VIII Fontes do campo magnético

Campo magnético de um elemento de corrente-Lei de Biot-savart

Campo magnético de condutor rectilíneo com corrente

Circulação do campo magnetismo-Lei de Ampere.

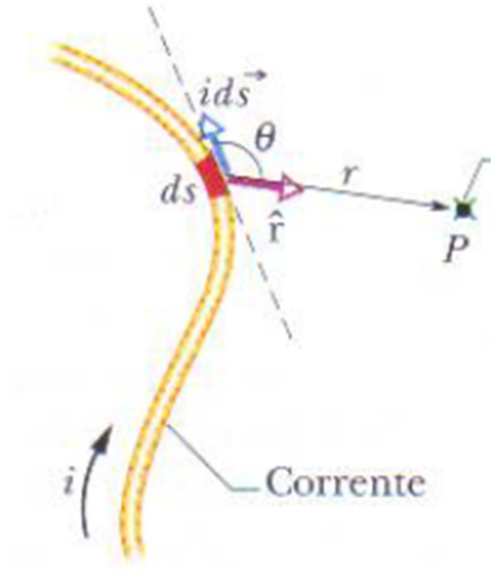
Força magnética entre dois condutores paralelos

Campo magnético de espira circular e de bobina)

Fluxo do campo magnético e generalização da lei de Ampere

Campo magnético de um elemento de corrente

- Procuremos o campo magnético $\vec{B}$ produzido nas proximidades de um elemento de corrente.
- Dividimos o fio em elementos infinitesimais dL (no desenho representado por dS) e definimos para cada elemento dl um vector $\mathrm{d}\vec{L}$ de módulo dL e cuja direcção coincide com a da corrente no elemento dL.



- Define-se um elemento de corrente idL e procura-se o campo magnético d$\vec{B}$ por ele criado no ponto P.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} id\vec{L} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} id\vec{L} \times \frac{\vec{r}_0}{r^2}$$. Lei de Biot-Savart

$\vec{r}_0$- vector unitário

- O campo magnético crido no ponto considerado por todos elementos de corrente semelhantes, determina-se pelo princípio de sobreposição:

$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} id\vec{L} \times \frac{\vec{r}_0}{r^2}$ onde $\left| id\vec{L} \times \vec{r}_0 \right| = idL \sin\theta$

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} idL \sin\theta$$

θ- ângulo entre $d\vec{L}$ e $\vec{r}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ permeabilidade magnética do vácuo.

Campo magnético de condutor rectilíneo com corrente

- Usemos a lei de Biot-Savart para determinar o campo magnético criado por condutor rectilíneo longo.

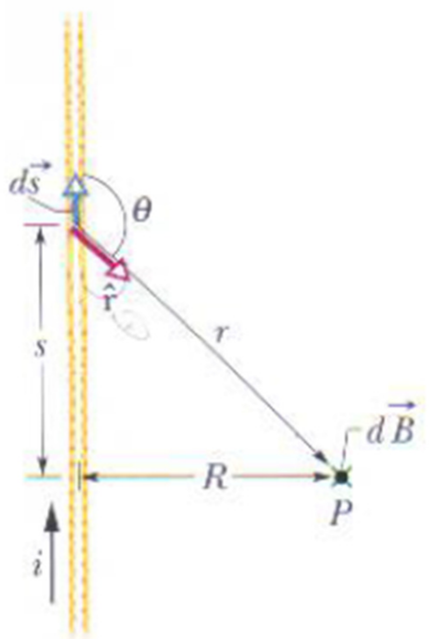
- $B = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} i dL \sin\theta$

Notemos que para o elemento de corrente escolhido a uma ponto simétrico a baixo de P será numericamente igual ao criado pela metade superior do fio.

$$B_{tot} = 2\int_0^{\infty} dB$$

Logo,

$$B_{tot} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{dL\sin\theta}{r^2}$$



- Notemos que as variáveis dependentes estão relacionadas pelas expressões (para $L = S$ na figura):

$$r = \sqrt{R^2 + L^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

Logo,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dL \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R dL}{(R^2 + L^2)^{3/2}}$$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$ *(Integração por substituição)*

$$x = a\tan\theta \ \& \ \ dx = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int \frac{ad\theta}{[a^2+a^2\tan^2\theta]^{3/2}\cos^2\theta} =$$

$$= \int \frac{ad\theta}{a^3[1+\tan^2\theta]^{3/2}\cos^2\theta} =$$

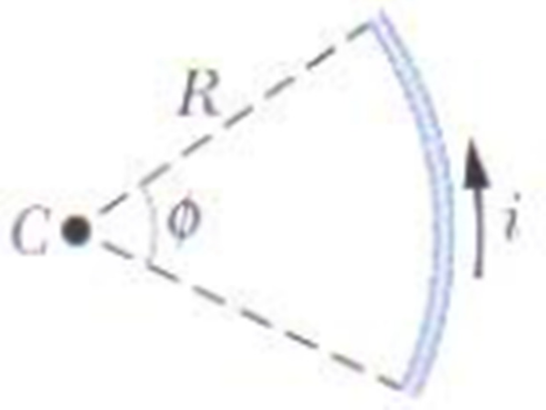
- $= \frac{1}{a^2}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2}\sin\theta + C$
- Mas se $\tan\theta = x/a \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

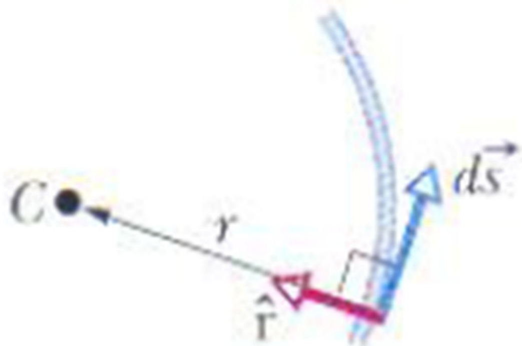
Logo, $\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{RdL}{(R^2+L^2)^{3/2}} B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\cdot\left[\frac{L}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}}\right]/_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\cdot$
$\frac{L}{L}\left[\frac{1}{\left(\frac{R^2}{L^2}+1\right)}\right]/_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$

Notemos que se o campo magnético no ponto P criado por uma das metades do fio é $B_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$

Campo magnético produzido por corrente num condutor em forma de arco de circunferência:

Para um fio curvado, em geral não é fácil calcular a integral da lei de Biot-Savart. Mas quando o fio tem forma de arco de circunferência e o ponto considerado é o centro de curvatura, o cálculo é relativamente simples.





Neste caso, o ângulo θ entre o elemento $\vec{L}$ e a distância $\vec{r}$ é de 90°. Por outro lado, $r = R$:

$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} i dL \sin(90°) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dL}{R^2}$$

Usando $L = Rd\varphi$ temos

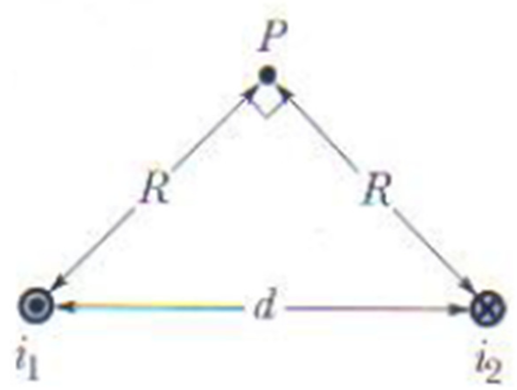
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{Rd\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^{\varphi} d\varphi =$$

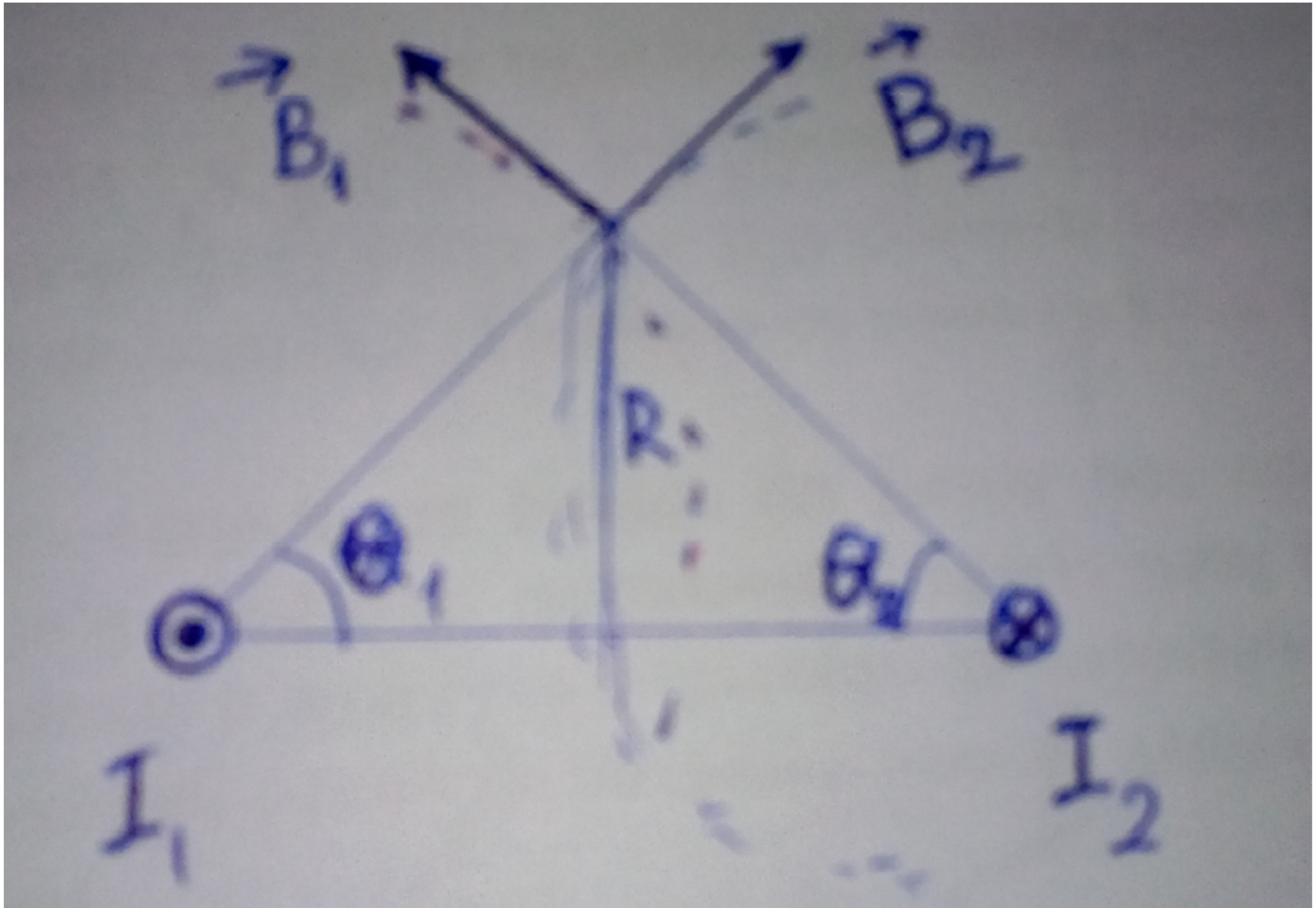
$$B = \frac{\mu_0 i \varphi}{4\pi R}$$

Representa o campo magnético no centro do arco de circunferência (φ tem que ser expresso em radianos).

- Exemplo: dois fios longos e paralelos, separados por distância d, transportam correntes i_1 e i_2, de igual valor, mas de sentidos opostos. Determine o módulo e a orientação do campo magnético no ponto P situado ao longo do eixo que divide d pela metade.

- Usemos a lei de Biot-Savart e calculemos os módulos B_1 e B_2 do campo magnético




$\vec{B}_1$
$\vec{B}_2$
R
θ_1
θ_2
I_1
I_2

Chamemos de R a distancia do ponto médio ao ponto P, e r a distancia do condutor ao ponto P (na figura originária representada por R) $B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$ & $B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}$

- Em relação à orientação de cada campo magnético usaremos a regra de mão direita:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$B = \sqrt{{B_1}^2 + {B_2}^2 + 2B_1B_2\cos 2\theta}$$

onde θ é o ângulo na base do triângulo. Sendo as correntes iguais ($B_1 = B_2$) teremos:

$$B = \sqrt{2{B_1}^2 + 2\,{B_1}^2\cos 2\theta} = B_1\sqrt{2(1+\cos 2\theta)}$$

$(1 + \cos 2\theta) = 2\cos^2\theta$ $\Rightarrow$

$B = 2B_1 \cos\theta$; $\cos\theta = \frac{d}{2r}$ e $r^2 = \frac{d^2}{4} + R^2$; R – distância até P ao longo do eixo

$$B = 2B_1 \cos\theta = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{d}{2r} = 2\frac{\mu_0 i d}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i d}{2\pi(d^2 + R^2)}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{d}{(d^2 + R^2)}$$

Circulação do campo magnético - lei de Ampere

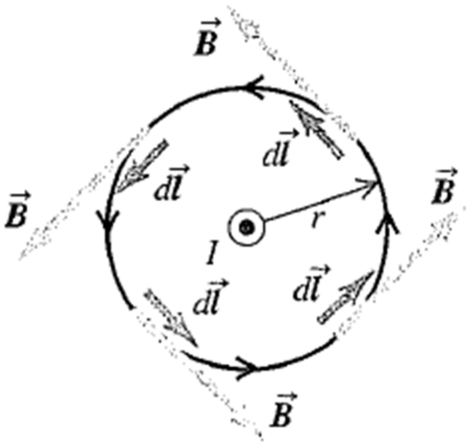
- Quando a distribuição das correntes obedece determinada simetria, o campo magnético resultante e associado as correntes determina-se de forma simples através da lei de Ampere:

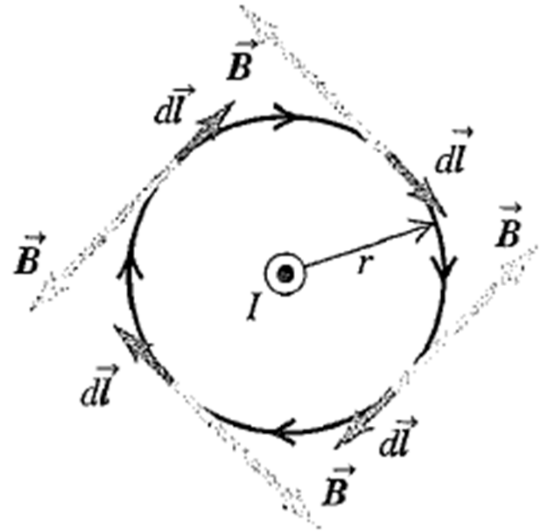
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{env}$ (Lei de Ampere)

i_{env} - é a soma das correntes envolvidas pela curva fechada

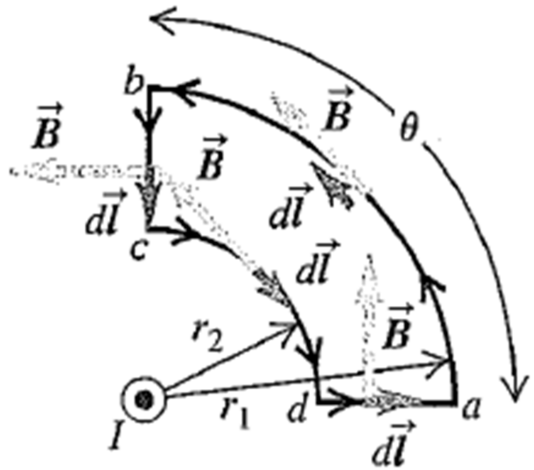
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cos\theta dl$$

- Percurso de integração coincide com sentido de $\vec{B}$





- Percurso de integração não coincide com sentido de $\vec{B}$

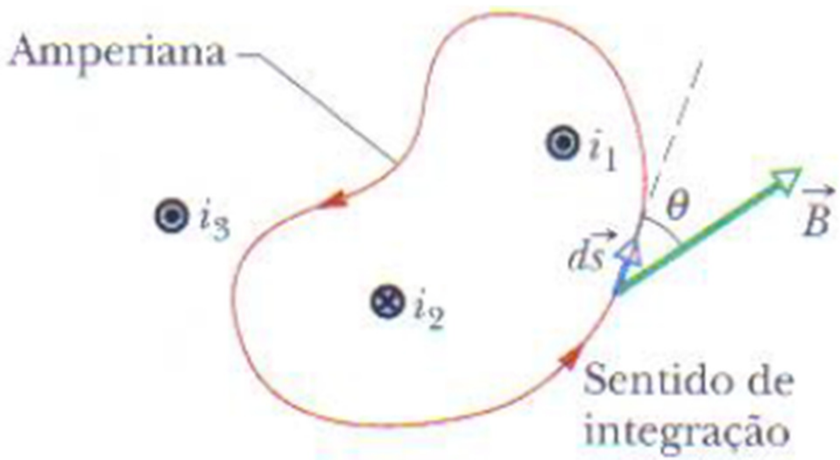


- Percurso de integração não envolve condutor no seu interior

Quando existirem no contorno (espira amperiana) várias correntes devemos aplicar a regra de mão directa de modo que os 4 dedos coicidam com o contorno e se o polegar coicidir com determinada corrente, essa corrente é positiva, caso contrário será negativa.

- Em geral escolhe-se um sentido arbitrário de $\vec{B}$ coincidente com contorno.

$$i_{env} = i_1 - i_2$$

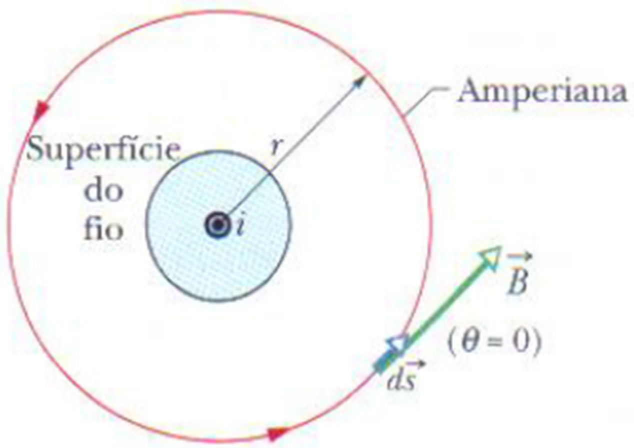


- $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cos\theta dl = \mu_0 i$

$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i \qquad \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Campo magnético nas vizinhanças de um condutor com corrente



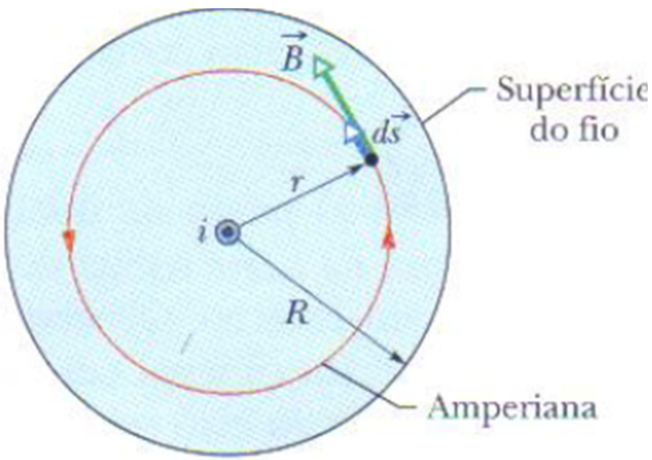
- Campo magnético no interior do condutor com corrente ($r < R$):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B \cos\theta dl = \mu_0 \int jdS \cos\theta$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r jdS = \mu_0 j\pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 jr}{2}$$

$$r = R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 jR}{2}$$



$$r > R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j R^2}{2} \cdot \frac{1}{r}$$

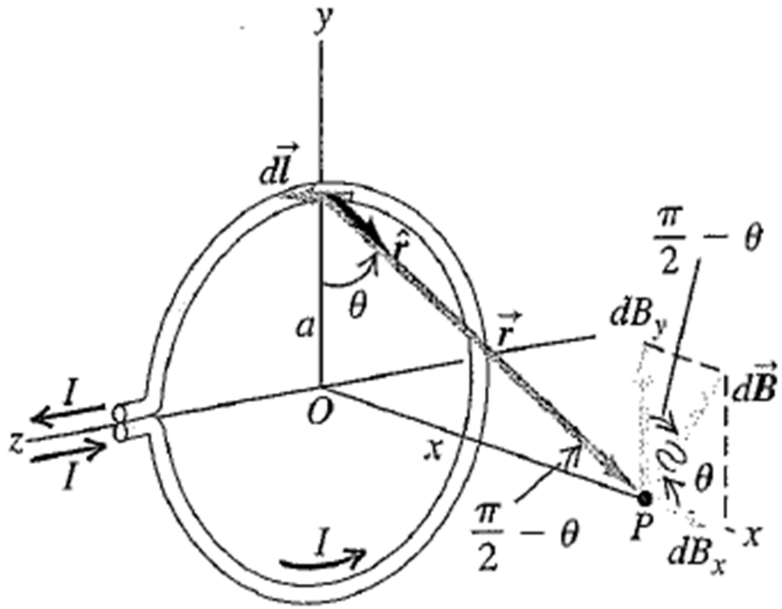
Notemos que se a corrente é distribuída uniformemente pela secção do fio, então a densidade de corrente tem módulo igual a:

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

Campo magnético de espira circular e de bobina)

- Olhando para o interior de uma campainha, de um transformador ou um electroímã podem ser observadas bobinas, cada uma com grande número de espiras agrupadas de modo muito compacto, tal que cada volta do fio pode ser considerada como uma espira circular.
- A corrente que passa na bobina é usada para gerar um campo magnético. Por isso é importante conhecer o campo magnético produzido por única espira circular e por uma bobina de N espiras.
- Antes vimos que sobre uma espira que transporta corrente num campo magnético actua força e o torque resultante tende a alinhar a espira na direcção do momento dipolar magnético. Agora vejamos o campo produzido pela própria espira.

- A figura ao lado mostra uma espira de raio $R = a$, transportando corrente I.
- Procuremos o campo magnético B sobre o eixo perpendicular ao plano da espira, usando a lei de Biot-Savart:



$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

Ao longo do eixo x

$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \cos\theta}{4\pi(x^2 + a^2)}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \cos\theta}{4\pi(x^2+a^2)}; \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I dl\, a}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Exceptuando dl, todas as outras grandezas não dependem da variável de integração:

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

O sentido de $\vec{B}$ determina-se de acordo com a regra da mão direita (fechando 4 dedos em torno da espira, no sentido da corrente de modo que o polegar indique o sentido do campo).

- Para o caso da bobina, devemos considerar que todas as espiras que a compõe são iguias, cada uma contribuindo no ponto considerado com campo

$$B_{esp,x} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

- O campo resultante será $B_{x,bob} = NB_{esp,x}$.

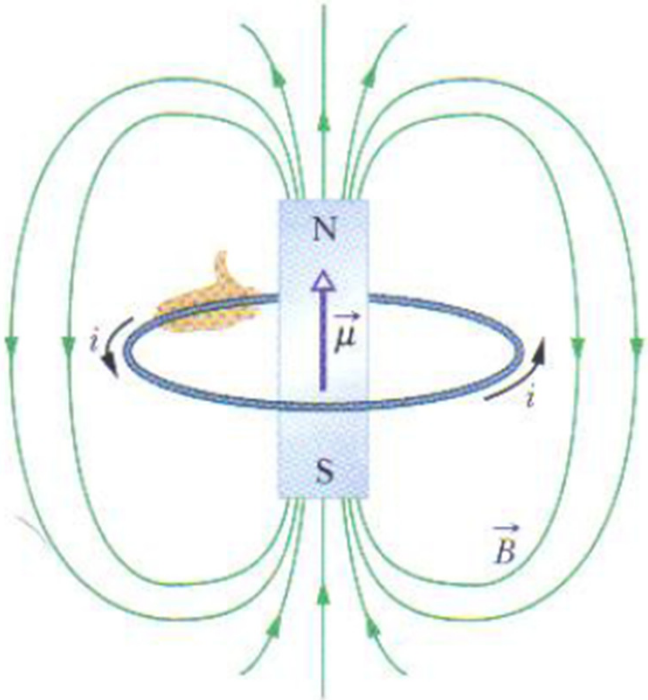
$$B_{x,bob} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$B_{x,bob,max} = \frac{\mu_0 N I}{2a}$$

- Anteriormente definimos o momento dipolar da bobina como sendo $\mu = INA = IN\pi a^2$. Se substituirmos este resultado na expressão do campo criado por bobina teremos:

$$B_{x,bob} = \frac{\mu_0(\pi NIa^2)}{2\pi(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\mu}{2\pi(x^2+a^2)^{3/2}}$$

O sentido de $\vec{B}$ é coincide com $\vec{\mu}$.



$$B_{x,bob} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Este é o campo magnético produzido por um dipolo magnético para pontos situados ao longo do eixo do dipolo (analise o resultado para $x >> a$).

Nota: Não tente aplicar a equação para pontos que não estão ao longo do eixo do dipolo magnético

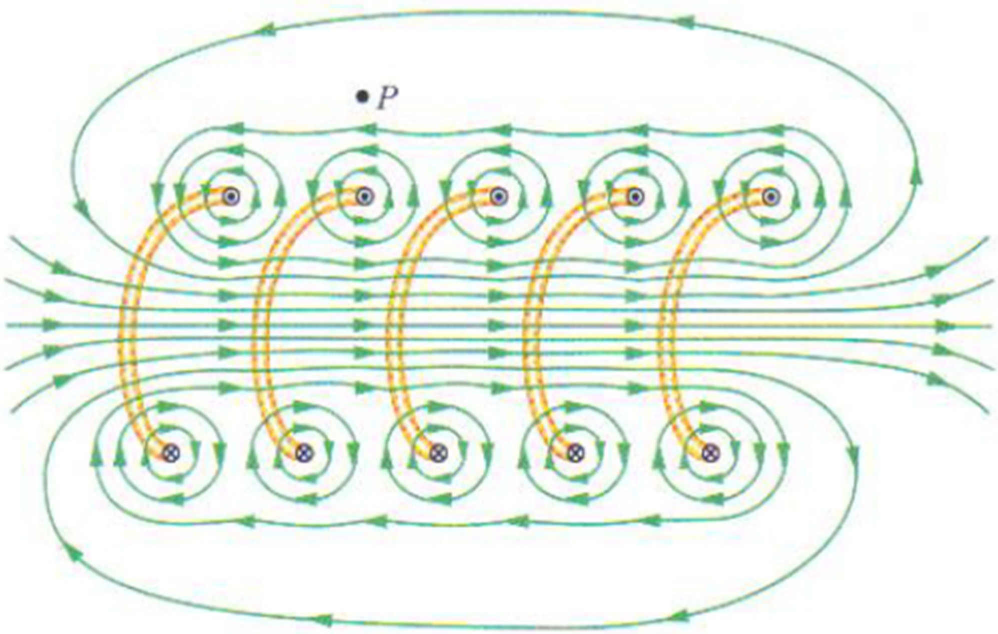
- Solenóide: trata-se de uma bobina constituída por enrolamento helicoidal de fio sobre um núcleo (em geral de secção recta circular).

A característica importante de um solenóide é o número de espiras N por unidade de comprimento L_0:

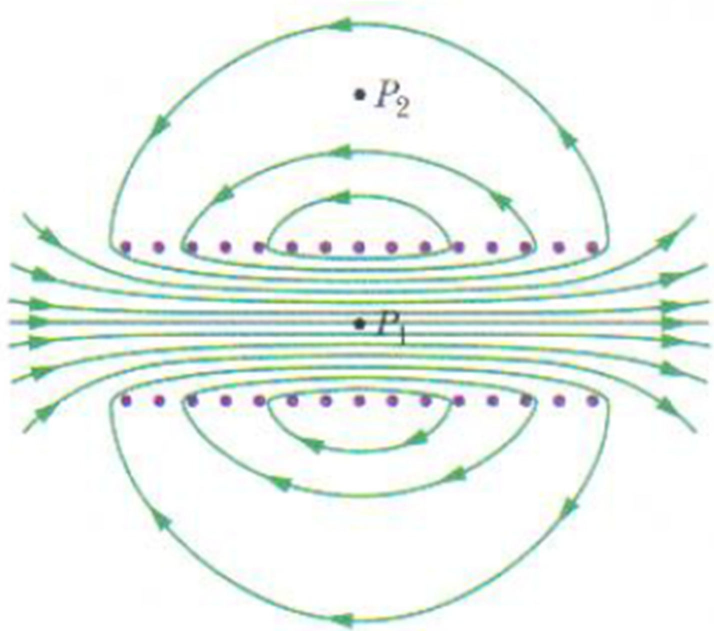
$$n = \frac{N}{L_0}$$

Num selenóide todas as espiras conduzem a mesma corrente I e o campo magnético em cada ponto é a soma dos campos magnéticos produzidos por cada espira.

Trecho de um selenóide com espiras, corrente e linhas de campo: perto de cada espira o campo é circular no selenóide somam-se.



Linhas de campo em um solenóide real: campo intenso e uniforme no interior.

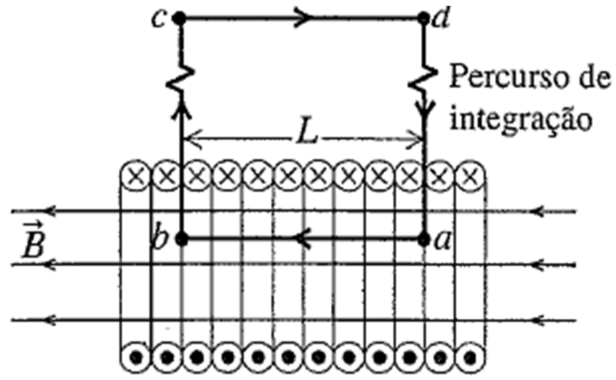


- Para calcular o campo de um solenóide utilizaremos a lei de Ampere: $\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 i_{env} = \mu_0 nLI$

$$BL = \mu_0 nLI$$

Ou

$$B = \mu_0 nI$$



$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_a^b Bdl + \int_b^c Bdl + \int_c^d Bdl + \int_d^a Bdl$$

Sendo o segundo e quarto integrais iguais a zero ($\vec{B} \perp d\vec{l}$) e o terceiro integral é nulo porque $B = 0$(no exterior do solenóide).

Força magnética entre dois condutores paralelos

- Vimos que quando um fio que transporta corrente eléctrica e está inserido num campo magnético, este fio vai sofrer uma força magnética dada por:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

O módulo da força é $F = IlB \sin\theta$

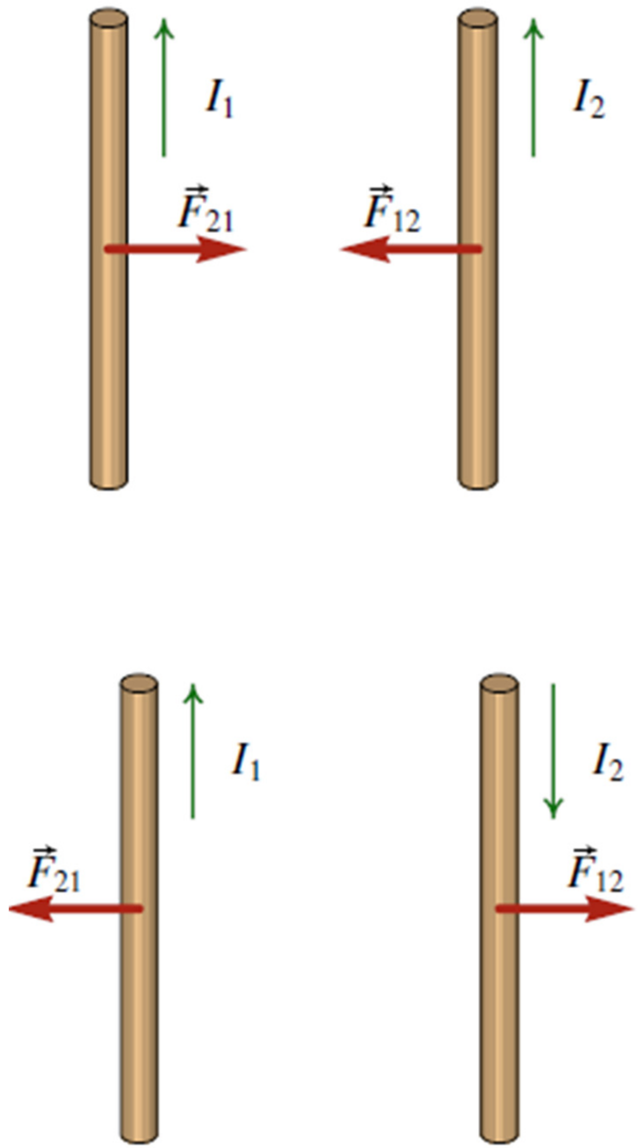
$$\theta = \measuredangle\left(\vec{l}\, \& \vec{B}\right)$$

Por outro lado vimos que um condutor longo e recto percorrido por corrente produz um campo magnético num ponto P distante de R da superfície:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Consideremos dois condutores paralelos, separados por uma distância R, cada um transportando corrente I_1 e I_2 .

- Vamos considerar que a separação R entre os fios seja pequena em coparação com os comprimentos dos fios, tal que possam ser considerados infinitos.
- A força magnética sobre o segmento do fio que transporta corrente I_1 , pode ser encarada como resultado do campo magnético devido a corrente I_2.



- Quer dizer, podemos usar a expressão $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ de forma apropriada:

$$\vec{F} = I_1\vec{l} \times \vec{B}_2$$

Onde $\vec{l} \perp \vec{B}_2$

Cujo módulo é:

$$F = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi R}$$

Poder-se-ia analisar a força que age sobre o segundo segmento de fio como resultado do campo criado pela caorrente I_1.

$$F = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi R}$$

Os dois condutores experimentam forças de igual magnitude (atracção ou repulsão, dependendo do sentido das correntes).

Fluxo do campo magnético

- O fluxo do campo magnético Φ_B através duma superfície define-se de modo semelhante ao fluxo do vector campo eléctrcico Φ_E.

A unidade de Φ_B é Weber ($1\,Wb = 1\,T \cdot m^2$).

- O Φ_B total através de qualquer superfície fechada é igual a zero:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

Lei de Gauss para o magnetismo.

Significado: as linhas do compo magnético formam sempre trajectórias fechadas.

Para uma superfície aberta o fluxo pode assumir qualquer valor.

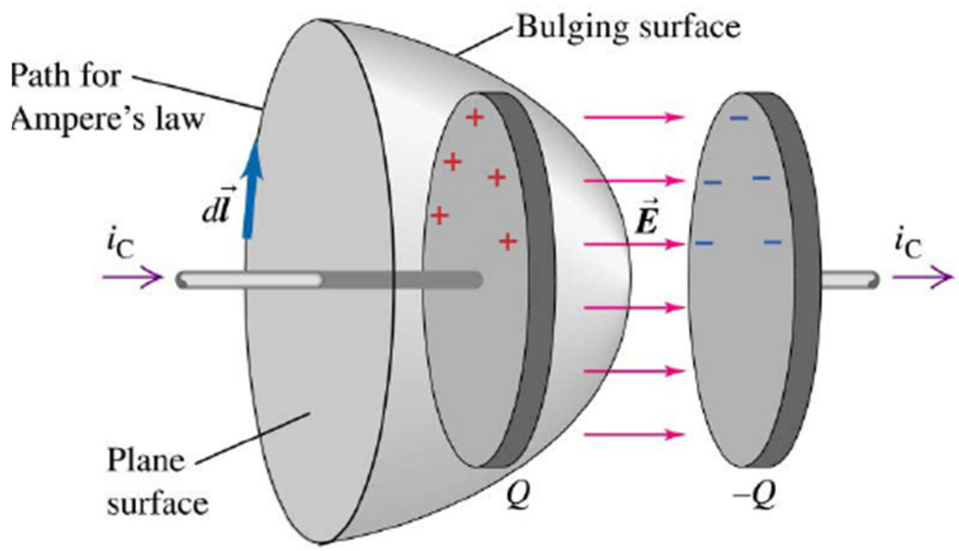
Generalização da lei de Ampere

- Até agora a lei de Ampere foi limitada a campos magnéticos produzidos por corentes. Entretanto, existem distribuições mais gerais de correntes em que aquela lei deve ser modificada. A generalização foi feita por James Clerk Maxwell:
- $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum i + I_d)$

Onde I_d é a corrente de deslocamento definida por:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- Considera-se um condutor que transporta corrente $\sum i = i_c$e que flui de forma a carregar um capacitor de placas planas.
- Aplicando a lei de Ampere para cada uma das superfícies a corrente que une o trajecto fechado delimitado pelo trajecto deverá ser a mesma.
- A figura ao lado mostra uma região que atravessa um capacitor e o campo eléctrico entre as placas



- O módulo da carga entre as placas pode ser expresso em termos do fluxo do campo eléctrico:

$$Q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 \Phi_E$$

Mas a corrente $i_c = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \equiv I_d$

Neste caso uma superfície é atravessada pela corrente i_c e a outra por I_d.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (i_c + I_d)$$