Força Electromotriz e Circuitos Eléctricos

Fonte de tensão e força electromotriz (fem)
Energia e Potência em circuitos eléctricos
Associação de resistores (série e paralela)
Cálculo da corrente em circuitos eléctricos (CE)
Regras de Kirchhoff
Regras de Thevenin e Norton
Instrumentos eléctricos de medição (Leitura individual)
Circuitos RC: Carga e descaga de capacitor

Fonte de tensão e força electromotriz

- Para produzir uma corrente eléctrica estável é preciso usar um dispositivo que realize trabalho sobre os portadores de carga de modo a manter uma diferença de potencial. Tal dispositivo chama-se de fonte de tensão.
- Uma fonte de tensão produz uma força electromotriz $\mathscr{E}$ ou seja, submete aos portadores de carga diferença de potencial.
- Um exemplo de uma $\mathscr{E}$ é a bateria que serve para alimentar variedade de dispositivos desde relógios de pulso à navios. Porém, a fonte mais importante é o gerador eléctrico.

Energia e Potência em circuitos eléctricos

- Num circuito, uma carga que atravessar o circuito o seu potencial reduz-se, de tal modo que a energia potencial reduz-se à:

$dU = \phi dq = \phi I dt.$

De acordo com a lei de conservação de energia, a redução de energia potencial eléctrica no percurso de a para b, é acompanhada pela conversão de energia de uma forma para outra. A potência *P* associada a essa conversão é a taxa de transferência de energia $\frac{dU}{dt}$, ou seja,

$$P = \frac{dU}{dt} = \phi I$$

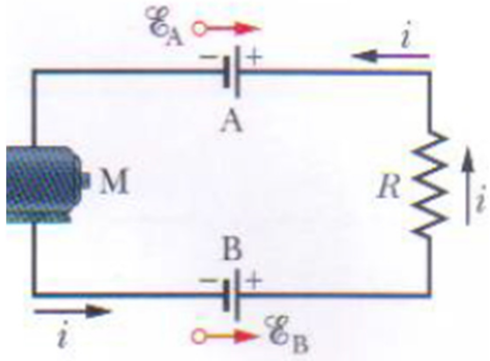
No caso de um resistor ou outro dispositivo de resistência R, a taxa de dissipação de energia devido a resistência é:

$$P = \phi I = \begin{cases} I^2 R \\ \frac{\phi^2}{R} \end{cases}$$

A potência dissipada é independente do tipo de associação de resistores.

- A força electromotriz da fonte define-se como sendo o trabalho por unidade de carga:

$$\mathscr{E} = \frac{dW}{dq}$$



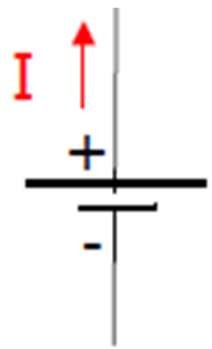
A FEM ($\mathscr{E}$)é ideal quando ela não oferece nenhuma resistência ao movimento dos portadores de carga de um terminal para o outro;

Uma $\mathscr{E}$ real apresenta sempre uma resistência interna que se opõe ao movimento das cargas. Quando a fonte não está ligada a um circuito, a diferença de potencial é igual a $\mathscr{E}$; ao ligar ao circuito a diferença de potencial é menor que $\mathscr{E}$:

$$\phi = \mathscr{E} - \mathrm{Ir}$$

- Portanto, o estado duma bateria depende não só do valor da sua força electromotriz, mas também da resistência interna.
- O sentido de uma força electromotriz é do terminal negativo para o positivo;

Num determinado circuito, quando o sentido da corrente coincide com o sentido da $\mathscr{E}$, a bateria está a descarregar ($\phi = \mathscr{E} - Ir$), caso contrário, a bateria está em carga ($\phi = \mathscr{E} + Ir$)



- Quando duas $\mathscr{E}$ estão ligadas de modo a fazer circular cargas em sentidos opostos, o sentido da corrente é determinado pela bateria de maior $\mathscr{E}$.
- Numa bateria em descarga, a potência (de saída) eléctrica associada ao ganho de energia potencial dos portadores de carga é:

$$P_s = I\phi = I(\mathscr{E} - Ir) = I\mathscr{E} - I^2 r$$

Estando a bateria em carga, a potência (de entrada) eléctrica associada a perda de energia potencial dentro da bateria é

$$P_e = I\mathscr{E} + I^2 r$$

Cálculo da corrente eléctrica em CE

- Observemos o circuito apresentado ao lado e determinemos a corrente eléctrica que circula pelo circuito, conhecidos os seguintes parâmetros: $\mathscr{E}$, *R* e *r*.

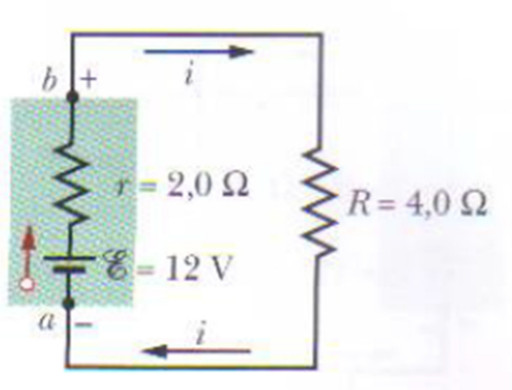
Como o sentido da corrente coincide com o sentido da $\mathscr{E}$ (descarga da bateria), podemos escever:

$$\phi \equiv \phi_b - \phi_a = \mathscr{E} - Ir$$

Analisando o circuito conclui-se que $\phi_b - \phi_a = IR$,

Logo,

$$IR = \mathscr{E} - Ir \Rightarrow \qquad I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$$



Lei de Ohm para circuiro fechado .

Regras de Kirchhoff

As regras de Kirchhoff permitem determinar corrente eléctrica i e a diferença de potencial ϕ num elemento particular de um circuito.

Regra da malha: A soma das diferenças de potencial encontradas em um percurso completo ao longo de qualquer malha fechada num circuito é igual à soma das $\mathscr{E}_i$ presentes na malha.

Ela é consequência da conservação da energia.

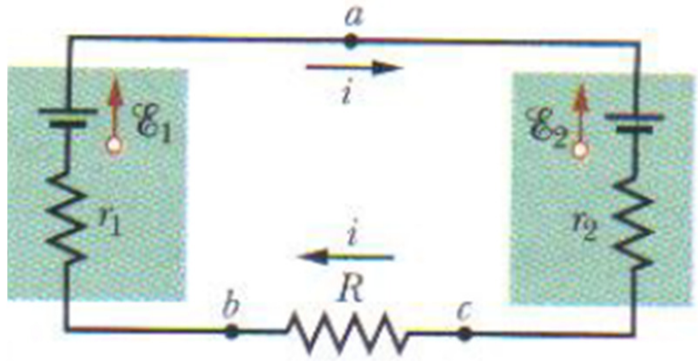
$$\phi_{ab} + \phi_{ac} + \phi_{cb} = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$$

Ou

$$ir_1 + ir_2 + iR = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$$

Malha com sentido horário

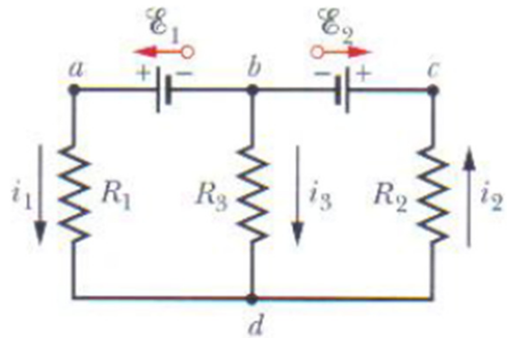
$$i = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2}$$

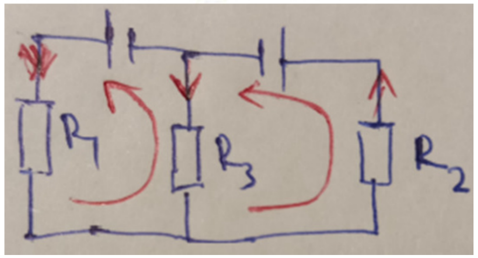


- Quando existem mais que uma malha, paralelamente a regra das malhas deve ser usada a regra dos nodos.
- Regra dos nodos: a soma das correntes que entram num nó (nodo) é igual a soma das correntes que saem do nó.

Ela é consequência da conservação da carga eléctrica (ausência de acumulação de cargas num nodo)

Consideremos 2 malhas (badb) e (bdcb), ambas percorridas no sentido anti-horário.





Para a malha da esquerda:

$i_1 R_1 - i_3 R_3 = \mathscr{E}_1$(sentido de i_3 contrária ao contorno)

Para a malha da direita:

$i_3 R_3 + i_2 R_2 = -\mathscr{E}_2$(no contorno $\mathscr{E}_2$ é negativo)

Para o nodo b:

$$i_1 + i_3 = \mathrm{i}_2$$

Resolve-se o sistema das 3 equações usando um método conveniente.

Havendo *n* nodos são usadas *(n-1)* equações e com m malhas *(m-1)* equações.

(i) $i_1R_1 - i_3R_3 = \mathscr{E}_1 \Rightarrow i_3R_3 = i_1R_1 - \mathscr{E}_1$

(ii) $i_3R_3 + i_2R_2 = -\mathscr{E}_2$

(iii) $i_1 + i_3 = \mathrm{i}_2 \Rightarrow \mathrm{i}_2 = i_1 + i_3$

- Substituimos tudo na segunda equação:

$$i_1R_1 - \mathscr{E}_1 + i_1R_2 + i_3R_2 = -\mathscr{E}_2 \quad \Rightarrow$$

$$i_1R_1 - \mathscr{E}_1 + i_1R_2 + \frac{i_1R_1 - \mathscr{E}_1}{R_3}R_2 = -\mathscr{E}_2$$

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}_1(R_2 + R_3) - \mathscr{E}_2R_3}{R_1R_3 + R_2R_3 + R_1R_2}$$

- Exemplo de resolução pelo método de determinante:

$$i_1R_1 - i_3R_3 = \mathscr{E}_1 \Rightarrow i_1R_1 + 0i_2 - R_3i_3 = \mathscr{E}_1$$

$$i_3R_3 + i_2R_2 = -\mathscr{E}_2 \Rightarrow 0i_1 + i_2R_2 + R_3i_3 = -\mathscr{E}_2$$

- $i_1 - \mathrm{i}_2 + i_3 = 0$

- Exemplo de resolução pelo método de determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathscr{E}_1 & 0 & -R_3 \\ -\mathscr{E}_2 & R_2 & R_3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathscr{E}_1(R_2 + R_3) + 0 - \mathscr{E}_2 R_3$$

Logo,

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\mathscr{E}_1(R_2 + R_3) - \mathscr{E}_2 R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \& \qquad i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Individualmente, calcule Δ_2 e Δ_3 e substitua nas formulas acima!

Instrumentos eléctricos de medição (Leitura)

- Amperímetro e Voltímetro e seus princípios de funcionamento.

Circuitos RC: Carga e descaga de capacitor

- Circuitos analisados até agora conservam os valores da força electromotriz, resistências e consequentemente as correntes e potências tembém são independentes do tempo. Em circuitos que envolvem capacitores ocorrem variações com o tempo das correntes, voltagens e potências. Os capacitores carregam e descarregam alternadamente em circuitos de pisca-piscas de automóveis, semáforos, marcapassos entre outros dispositivos.

- Carregamento de capacitor: analisemos o circuito RC apresentado na figura com chave aberta e fechada.

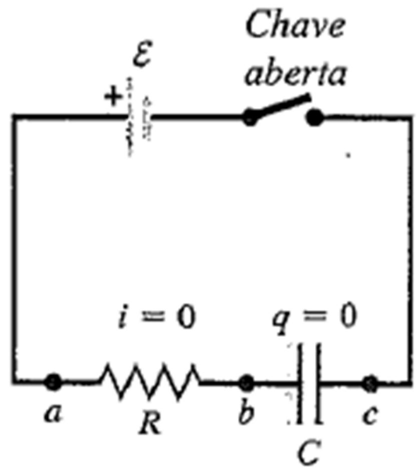
Inicialmente o capacitor está completamente descarregado, e desligado da fonte de tensão:

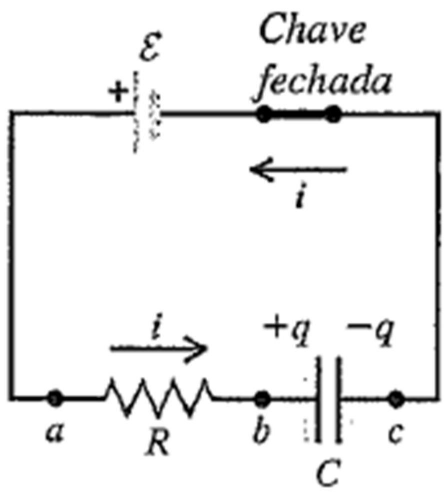
- $\phi_{bc} = 0$

Ao fechar o circuito (t = 0), a corrente inicial é

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

Carga de capacitor





- Passando algum tempo o capacitor vai carregando, tal que a sua voltagem ϕ_{bc} aumenta, enquanto a queda de tensão no resistor ϕ_{ab} diminui, o que corresponde à diminuição da corrente.
- Depois de completamente carregado, o capacitor adquire uma diferença de potencial $\phi_{bc} = \mathscr{E}$, já que nesse instante a corrente é nula (nula também a ϕ_{ab}).
- Seja q a carga do capacitor e i a corrente após algum tempo do fecho do circuito:

As voltagens instantâneas são:

$$\phi_{ab} = iR \quad \& \qquad \phi_{bc} = \frac{q}{C}$$

Aplicando a lei das malhas temos:

$$\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \& \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Ou

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$ ou multiplicando por RC:e separando as variaáveis, temos:

$$\mathrm{RC}\frac{dq}{dt} = \mathscr{E}C - q$$

$$\frac{dq}{(\mathscr{E}C - q)} = \frac{1}{CR}dt$$

Substituíndo u $= \mathscr{E}C - q$; $(du = -dq)$chegamos a equação mais simples:

$$\frac{-du}{u} = \frac{1}{CR}dt$$

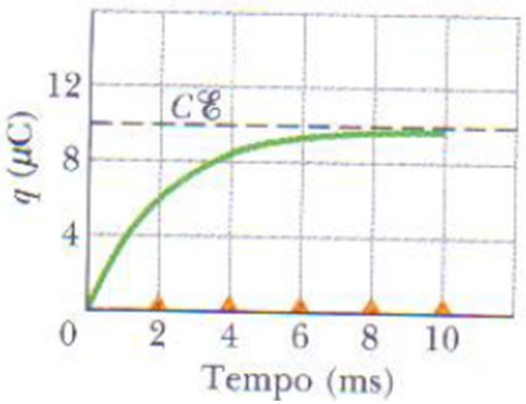
Para $t = 0, q = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$

Depois do carragamento total, $i = 0$ e o capacitor adquire uma carga $Q_f = C\mathscr{E}$.

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u} = -\frac{1}{CR}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$u = u_0 e^{-\frac{1}{CR}t} \quad \Leftrightarrow \mathscr{E}C - q = \mathscr{E}Ce^{-\frac{t}{CR}}$$ ou

$$q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$



$$q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

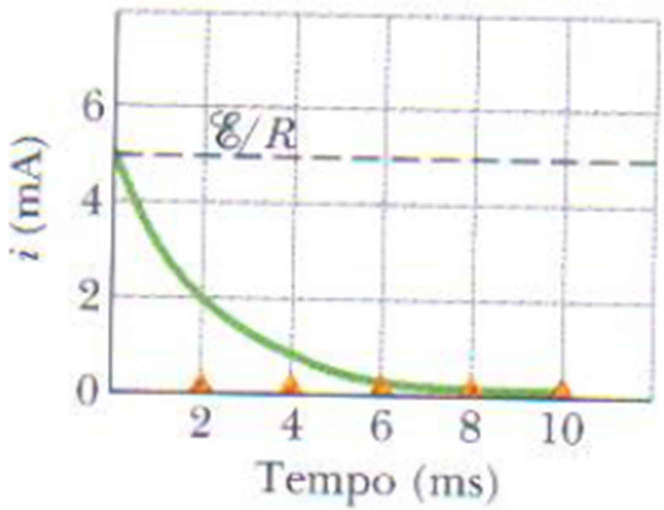
O tempo para o qual a carga no capacitor equivale Q_f/e, chama-se constante de tempo $\tau = CR$.

A corrente instantânea no circuito é:

$$i = \frac{dq}{dt} = \mathscr{E}C\frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}} = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

Usando a relação entre a diferença de potencial e a capacitâcia podemos escrever a expressão geral para ϕ_{bc} em qualquer instante:

$$\phi_{bc} = \frac{q}{C} = \mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

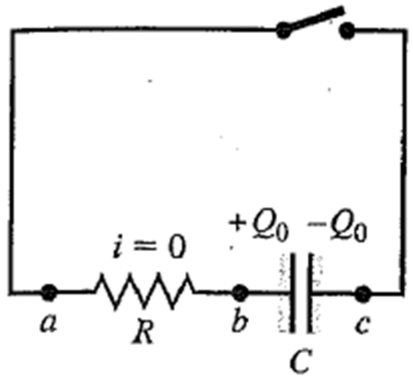


- Descarga do capacitor: suponhamos que o capacitor esteja completamente carregado com carga Q_0. De seguida retiramos a fonte de tensão e ligamos os pontos *a* e *c* a uma chave aberta. Depois fecha-se o circuito e observa-se o tempo que decorre para que o capacitor se descarregue através do resistor, até que a sua carga seja nula:

$i = -\frac{dq}{dt}$ (sinal – deve-se ao facto de o capacitor estar a perder carga).

Usando a lei das malhas teremos:

$$iR = \frac{q}{C}$$



Ou,

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \qquad \int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR}\int_0^t dt$$

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{CR}\int_0^t dt \Leftrightarrow lnq = -\frac{t}{CR}$$

Ou $\quad q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$

A constante de tempo é $\tau = RC$

A corrente instantânea no circuito será:

$$i = -\frac{d\left(Q_0 e^{-\frac{1}{CR}t}\right)}{dt} = \frac{1}{CR} Q_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$$

ou

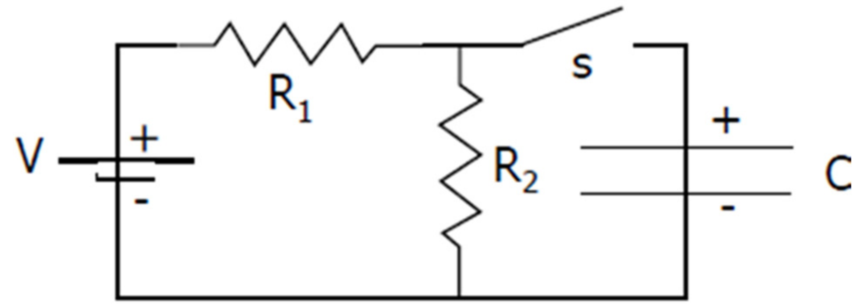
$$i = \frac{\phi_0}{R} e^{-\frac{1}{CR}t} = i_0 e^{-\frac{1}{CR}t}$$

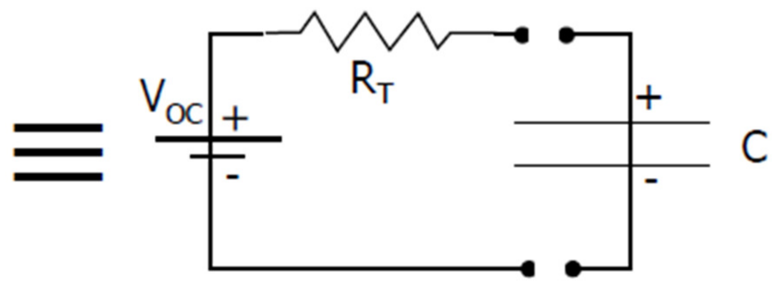
Regras de Thevenin e Norton

- Comumente, na análise de circuitos são usadas a lei de Ohm e leis de Kirchhoff para resolver circuitos complexos. Contudo, existem outras regras que permitem calcular a corrente e voltagem em qualquer ponto do circuito. Uma das mais usadas é a regra de Thevenin.
- A regra relata que é possivel simplificar qualquer circuito linear, independentemente da sua complexidade, para um mais simples e equivalente, composto de única fonte de tensão e única resistência ligada em série com a fonte.

Regra de Thevnin

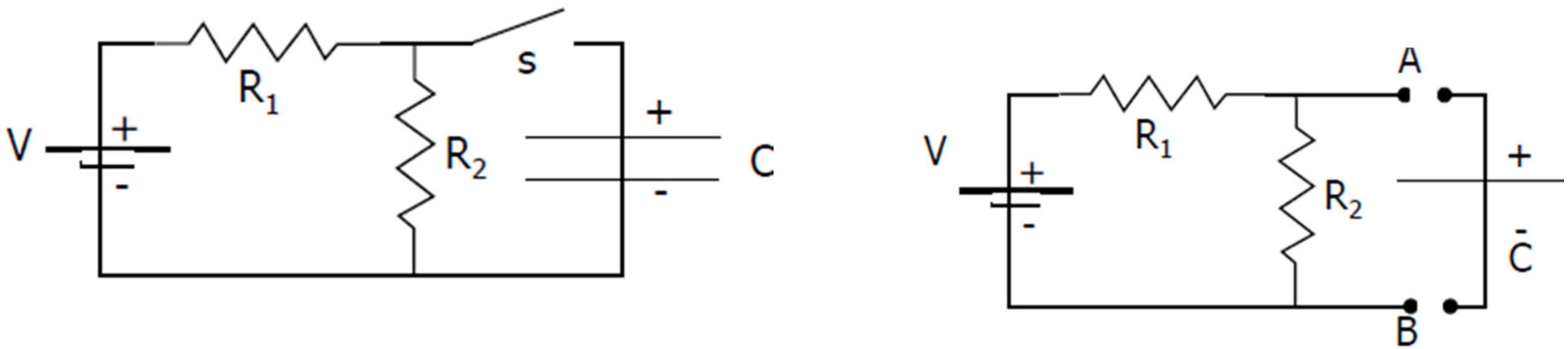
- Teorema de Thevenin: Qualquer combinação de resistores e fontes de tensão pode ser substituída por uma única fonte com voltagem de circuito aberto ϕ_0 e resistência de thevenin R_T em série com a fonte.

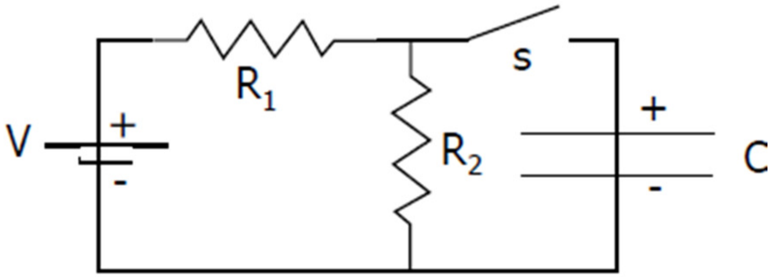


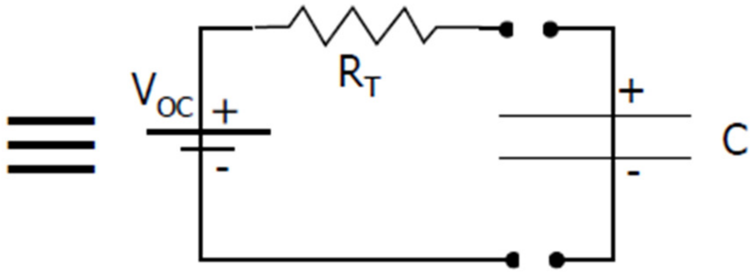


Onde $R_T = \frac{\phi_{OC}}{I_{curt}}$- é a resistência equivalente com todas as fontes de tensão em curto-circuito.

Consideremos o seguinte circuito que converteremos numa simples ligação em série da fonte e resistência equivalente, com capacitor em curto-circuito:







- Uma vez simplificado o circuito podemos determinar a carga no capacitor em qualquer instante:

$$q(t) = C\phi_{OC}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_T C}}\right)$$

No circuito , $V \equiv \phi = \mathscr{E}$ & em circuito aberto, $V_{OC} = \phi_{OC}$

- Se $q(t) = C\phi_{OC}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_T C}}\right)$ é a carga a qualquer intante, a voltagem em função do tempo será:

$$\phi(t) = \frac{q}{C} = \phi_{OC}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_T C}}\right)$$

ϕ_{OC}- é a voltagem assimptótica $\phi(t)$ do capacitor; para t $\rightarrow\infty \Rightarrow \phi(t) = \phi_{OC}$.

No circuito reduzido há única corrente e para $t = 0$,

$$I_{curt} = \frac{\phi_{OC}}{R_T} \qquad \Rightarrow \quad R_T = \frac{\phi_{OC}}{I_{curt}}$$

Note que $I_{curt} \equiv \frac{dq}{dt}/para$ t $= 0$

- $\phi_{OC} = \frac{\phi}{R_1+R_2} R_2;$

$$I_{curt} = \frac{\phi}{R_1} \quad \& \qquad R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

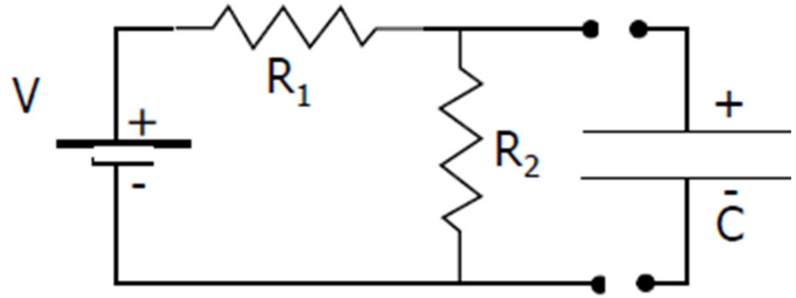
Logo, $q(t) = \frac{C\phi}{R_1+R_2} R_2 \left(1 - e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{R_1 R_2 C}}\right) \qquad \Rightarrow$

$$i(t) = \frac{\phi}{R_1} e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{R_1 R_2 C}}$$

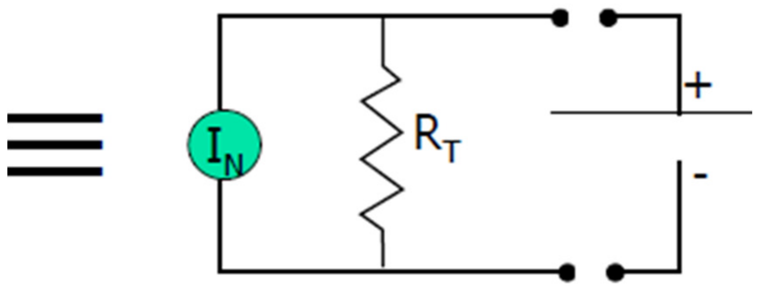
- Importância da regra de Thevenin: tendo um circuito com sistema de fontes de tensão e resistores, o circuito pode ser reduzido numa única FEM e único resitor ligado em série com a FEM, medindo a corrente de curto-circuito e a voltagem de circuito aberto.

Nota: Thevenin funciona quando os elementos do circuito obedecem a lei de Ohm (relação linear entre a corrente e a tensão).

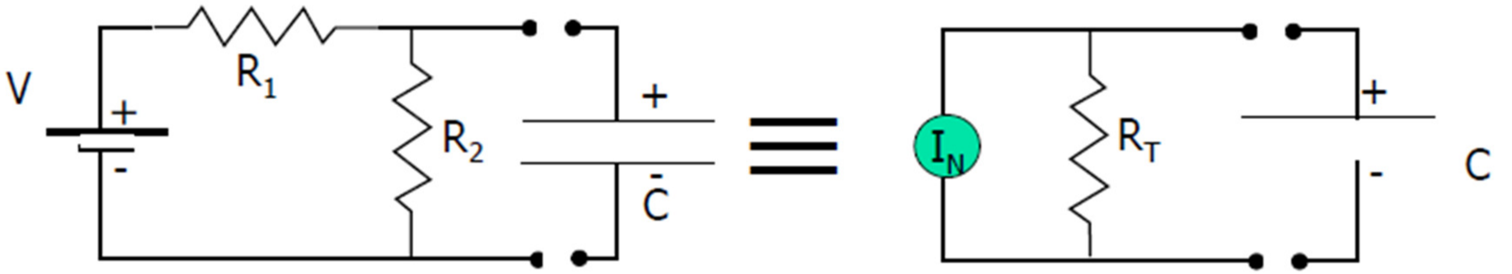
- Regra de Norton: Qualquer combinação de resistores e FEM pode ser substituída por uma corrente paralela de uma fonte I_N e uma resistência R_T.



R_T- é a resistência equivalente do circuito com todas FEM em curto-circuito e todas fontes de corrente em circuito aberto.



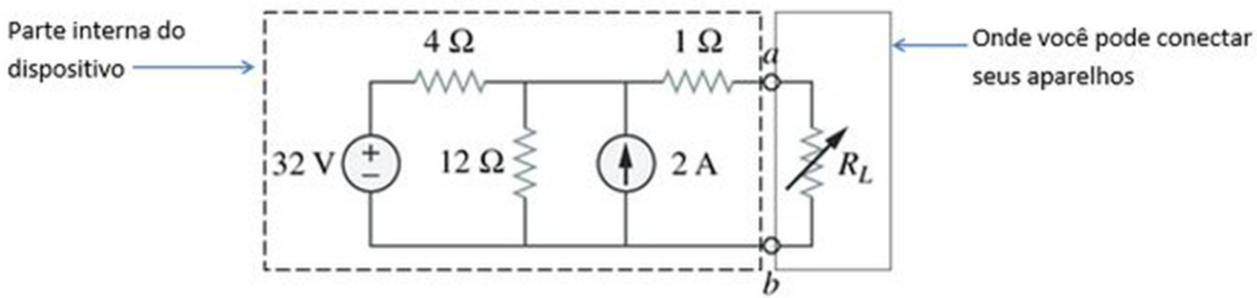
$$I_N = \frac{\phi_{OC}}{R_T}$$



- $R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$;

- $I_N = \frac{\phi_{OC}}{R_T} = \frac{\phi \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{(R_T)} = \phi \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{\phi}{R_1}$

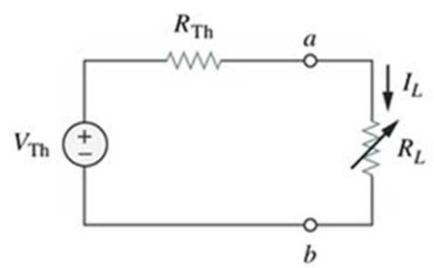
- Olhando para as duas regras (Thevenin e Norton), conlui-se que trata-se do princípo de substituição da fonte de tensão com valor $\mathscr{E}$, que está em série com resistência R_T, por uma fonte de corrente de valor I_N, ligada com à mesma resistência, mas em paralelo.

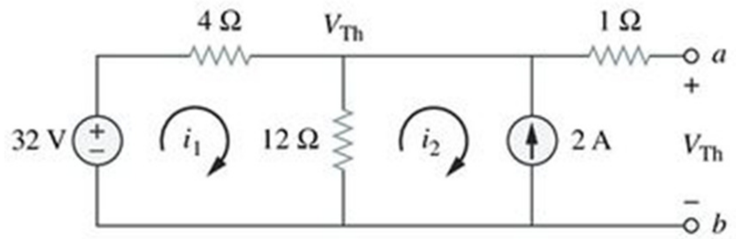


Pelo teorema de Thevenin, o circuito à esquerda dos pontos a e b, pode ser substituido somente por $\phi_{Th} \equiv V_{Th}$ e R_{Th}.

Assim, a tarefa consiste em calcular V_{Th} e R_{Th}.

Lembremos que V_{Th} é tensão de circuito aberto aplicada aos terminais a e b:





- Determinação de V_{Th}: Apliquemos lei de malhas:

$$32 - 4i_1 - 12(i_1 - i_2) = 0$$

A partir da malha 2 conclui-se que $i_2 = -2\ A$.
Substituindo a eq. acima temos:

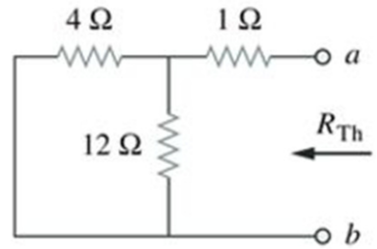
$32 - 4i_1 - 12(i_1 + 2) = 0 \Rightarrow 8 = 16i_1$ ou

$$i_1 = 0.5\ A$$

Com circuito aberto, não ha corrente no resistor de 1 A. Logo os pontos a e b terão mesma tensão que o resistor de 12 Ohm. Ou seja,

$$V_{Th} = 12(0.5 + 2) = 30\ V$$

- Determinação de R_{Th}. Vamos desligar todas fontes independentes em simultâneo, substituindo a fonte de 32 V por um curto-circuito e fonte de corrente de 2 A por um circuito aberto e calcular a resistência vista nos pontos a e b:



- $R_{Th} = 1 + \frac{4 \cdot 12}{4+12} = 1 + \frac{48}{16} = 4$

Assim, o circuito equivalente de Thevenin será:$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th}+R_L} = \frac{30}{4+6} = 3A$. A solução final depende do consumidor ligado (resitência variável).