TPC # 2 _ Física II _ FE _ 2022 _ II° Semestre

Correcção do TPC # 2 _ V Laboral

Variante A – Para cursos no Regime Laboral

Regente - Félix Tomo

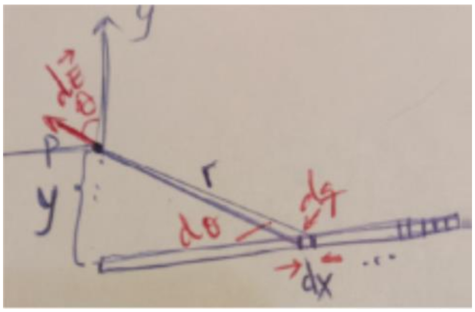
Assistentes - Fernando Mucomole, Esménio Macassa, Tomásio Januário, Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

---

1. Uma barra muito longa e uniforme está carregada com densidade linear de carga λ. Determine o módulo, direcção e sentido do vector campo eléctrico num ponto localizado à distância y da barra, e situado perpendicularmente à uma das extremidades. Sugestão: Representar o campo elementar criado no ponto considerado por carga elementar, e determinar as componentes x e y do campo resultante.

Resolução

O problema confina-se em achar as componentes x e y do vector campo eléctrico. O campo elementar criado por elemento de carga no ponto P sera:



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$\vec{E} = \int dE_x \vec{\imath} + \int dE_y \vec{\jmath}$$

Ou

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{x}{r^2}dx$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

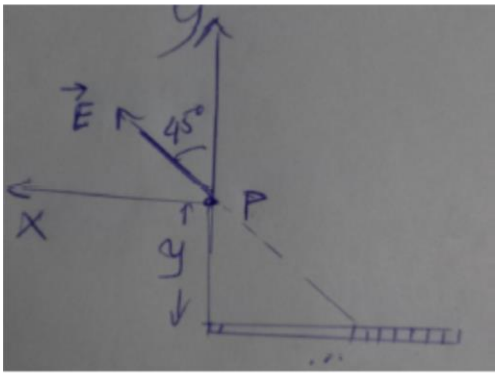
Onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$E_x = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Big|_R^r = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{y}\right)$$

Como a barra é muito longa ($L \gg y$) então $\frac{y}{L} \to 0$.

$$-\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{y}\right)=-\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{L\left(1+\left({}^{y}/_{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$

E possivel encontrar o mesmo resultado integrando em função do ângulo (expresssando dx e r em função do ângulo).



Analogamente,

$$E_y=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{rd\theta}{r^2}$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r}d\theta$$

Onde

$dx=\frac{rd\theta}{\cos\theta}$ e $r=\frac{y}{\cos\theta}$

Logo,

$$E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

Aqui tambem é possivel obter o resultado integrando em função de x (para tal é preciso colocar a substituição conveniente para calcular a integral resultante).

Quando $E_x=E_y$ as suas componentes formam angulo de 45^0.

Então,

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\sqrt{2}$$

A direcção e sentido estão ilustrados na figura.

2. Uma esfera de raio R carregada positivamente, tem densidade volumétrica de carga, dependente da distância radial do cenctro da esfera $\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$, onde ρ_0 é constante. Assumindo que a permisssividade eléctrica da esfera e do ambiente é igual à unidade, determine:

a) A distribuição do campo eléctrico dentro e fora da esfera em função de r.
b) A máxima intensidade do vector campo eléctrico E_{max} e o correspondente r_{max}.

Resolução

(a) Para $r < R$, a carga englobada é,

$$q_{engl.} = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$q_{engl.} = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right] = \frac{4\pi\rho_0}{3}\left[r^3 - \frac{3r^4}{4R}\right]$$

Entao,

$$\oint \vec{E}\vec{n}ds = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[r^3 - \frac{3r^4}{4R}\right]$$

O fluxo a esquerda sera $\oint \vec{E}\vec{n}ds = E.4\pi r^2$

Comparando com a parte direita da equacao obtemos,

$$E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{3r^2}{4R}\right]$$

Para $r > R$, temos

$$\oint \vec{E}\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr =$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - \frac{3R^4}{4R}\right] = \frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} R^3 \left[1 - \frac{3}{4}\right] = \frac{\pi\rho_0}{3\varepsilon_0} R^3$$

Logo,

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

(b) O ultimo resultado mostra que a intensidade do campo electrico decresce com o aumento de r para $r > R$. Logo, o máximo e expectavél para $r < R$.

$$E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{3r^2}{4R}\right]$$

Derivando este resultado em função a r teremos,

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[1 - \frac{6r}{4R}\right] = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{6r}{4R} = 0$$

ou

$$1 - \frac{3r}{2R} \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R$$

3. Uma esfera não condutora de raio R é caracterizada por ε, possui uma distribuição volumétrica de carga dada por $\rho = 8\,{}^{(C/m)}\!/_{r^2}$, onde r é a distância do centro da esfera:

a) Determine a diferença de potêncial eléctrico entre um ponto superficial e um ponto localizado no interior a distância L da superficie da esfera.
b) Determine a energia eléctrica armazeada no interior da esfera.

Resolução

(a) Para a distribuição volumétrica de carga dada por $\rho = {}^{8}\!/_{r^2}$,

Devemos primeiro determinar o campo electrico, no interior, tal que pela lei de Gauss,

$$\int E\vec{n}ds = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\int Eds = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, onde\ dq = \rho dV$$

$$\int_0^r Eds = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^r \rho dV \Leftrightarrow E\int_0^r 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \Leftrightarrow E4\pi r^2$$
$$= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^r \frac{8}{r^2}4\pi r^2 dr \Leftrightarrow E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}8.4\pi\int_0^r dr \Leftrightarrow Er^2 = \frac{8r}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Tal que resulta

$$E = \frac{8}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Entao, a diferença de potêncial eléctrico e dado como,

$$\int_{V(R-L)}^{V(R)} dV = -\int_{R-L}^{R} E(r)dr$$

Resolvendo o integral, temos

$$V(R) - V(R-L) = -\int_{R-L}^{R} E(r)dr \Leftrightarrow V(R-L) - V(R) = \int_{R-L}^{R} \frac{8}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr$$
$$\Leftrightarrow V(R-L) - V(R) = \frac{8}{\varepsilon\varepsilon_0} lnr\Big|_{R-L}^{R}$$

E resulta

$$V(R-L)-V(R)=\frac{8}{\varepsilon\varepsilon_0}ln\frac{R}{R-L}$$

Ou

$$V(r)=\frac{8}{\varepsilon\varepsilon_0}ln\frac{R}{R-L}$$

(b) A energia eléctrica armazeada no interior da esfera é,

$$dU=UdV;u=\tfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

Entao,

$$U=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV$$

Tal que

$$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^R\frac{64}{\varepsilon^2\varepsilon_0^2}\frac{1}{r^2}4\pi r^2dr\Leftrightarrow U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{64}{\varepsilon^2\varepsilon_0^2}4\pi\int_0^R dr\Leftrightarrow U=\frac{128\pi}{\varepsilon^2\varepsilon_0}r\Big|_0^R\Leftrightarrow U=\frac{128\pi}{\varepsilon^2\varepsilon_0R}$$