

Seminararbeit zum Vortrag “Satz von Roth I” im  
Seminar “Analysis” bei Prof. Dr. Hein

Marius Müller

Juli 2022

**Abstract**

Diese Arbeit behandelt den Satz von Thue-Siegel-Roth, der mittels des Irrationalitätsmaßes eine Aussage über die Irrationalität algebraisch irrationaler Zahlen liefert.

In dieser Arbeit wird zur Thematik hingeführt, die nötigen Grundlagen behandelt und das erste Theorem im Beweis des Satzes von Roth erklärt und bewiesen.

# Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Motivation des Themas</b>	<b>3</b>
2.1	Das Irrationalitätsmaß . . . . .	3
2.2	Beispiele zum Irrationalitätsmaß . . . . .	3
2.3	Zentrale Fragestellung des <i>Satzes von Roth</i> . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Grundlagen und Voraussetzungen</b>	<b>4</b>
3.1	algebraische Zahlen . . . . .	4
3.2	Satz von Roth ( <i>Theorem I</i> ) . . . . .	4
3.3	Normieren des Polynoms . . . . .	4
3.4	Polynome . . . . .	5
3.4.1	Definition der Polynome . . . . .	5
3.4.2	Der Inhalt eines Polynoms . . . . .	6
3.4.3	Restpolynom . . . . .	6
3.4.4	Index eines Polynoms . . . . .	6
3.5	Lemma 1 . . . . .	6
3.6	Lemma 2 . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Konstruktion des Polynoms <math>R</math> (<i>Theorem II</i>)</b>	<b>6</b>
4.1	Aussage des <i>Theorem II</i> . . . . .	7
4.2	Lemma 3 . . . . .	7
4.3	Lemma 4 . . . . .	7
4.4	Lemma 5 . . . . .	7
4.5	Beweis des <i>Theorem II</i> . . . . .	7

## 1 Einleitung

Der *Satz von Thue-Siegel-Roth* (im Folgenden kurz *Satz von Roth* genannt) wurde erstmals von Klaus Friedrich Roth bewiesen, der im Jahre 1958 für diesen Meilenstein die *Fields-Medallie* verliehen bekam.

Diese Arbeit ist eng an das Kapitel VI des Buches “An Introduction To Diophantine Approximation” von John William Scott Cassels aus dem Jahre 1957 angelehnt.

Der Beweis des *Satzes von Roth* gliedert sich hier in drei Theorems. Von diesen wird in dieser Arbeit der erste Satz, das *Theorem II*, beschrieben, erklärt und bewiesen (der *Satz von Roth* selbst ist hier das *Theorem I*; der Übersichtlichkeit halber wird sich an die Nummerierung der Quelle gehalten.)

## 2 Motivation des Themas

Das sogenannte *Irrationalitätsmaß* quantifiziert die Irrationalität einer reellen Zahl. Dazu wird die folgende Definition verwendet:

### 2.1 Das Irrationalitätsmaß

Sei  $x \in \mathbb{R}$  beliebig. Sei  $M$  die Menge aller  $\mu \in \mathbb{R}$ , sodass die Ungleichung

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu}$$

nur endlich viele Lösungen in  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$  besitzt. Dann heißt

$$\mu(x) := \inf(M)$$

das *Irrationalitätsmaß* von  $x$ .

Die folgenden Beispiele illustrieren diese Definition.

### 2.2 Beispiele zum Irrationalitätsmaß

- Für  $x \in \mathbb{Q}$  gilt:  $\mu(x) = 1$
- Für irrationale  $x$  wurde gezeigt, dass gilt:  $\mu(x) \geq 2$
- Für die *eulersche Zahl*  $e$  gilt  $\mu(e) = 2$
- Das Irrationalitätsmaß der Kreiszahl  $\pi$  ist bisher unbekannt. Der neuste Fortschritt setzt die obere Schranke bei  $\mu(\pi) \leq 7,1032 \dots$  fest.

### 2.3 Zentrale Fragestellung des *Satzes von Roth*

Es stellt sich nach den oben genannten Beispielen die Frage, ob auch alle irrationale Zahlen dasselbe Irrationalitätsmaß besitzen. Hier liefert der *Satz von Roth* eine teilweise Antwort:

Das Irrationalitätsmaß aller *algebraischen* irrationalen Zahlen ist genau zwei.

## 3 Grundlagen und Voraussetzungen

Algebraische Zahlen, formale Aussage des Satzes (*Theorem I*), oBdA  $a_n = 1$  und Sachen zu Polynomen

### 3.1 algebraische Zahlen

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .  $z$  heißt *algebraisch* genau dann, wenn gilt:

$$\exists f \in \mathbb{Q}[x] : f(z) = 0 \quad (1)$$

d.h. falls  $z$  eine Lösung eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. OBdA kann angenommen werden, dass  $f \in \mathbb{Q}[x]$ , da sich die Gleichung  $f(x) = 0$  mit dem Produkt der Nenner der Koeffizienten der Form  $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ , d.h. mit  $\prod_{i=1}^k q_i$  multiplizieren lässt, wodurch alle Koeffizienten ganzzahlig werden, die Gleichung und damit auch das resultierende Polynom jedoch dieselben Lösungen bzw. Nullstellen besitzen.

Weiterhin lässt sich oBdA annehmen, dass für den Koeffizienten der höchsten Potenz von  $x$  gilt:  $a_n \neq 0$ .

### 3.2 Satz von Roth (*Theorem I*)

Sei  $\xi \in \mathbb{R}$  algebraisch irrational und  $\delta > 0$  beliebig. Dann besitzt die Ungleichung

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < q^{-(2+\delta)} \quad (2)$$

nur endlich viele Lösungen in  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Zunächst wird gezeigt, dass der Satz nur für  $a_n = 1$  aus zu zeigen ist.

### 3.3 Normieren des Polynoms

Angenommen, der *Satz von Roth* gelte. Dann gilt für  $a_n \xi := \Xi$ :

$$0 = \Xi^n + a_{n-1}\Xi^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}a_0$$

und nach Multiplikation mit  $|a_n|$  und geeigneter Abschätzung von (2) gilt:

$$\left| \Xi - a_n \frac{p}{q} \right| < |a_n| q^{-(2+\delta)} < q^{-(2+\frac{1}{2}\delta)}$$

für hinreichend große  $q$ . Da  $\delta$  beliebig gewählt wurde, gilt der Satz somit nun für  $\Xi$  genau dann, wenn er für  $\xi$  gilt. Somit gilt insgesamt oBdA:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \text{ mit } f(\xi) = 0 \text{ und } a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Seien im Übrigen

$$n = \deg(f) \text{ und } a = \max\{1, |a_{n-1}|, \dots, |a_0|\}. \quad (4)$$

Diese werden im weiteren Verlauf der Arbeit und des Beweises verwendet werden.

### 3.4 Polynome

In diesem Abschnitt werden Polynome und weitere Begriffe definiert, die in diesem Kapitel verwendet werden. Darauf folgen zwei Lemmata, die diese jeweils kurz näher beleuchten.

#### 3.4.1 Definition der Polynome

Es werden Polynome der folgenden Form behandelt:

$$R : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad R(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\substack{0 \leq j_\mu \leq r_\mu \\ 1 \leq \mu \leq m}} c_{j_1, \dots, j_m} \cdot x_1^{j_1} \dots x_m^{j_m}. \quad (5)$$

Wobei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r_\mu$  der Grad des Polynoms in  $x_\mu$  und  $c_{j_1, \dots, j_m} \in \mathbb{R}$  und seien.

*Beispiel:* Seien  $m = 2$ ,  $r_1 = 2$  und  $r_2 = 1$ .

Das zugehörige Polynom nach obiger Definition sieht folgendermaßen aus:

$$R_{Bsp}(x_1, x_2) = c_{0,0}x_1^0x_2^0 + c_{0,1}x_1^0x_2^1 + c_{1,0}x_1^1x_2^0 + c_{1,1}x_1^1x_2^1 + c_{2,0}x_1^2x_2^0 + c_{2,1}x_1^2x_2^1$$

Nach konkreter Definition der Koeffizienten ergibt sich beispielsweise:

$$R_{Bsp}(x_1, x_2) = 7 - \sqrt{\pi}x_2^1 + \frac{e}{\sqrt[3]{\gamma}}x_1^2x_2^1$$

### 3.4.2 Der Inhalt eines Polynoms

Sei  $R$  ein Polynom nach obiger Definition. Dann sei der *Inhalt* eines Polynoms wie folgt definiert:

$$|\overline{R}| := \max\{|c_{j_1, \dots, j_m}|\} \quad \forall 0 \leq j_\mu \leq r_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq m \quad (6)$$

### 3.4.3 Restpolynom

Sei  $R$  ein Polynom nach obiger Definition. Es wird

$$R_{i_1, \dots, i_m} = \frac{1}{i_1! \dots i_m!} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(R) \quad (7)$$

das *Restpolynom* von  $R$  genannt.

### 3.4.4 Index eines Polynoms

Sei  $R$  ein Polynom nach obiger Definition,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  und  $s \in \mathbb{N}^m$ .  $I$  heißt *Index* von  $R$  an der Stelle  $\alpha$  bezüglich  $s$ , genau dann, wenn gilt:

$$I := \text{ind}(R) = \min \sum_{1 \leq \mu \leq m} \frac{i_\mu}{s_\mu}, \text{ sodass } R_{i_1, \dots, i_m}(\alpha) \neq 0. \quad (8)$$

Dies erinnert an die *Nullstellenordnung* einer Funktion, lässt sich jedoch mit Hilfe von  $s$  noch zusätzlich gewichten.

Zu diesem Begriff folgt wie erwähnt ein Lemma, das weitere Eigenschaften darlegt. In dieser Arbeit wird diese Definition jedoch nicht weiter verwendet; er findet lediglich in den Beweisen der weiteren Theorems im Beweis des *Satzes von Roth* weitere Anwendung.

## 3.5 Lemma 1

Lemma 1 mit Beweis (bisschen was zum Taylor Ableitungen Bums)

## 3.6 Lemma 2

Lemma 2 maybe mit Beweis? (paar Eigenschaften zum Index)

## 4 Konstruktion des Polynoms $R$ (*Theorem II*)

Zwischengelaber mit Kontext, Struktur, Sinn im Beweis, etc.

#### **4.1 Aussage des *Theorem II***

Satz 2 erklären

#### **4.2 Lemma 3**

Lemma 3 halt, maybe mit Beweis?

#### **4.3 Lemma 4**

Lemma 4 halt, maybe mit Beweis?

#### **4.4 Lemma 5**

Lemma 5 halt, maybe mit Beweis?

#### **4.5 Beweis des *Theorem II***

letztendlicher Beweis des Theorem II