Seminararbeit zum Vortrag “Satz von Roth I” im Seminar “Analysis” bei Prof. Dr. Hein

Marius Müller

Juli 2022

Abstract

Diese Arbeit behandelt den Satz von Thue-Siegel-Roth, der mittels des Irrationalitätsmaßes eine Aussage über die Irrationalität algebraisch irrationaler Zahlen liefert.
In dieser Arbeit wird zur Thematik hingeführt, die nötigen Grundlagen behandelt und das erste Theorem im Beweis des Satzes von Roth erklärt und bewiesen.

Contents

1 Einleitung

Der *Satz von Thue-Siegel-Roth* (im Folgenden kurz *Satz von Roth* genannt) wurde erstmals von Klaus Friedrich Roth bewiesen, der im Jahre 1958 für diesen Meilenstein die *Fields-Medallie* verliehen bekam.
Diese Arbeit ist eng an das Kapitel VI des Buches "An Introduction To Diophantine Approximation" von John William Scott Cassels aus dem Jahre 1957 angelehnt.
Der Beweis des *Satzes von Roth* gliedert sich hier in drei Theorems. Von diesen wird in dieser Arbeit der erste Satz, das *Theorem II*, beschrieben, erklärt und bewiesen (der *Satz von Roth* selbst ist hier das *Theorem I*; der Übersichtlichkeit halber wird sich an die Nummerierung der Quelle gehalten.)

2 Motivation des Themas

Das sogenannte *Irrationalitätsmaß* quantifiziert die Irrationalität einer reellen Zahl. Dazu wird die folgende Definition verwendet:

2.1 Das Irrationalitätsmaß

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei M die Menge aller $\mu \in \mathbb{R}$, sodass die Ungleichung

$$0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\mu}$$

nur endlich viele Lösungen in $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ besitzt. Dann heißt

$$\mu(x) := \inf(M)$$

das *Irrationalitätsmaß* von x.
Die folgenden Beispiele illustrieren diese Definition.

2.2 Beispiele zum Irrationalitätsmaß

- Für $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $\mu(x) = 1$
- Für irrationale x wurde gezeigt, dass gilt: $\mu(x) \geq 2$
- Für die *eulersche Zahl* e gilt $\mu(e) = 2$
- Das Irrationalitätsmaß der Kreiszahl π ist bisher unbekannt. Der neuste Fortschritt setzt die obere Schranke bei $\mu(\pi) \leq 7,1032\ldots$ fest.

2.3 Zentrale Fragestellung des *Satzes von Roth*

Es stellt sich nach den oben genannten Beispielen die Frage, ob auch alle irrationale Zahlen dasselbe Irrationalitätsmaß besitzen. Hier liefert der *Satz von Roth* eine teilweise Antwort:
Das Irrationalitätsmaß aller *algebraischen* irrationalen Zahlen ist genau zwei.

3 Grundlagen und Voraussetzungen

Algebraische Zahlen, formale Aussage des Satzes (*Theorem I*), oBdA $a_n = 1$ und Sachen zu Polynomen

3.1 algebraische Zahlen

Sei $z \in \mathbb{C}$. z heißt *algebraisch* genau dann, wenn gilt:

$$\exists f \in \mathbb{Q}[x] : f(z) = 0 \tag{1}$$

d.h. falls z eine Lösung eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist. OBdA kann angenommen werden, dass $f \in \mathbb{Q}[x]$, da sich die Gleichung $f(x) = 0$ mit dem Produkt der Nenner der Koeffizienten der Form $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, d.h. mit $\prod_{i=1}^{k} q_i$ multiplizieren lässt, wodurch alle Koeffizienten ganzzahlig werden, die Gleichung und damit auch das resultierende Polynom jedoch dieselben Lösungen bzw. Nullstellen besitzen.
Weiterhin lässt sich oBdA annehmen, dass für den Koeffizienten der höchsten Potenz von x gilt: $a_n \neq 0$.

3.2 Satz von Roth (*Theorem I*)

Sei $\xi \in \mathbb{R}$ algebraisch irrational und $\delta > 0$ beliebig. Dann besitzt die Ungleichung

$$0 < |\xi - \frac{p}{q}| < q^{-(2+\delta)} \tag{2}$$

nur endlich viele Lösungen in $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Zunächst wird gezeigt, dass der Satz nur für $a_n = 1$ zu zeigen ist.

3.3 Normieren des Polynoms

Angenommen, der *Satz von Roth* gelte. Dann gilt für $a_n\xi = \Xi$:

$$0 = \Xi^n + a_{n-1}\Xi^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}a_0$$

und nach Multiplikation mit $|a_n|$ und geeigneter Abschätzung von Gleichung (2) gilt:

$$|\Xi - a_n \frac{p}{q}| < |a_n| q^{-(2+\delta)} < q^{-(2+\frac{1}{2}\delta)}$$

für hinreichend große q. Da δ beliebig gewählt wurde, gilt der Satz somit nun für Ξ genau dann, wenn er für ξ gilt. Somit gilt insgesamt oBdA:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, f(\xi) = 0, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

3.4 Polynome

bisschen bla bla was hier passiert.

3.4.1 Definition der Polynome

was für Polynome benutzt werden und Notation und so

3.4.2 Der Inhalt eines Polynoms

Definition Inhalt Polynome

3.4.3 Restpolynom

Definition von diesem Taylor Ableitungen Bums da

3.4.4 Index eines Polynoms

Definition Index von Polynomen

3.5 Lemma 1

Lemma 1 mit Beweis (bisschen was zum Taylor Ableitungen Bums)

3.6 Korollar vom Satz von Taylor

das random Korollar vom Satz von Taylor

3.7 Lemma 2

Lemma 2 maybe mit Beweis? (paar Eigenschaften zum Index)

4 Konstruktion des Polynoms R (*Theorem II*)

Zwischengelaber mit Kontext, Struktur, Sinn im Beweis, etc.

4.1 Aussage des *Theorem II*

Satz 2 erklären

4.2 Lemma 3

Lemma 3 halt, maybe mit Beweis?

4.3 Lemma 4

Lemma 4 halt, maybe mit Beweis?

4.4 Lemma 5

Lemma 5 halt, maybe mit Beweis?

4.5 Beweis des *Theorem II*

letztendlicher Beweis des Theorem II