TPC # 2 _ Física II _ FE _ 2022 _ II° Semestre

Correcção do TPC # 2 _ V Pós-Laboral

Variante B - Para cursos no Regime Pós-laboral

Regente – Félix Tomo

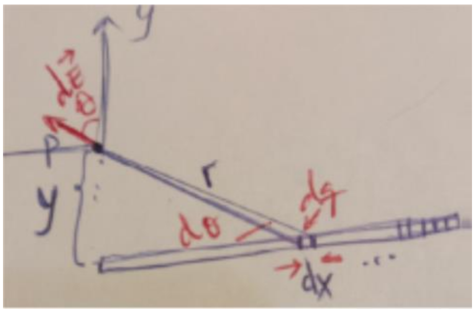
Assistentes – Fernando Mucomole, Esménio Macassa, Tomásio Januário, Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

---

1. Uma barra muito longa e uniforme está carregada com densidade linear de carga λ. Determine o módulo, direcção e sentido do vector campo eléctrico num ponto localizado à distância y da barra, e situado perpendicularmente à uma das extremidades. Sugestão: Representar o campo elementar criado no ponto considerado por carga elementar, e determinar as componentes x e y do campo resultante.

Resolução

O problema confina-se em achar as componentes x e y do vector campo eléctrico. O campo elementar criado por elemento de carga no ponto P sera:



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$\vec{E} = \int dE_x\,\vec{\imath} + \int dE_y\,\vec{\jmath}$$

Ou

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{x}{r^2}dx$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

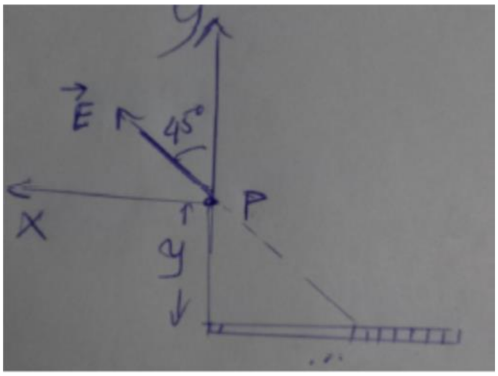
Onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$E_x = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Big|_R^r = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{y}\right)$$

Como a barra é muito longa ($L \gg y$) então $\frac{y}{L} \to 0$.

$$-\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{(L^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{y}\right)=-\frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{y}{L\left(1+\left({}^{y}/_{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$$

E possivel encontrar o mesmo resultado integrando em função do ângulo (expresssando dx e r em função do ângulo).



Analogamente,

$$E_y=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{rd\theta}{r^2}$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r}d\theta$$

Onde

$dx=\frac{rd\theta}{\cos\theta}$ e $r=\frac{y}{\cos\theta}$

Logo,

$$E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{y}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}$$

Aqui tambem é possivel obter o resultado integrando em função de x (para tal é preciso colocar a substituição conveniente para calcular a integral resultante).

Quando $E_x=E_y$ as suas componentes formam angulo de 45^0.

Então,

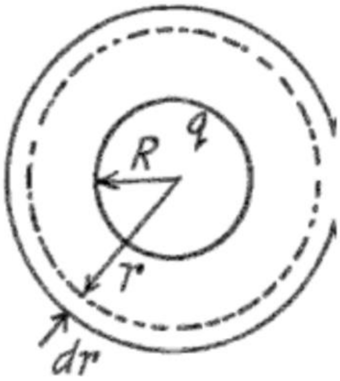
$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\sqrt{2}$$

A direcção e sentido estão ilustrados na figura.

2. Um sistema consiste de uma bola de raio R, que contém uma carga q esfericamente simétrica e o espaço circundante é preenchido por uma carga de densidade volumétrica $\rho=\eta/r$, onde η é constante e r é a distância radial medida a partir do centro da bola. (a) Determine o valor da carga q de modo que o campo eléctrico no exterior seja independente de r. (b) Qual é a intensidade do campo eléctrico independente de r? Assuma que a permissividade da bola e do espaço circundante é igual à unidade.

Resolução

(a) Usando a lei de Gauss de forma conveniente,



$$\oint \vec{E}\vec{n}dS = \frac{q_{engl.}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int_0^r \left(\frac{\eta}{r}\right) dV\right)$$

$$\oint \vec{E}\vec{n}dS = E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + \int_0^r \left(\frac{\eta}{r}\right) 4\pi r^2 dr\right)$$

Ou seja

$$E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + 4\pi\eta \frac{r^3}{3}\Big|_R^r\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\left(q - \frac{4\pi\eta R^2}{2}\right) + \frac{4\pi\eta r^2}{2}\right]$$

$$E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}[(q + 2\pi\eta r^2) + 2\pi\eta r^2]$$

Analisando esta expressao conclui-se que E fica independente de r quando a parcela entre parenteses é nula,

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}[(q + 2\pi\eta r^2)/4\pi r^2 + \eta/2]$$

$$(q - 2\pi\eta R^2) = 0 \Leftrightarrow q = 2\pi\eta r^2$$

Para aquele valor de carga, corresponde ao campo electrico,

$$E = \frac{\eta}{2\varepsilon_0}$$

3. O potencial eléctrico para a simetria cilíndrica de raio R, em dependência da relação entre o raio do cilíndro e a distância radial arbitraria r é expresso por $\phi = \frac{\phi_0}{2} + \frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r}$ para $r \gg R$ e $\phi = \frac{\phi_0}{2} + \frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r}$ para $r \ll R$.

a) Calcule as componentes do vector campo eléctrico para as duas regiões.

b) Calcule o campo eléctrico para $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Resolução

(a) Para $r \gg R$, temos

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\left(\frac{-2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}\right) = \frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}$$

&

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}$$

Para $r \ll R$, temsõs

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\left(\frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}\right) = \frac{2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}$$

&

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{2\phi_0 \cos\theta}{\pi r^2}$$

(b) O modulo do vector campo eléctrico é dado como,

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{-2\phi_0 R \sin\theta}{\pi r^2}\right)^2 + \left(-\frac{2\phi_0 \cos\theta}{\pi r^2}\right)^2}$$

Tal que o campo eléctrico para $\theta = \frac{\pi}{6}$, será,

$$E = \frac{2\phi_0}{\pi R}$$