IV Capacitores e Dieléctricos

Definição de capacitor e de capacitância eléctrica

Carga de um capacitor

Cálculo de capaciância

Associação de capactores (série ou paralela)

Capacitores planos, cilíndricos e esféricos)

Capacitores com dieléctricos

Energia armazenada num capacitor e Energia do campo eléctrico

Densidade de energia

Introdução

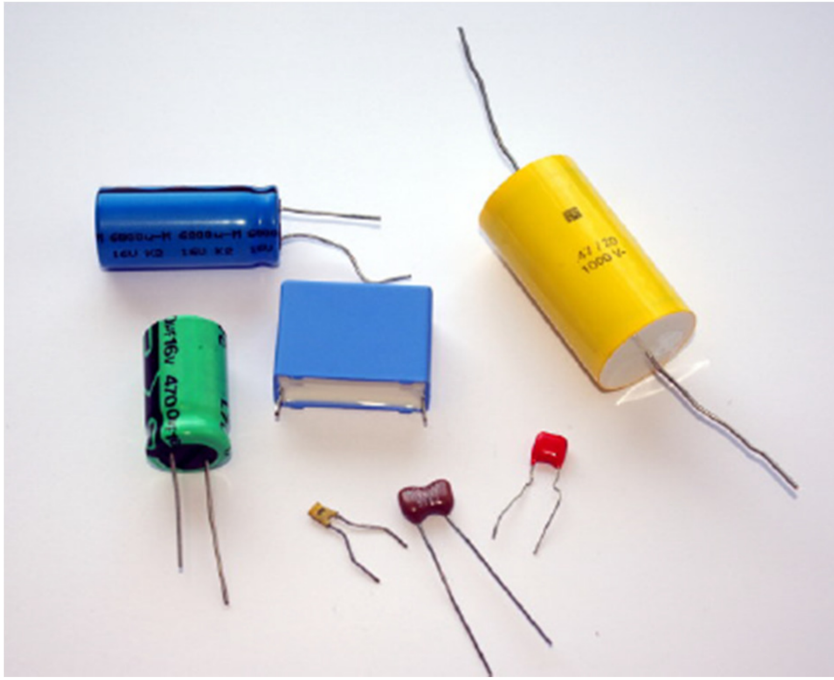
- Capacitor (condensador) é um dispositivo eléctrico usado em circuitos eléctricos de rádios, televisores, computadores e outros equipamentos;
- Capacitor permite o armazenamento temporário de energia nesses circuitos, mas também, dependendo da função do circuito, o capacitor permite que a energia seja libertada.
- A propriedade de capacitor que caracteriza o poder de armazenar energia chama-se capacitância.
- O estudo dos capacitores e da capacitância fornece a base de estudo das propriedades dos isolantes ou dieléctricos, face ao seu comportamento nos campo eléctricos.

- Para carregar um capacitor ligam-se as suas placas aos terminais de uma bateria. Como resultado haverá fluxo de portadores de carga de uma placa para outra, processo que cessa quando se estabele o equilíbrio, isto é, quando a diferença de potencial entre as placas do capacitor for a mesma que existe entre os terminais da bateria.
- No equilíbrio a placa positiva adquire uma carga +Q e a negativa –Q, porém, à semelhança do dipolo eléctrico, quando se fala da carga do capacitor, refere-se a carga de cada placa e não a resultante.

Outras aplicações: condensador pode desempenhar a função da bateria (armazenamento de energia que pode ser forncecida a um circuito) com a vantagem de processos de carga e descarga serem muito rápidos e ter ciclos sem fim (a bateria morre após vários ciclos de carga/descarga)

Em circuitos electrónicos o capacitor pode desempenhar papel de ”mola” ao amortecer variações indesejáveis da voltagem devido a picos de energia.

Vários tipos de capacitores



- Desvantagens em relação as baterias:

- À excepção dos supercondensadores, os condensadores normais quando usados como fonte, à medida que o condensador descarrega a diferença de potencial entre as armaduras diminui rapidamente.
- A capacidade de armazenamento de carga não é tão elevada como nas baterias.

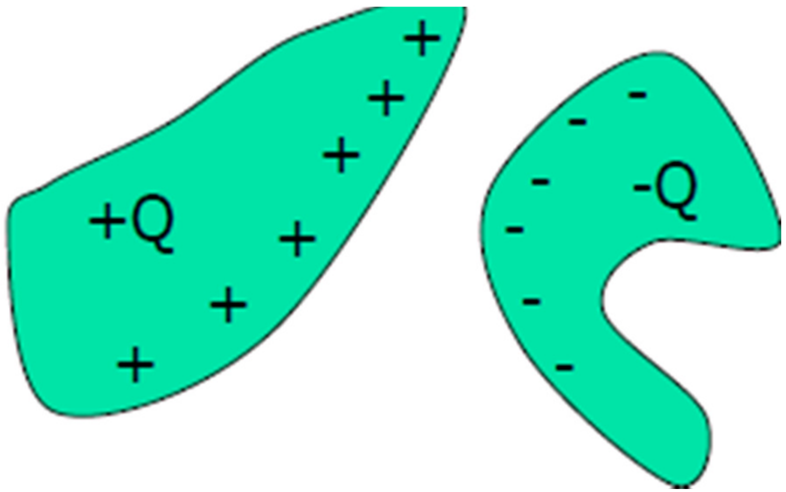
Definição de capacitor e de capacitância eléctrica

Consideremos 2 condutores eléctricos separados entre si por uma distância d e coloquemos uma carga $+Q$ num dos condutores e uma craga $-Q$ no outro.

Tratando-se de condutores, as cargas estarão distribuídas na superfície de cada condutor, e essas superfícies são equipotenciais.

Qual a diferença depotencial entre as 2 superfícies?

2 condutores com cargas iguais e opostas



$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \times Const$$

A $Const$ depende da geometria apresentada pelos condutores.

Chamemos de $\frac{1}{C}$ a $Const$ que relaciona a caga e a diferença de potencial.

$$Q = C\phi$$

Define-se a grandeza C como sendo a capacitância do sistema e capacitor, o dispositivo constituído por 2 condutores carregados.

Pela definição, conlui-se que a capacitância é directamente proporcional à carga presente nas placas dos 2 condutores:

$$C = \frac{Q}{\phi}$$

- Unidades da capacitância: Expressa-se em Farad (F). 1 $F = Coulomb/Volt$. Sendo 1 F uma capacitância muito grande, normalmente expressa-se em sub-múltiplos do Farad como o pF e μF.

Capacitância de condutor isolado

Num condutor isolado o potencial é constante e proporcional à carga total do condutor. A capacitância é a relação entre a carga e o potencial na superfície do condutor (tomando $\phi_\infty = 0$):

$$C = \frac{Q}{\phi_{superf}}$$

- Capacitância de esfera condutora

$$\phi_{superf} = -\int_{\infty}^{R} E dr = -k\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{r^2} dr = k\frac{Q}{R}$$

Logo, a capacitância da esfera condutora isolada será:

$$C = \frac{Q}{\phi_{superf}} = \frac{Q}{Q} \cdot \frac{R}{k} = \frac{R}{k}$$

Quanto maior for a esfera, maior será a capacitância, e não depende nem da carga, nem do potencial produzido pela carga.

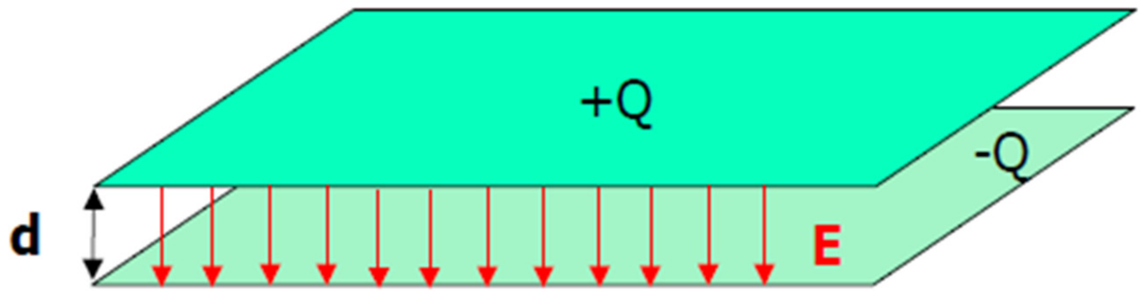
Nota: os condutores isolados são capacitores em que o segundo condutor é vitural (infinito).

Carga de capacitor & cálculo da capacidade

- Consideremos um capacitor de placas paralelas, cada uma de área A, separadas por uma distância d.

Se $d^2 \ll A$ estaremos diante de placas paralelas infinitas.

Depositemos carga +Q no topo da primeira plana e –Q na base da outra plana



A diferença de potencial entre o topo da primeira placa e a base da segunda será:

$$\phi = \phi_{top} - \phi_{bas} = \int_{top}^{bas} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Na figura $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot dr$ & $E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$

$$\phi = E \int_0^d dr = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

O potencial entre as placas de um capacitor (condensador) varia linearmente com a distância entre as placas.

Lembrando que $C = \frac{Q}{\phi} \Rightarrow C = \frac{Q}{\left(\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\right)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

A capacitância de um capacitor de placas paralelas depende esclusivamente da geometria e do arranjo (da área das placas e da sua separação).

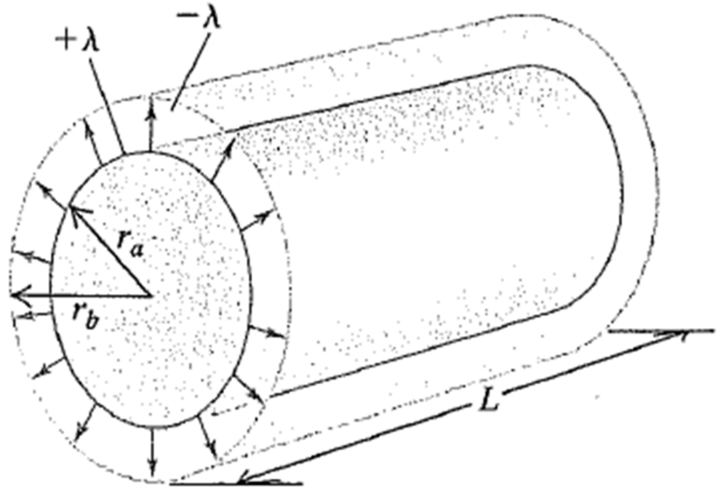
Reparemos que C depende também do meio que preenche espaço enre placas. Consequentemente se em vez do ar, a distância entre as placas for preenchida com outro meio, C dependerá das propriedades dielétricas desse meio:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 A}{d}$$

Capacitor cilíndrico (cabo coaxial): Cabos coaxiais usam-se para transmitir sinais eléctricos, sendo propriedade importante deles, a sua capacitâcia.

Cabo coaxial consite num condutor de raio R_a que é envolvido por um cilíndro condutor coaxial de raio R_b, separado por isolante entre eles. Determinemos a capcacitância de um capacitor cilíndrico de comprimento L e raio R muitas vezes menor que L, tal que a distribuição de carga é linear.

Capacitor cilíndrico de comprimento L



Os dois condutores têm cargas de igual módulo, e a densidade linear de carga do fio é λ. A diferença de potencial entre a placa positiva e negativa é:

$$\phi = \phi(r_a) - \phi(r_b) = -\int_{r_b}^{r_a} E dr =$$

$$\phi = -\int_{r_b}^{r_a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right). \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}$$

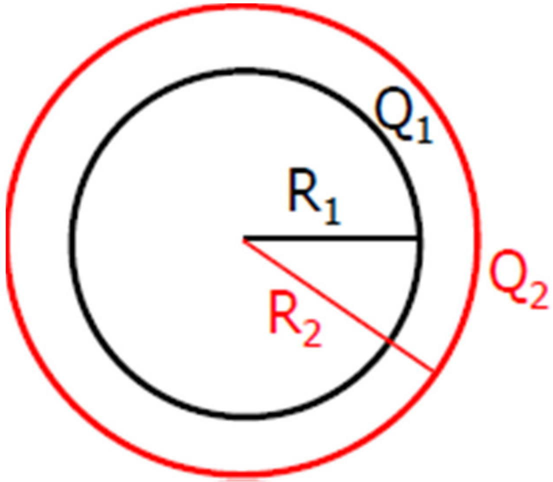
Capacitor esférico (rever campo eléctrico no espaço entre duas cascas esféricas concêntricas):

Seja a carga +*Q* (*Q₁*) localizada na casca interior e –*Q* (*Q₂*) a da casca exterior.

Para $r < R_1 \Rightarrow \mathrm{E} = 0$ (por ausência de cargas no interior);

Para $r > R_2 \Rightarrow \mathrm{E} = 0\ (Q_1 + Q_2 = 0)$

E para $R_1 < r < R_2 \Rightarrow \mathrm{E} = k\,\frac{Q}{r^2}$



A difereça de potencial será: $\phi_1 - \phi_2 = -\int_{R_2}^{R_1} E dr =$

$$\phi_1 - \phi_2 = -\int_{R_2}^{R_1} k\frac{Q}{r^2}dr = kQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Logo,

$$C = \frac{1}{k\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{R_1 \cdot R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

E se $(R_2 - R_1) = d \ll R_2 \Rightarrow \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_2 - R_1)} \approx \frac{{R_1}^2}{d} = \frac{A_{esf}}{4\pi d}$

Consequentemente,

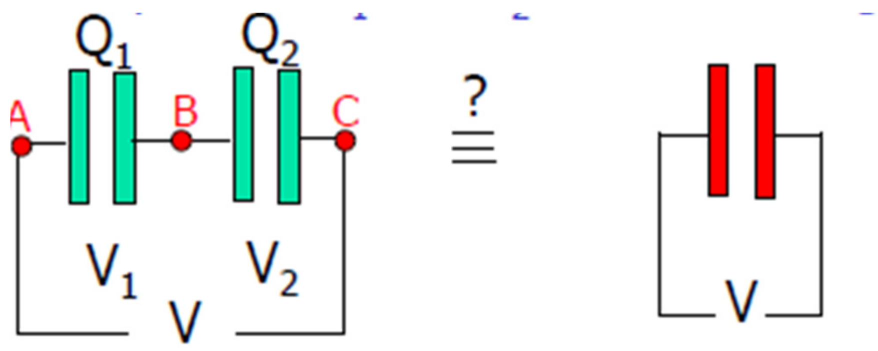
$$C = \frac{A_{esf}}{k4\pi d} = \frac{A_{esf}}{4\pi d} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{1} = \frac{\varepsilon_0 A_{esf}}{d}$$

Associação de capactores (série ou paralela

Capacitores em série: liguemos 2 capacitores de capacitâncias C_1 e C_2 em série e procuremos a capacitância equivalente.

Cada capacitor tem uma diferença de potencial ϕ_i(no desenho representada por V_i).

A diferença de potencial total (equivalente) do sistema é a soma das diferenças de potenciaias:



$$\phi_{eq} \equiv \phi = \phi_1 + \phi_2 =$$

$$\phi = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow$$

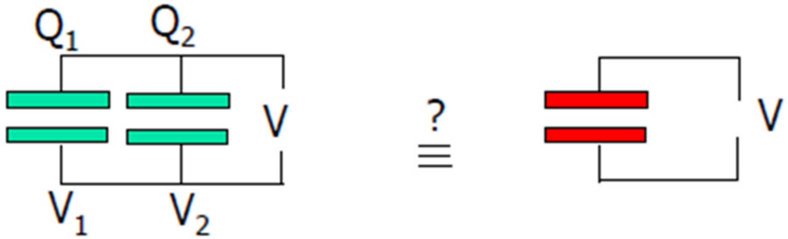
$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$$

ou

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Em geral temos: $C = \left(\sum_{i=1} \frac{1}{C_i}\right)^{-1}$

Capacitores em paralelo: conetemos agora os 2 capacitores em paralelo. Qual é capacitância equivalente do sistema?



Numa associação em paralelo a diferença de potencial é a mesma e a carga do sistema é a soma das cargas:

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 \qquad \& \qquad Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{Q_1 + Q_2}{\phi} = \frac{Q_1}{\phi} + \frac{Q_2}{\phi} = C_1 + C_2$$

Em geral

$$C = \sum_i C_i$$

Capacitores com dieléctricos

O que acontece quando o espaço entre 2 placas de um capacitor é preenchido por dieléctrico (plástico, ou óleo mineral por exemplo)?

Faraday demonstrou com simples experiência que a capacitância C_f, neste caso, aumenta proporcionamente à capacitância inicial (sem dieléctrico) C_i :

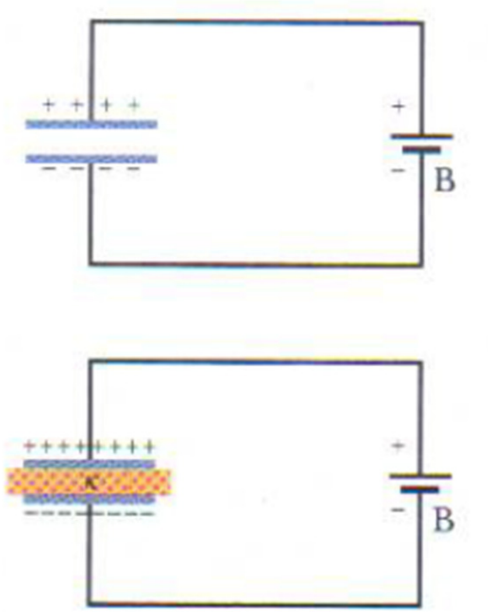
$$C_f = \varepsilon C_i$$

Onde ε – é constante dieléctrica do meio.

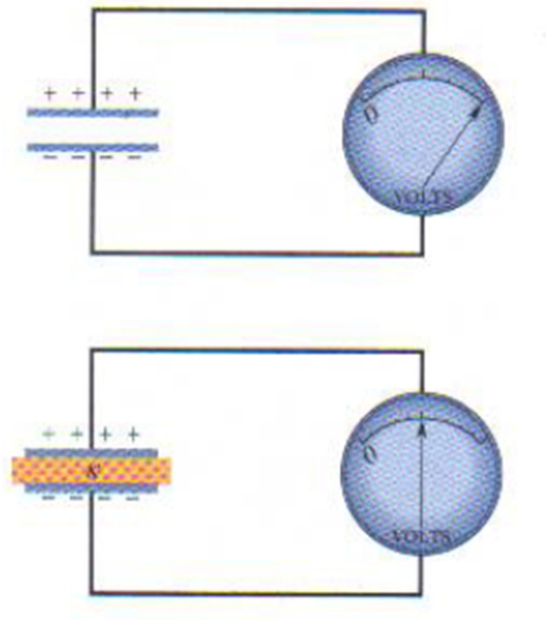
Por quê a capacitância aumenta?

Analisemos 2 capacitores iguais (1 com vácuo e outro com dielétrico):

Aumento da carga eléctrica sob diferença de potencial constante (ϕ = const).



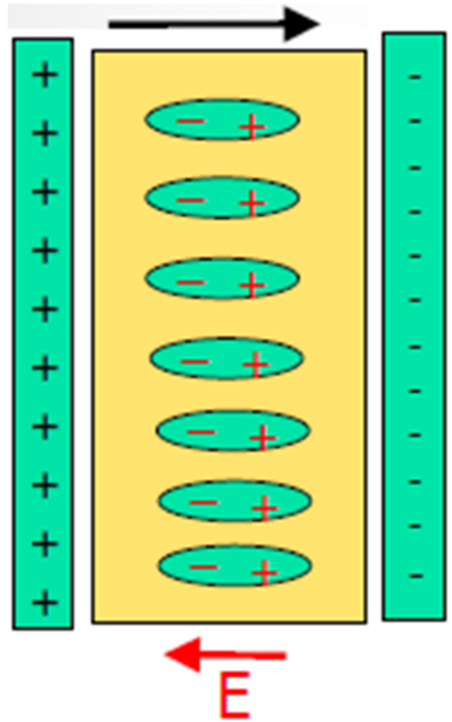
Diminuição da diferença de potencial sob carga constante ($q = const$).



Cada um dos 2 efeitos concorre para o aumento da capacitância ($C = \frac{Q}{\phi}$).

- ✓ A carga aumenta porque o campo externo polariza o dielétrico de forma que apareça carga induzida postiva na superfície do dieléctrico, perto da armadura negativa e outra negativa em volta da armadura positiva. O campo eléctrico resultante (a soma do $\vec{E}$ externo e interno)diminui.

- ✓ A diferença de potencial diminui porque a distância efectiva entre as cargas diminui.

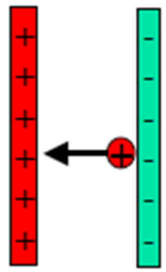


Energia armazenada num capacitor e energia do campo E

Consideremos um capacitor com carga Q.
Qual é o trabalho elementar que deve ser realizado para mover uma carga elementar d*q* da placa negativa para a positiva (carregamento do capacitor)?

$$dW = \phi(Q)dQ = \frac{Q}{C}dQ$$

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q QdQ = \frac{Q^2}{2C}$$



- Sendo o trabalho igual a variação da energia potencial, conclui-se que a energia armazenada num capacitor é:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{Q\phi}{2}$$

Energia do campo elétrico (energia própria do sistema)

Um capacitor pode ser carregado transferindo directamente electrões de um aplaca para outra, sendo necessário para tal, realizar trabalho contra o campo eléctrico. A energia do campo eléctrico é a energia potencial eléctrica definida no tema 3. Em geral, a energia do campo eléctrico é:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV$$

Onde E - campo eléctrico e V – volume.

Densidade de Energia

Podemos imaginar que a energia esteja armazenada no campo,na região entre as placas de um capacitor. Calculemos a energia por unidade de volume no espaço entre placas paralelas de um capacitor de área *A*, separadas por distância *d*.

- A energia por unidade de volume designa-se de **densidade de energia u:**

$$\mathrm{u} = \frac{\frac{1}{2} C\phi^2}{A \cdot d}$$

Sabido que a capacitância depende apenas de factores geométricos, $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ e $\phi = Ed$, teremos:

$$\mathrm{u} = \frac{\frac{1}{2}C\phi^2}{A \cdot d} = \frac{\frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2}{2A \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 A \cdot E^2 d^2}{2A \cdot d^2}$$

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Representa a densidade de energia eléctrica no vácuo. Mas a relação é válida para qualquer capacitor (configuração do campo eléctrico) no vácuo.

Em todas as expressões, Energia ou densidade de energia, estando o sistema num meio dieléctrico, multiplica-se $\varepsilon_0$por ε:

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$$

$$U = \int u dV$$

Exemplo: Uma esfera de raio R, colocada num determinado meio dieléctrico, está carregada uniformemente com densidade volumétrica ρ. Determine a energia própria do sistema.

- Usar a lei de Gauss e obter $E = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ (para $r < R$)

&

$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ (para $r > R$)

$$\mathrm{u} = u_{int} + u_{ext} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 {E_{int}}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 {E_{ext}}^2 =$$

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\left[\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)^2\right] =$$

$$\mathrm{u} = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0}\left(r^2 + \frac{R^6}{r^4}\right)$$

$$U = \int u dV = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0}\left[\int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr\right] =$$

$$U = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0}\left[\int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr\right]$$

Primeira integral

$$\int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^R r^4 dr = 4\pi \frac{R^5}{5}$$

Segunda integral $\int_R^\infty \frac{R^6}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi R^6 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} =$

$$= 4\pi R^6 \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) / {}_R^\infty = 4\pi R^6 \cdot \left(0 + \frac{1}{R}\right) = 4\pi R^5$$

Logo,

$$U = \frac{\rho^2}{18\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \left(4\pi \frac{R^5}{5} + 4\pi R^5\right) = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{6}{5} =$$

$$U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon\varepsilon_0}$$

- Resumindo, capacitores são úteis porque:
  - Podem armazenar energia que pode ser libertada em pouco tempo
  - Quanto maior for a capacitância de um capacitor, maior é a energia armazenada para dada diferença de potencial

Como aumentar a capacitância?

- Modificar a geometria (ex: para placas paralelas consegue-se aumentando a área ou diminuindo a separação entre as placas)
- Inserir dieléctrico entre as placas
- Conectar capacitores em paralelo