II Campo eléctrico_Parte II

Fluxo do campo eléctrico (Lei de Gauss)

Aplicação da lei de Gauss para simetria cilíndrica, plana e esférica

Condutor carregado

Campo eléctrico externo

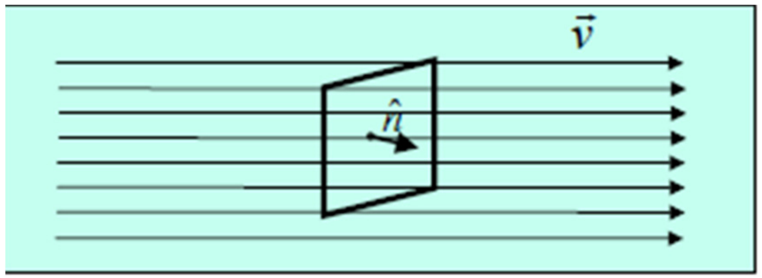
Introdução

- Um dos objectivos da Física é resolver exercícios aparentemente complexos aplicando métodos simples.
- Um dos instrumentos usados para atingir esse objectivo é o uso da simetria (ver exemplos da barra fina carregada uniformemente e do anel carregado).

- Para certas distribuições simétricas de cargas, a resolução é muito menos trabalhosa, usando a lei de Gauss. A lei de Gauss é alternativa a lei de Coulomb por um lado, mas também fornece uma relação diferente entre a carga e o campo eléctricos.

Fluxo do campo eléctrico

Conceito de fluxo (geral): Chama-se fluxo de uma grandeza vectorial, ao produto escalar desse vector pela área que o vector atravessa.



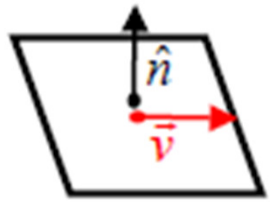
Consideremos o movimento da água num rio. A velocidade da água é dum modo geral dada por:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

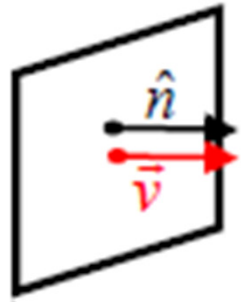
Coloquemos na água um determinado contorno de arame de área S, definida como $\vec{S} = S\vec{n}$

- Quanta água irá travessar o contorno? Qual é o fluxo da velocidade através da superfície S?

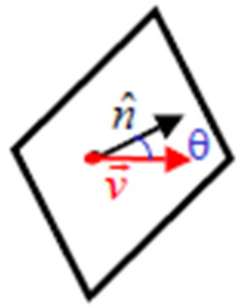
Depende da orientação do contorno metálico na água. Assumindo constante a velocidade e o contorno plano temos:



1. $\vec{S} \perp \vec{v} \Rightarrow \Phi_v = 0$



2. $\vec{S} // \vec{v} \Rightarrow \qquad \Phi_v = v \cdot S$
3. $\vec{S} \measuredangle \vec{v} \Rightarrow \Phi_v = v \cdot S \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{S}$



- Dum modo geral,

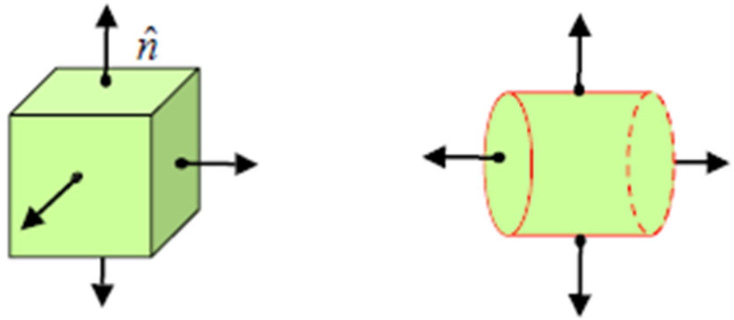
$$\Phi_{\vec{v}} = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Qual é a direcção de $d\vec{S}$?

Em superfícies tridimensionais a definição é única:

1. Em qualquer ponto do espaço $d\vec{S}$ aponta $\perp$ à superfície;
2. Aponta par fora da superfíe

- Exemplos



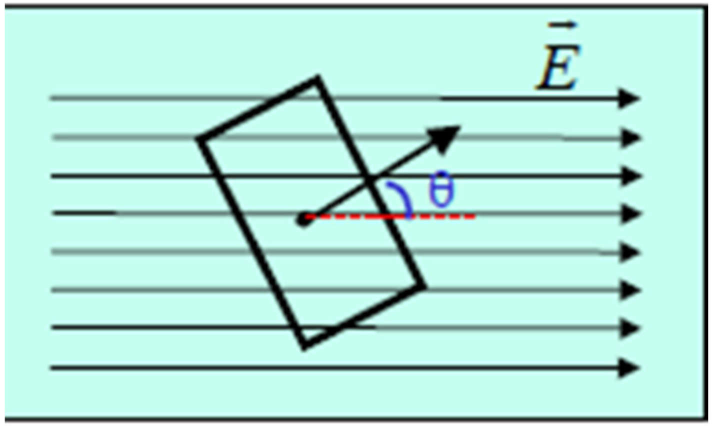
Fluxo do campo eléctrico: O fluxo do vector campo eléctrico através da superfície de área dS é:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Exemplo do cálculo do fluxo: para um campo eléctrico uniforme e uma superfície plana, o fluxo do campo eléctrico será

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S \cos\theta$$

Interpretação do fluxo usando linhas do campo: O fluxo é proporcional ao número de linhas que atravessam a superfície fechada S.



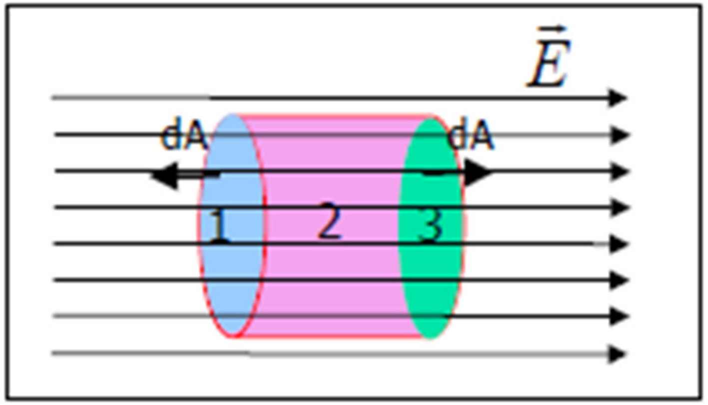
A interpretação geométrica dada ao fluxo é válida para qualquer campo eléctrico e para qualquer contorno.

- Fluxo através de superfícies fechadas em 3 D:

Consideremos o fluxo total através de um cilíndro colocado de tal modo que as linhas do campo sejam paralelas ao eixo de simetria

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Calculemos cada um dos fluxos.



$\Phi_2 = 0$ porque $\vec{E} \perp \vec{S}$ (na figura d$\vec{A} = d\vec{S}$)

$|\Phi_1| = |\Phi_3|$, mas os sinais são opostos, ou seja para Φ_3, o ∡ entre $\vec{E}$ & $\vec{S}$ é zero enquanto que para Φ_1, o ∡ é π.

Logo, $\Phi = \int E \cdot S \cos\theta = 0$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

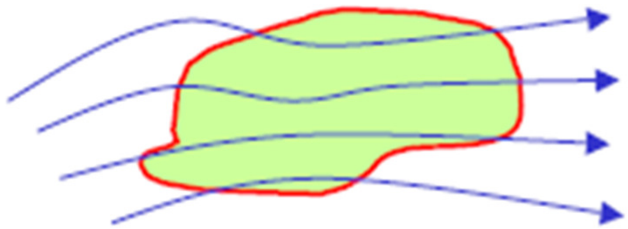
O fluxo total através do cilindro é nulo.

Fluxo através de uma superfície fechada, mas vazia (sem cargas):

Será que a resposta encontrada deve-se a forma exacta do objecto ou sua orientação?

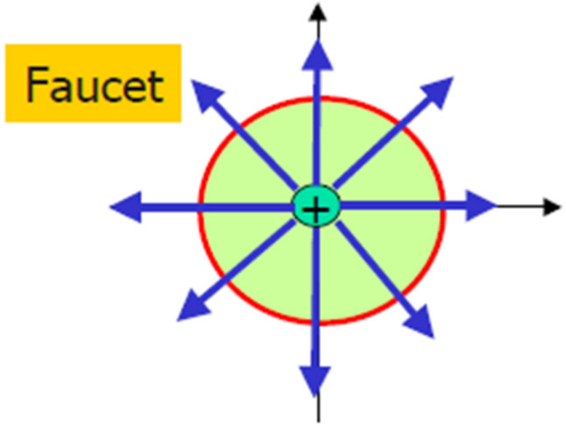
Racioncínio: o fluxo é proporcional ao número de linhas que atravessam a superfície.

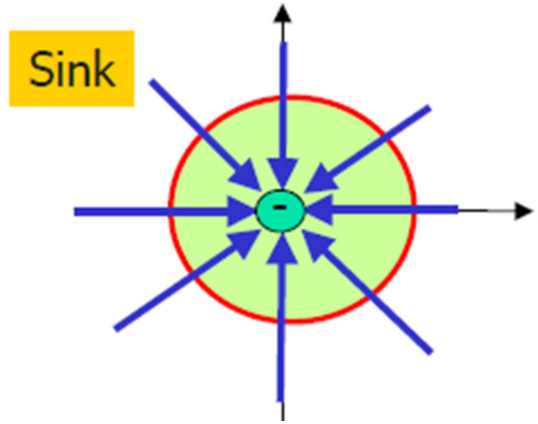
Resposta: Não! Porque todas as linhas que entram pela superfície têm que sair (não desaparecem linhas dentro).



Conlusão: O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada que não contém cargas eléctricas é nulo.

Fluxo através de superfície fechada que contém carga Q (o que acontece quando a superfície contém carga?):





As linhas do campo tem origem na superfície da carga ou então terminam nessa superfíe.

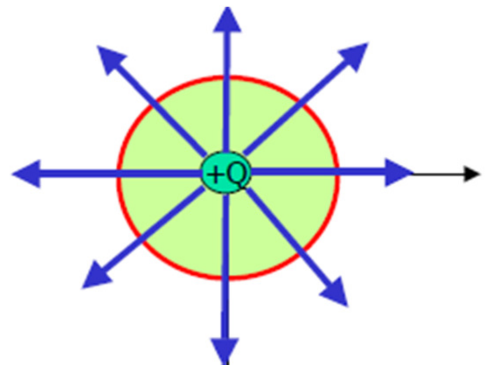
A partir da interpretação geométrica do fluxo, conlui-se que o fluxo é diferente de zero.

Exemplo: Calcule o fluxo Φ duma carga $+$Q localizada no centro de uma esfera de raio R.

Solução: para qualquer ponto na superfície da esfera os vectores $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ são paralelos e tem mesmo sentido. Logo,

$\Phi = \int E \cdot dS \cos\theta; \qquad \cos\theta = 1$

E, para carga puntiforme ao longo da superfície da esfera é



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

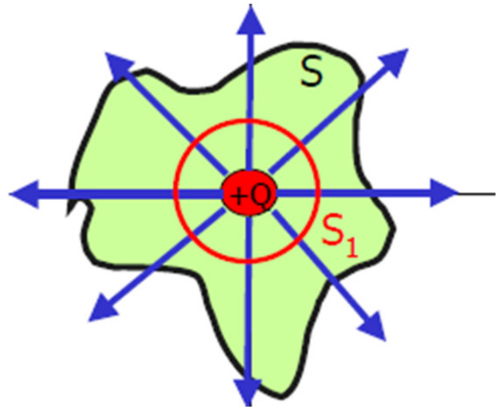
$S = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}S = 8\pi r dr \qquad$ Logo,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \int_0^R 8\pi r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Fluxo através de uma superfície genérica (como agir quando a superfície for irregular, de difícil integração?)

Opção 1: coloquemos uma superfície esférica S_1 circumscrirta na nossa superfície irregular. Sendo contínuas as linhas do campo, o # de linhas que atravessa a superfície esférica, é o mesmo que atravesa a outra superfície:

$$\Phi_S = \Phi_{S1} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Conclusão: o $\Phi_{\vec{E}}$ através de qualquer superfície fechada S que contém uma carga líquida Q, é proporcional à carga envolvida:

$$\Phi_S = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{englobada}}{\varepsilon_0}$$

Esta formulação constitui a lei de Gauss.

Por quê a Lei de Gauss é tão importante?

✓ Porque relaciona o campo eléctrico *E* com as suas fontes *Q*.

- Dada a carga *Q* determina-se o campo *E*(forma integral);
- Dado o campo *E* determina-se a carga *Q* (forma diferencial: a ser tratado oportunamente)

A lei de Gauss é sempre verdadeira?

✓ Sim! Independentemente do tipo de campo E ou superfície S.

A lei de Gauss é sempre útil?

✓ Não! Útil apenas quando o problema apresenta simetrias.

Aplicação da lei de Gauss

Exemplo (i) com simetria esférica: Calcule o campo eléctrico em todo o espaço devido à distribuição homogénea e volumétrica de carga ρ de uma carga positiva por uma esfera de raio R.

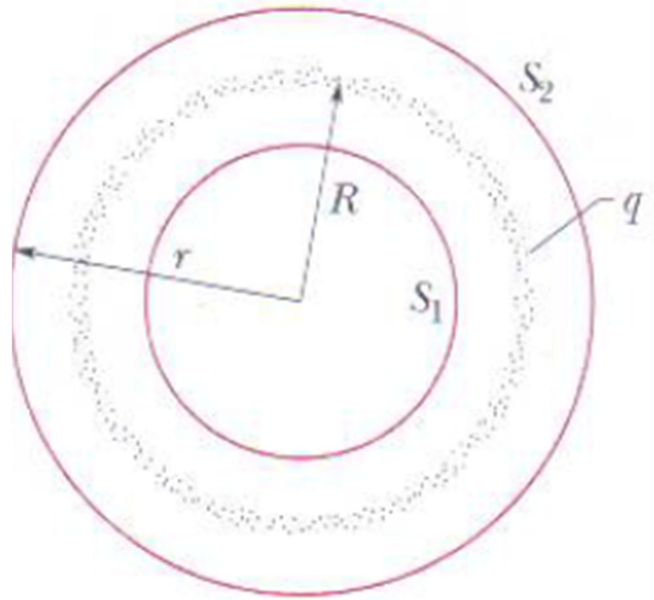
Se a esfera estiver num meio dieléctrico caracterizado por constante dieléctrica ε, a lei de Gauss toma o seguinte aspecto:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int \rho dV$$

Ou $(\vec{E} \cdot \vec{n} = E)$ e $E = const$ em qualquer superfície gaussiana

$$E \oint 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int \rho 4\pi r^2 dr$$

Representemos uma esfera de raio R com densidade de carga ρ e duas sueprfícies gaussianas: uma, S_1, localizada a uma distância $r < R$ (englobando apenas uma parte da carga)do centro e outra, S_2, a uma distância $r > R$ (englobando toda a carga):



Para pontos localizados no interior da esfera ($r < R$):

$$E \oint 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr$$

Ou

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon\varepsilon_0}$$

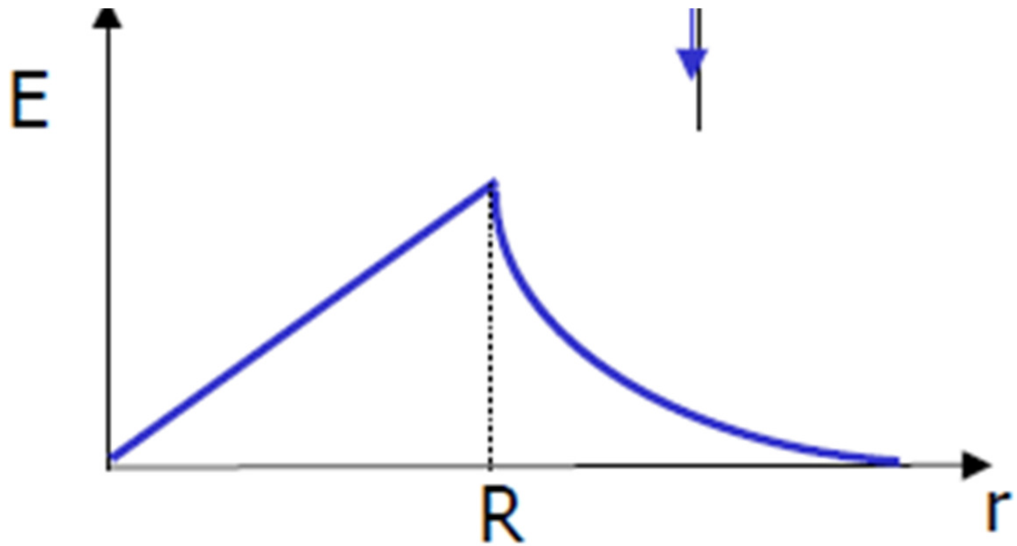
$$E(0) = 0$$

Para pontos exteriores da esfera ($r > R$):

$$E \oint 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \qquad \Rightarrow E(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot r}{3\varepsilon\varepsilon_0};\ r < R \quad \wedge \quad E(0) = 0 \\ \dfrac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2};\ r \geq R \quad \wedge \quad E(R) = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0} \end{cases}$$

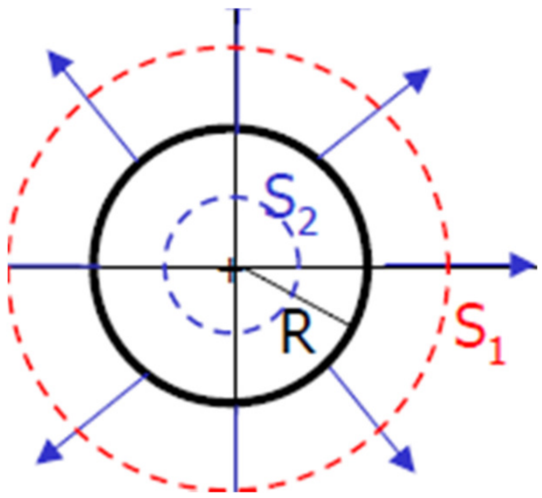


Exemplo (ii) com simetria esférica: Calcule o campo eléctrico em todo o espaço devido à distribuição homogénea e superficial de carga σ de uma carga positiva por uma casca esférica de raio R (de facto R_1- raio inteior e R_2- raio exterior).

Sendo simetria esférica, o campo é

Radial. Usemos as superfíes gaussians

S_2 de raio $r < R_1$ e S_1 de raio $r > R$



Para pontos localizados no interior da esfera ($r < R$):

$E \oint 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^r \sigma dS = 0$ (por ausência de cargas). Logo,

$E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$

Para pontos exteriores da esfera ($r > R$):

$$E \oint 8\pi r dr = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^R \sigma dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^R \sigma \cdot 8\pi r dr$$

Logo,

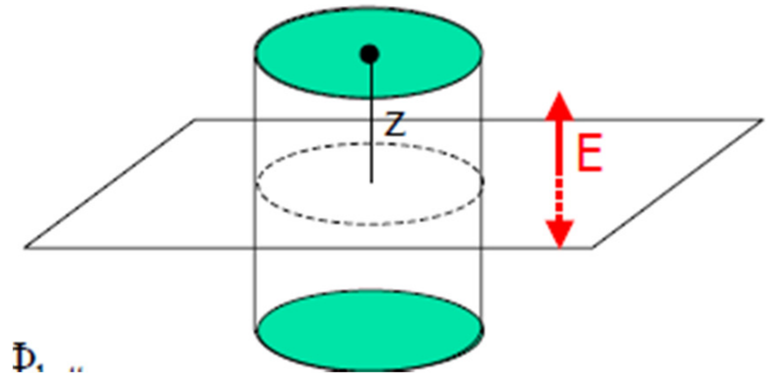
$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \sigma \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Para $E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$

Exempo (iii) com simetria plana: Calcular o campo eléctrico criado no ponto Z, por um plano infinito e carregado positivamente com densidade superficial σ.

Vamos escolher uma superfície gaussiana cilíndrica de área S e altura ± Z.



Apliquemos a lei de Gauss para todas superfícies:

$$\Phi = \Phi_{lado} + \Phi_{base} + \Phi_{topo}$$

Pela simetria, o campo eléctrico é paralelo a Z. Logo, $\Phi_{lado} = 0$ e $\Phi_{base} = \Phi_{topo}$(aqui ambos fluxos são positivos!)

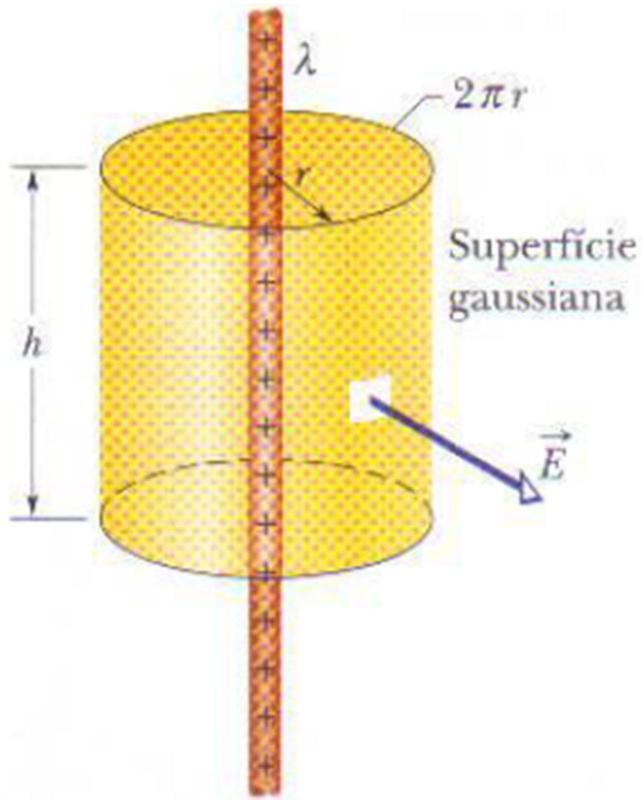
$$\Phi = \int_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{englobada}}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$\int_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \int_{topo} EdA = 2EA$$

Logo, $E = \dfrac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 A} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$

Envolvamos a barra com uma superfície gaussiana cilíndrica.

Exemplo (iii) com simetria cilíndrica: Uma barra plástica (não condutora) de comprimento infinito, tem distribuição linear de carga λ. Obter a expressão para o campo eléctrico a uma distância *r* do eixo da barra.



Sendo cilíndrica a simetria, todos os pontos da parte lateral da superfície gaussiana têm a mesma intensidade de $\vec{E}$.

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int E dS = E \int dS$$

$$\Phi = E \cdot \int_0^h 2\pi r dh = E \cdot 2\pi r h$$

Mas, $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda h}{2\varepsilon\varepsilon_0 \pi r h} = \frac{\lambda}{2\varepsilon\varepsilon_0 \pi r}$

Este é o campo eléctrico criado por uma recta carregada em pontos muito distantes das extremidades.

Condutor carregado

Se uma carga eléctrica for introduzida num condutor, o excesso de carga distribui-se inteiramente pela superfície; no interior do condutor o campo eléctrico é nulo.

A que se deve?

Cargas do mesmo sinal tendem a afastar-se o máximo possível uma da outra.

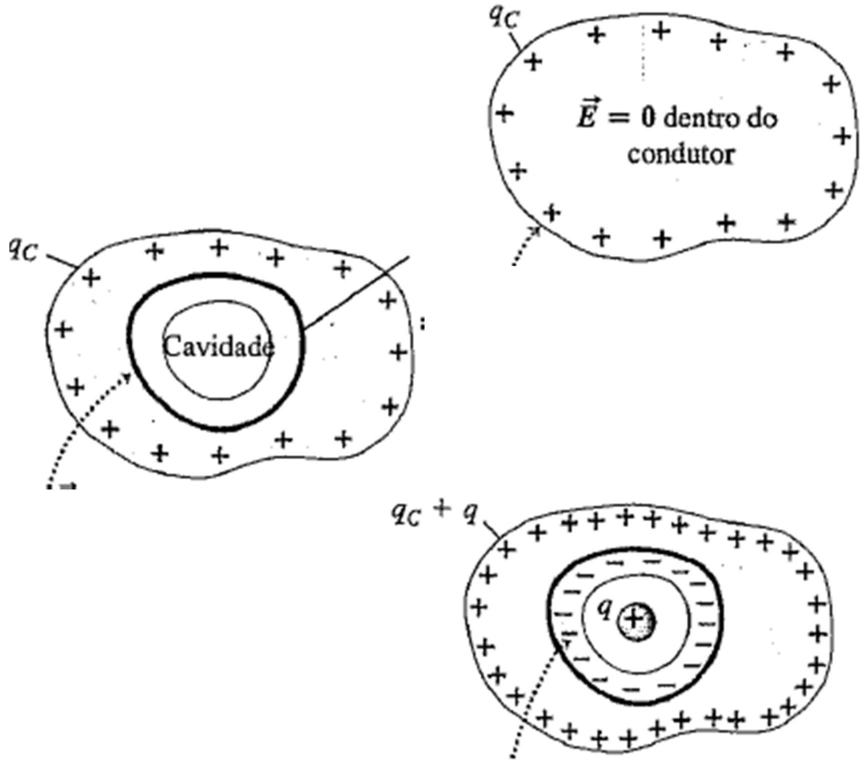
E por quê o campo eléctrico é nulo no interior?

Se não fosse nulo, o campo causaria força sobre os electrões livres que estão sempre presentes nos condutores. Ou seja, haveria movimento de electrões no interior do condutor (corrente eléctrica), mas a corrente eléctrica permantente não pode existir em condutor que não faz parte de um circuito eléctrico, então o campo eléctrico deve ser nulo!

Na verdade existe campo eléctrico interno apenas durante o processo de carregamento do condutor. Porém, o excesso de carga redistribui-se de modo a anular o campo eléctrico e as cargas páram de se mover (estabelecem-se equilíbrio electrostático das cargas).

O campo eléctrico também é nulo quando o condutor contem cavidade.

Condutor carregado(cima), com cavidade e com cavidade e carga q.



Campo eléctrico externo

Vimos que a carga em excesso num condutor distribui-se pela superfície do mesmo.

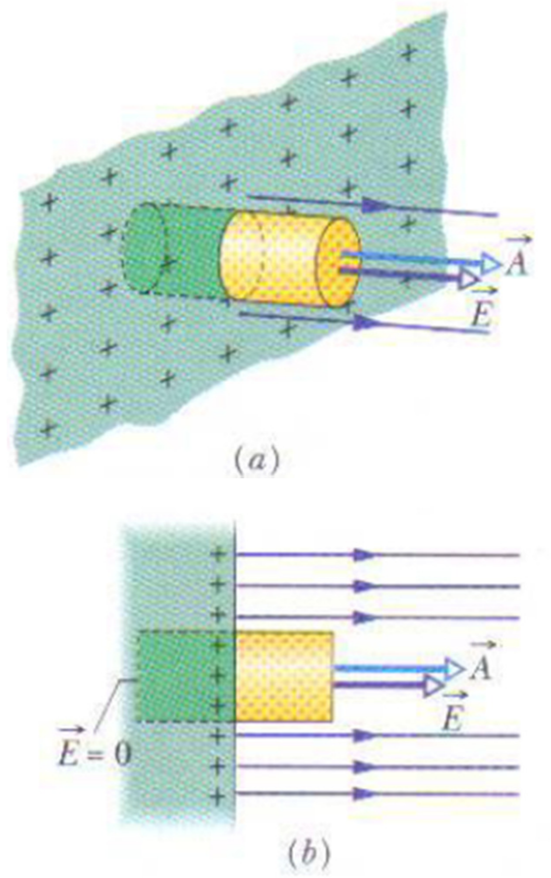
Mas as cargas não se distribuem de modo uniforme, enquanto o condutor não for esférico. Ou seja, para qualquer condutor não esférico, a densidade superficial de carga σ varia de ponto para ponto, tornando difícil a determinação de campos criados por cargas superficiais.

Entretanto, o campo eléctrico nas proximidades da superfície do condutor determina-se facilmente com recurso a lei de Gauss:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \sigma dS \Rightarrow \mathrm{ES} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \text{ ou}$$

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Superfície do condutor e superfície gaussiana cilíndrica



Leitura individual

1. Pára-raios e seu princípio de funcionamento.

2. A gaiola de Faraday (Michael Faraday). Em que constistiu a experiência? Qual a conclusão principal da experiência?