d^2\phi}{dt^2} = -g\sin\phi \qquad (14)$$

- A equação (14) diferencia-se da do MHS por causa da variável que se deriva (ϕ) aparecer dentro do seno. Mas se o ângulo for pequeno, então

$$\sin\phi \approx \tan\phi \approx \phi$$

- Logo, a equação (14) toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0 \qquad (15)$$

- A conclusão é: se o desvio angular de um pendulo simples for pequeno, a amplitude das oscilações será pequena, e o movimento será harmónico simples.

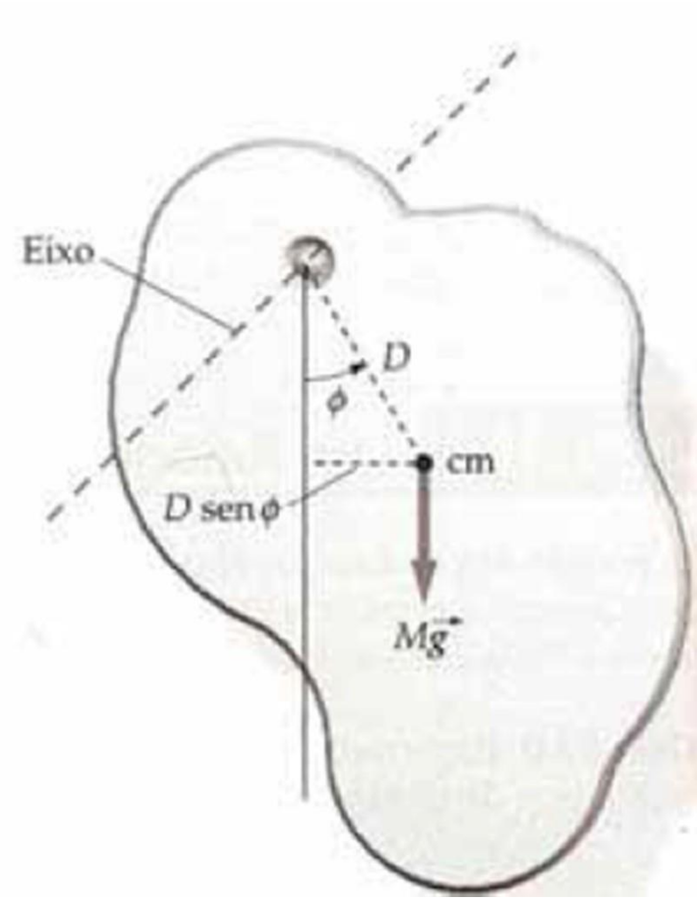
Comparando, agora $\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0$ com $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, conclui-se que $\omega^2 = \frac{g}{L}$ tal que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (16)$$

O período do pêndulo simples independe da sua massa.
Se a amplitude das oscilações não são pequenas, neste caso o período dependerá da amplitude $\phi_{max.} = \phi_0$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}sin^2\frac{1}{2}\phi_0 - \frac{9}{64}sin^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right)$$

- **Pêndulo físico** (composto): Chama-se de pêndulo físico, a qualquer corpo rígido que pode oscilar livremente em torno de um eixo horizontal, sob a acção da força de gravidade. O torque resultnte neste caso será:



$$\tau = -MgD\sin\phi \quad (17)$$

- Este torque será directamente proporcional à aceleração angular:

$$-MgD\sin\phi = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Ou para pequenas oscilações,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{MgD}{I}\phi = 0 \qquad (18)$$

O período do pêndulo fisico é,

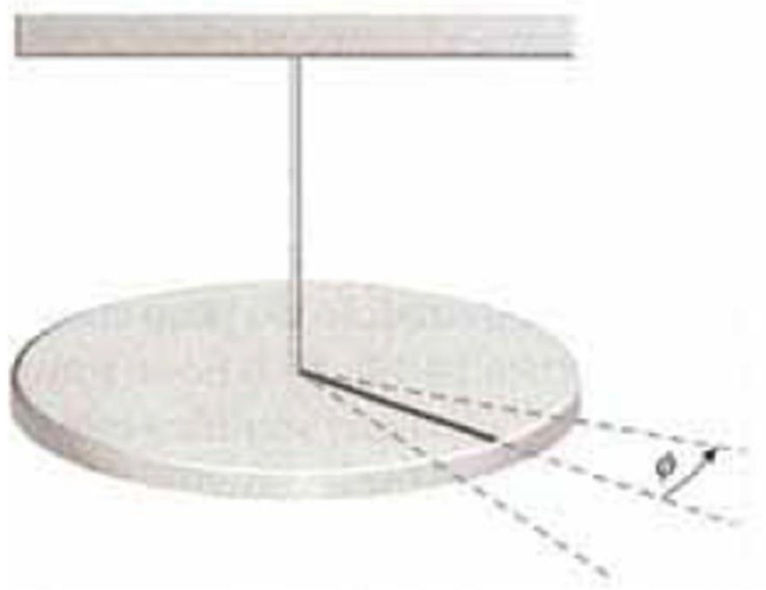
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad (19)$$

Introduzindo o conceito de raio de giração K, em que $I = MK^2$, a equação (19) torna-se:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gD}}$$

- **Pêndulo de torção:** trata-se de um sistema que realiza oscilações rotacionais em torno de um aposição de equilíbrio.

- Um disco maciço, suspenso por um fio de aço pode realizar deslocamento angular φ . Nesse caso um torque de torção exercido pelo fio, vai actuar sobre o disco:



$$\tau = -D\phi \qquad (20)$$

- D- é uma contante, o módulo de torção do fio.
- Sendo o torque sempre proporcional à aceleração angular, termos a seguinte expressão:

$$I\alpha = -D\phi$$

- ou,

$$\frac{d^{2\phi}}{dt^2} + \frac{D}{I}\phi = 0 \qquad (21)$$

- Sendo esta equação semelhante a do movimento harmónico simples, podemos escrever a lei do deslocamento angular:

$$\phi = \phi_{\,0} \cos(\omega t + \delta)$$

- onde $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$
- Ou simmplesmente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad (22)$$

Superposição de dois MHS: mesma direcção e frequência

- Consideremos a interferência (sobreposição de 2 MHS) que resulta no deslocamento de uma partícula ao longo duma recta (deslocamento linear),

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \;\; \& \; x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

- O deslocamento resultante da partícula é dado por

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$
$$x = A \cos(\omega t + \phi) \qquad (23)$$

- A diferença de fase é $\delta = \phi_2 - \phi_1$

- Os parâmetros do deslocamento resultante são:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos\delta} \qquad (24)$$

$$A\cos\phi = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \qquad (25)$$

$$A\sin\phi = A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2 \qquad (25')$$

- Dividindo termo a termo eq. 25´ pela eq. 25 obtemos:

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \qquad (26)$$

- **<u>Casos especiais</u>**

(i) seja $\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \phi = \phi_2 - \phi_1 = 0$ e $A = A_1 + A_2$ (pela eq. 24) Neste caso a **interferência é construtiva** porque as amplitudes são somadas.

- (ii) $\boldsymbol{\phi_2 = \phi_1 + \pi}$ $\Rightarrow$ os movimentos estão em oposição de fases. Para $A_1 > A_2$, temos $A = A_1 - A_2$ e $\delta = \delta_1$ e a interferência é destrutiva pois as amplitudes subtraem-se. Particularmente, para $A_1 = A_2$, haverá cancelamento completo dos MHS.

- (iii) Se $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$, os 2 MHS estão em Quadratura,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

- E a eq.26 sugere que,

$$\phi = \phi_1 + arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

TPC # 3

- **Leitura complementar sobre:**
- 1 - Oscilações amortecidas
- 2 - Oscilações forçadas e o fenómeno da ressonância

- **Resolver o problema da superposição de 2 movimentos harmónicos simples (envie ao docente de aulas práticas assim que este solicitar)**
- Uma partícula está sujeita a acção simultânea de 2 osciladores harmónicos simples de mesma direcção e sentido. As suas equações são:

$$x_1 = 10\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ e } cm \text{ e } x_2 = 6\sin\left(2t + \frac{2\pi}{4}\right)$$

- Determine o movimento resultante X, achando os parâmetros A e ϕ.

$$x = A\sin(2t + \phi)$$