Projeto Controle de um Levitador Magnético

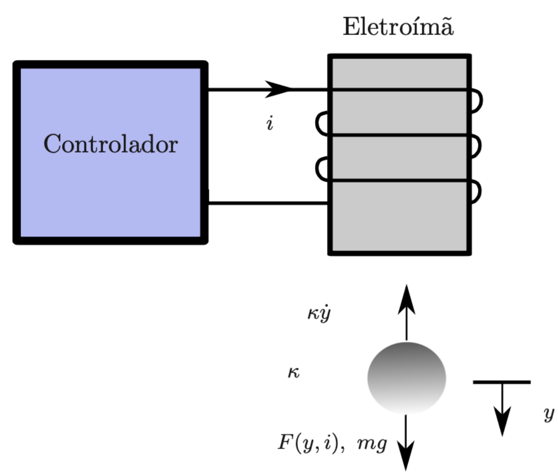
ES710 - Controle de sistemas mecânicos

Alunos

- Gabriel Muelas Urano, 234944
- Luigi De Salvo Miotti, 221040

Introdução

Neste projeto analisamos o sistema de um levitador magnético. O sistema consiste de uma bola de material magnético com massa m suspensa por um eletroímã, cuja corrente é controlada via realimentação, utilizando a medida da posição da bola y, que por sua vez é obtida por um sensor óptico. A posição vertical $y \geq 0$ é medida a partir de um ponto de referencia em que $y = 0$ quando a bola está encostada no eletroímã. Nesta figura, κ é o coeficiente de atrito viscoso, g é a aceleração da gravidade, $F(y, i)$ é a força gerada pelo eletroímã e i é a corrente elétrica associada.



A indutância do eletroímã pode ser modelada por

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1 + y/a}$$

A força é dada por

$$F(y, i) = -\frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)}$$

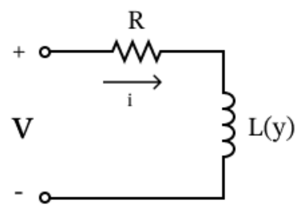
Considerando que o sistema é alimentado por uma fonte de tensão v temos que $v = \dot{\phi} + Ri$ com $\phi = L(y)i$ sendo o fluxo magnético.

Análise do Sistema a Tempo Contínuo

1. Modelo não-linear

A análise do sistema começa pela modelagem do sistema, que foi dividido em sistema elétrico e dinâmico, o que resultou em duas equações de variáveis y, i e suas derivadas no tempo.

- Sistema Elétrico



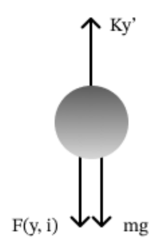
$$v = Ri + \dot{\phi}$$

$$v = Ri + (L(y)' \cdot i + L(y) \cdot i')$$

$$v = Ri + \left(-aL_0 \frac{y'}{(a+y)^2} i + L_1 i' + \frac{aL_0}{a+y} i'\right)$$

$$v = \left[R - aL_0 \frac{y'}{(a+y)^2}\right] i + \left[L_1 + \frac{aL_0}{a+y}\right] i'$$

- Sistema Dinâmico



$$my'' = F(y, i) + mg - \kappa y'$$

$$my'' + \frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)^2} - mg + \kappa y' = 0$$

2. Representação em espaço de estados

Adotamos as seguintes variáveis de estado $\xi_1 = y,\ \xi_2 = y',\ \xi_3 = i$, entrada de controle $u_N = -v$ e saída $z_N = \xi_1$.

Reescrevendo as equações do sistema não-linear, obtemos

$$v - \left[R - aL_0 \frac{y'}{(a+y)^2}\right] i = \left[L_1 + \frac{aL_0}{a+y}\right] i'$$

$$i' = \frac{v - \left[R - aL_0 \frac{y'}{(a+y)^2}\right] i}{L_1 + \frac{aL_0}{a+y}}$$

e

$$my'' + \frac{L_0 i^2}{2a(1+y/a)^2} - mg + \kappa y' = 0$$

$$y'' = g - \frac{\kappa}{m} y' - \frac{aL_0 i^2}{2m(a+y)^2}$$

Portanto, a representação em espaço de de estados do sistema é dada por

$$\xi_1' = \xi_2$$

$$\xi_2' = g - \frac{\kappa}{m}\xi_2 - \frac{aL_0 \xi_3^2}{2m(a+\xi_1)^2}$$

$$\xi_3' = \frac{-u_N - \left[R - aL_0 \frac{\xi_2}{(a+\xi_1)^2}\right] \xi_3}{L_1 + \frac{aL_0}{a+\xi_1}}$$

3. Posição de equilibrio

Desejamos manter a bola em equilíbrio na posição $y_e = 0$, isto é, encostada no eletroímã. Para isso adotamos que $y^{(n)} = 0$, com n sendo a n-ésima derivada no tempo. Aplicando estas condições nas equações do modelo não-linear obtemos:

$$0 + \frac{L_0 i_e^2}{2a(1+0)^2} - mg + 0 = 0$$

$$\frac{L_0 i_e^2}{2a} - mg = 0$$

$$i_e = \sqrt{\frac{2amg}{L_0}}$$

e

$$v_e = [R - 0]\, i_e + \left[L_1 + \frac{aL_0}{a+0}\right] i_e'$$

$$v_e = Ri_e + L_1 i_e' + L_0 i_e'$$

Como em regime permanente a corrente fica constante, então $i_e' = 0$ e, portanto, temos

$$v_e = Ri_e$$

Concluímos que para manter a bola em equilíbrio na posição $y_e = 0$ precisamos que $i_e = \sqrt{\frac{2amg}{L_0}}$ e $v_e = Ri_e$

4. Modelo linearizado

A linearização das equações em torno do ponto de equilíbrio $(y_e, \dot{y}_e, i_e)$ é dada pela expansão de Taylor em primeira ordem

$$f(y,\dot{y},i) = f(y_e,\dot{y}_e,i_e) + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial y}(y-y_e) + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial \dot{y}}(\dot{y}-\dot{y}_e) + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial i}(i-i_e)$$

O resultado desta expansão para as equações do sistema não-linear é dado pela equações abaixo que configuram o sistema linearizado do problema.

$$v - Ri + \frac{L_0 i_e}{a} y' - (L_0 + L_1) i' = 0$$
$$y'' - g + \frac{k}{m} y' + \frac{L_0 i_e}{ma}\left[\frac{i_e}{2} + (i - i_e) - \frac{i_e}{a}(y - y_e)\right] = 0$$

5. Representação em espaço de estados do modelo linearizado

Adotamos as variáveis de estado $x_1 = y - y_e, x_2 = \dot{y}$ e $x_3 = i - i_e$, entrada $u = v_e - v$ e saída $z = x_1$. Para colocar na forma matricial, rearranjamos a expansão de Taylor para as novas variáveis.

$$f(y,\dot{y},i) - f(y_e,\dot{y}_e,i_e) = \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial y}(y-y_e) + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial \dot{y}}(\dot{y}-\dot{y}_e) + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial i}(i-i_e)$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial y}x_1 + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial \dot{y}}x_2 + \frac{\partial f(y_e,\dot{y}_e,i_e)}{\partial i}x_3$$

Com isto, obtemos as seguintes equações

$$\dot{x_3} = \frac{\frac{L_0 i_e}{a} x_2 - u - R x_3}{L_0 + L_1}$$

$$\dot{x_2} = \frac{L_0 i_e^2}{ma^2} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{L_o i_e}{ma} x_3$$

Portanto, na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{L_0 i_e^2}{ma^2} & -\frac{k}{m} & -\frac{L_o i_e}{ma} \\ 0 & \frac{L_0}{L_0+L_1}\frac{i_e}{a} & -\frac{R}{L_0+L_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{1}{L_0+L_1}\end{bmatrix}u$$

$$z = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} + [0]u$$

6. Estabilidade

Avaliando computacionalmente a matriz A com os valores $m = 0.25$, $\kappa = 10^{-3}$, $L_0 = 0.05$, $L_1 = 0.02$, $g = 9.81$, $a = 0.05$ e $R = 7$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 392.4 & -0.04 & -6.2642\sqrt{2} \\ 0 & 22.372\sqrt{2} & -100 \end{bmatrix}$$

Conforme consultado em "Process Control: Modeling, Design and Simulation" (B. Wayne Bequette), para que um sistema no espaço de estados seja assintoticamente estável, todos os autovalores da matriz A precisam ter parte real negativa. Dessa forma, calculamos os autovalores da matriz com o comando `eig` e obtemos os seguintes resultados:

$$\lambda_1 = 18.64427 \quad \lambda_2 = -21.7014 \quad \lambda_3 = -96.9828$$

Nota-se que um dos autovalores é positivo, o que é suficiente para concluir que o sistema é instável.

7. Função de transferência

Para calcular a função de transferência $G(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{u}(s)}$ a partir da equação do espaço de estados, podemos usar a fórmula

$$G = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Com o auxílio do computador, obtemos a função de transferência:

$$G(s) = -\frac{-L_0^2 a i_e - L_0 L_1 a i_e}{(L_0 + L_1)\left(-L_0 L_1 i_e^2 s - L_0 R i_e^2 + L_0 a^2 k s^2 + L_0 a^2 m s^3 + L_1 a^2 k s^2 + L_1 a^2 m s^3 + R a^2 k s + R a^2 m s^2\right)}$$