III Potencial Eléctrico

- Energia potencial eléctrica
- Potencial eléctrico e diferença de potencial para distribuição discreta de cargas
- Superfícies equipotenciais
- Potencial eléctrico de distribuição continua de cargas (linha de cargas; disco carregado)
- Cálculo do potencial a partir do Campo eléctrico
- Cálculo do campo a partir do potencial eléctrico (gradiente do potencial)
- Potencial de um condutor carregado

Introdução

- Em mecânica os conceitos de Trabalho e Energia foram extremamente úteis na resolução de problemas de forma muito simples. Nomeadamente é válido o teorema trabalho-energia cinética, e para forças conservativas, o trabalho é igual à menos variação da energia potencial.
- Ocorre que a força eléctrica é conservativa.

Energia potencial eléctrica

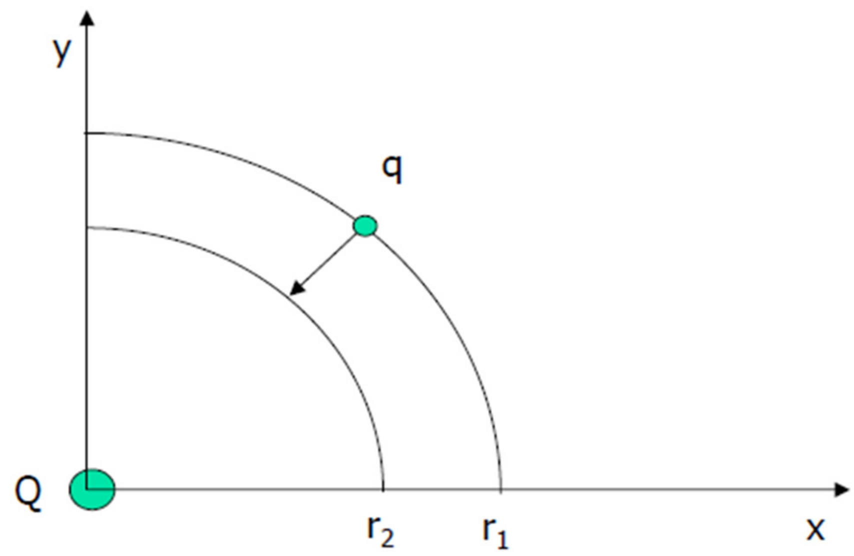
Quando a força electrostática entre duas ou mais partículas de um determinado sistema, pode ser associada a uma energia potencial eléctrica *U* do sistema, a força é conservativa.

Se a configuração do sistema muda de uma posição inicial r_1 para uma final r_2, então a força electrostática realiza trabalho sobre as partículas.

Quanto trabalho é necessário para mover a carga q da posição r_1 para r_2?

$$W_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Interacção entre 2 partículas Q e q. variando posição de q resulta em trabalho.



Assumamos que o caminho de q é radial. Logo,

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\frac{|Q||q|}{r^2}\cdot dr\vec{u}_r;\ (\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{r}_r\ neste\ caso);$$

$$W_{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} = -\int_{r_1}^{r_2} k\frac{|Q||q|}{r^2}\cdot dr = kQq\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

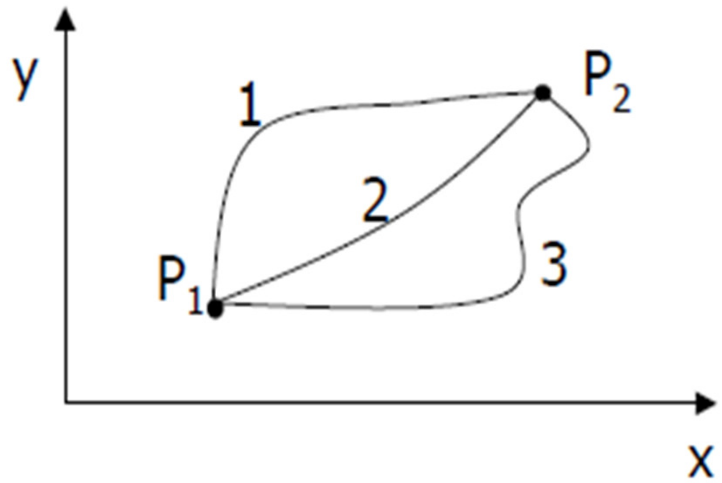
Será que o W depende da trajectória escolhida?

Não! Sempre é possível decompor a trajectória em duas partes (// à direcção radial e outra ⊥ a ela). A componente ⊥ será sempre ⊥ a força aplicada). Logo, a força electrostática é conservativa.

Corolário1: o trabalho realizado para mover uma carga pontual da posição P1 para P2, é o mesmo e não depende da trajectória escolhida.

$$W_{12} = \int_{traj1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{traj2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{traj3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Possíveis trajectórias que ligam pontos 1 e 2.



Corolário 2: O trabalho realizado através de trajectória fechada é nulo:

$$W_{11} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Portanto, a força electrostática é conservativa. Sendo conservativa a força, o trabalho será igual à diferença (menos variação) da energia potencial eléctrica:

$$W_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} = U(r_1) - U(r_2) = -\Delta U$$

Ou seja, quando o trabalho é positivo a energia potencial diminui e vice-versa.

- Energia potencial de sistema de partículas:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$ (para 2 partículas)

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

(para 3 partículas)

Em geral (N partículas) temos:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Mas se apenas pretende-se calcular a energia potencial entre todas as partículas com uma específica, exemplo com partícula q_0, teremos:

$$U = q_0 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Referência de U: Configuração para a qual a distância entre as partículas é finita e assume-se nula a energia potencial de referência (no infinito a energia potencial eléctrica é nula).

Potencial eléctrico e diferença de ϕ para distribuição discreta de cargas

- Vimos que o trabalho realizado para mover uma carga q do ponto 1 para 2 depende da própria carga:

$$W_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \equiv W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r} = q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

Definamos uma grandeza independente da carga e que somente descreve as propriedades do meio:

$$\phi_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{r}$$

$\phi_{12}(\phi_1 - \phi_2)$ - é a diferença de potencial (ddp) entre os 2 pontos. A sua interpretação física é: o trabalho realizado pela força eléctrica por unidade de carga para mover a carga do ponto inicial para ponto final.

No SI expressa-se em Volt.

$1\,Volt = \frac{J}{C} = \frac{N{\cdot}m}{C}$

Usando esta unidade, pode ser expressa uma unidade alternativa de energia para sistemas de dimensões atómicas ou sub-atómicas, o eV(electrão-volt).

$1\,eV = 1{,}60 \times 10^{-19}\,J.$

Lembrando que $\frac{N}{C}$ é unidade do campo eléctrico, coclui-se que este último pode ser expresso por $\frac{Volt}{m}$.

Colocando o ponto inicial no infinito, podemos definir o potencial eléctrico como:

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{r}$$

- Potencial criado por carga pontual:

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, d\vec{r} = -k \int_{\infty}^{r} \frac{q}{r^2} dr = k\frac{q}{r}$$

Diferença de potencial entre 2 pontos devido a carga pontual:

$$\phi_{12} = -k \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{r^2} dr = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \phi(2) - \phi(1)$$

Existindo várias cargas no espaço, o potencial criado num determinado ponto é a soma dos potenciais criados por cadacarga:

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i}$$

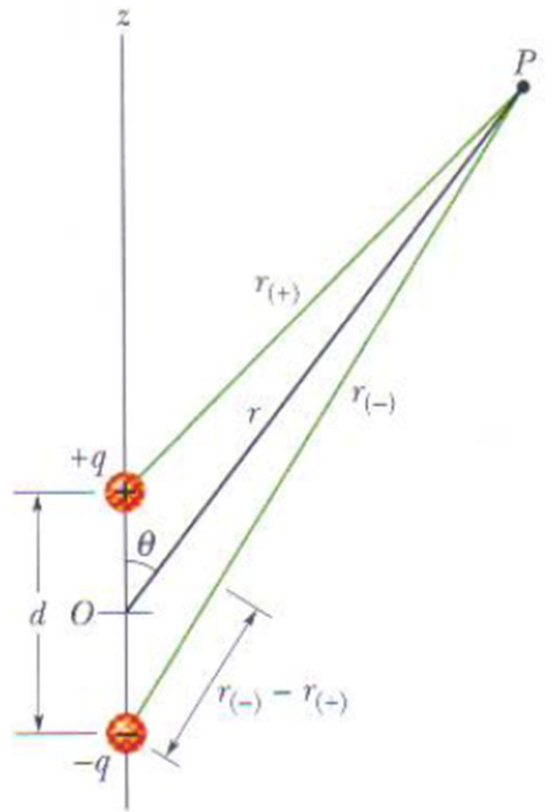
Sendo escalar o potencial, o seu sinal é definido pela carga (carga positiva cria potencial positivo e a negativa cria potencial negativio).

Exemplo: potencial produzido por dipolo eléctrico.

A carga positiva distante de $r_{(+)}$ produz potencial positivo $\phi_{(+)}$ em P, enquanto que a carga negativa distante de $r_{(-)}$ de P, produz potencia negativo $\phi_{(-)}$.

O potencial total em P será:

Ponto P situado a distância r do dipolo



$$\phi \equiv \phi_P = \phi_{(+)} + \phi_{(-)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ \cdot r_-}\right)$$

Pontos de interesse para o dipolo são aqueles em que a distância *r* >> *d*. Nestas condições temos as seguintes expressões:

$r_- - r_+ \approx d\cos\theta$ & $r_+ \cdot r_- \approx r^2$

Logo, $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

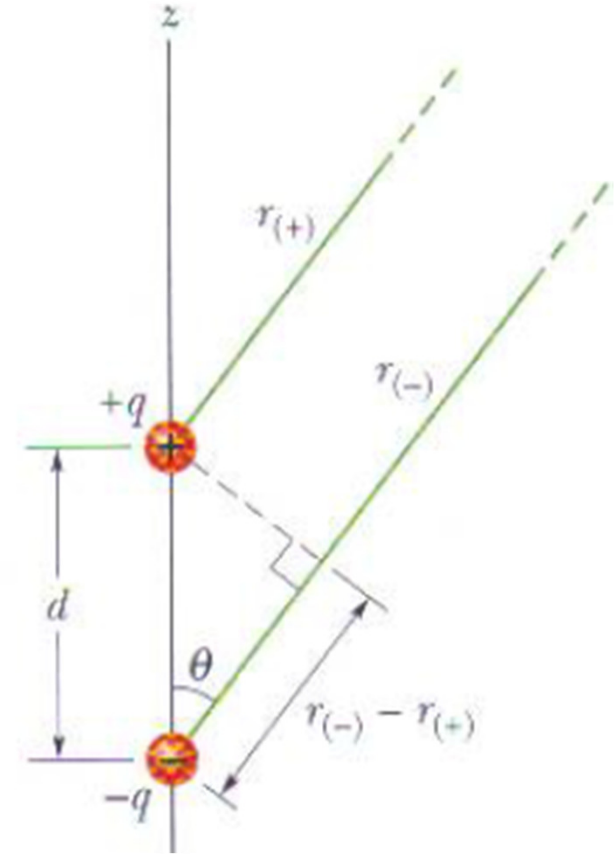
Onde θ- mede-se do vector momento dipolar $\vec{p}$ para $\vec{r}$.

Logo, a diefença de potencial pode ser expressa em termos do produto escalar entre aqueles vectores:

$$\phi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Por quê $r_{-} - r_{+} \approx d\cos\theta$ e não $r_{-} - r_{+} = d\cos\theta$?

Rigorosamente, o ângulo entre $\vec{r}_{-}$ e $\vec{p}$ não é o mesmo entre $\vec{r}_{+}$e $\vec{p}$. Mas o ponto P estando muito afastado, então os dois ângulos são próximos(rectas quase paralelas, veja a figura).

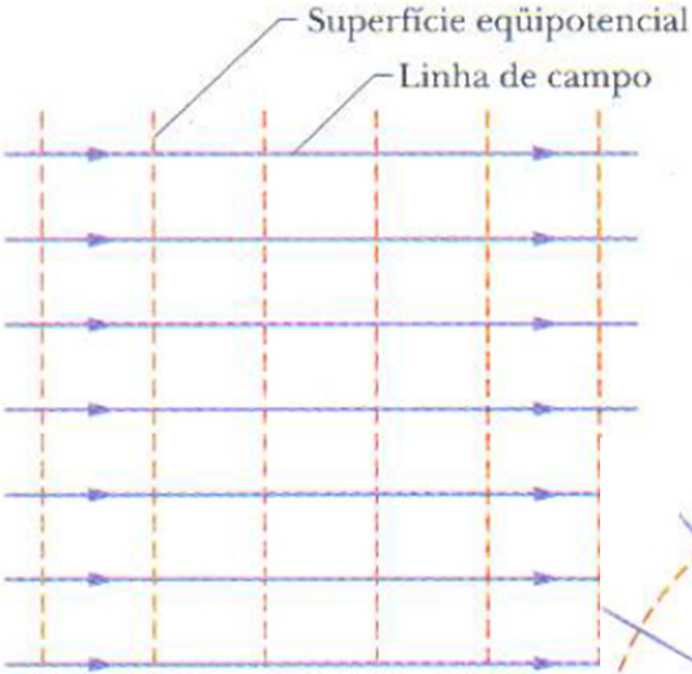


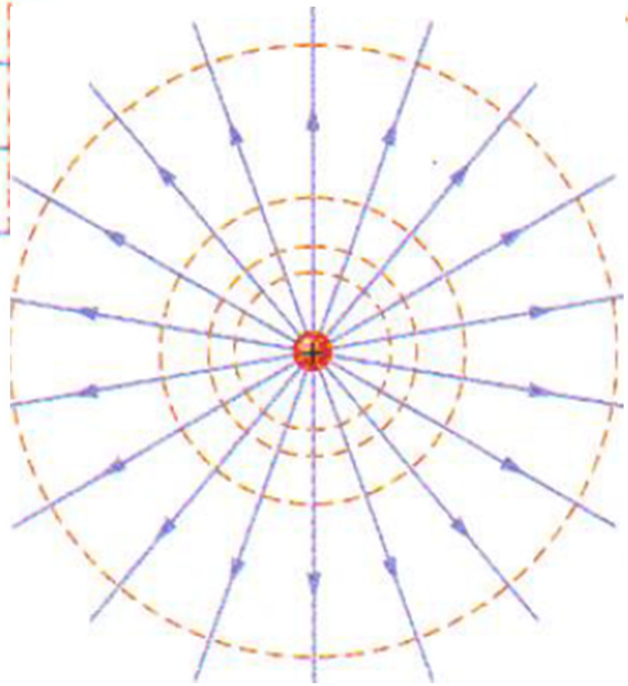
Superfícies equipotenciais

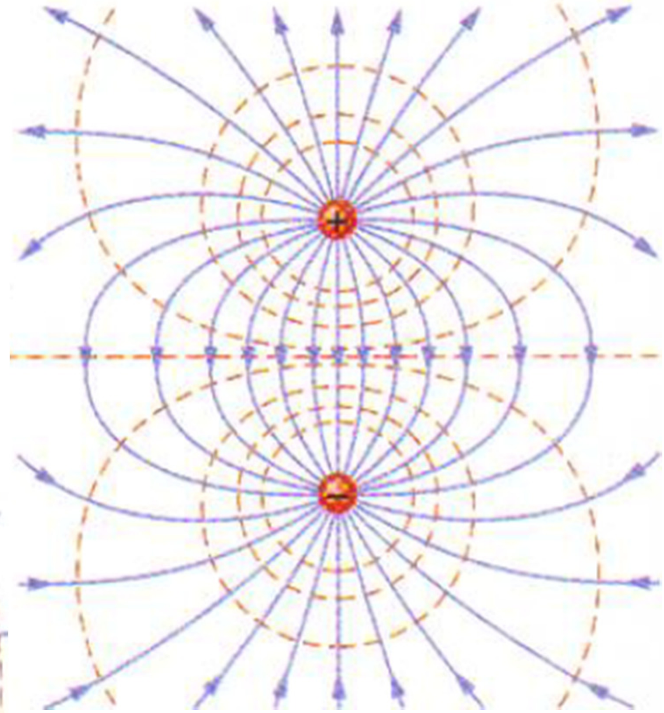
- Pontos vizinhos com mesmo potencial formam uma superfície- a superfície equipotencial (podendo ser superfície imaginária ou real).

- As superfícies equipotenciais são sempre perpendiculares às linhas do campo eléctrico.
- O perfil das superfícies equipotenciais depende da distribuição espacial das fontes do campo eléctrico. Alguns exemplos são apresentados a seguir.

Algumas superfícies equipotenciais







Potencial eléctrico de distribuição continua de cargas (linha de cargas; disco carregado)

- Para distribuição contínua de cargas o potencial eléctrico calcula-se de acordo com as seguintes fórmulas (em dependência do modo em que as cargas estão distribuidas):

- $$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \int_V \frac{\rho dV}{r} \\ \int_S \frac{\sigma dS}{r} \\ \int_L \frac{\lambda dl}{r} \end{cases}$$

Por quê o potencial é tão útil? O Campo eléctrico não é suficiente?

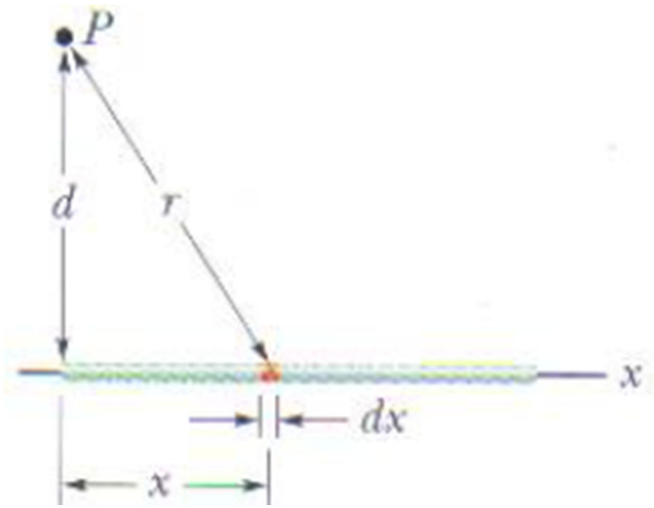
- ✓ O potencial ϕ é função escalar, muito mais fácil de integrar do que $\vec{E}$ ou $\vec{F}$.

Qual é o potencial de referência?

- ✓ Normalmente $\phi_{\infty} = 0$
- ✓ Mas há situações em que não funciona a regra, como no caso de potencial criado por uma linha carregada.

Linha de cargas: determinar o potencial criado em P por uma barra não condutora e fina de comprimento L, que possui densidade de carga λ.

Estratégia: Divisão da barra e partes iguais de carga *dq* e comprimento *dx* e deteminação do potencial de um desses elementos de carga no ponto P e depois integramos por toda a barra.



$$d\phi = \frac{kdq}{r}$$

$$\phi(P) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \lambda \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{1/2}} =$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot ln\left(x + \sqrt{d^2 + x^2}\right) =$$

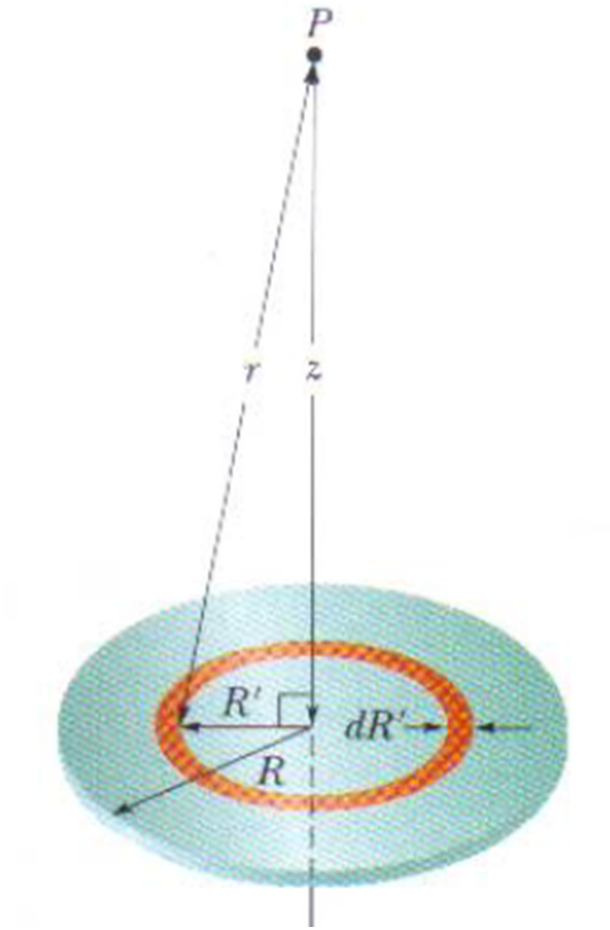
$$\phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[ln\left(L + \sqrt{d^2 + L^2}\right) - ln(d)\right] =$$

$$\phi(P) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{L + \sqrt{d^2 + L^2}}{d}\right)$$

Disco carregado: Calcule o potencial criado, no ponto P, por um disco de raio R, carregado com densidade de carga σ.

Estratégia: Divisão do disco em aneis concêntricos e determinação do potencial criado por um dos aneis, para depois integrar de *zero* a R.

Potencial no ponto P



$$d\phi = k\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma 2\pi R' dR'}{r}$$

Na figura R' –raio do anel e $\mathrm{dR}' =$ – largura do anel. Logo,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sigma 2\pi\int_0^R \frac{R' dR'}{(R'^2 + z^2)^{1/2}} =$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sigma 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^R \frac{dR'^2}{\left(R'^2 + z^2\right)^{1/2}} =$$

$$\phi = \frac{1}{4\varepsilon_0}\cdot\sigma\cdot\left[2\sqrt{R'^2 + z^2}\right] =$$

$$\phi = \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma\cdot\left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right]$$

Cálculo do potencial a partir do Campo eléctrico

- Consideremos a diferença de potencial entre o ponto r e $r + dr$. Tendo havido variação elemntar da posição, esta mudança corresponderá a uma diferença elementar do potencial dϕ:

$$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

A mudança infinitesimal do potencial pode ser representada como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

Comparando as 2 expressões conclui-se que:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; \qquad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Logo, $\vec{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla\phi$

∇-operador diferencial ” del”; ”nabla”.

- ∇ aparenta ser vector; opera como vector, mas realmente não é vector porque ele sozinho não tem significado; é um operador que funciona tanto com funções escalares, como com as vectoriais.
- Ele " ∇ "actua sobre:

❖ função escalar, ϕ, resultando em gradiente-um vector;

❖ Função vectorial, $\vec{E}$, resultando em divergência (do vector: $div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$)- produto escalar, ou;

❖ Função vectorial, $\vec{E}$, resultando em rotacional (do vector: $rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E}$)

- Chama-se gradiente de uma função f a expressão:

$$grad f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

O gradiente mede quão rápido a função *f* varia quando as variáveis *x*, *y* e *z* variam; é a extensão lógica do conceito de derivada.

Embora *f* seja função escalar, ∇f - é um vector.

- Quando o campo eléctrico expressa-se sob a forma de coordenadas que dependem da posição r e ângulo θ(componentes radial e transversal), a relação campo-potencial transforma-se me:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right) \text{ ou}$$

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \& \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Exemplo: a partir do conhecimento do potencial do dipolo num ponto P, calcular o campo eléctrico no mesmo ponto.

- Solução: Sabe-se que $\phi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-2r)}{r^4} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot(-\sin\theta) = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

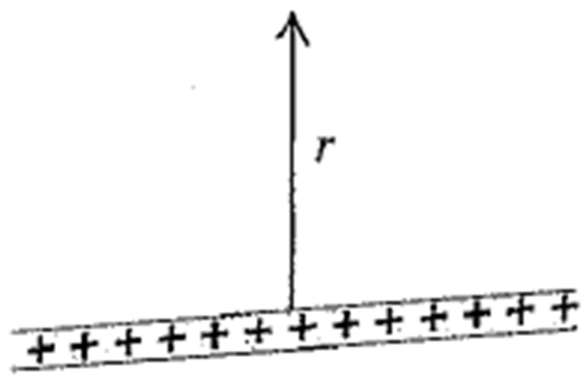
$$E = \sqrt{\left(\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2 + \left(\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)^2}$$

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

Calcular o potencial a uma distância *r* de um fio carregado muito longo, com densidade linear de carga λ (vale tambem para cilíndro longo).

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Determinemos primeiro o campo eléctrico usando a lei de Gauss (superfície gaussina cilíndrica). O resultado é:



$$\phi(r) - \phi(b) = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

O campo $\vec{E}$ ↑↑ $d\vec{r}$ (campo radial relativamente à superfície cilíndrica)
$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = Edr$.

$$\phi(r) - \phi(b) = \int_r^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr =$$

Assumamos que b é ponto para o qual o potencial é nulo (referencia)

$$\phi(r) - 0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(lnb - lnr) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

Para o cilindro condutor longo, relativamente ao eixo de simetria, pode ser definido o ponto superfícial b = R, como sendo o de potencial nulo. Então todos outros pontos radiais dentro e fora do cilindro o potencial será:

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

Cálculo do campo a partir do potencial eléctrico

Conhecido o potencial eléctrico num dado ponto, é possível calcular o campo eléctrico: Revisitemos o campo criado por um disco no ponto P, localizado à distância z ao longo do eixo de simetria (ver capítulo o calculo de E para um disco no anterior):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right\}$$

Vimos que o potencial do disco ao longo do eixo de simetria num ponto z é (ver slide # 21 do actual capítulo): $\phi = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \sigma \cdot \left[\sqrt{R^2 + z^2} - z\right]$

O potencial depende apenas da variável z (independe de x e y).

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \sigma \frac{d}{dz}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right\}$$

Este resultado é igual ao obtido anteriormente.

Potencial de um condutor carregado

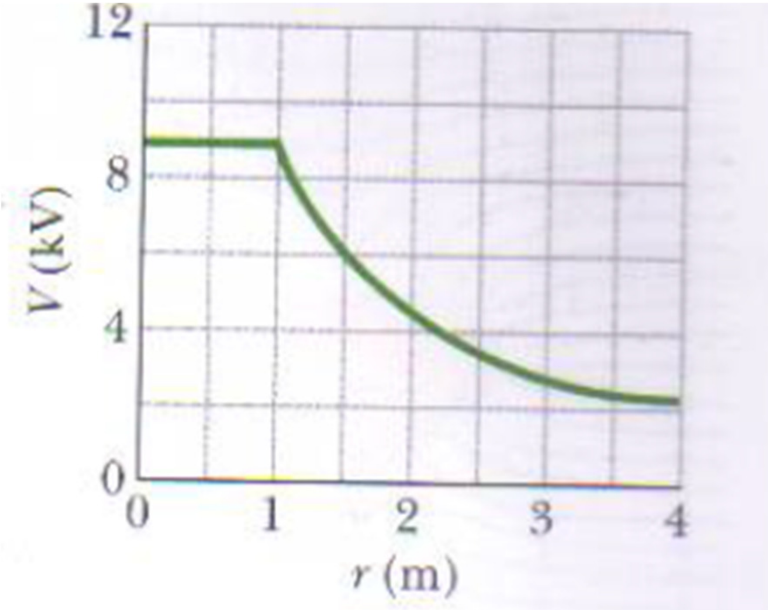
Num condutor carregado a carga fica distribuída na sua superfície e o campo eléctrico no interior é nulo. O campo continua nulo mesmo na presença de cavidade que contenha carga.

A partir de $\phi_i - \phi_f = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow$

Para $\vec{E} = 0$, $\phi_i = \phi_f$ (o potencial é constante no interior);

Para valores exteriores o potencial deverá diminuir e na superfície deverá ter um valor igual ao do interior pelas condições de fronteira:

Gráfico do potencial de um condutor esférico



Objectivo final é:

- Saber calcular potencial de cargas puntiformes discretamente distribuidas;
- Saber calcular potencial criado por uma carga continuamente distribuida num determinado ponto usando a relação campo eléctrico-potencial.
- Para atingir objectivo 2 não basta conhecer a relação potencial-campo eléctrico, tem que conhecer a distribuição espacial do campo eléctrico (por exemplo usando a lei de Gauss).