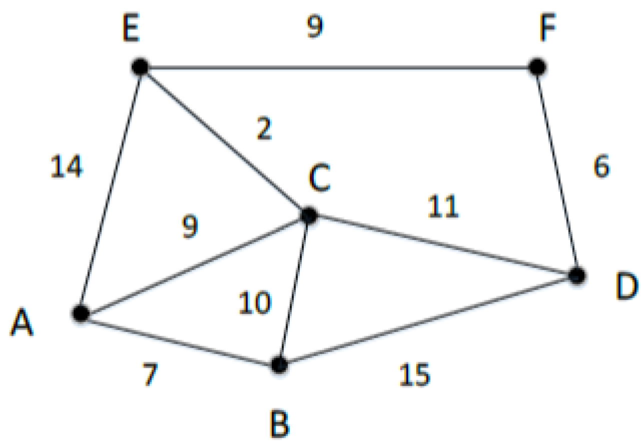
Diskreetti matematiikka Tehtävä 11

Dijkstran algoritmi

56.

Etsi oheisesta verkosta kevyin reitti pisteestä A pisteeseen F. Numerot kuvaavat solmujen välistä painoa. Käytä ratkaisemiseen Dijkstran algoritmia. Mikä reitti on paras ja mikä on sen paino?



- Reitti A -> C -> E -> F on paras, sillä sen paino on 20.

57.

Dijkstran algoritmilla voidaan ratkaista erittäin laajoja ongelmia, jos ratkaisuaika ei ole kriittinen tekijä. Esimerkiksi 5g verkon suunnittelussa sillä voidaan optimoida useiden tuhansien tukiasemien verkostoa. Etsi ratkaisut seuraaviin kysymyksiin:

- Miksi Dijkstran algoritmi ei yleensä ’tukehdu’ isoissakaan ongelmissa?
  - Dijkstran algoritmi käyttää tietorakennetta nimeltä prioriteettijono, joka varmistaa, että se käsittelee solmuja pienimmän etäisyyden mukaan ensin. Tämä vähentää huomattavasti tarvittavien laskutoimitusten määrää.
  - Dijkstran algoritmi käy läpi jokaisen solmun vain kerran, joten sen aikavaativuus on O(V log V + E), missä V on solmujen määrä ja E on kaarien määrä. Tämä aikavaativuus on melko tehokas, eikä se yleensä aiheuta ongelmia järkevän kokoisissa verkoissa.
  - Dijkstran algoritmi käyttää “leimattua” lähestymistapaa, jossa jokainen solmu merkitään käsitellyksi, kun se on käyty läpi. Tämä estää sen käsittelemästä samoja solmuja uudelleen, mikä vähentää huomattavasti tarvittavien laskutoimitusten määrää.

- Voiko painojen arvo olla negatiivinen, kun käytetään Dijkstran algoritmia?
  - Dijkstran algoritmi on suunniteltu käsittelemään positiivisia kaarien painoja. Jos painot ovat negatiivisia, algoritmi voi antaa virheellisiä tuloksia tai jopa tukkeutua.

58.

Dijkstran algoritmille löytyy vino pino erilaisia sovelluksia. Linkin takana pari JavaScript-toteutusta. Tutustu niihin ja ratkaise tehtävän 56 sekä luentomateriaalissa olevan linkin takana olevan graafin lyhin reitti.

- Tehtävän 56 ratkaisu: A -> C -> E -> F (paino 20)
- Luentomateriaalin graafin ratkaisu: A -> B -> C -> D (paino 38)

Koodi löytyy täältä

```
import sys


class Graph(object):
    def __init__(self, nodes, init_graph):
        self.nodes = nodes
        self.graph = self.construct_graph(nodes, init_graph)

    def construct_graph(self, nodes, init_graph):
        '''
        This method makes sure that the graph is symmetrical. In other words, if there's a p
        '''
        graph = {}
        for node in nodes:
            graph[node] = {}

        graph.update(init_graph)

        for node, edges in graph.items():
            for adjacent_node, value in edges.items():
                if graph[adjacent_node].get(node, False) == False:
                    graph[adjacent_node][node] = value

        return graph

    def get_nodes(self):
        "Returns the nodes of the graph."
        return self.nodes

    def get_outgoing_edges(self, node):
        "Returns the neighbors of a node."
```

```python
        connections = []
        for out_node in self.nodes:
            if self.graph[node].get(out_node, False) != False:
                connections.append(out_node)
        return connections

    def value(self, node1, node2):
        "Returns the value of an edge between two nodes."
        return self.graph[node1][node2]


def dijkstra_algorithm(graph, start_node):
    unvisited_nodes = list(graph.get_nodes())

    shortest_path = {}

    previous_nodes = {}

    max_value = sys.maxsize
    for node in unvisited_nodes:
        shortest_path[node] = max_value

    # The distance to the start node is 0
    shortest_path[start_node] = 0

    # The algorithm executes until we visit all nodes
    while unvisited_nodes:
        current_min_node = None
        for node in unvisited_nodes:
            if current_min_node == None:
                current_min_node = node
            elif shortest_path[node] < shortest_path[current_min_node]:
                current_min_node = node

        neighbors = graph.get_outgoing_edges(current_min_node)
        for neighbor in neighbors:
            tentative_value = shortest_path[current_min_node] + graph.value(current_min_node
            if tentative_value < shortest_path[neighbor]:
                shortest_path[neighbor] = tentative_value
                previous_nodes[neighbor] = current_min_node

        unvisited_nodes.remove(current_min_node)

    return previous_nodes, shortest_path
```

```python
def print_result(previous_nodes, shortest_path, start_node, target_node):
    path = []
    node = target_node

    while node != start_node:
        path.append(node)
        node = previous_nodes[node]

    # Add the start node manually
    path.append(start_node)

    print("We found the following best path with a value of {}.".format(shortest_path[target
    print(" -> ".join(reversed(path)))

# Tehtävän 56 ratkaisu
nodes = ["A", "B", "C", "D", "E", "F"]
init_graph = {}
for node in nodes:
    init_graph[node] = {}

init_graph["A"]["B"] = 7
init_graph["A"]["C"] = 9
init_graph["A"]["E"] = 14
init_graph["B"]["C"] = 10
init_graph["B"]["D"] = 15
init_graph["C"]["D"] = 11
init_graph["C"]["E"] = 2
init_graph["D"]["F"] = 6
init_graph["E"]["F"] = 9

graph = Graph(nodes, init_graph)

previous_nodes, shortest_path = dijkstra_algorithm(
    graph=graph,
    start_node="A")

print_result(
    previous_nodes, shortest_path, start_node="A", target_node="F")

nodes = ["A", "B", "C", "D"]
init_graph = {}
for node in nodes:
    init_graph[node] = {}

init_graph["A"]["B"] = 10
init_graph["A"]["C"] = 19
```

```python
init_graph["B"]["C"] = 8
init_graph["B"]["D"] = 31
init_graph["C"]["D"] = 20

graph = Graph(nodes, init_graph)

previous_nodes, shortest_path = dijkstra_algorithm(
    graph=graph,
    start_node="A")

print_result(
    previous_nodes, shortest_path, start_node="A", target_node="D")
```

Aman Mughal 03/04/2023