UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE CADEIRAS GERAIS

Experiência Laboratorial Nº 3 – **Estudo da Sobreposição de Oscilações Harmónicas**

Unidade curricular: Física II **Ano:** 2022 **2º Semestre**

Objectivos

- Estudar as leis da sobreposição de oscilações harmónicas realizadas ao longo da mesma direcção.
- Obter as pulsações ou batimentos, com o auxílio do osciloscópio
- Medir as suas características;
- Obter as figuras de Lissajous, produzidas pelas sobreposições de oscilações harmónicas perpendiculares entre si, com o auxilio do osciloscópio, e medir as suas características.

Resumo teórico

Oscilações, é a classe de movimentos que se repetem no tempo, quer seja de forma ordenada ou não. As mesmas podem-se dividir em dois tipos, nomeadamente mecânicas e electromagnéticas.

Oscilações mecânicas – são aquelas cujas grandezas físicas são mecânicas e variam em função do tempo (t), caso particular: pêndulos, vibrações de cordas, etc.

Oscilações electromagnéticas – são aquelas cujas grandezas físicas são eléctricas ou magnéticas e também variam em função do tempo (t), caso particular: intensidade da corrente, etc.

Movimento harmónico simples (MHS)

Um movimento é considerado como sendo MHS se a sua posição como função do tempo tiver a forma:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

Onde A é a chamada amplitude do movimento, que e a distancia entre o ponto médio $(x = 0)$ e o ponto de retorno $(x = A \; ou \; x = -A)$ e ω é a frequência angular. E de salientar que $A, w \; e \; \varphi$ são constantes. A grandeza $(\omega t + \varphi)$ é a fase de movimento e denomina-se constante de fase. A frequência angular ω esta relacionada como período do movimento T pela relação:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (2)$$

Repare que $x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin\left[\omega t + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$, pode ser representado por uma função seno quando mudamos a fase constante e de outro modo como $x = A\cos(\omega t + \varphi) = (A\cos\varphi)\cos\omega t - (A\sin\varphi)\sin\omega t$, expressando o MHS como sobreposição de funções senos e cossenos.

Sobreposição de oscilações harmónicas ao longo da mesma Direcção:

Com frequências iguais

Consideremos a existência de dois dados MHS das mesma frequência angular ω, mas com amplitudes diferentes, descritas pelas seguintes equações:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ e } x_1(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (3)$$

Para oscilação resultante tem-se:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Observando a Figura A, OP_1 e um vector de comprimento A_1 girando com um angulo em relação ao eixo x que varia no tempo como $(\omega t + \varphi_1)$ e de forma análoga OP_2 e um vector de comprimento A_2 girando com um angulo em relação ao eixo x que varia no tempo como $(\omega t + \varphi_2)$. Desta feita, a soma vetorial de OP_1 e OP_2 e o vector OP.

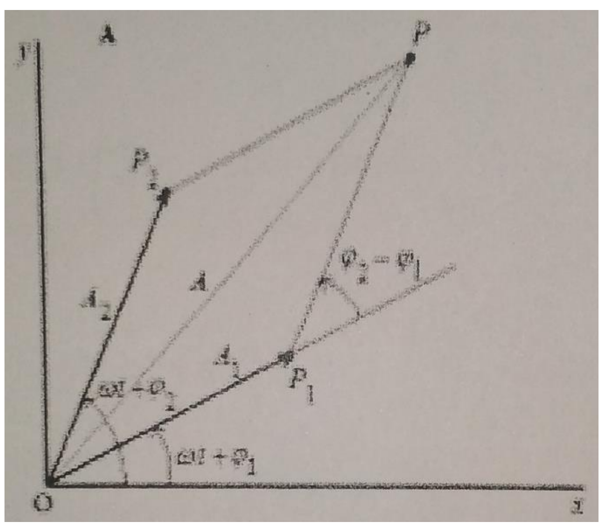


Figura A: Decomposição dos vetores das amplitudes das oscilações.

Aplicando a lei dos cossenos ao triangulo OP_1P

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\big(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\big)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (5)$$

A equação (5) permite determinar o valor do modulo de A. Aplicando a lei dos cossenos ao mesmo triangulo, tem-se:

$$\frac{A_2}{\sin\beta} = \frac{A}{\sin\big(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\big)} \leftrightarrow \sin\beta = \frac{A_2}{A}\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (6)$$

Com (6) pode-se determinar β, que somando a φ_1 nos da φ.

Com frequências diferentes

Sejam consideradas as equações:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_1(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (7)$$

Para simplificar o problema, iremos supor que as fases iniciais sejam iguais a zero $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ tal que para as equações (7) resulta,

$$x_1(t) = A_1 cos\ (\omega_1 t)$$

$$x_1(t) = A_2 cos\ (\omega_2 t) \qquad (7)$$

Em um instante arbitrário, o resultado da sobreposição entre as duas oscilações e mostrado na figura a seguir,

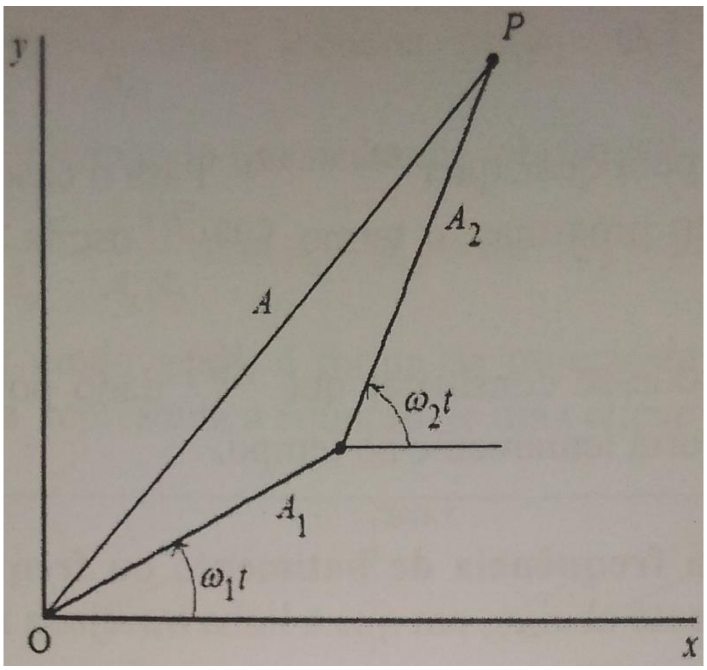


Figura B: Superposição entre duas oscilações com frequências diferentes.

De modo geral, a superposição entre $x_1(t)$ e $x_2(t)$ será uma função complicada t, podendo nem ser um movimento periódico.

Um caso especial acontece quando os dois MHS tem frequências muito próximas uma da outra, ocorrido um fenómeno conhecido como batimento

Com a mesma amplitude

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad (9)$$

Para a oscilação resultante, tem-se:

$$x(t) = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \qquad (10)$$

Considerando que $\omega_1 > \omega_2$ e definindo $\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ e $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, pode-se escrever:

$$\omega_1 = \overline{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$\omega_2 = \overline{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad (11)$$

Substituindo em (10), resulta:

$$x(t) = A\left[\cos\left(\overline{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) + \cos\left(\overline{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right] \qquad (12)$$

Usando a identidade trigonométrica resulta:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\overline{\omega}t \qquad (13)$$

A equação (13) e geral e valida para quaisquer ω_1 e ω_2. Para o caso em que $\Delta\omega \ll \omega_1 + \omega_2 \gg$, isto e quando as duas frequências forem muito próximas, o termo $\cos\overline{\omega}t$ oscila muito mais rapidamente que o termo $2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$. Sendo assim, pode-se considerar que $x(t)$ dado por (13) e uma oscilação de frequência angular $\overline{\omega}$ com amplitude que varia lentamente no tempo.

A frequência $\Delta\omega$ e a chamada frequência de batimento ou frequência de pulsação. A equação (13) pode ser representada graficamente abaixo, em que a linha tracejada ilustra a modulação da amplitude:

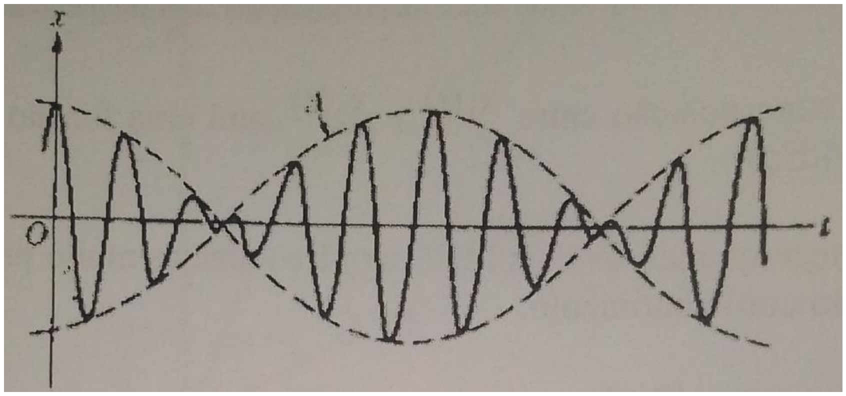


Figura C: Batimentos no caso em que as duas amplitudes são iguais

Sobreposição de oscilações harmónicas perpendiculares

Com frequências idênticas

$$X = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad (14)$$

$$X = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \qquad (15)$$

Os movimentos ao longo de OX e OY, tem amplitudes e fases iniciais diferentes. E preciso achar a forma da trajetória resultante, isto e $Y = F(x)$. Pode-se considere 914) e 915) como as equações que dão a trajetória resultante na forma paramétrica (o tempo t e um parâmetro). Assim sendo, para se encontrar $Y = F(x)$ é necessário eliminar o tempo t.

Reescrevendo as equações (14) e (15):

$$\frac{X}{A_1} = \cos\omega t \cos\varphi_1 - \sin\omega t \sin\varphi_1 \qquad (16)$$

$$\frac{Y}{A_2} = \cos\omega t \cos\varphi_2 - \sin\omega t \sin\varphi_2 \qquad (17)$$

Multiplicando a equação (16) por $\cos\varphi_2$ e a equação (17) por $\cos\varphi_1$, e substituindo uma na outra, resulta:

$$\frac{X}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{Y}{A_2}\cos\varphi_2 = \sin\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (18)$$

Multiplicando (16) por $\sin\varphi_2$ e a equação (17) por $\sin\varphi_1$, e achando a diferença entre os resultados da multiplicação, ter-se-á:

$$\frac{X}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{Y}{A_2}\cos\varphi_1 = \cos\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (19)$$

Elevando (16) e (17) ao quadrado e somando os dois resultados, obtém-se:

$$\frac{X^2}{A_1^2}+\frac{Y^2}{A_2^2}-\frac{2XY}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (20)$$

A equação (20) expressa, de modo geral, a forma da trajetória do movimento resultante. Como é sabido analiticamente, esta representada a equação de uma elipse (Figura D).

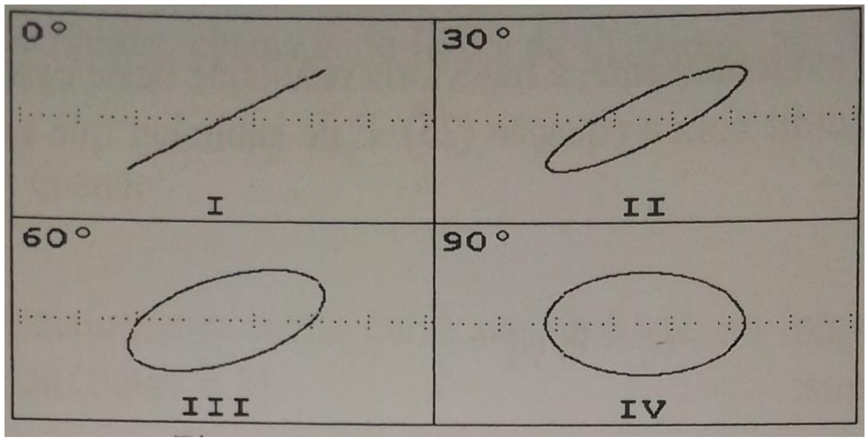


Figura D: Figuras de Lissajous

Alguns casos particulares

a) Se $\varphi_2-\varphi_1=0$ (as fases iniciasis são iguais), as equações (20) simplifica-se da seguinte forma

$$\frac{X^2}{A_1^2}+\frac{Y^2}{A_2^2}-\frac{2XY}{A_1A_2}=\left(\frac{X}{A_1}-\frac{Y}{A_2}\right)^2=0$$

Ou finalmente:

$$Y=\frac{A_2}{A_1}X \qquad (21)$$

A equação (21) representa a equação de uma recta com coeficiente de inclinação ${}^{A_2}/{}_{A_1}$ que e a tangente do angulo de inclinação da recta com o eixo OX, ou seja $\tan\alpha=\frac{A_2}{A_1}$ (observar primeiro quadrate da figura D).

b) Se $\varphi_2-\varphi_1=\pi$, neste caso obtem-se

$$Y=-\frac{A_2}{A_1}X \qquad (22)$$

a recta estará situada no segundo e quarto quadrantes (ver figura D)

c) Se $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ a equação sera da seguinte forma:

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (23)$$

A equação (23) representa a equação reduzida de uma elipse com semieixos A_1 e A_2, e quando $A_1 = A_2 = A,$ a elipse transforma-se numa circunsferencia:

$$X^2 + Y^2 = A^2 \qquad (24)$$

d) Se $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$, evidentemente, a trajectoria resultante neste caso também sera elíptica, porem se a equação resultante coincidir com a equação (23). e de sublinhar que existe uma diferença entre os dois últimos casos.

Com efeito, suponha que: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

As equações (14) e (15) podem ser rescritas da seguinte forma:

$$X = A_1 \cos \omega t$$

$$Y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin \omega t \qquad (25)$$

No instante $t = 0$, o ponto com coordenadas X e Y esta na posição P (Figura). Nos instantes seguintes a coordenada diminui e a coordenada Y será negativa. Portanto o movimento do ponto considerado vai ocorrer no sentido horário.

$$V_y(0) = (\pi - A_2 \sin \omega t) = -A_2 \omega < 0 \qquad (26)$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$$

De forma análoga, se:

$$X = A_1 \cos \omega t$$

Obtém-se:

$$Y = A_2 co\, s\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin \omega t \qquad (27)$$

$$V_y(0) = (A_2 \sin \omega t) = A_2 \omega > 0 \qquad (28)$$

De maneira semelhante, pode se concluir que o movimento ocorre num sentido arbitrário.

No caso em que as frequências das oscilações perpendiculares se distinguem da grandeza infinitesimal $\Delta\omega$, pode-se considerar como oscilações com a mesma frequência, mas com uma diferenca de fase que varia lentamente. Sendo as equações (14) e (15) podem-se representar do seguinte modo:

$$X = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$Y = A_2 co\, s[\omega t + (\Delta\omega + \varphi_2)] \qquad (29)$$

Onde a expressão $(\Delta\omega + \varphi_2)$ desempenha o papel do desvio de fase variável em função do tempo.

O movimento resultante realiza-se neste caso ao longo de uma curva que passa sucessivamente por todas as posições que correspondem a todas diferenças de fase de 0 ate 2π.

Se as frequências das oscilações não forem iguais, então a trajetória do movimento resultante terá a forma de uma curva muito complexa, chamada de figura de Lissajous. Na Figura E, mostram-se algumas das trajetórias mais simples, quando:

Quando $\varphi_1 = \varphi_2$, a figura transforma-se numa curva não fechada, ao longo da qual se move o ponto oscilante, para trás e para frente (Figura E.2)

Quando a razão $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ cresce, a trajectoria sera mais complexa. Na Figura E.3 esta mostrada a curva para $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}$ e $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

Existe dois métodos equivalentes para determinar a razão $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ a partir das figuras de Lissajous.

Método 1: Os números dos pontos tangentes ao longo das direções dos eixos OX e OY serão:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_{OY}}{N_{OX}} = \frac{3}{4}$$

(Para o caso da figura E.3)

Método II: Traça-se arbitrariamente duas rectas ortogonais entre si e para lelas aos eixos OX e OY (ver a figura E.3). Posteriormente calcula-se os pontos dos cruzamentos entre as figuras de Lissajous e as rectas, isto e, os números N_{OX} e N_{OY} . Desta forma

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_{OY}}{N_{OX}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

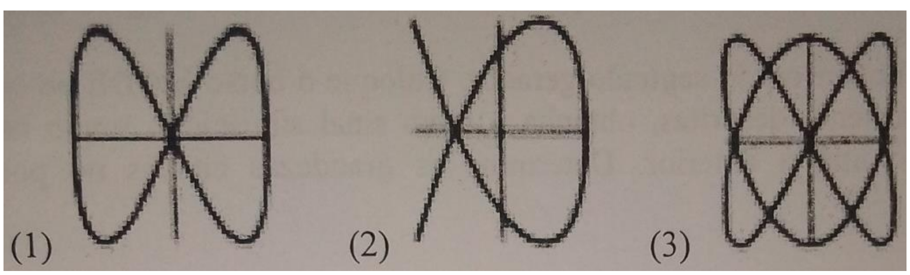


Figura E: Figuras de Lissajous

Equipamento necessário

- ❖ Um osciloscópio

- ❖ Dois geradores de sinais de funções idênticas
- ❖ Dois cabos BNC blindados

Modo de execução

1 – Ligue o sinal do primeiro gerador de sinais (a esquerda) ao CH1 do osciloscópio. Ligue o segundo gerador de sinais (a direita) ao CH2 do osciloscópio;

2 – Ligue o osciloscópio a rede de corrente. Para isso deves primar a tecla “Power”;

3 – Prima a tecla “Power ON” do gerador de sinais situado a esquerda do osciloscópio e conecta ao canal CH1. O MODE do osciloscópio posicionado no CH1;

4 – Variando a frequência e a amplitude do gerador de sinais observar-se-á no ecrã do osciloscópio um sinal sinusoidal. Recomenda-se uma frequência de 300 Hz. Com o botão POSITION centralize o sinal obtido e determine a amplitude, o período e a frequência do sinal. Desenhe a figura observada.

Nº	Amplitude	Frequência	Período
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

5 – Prima o botão “Power ON” do segundo gerador. Coloque o botão MODE no canal CH2. Com as mesmas indicações anteriormente descritas, obtenha o novo sinal sinusoidal, sendo necessário que a frequência escolhida seja próxima a anterior. Determine as grandezas citadas no ponto 4 (quatro). Desenhar a figura observada.

6 – Troque o botão MODE para a posição DUAL e variando ligeiramente a frequência do segundo gerador, obtenha as figuras típicas de batimentos.

7 – Prima os botões de 100 Hz para ambos geradores. Gire o botão TIME/ DIV do osciloscópio para a posição XY. Variando ligeiramente a frequência do segundo gerador obtenha a circunferência, a recta e a eclipse descrita no fundamento teórico.

8 – Obtenha as figuras de Lissajous representadas na figura do resumo da teoria, tendo em conta as razões das frequências de ambos geradores. Desenhar as figuras obtidas.

9 – Calcular os números N_{OX} e N_{OY} e as suas razões. Comparar as razões $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, assim obtida, com o seu valor segundo a escala do gerador.

Questões de controle

1 – Qual é a oscilação resultante no caso da sobreposição de oscilações do mesmo sentido da, mesma frequência?

2 – Qual é a frequência dos batimentos?

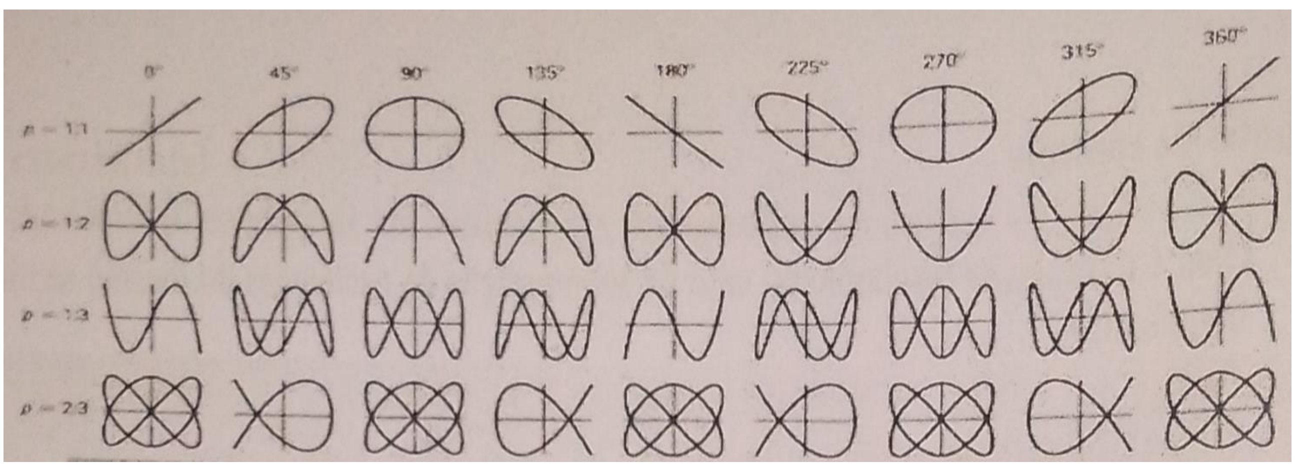
3 – Explique as diferenças teóricas e experimentais entre as pulsações ou batimentos e as figuras de Lissajous.

4 – Como se pode calcular a razão de frequências, usando as figuras de Lissajous?

5 – Deduzir a formula básica (20)

ANEXO

Figuras de Lissajous



Referências bibliográficas

1. Roque, A. (2010). Ondas, Fluidos e Termodinâmica. Disponível em sisne.org/Disciplinas/grad?fisica2fisMed/aula6.pdf