Petriho sítě - teorie + vybrané příklady

doc. Ing. Roman Šenkeřík, Ph.D.

přednášky do předmětu SoftComputing

Obsah prezentace

- Úvod do problematiky petriho sítí.
- C/E sítě.
- P/T sítě.
- Workflow - PN.
- Další varianty sítí
- Příklady použití

Úvod do PN

- Petriho sítě patří k významným nástrojům pro modelování paralelních systémů a systémů sdiskrétním časem. Díky své schopnosti snadno a srozumitelně vyjádřit paralelismus, synchronizaci a kauzalitu událostí jsou vhodným modelem systémů, jakými jsou komunikační protokoly, počítačové sítě či databázové systémy.
- Grafický popis a analýza systémů, ve kterých se vyskytují synchronizační, komunikační a zdroje sdílející procesy.
- Popis Paralelních jevů a konfliktních závislostí
- Jednoduchost
- Přehlednost
- Modelování dynamiky procesů

Úvod do PN

- Postupně byly vytvořeny následující typy Petriho sítí:

1) C/E (Condition / Event) Petriho sítě.
2) P/T (Place / Transition) Petriho sítě.
3) P/T Petriho sítě s inhibičními hranami.
4) P/T Petriho sítě s prioritami.
5) TPN Časované (Timed) Petriho sítě.
6) CPN Barevné (Coloured) Petriho sítě.
7) HPN Hierarchické (Hierarchical) Petriho sítě.
8) WPN Workflow Petriho sítě.

C/E Petriho sítě

- Model se skládá z **událostí** (events) a **podmínek** (conditions), které musí být splněny, aby mohla nastat určitá událost. Vazby mezi událostmi a podmínkami jsou znázorněny pomocí **orientovaných hran** (arcs).
- Koncept C/E PN byl vytvořen právě C. A. Petrim.

C/E Petriho sítě

- C/E Petriho síť je tedy definována těmito prvky (a na základě nich může být i graficky znázorněna):
  - **Podmínkami** – podmínky zobrazujeme zpravidla kroužky.
  - **Událostmi** – události zpravidla zobrazujeme jako obdélníky, případně usečky.
  - **Orientovanými hranami**, které mohou směřovat buď od podmínky k události nebo od události k podmínce.

C/E Petriho sítě

- **Tokeny** (značkami), které zakreslujeme jako tečky v kroužcích odpovídajících jednotlivým podmínkám a které vyjadřují pravdivost jednotlivých podmínek (0 – token se v dané podmínce nenachází, podmínka není splněna, 1 – token se v dané podmínce nachází, podmínka je splněna).
- **Počátečním značením** (initial marking) – počátečním značením rozumíme počáteční rozložení tokenů v síti.

C/E Petriho sítě

- Podmínka *c* je **vstupní podmínkou** (precondition) události *e*, pokud je zobrazena orientovanou hranou směřující od podmínky *c* k události *e*.
- Podmínka c je **výstupní podmínkou** (postcondition) události *e*, jestliže je zobrazena orientovanou hranou směřující od události *e* k podmínce *c*.
- Každá podmínka může být buď nesplněna (bez tokenu) nebo splněna (s tokenem).

C/E Petriho sítě

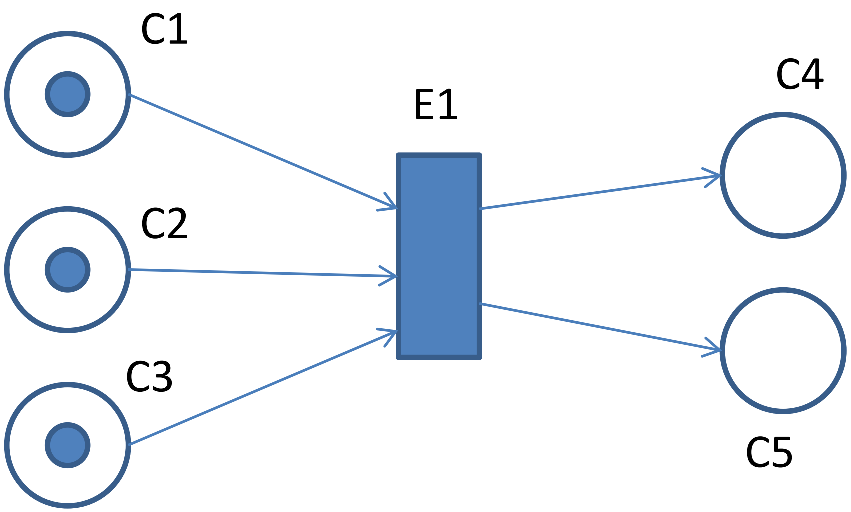
- **Značení sítě** (marking) v určitém okamžiku je dána rozložením tokenů v síti (tedy splněním, resp. nesplněním jednotlivých podmínek).
- Změna značení sítě (stavu sítě) se děje uskutečňováním událostí.
- Událost *e* je **proveditelná** (enabled), jsou-li splněny všechny její vstupní podmínky a zároveň nesplněny všechny výstupní podmínky.

C/E Petriho sítě

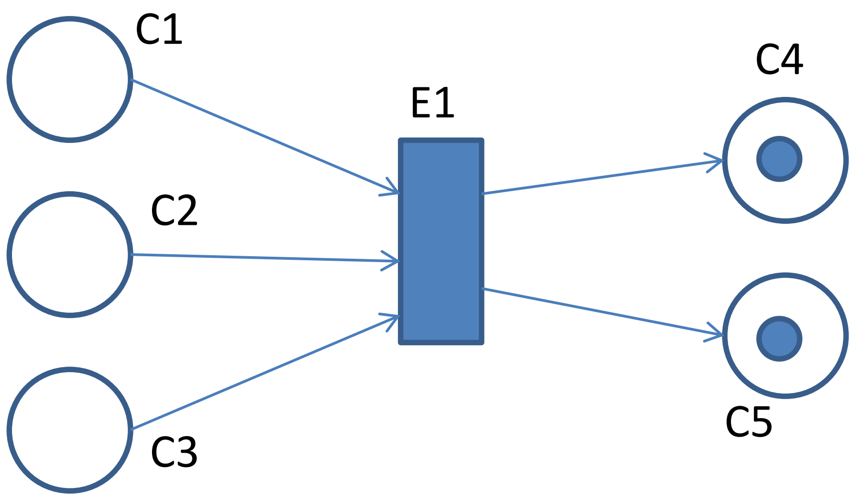
- Po **provedení** proveditelné události se změní značení sítě – všechny vstupní podmínky jsou nesplněny (jsou odebrány příslušné tokeny) a všechny výstupní podmínky jsou splněny (jsou přidány tokeny) – událost byla provedena (fired).
- To, že je událost proveditelná, ještě neznamená, že bude i provedena (konflikt událostí).

C/E Petriho sítě

Značení před provedením události E1.

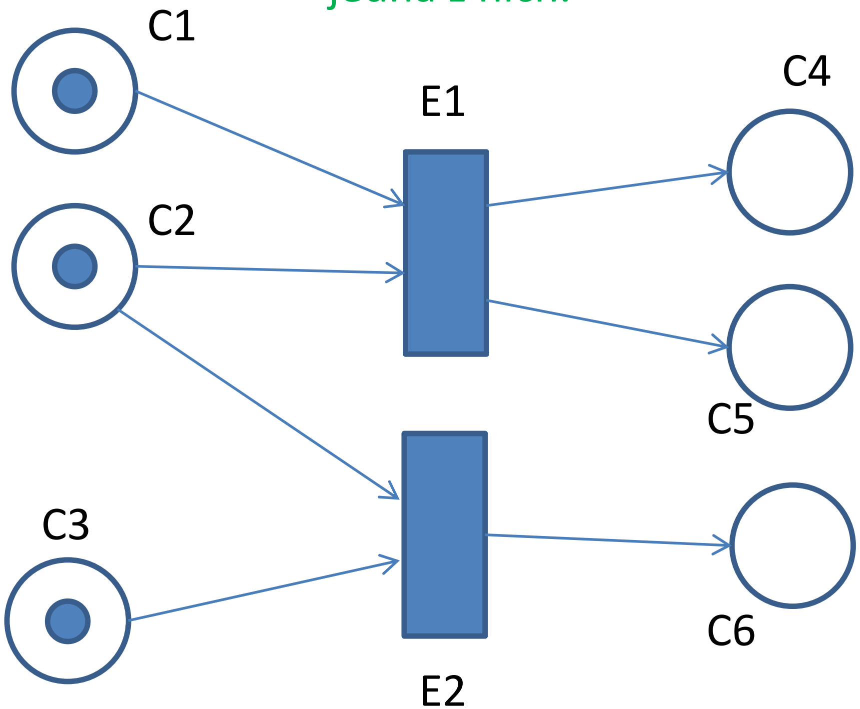


Značení po provedení události E1.

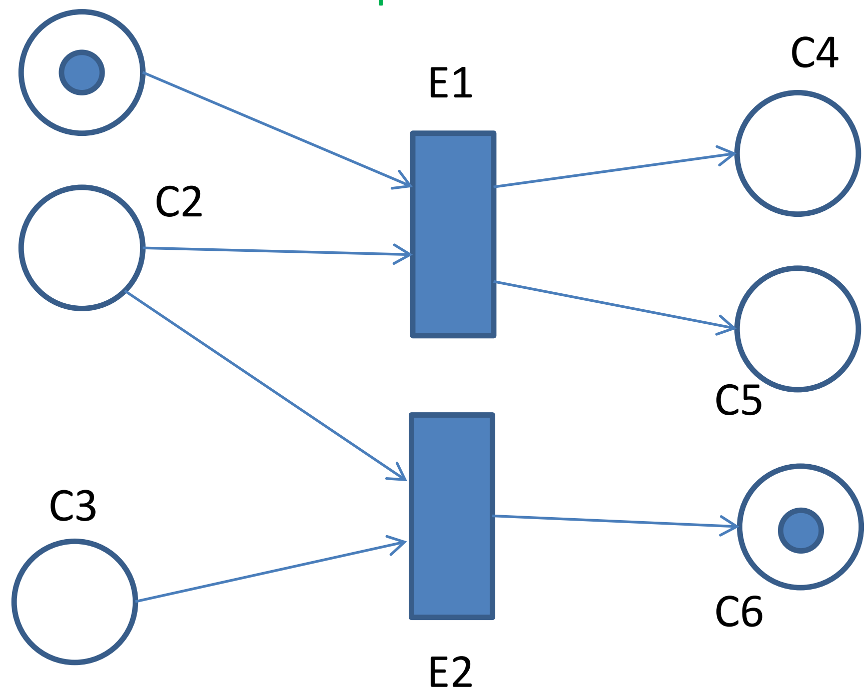


C/E Petriho sítě

Je zřejmé, že obě události jsou v tomto značení proveditelné, provedena může být ovšem pouze jedna z nich.

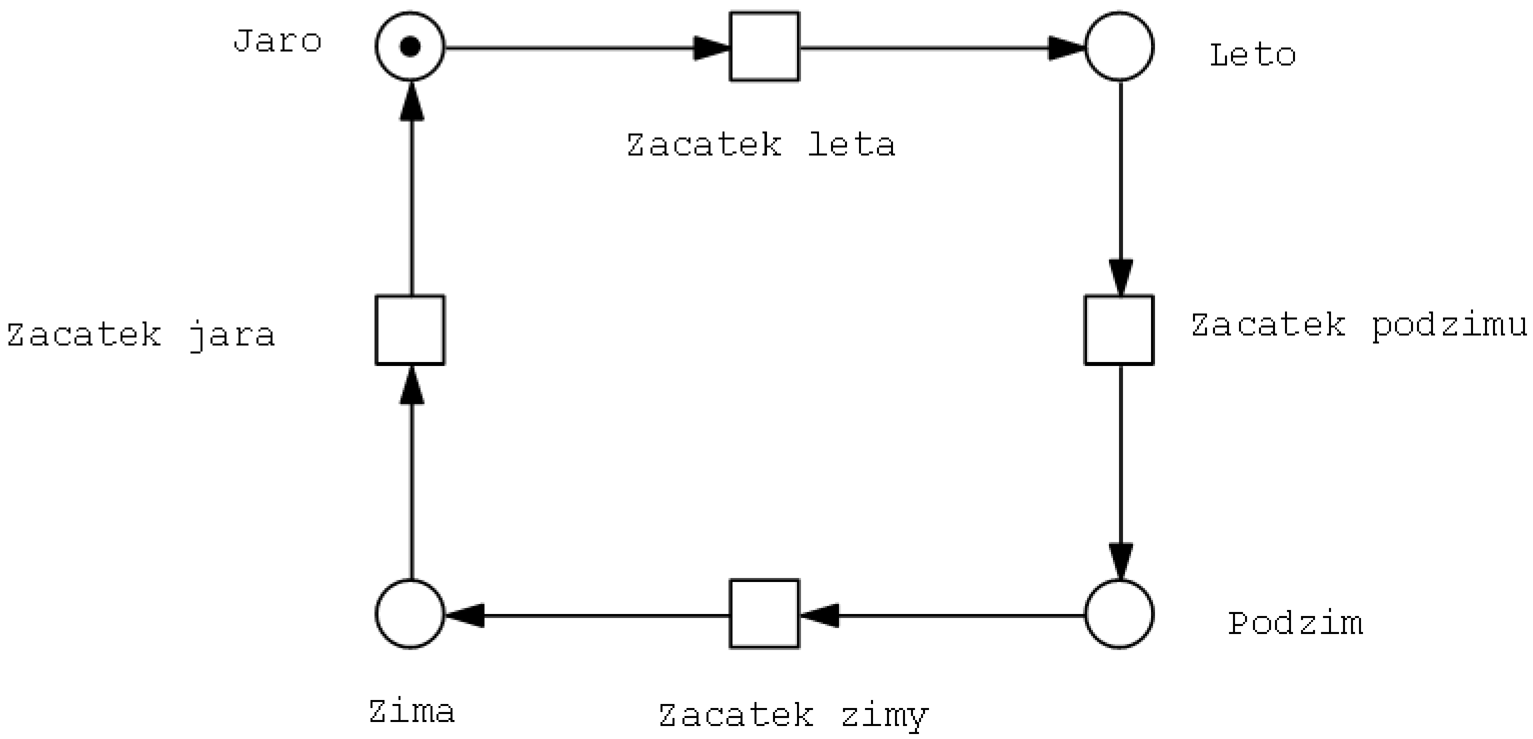


Provedeme-li např. událost E2, změní se značení sítě tak, jak je uvedeno na obrázku. Vidíme, že událost E1 už není proveditelná.



C/E Petriho sítě

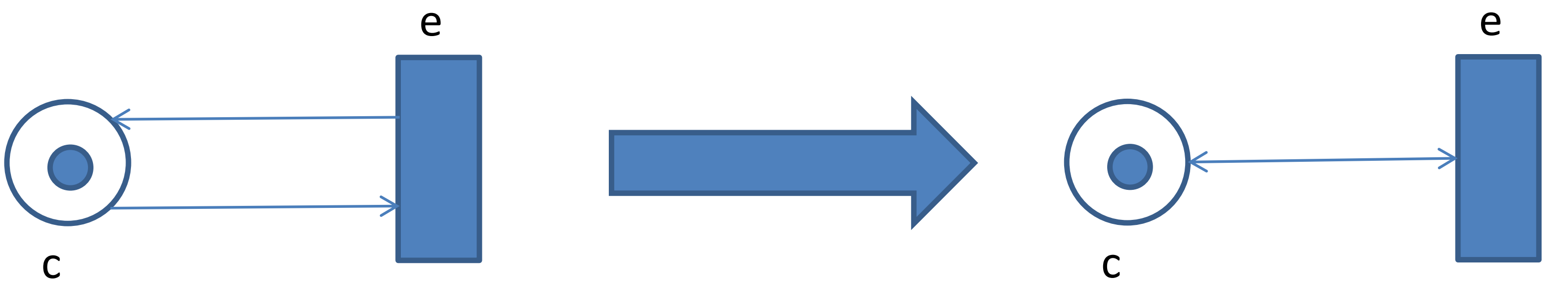
- Na obrázku je znázorněn jednoduchý model střídání ročních období vytvořený pomocí C/E Petriho sítě.



C/E Petriho sítě

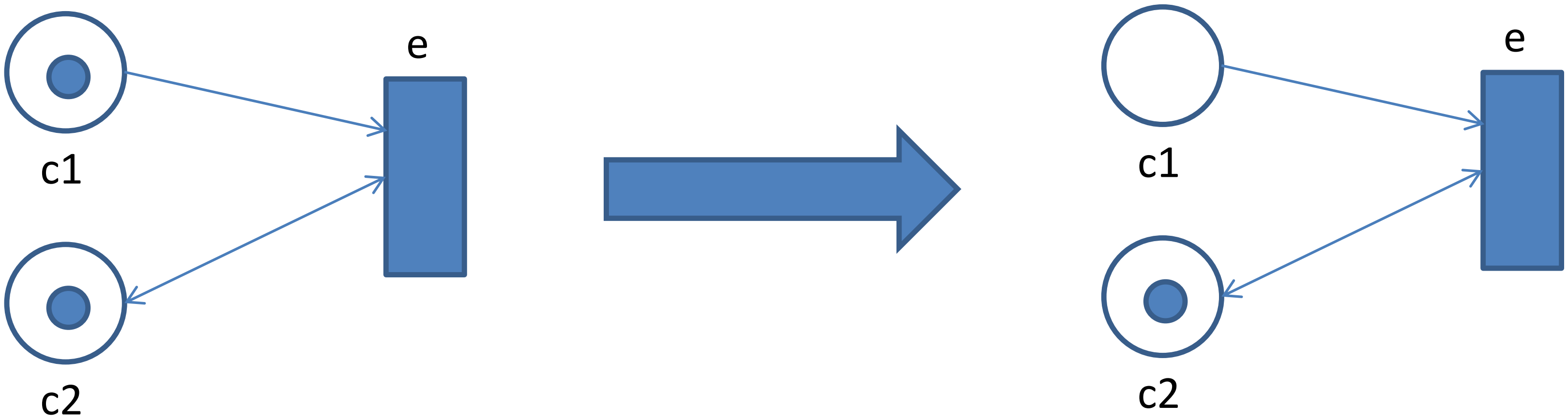
- **Testovací hrana** je smyčka tvořená podmínkou *c*, událostí *e* a hranami [*c*;*e*] a [*e*;*c*]. Pomocí testovací hrany událost *e* testuje podmínku *c*, aniž by se měnila její platnost. Testovací hranu zpravidla zakreslujeme jednou hranou se šipkami na obou stranách.
- **Čistá síť** je speciálním případem C/E PN bez testovacích hran.

C/E Petriho sítě



Na obrázku je znázorněna testovací hrana.

C/E Petriho sítě



Událost e je proveditelná, neboť obě vstupní podmínky jsou splněny (obsahují token).

Po provedení události e se změní značení sítě tak, že podmínce c1 je odebrán token, podmínce c2 token zůstává (je spojena testovací hranou). Situaci si lze představit tak, že token je odebrán a ihned vrácen zpět.

P/T Petriho sítě

- Původní koncept C/E Petriho sítě byl rozšířen na **P/T Petriho sítě**.
  - Místo podmínek jsou **místa** (places), místo událostí jsou **přechody** (transitions).
  - Pomocí míst zpravidla modelujeme stavy systému a pomocí přechodů změny stavů systému. Vazby jsou opět znázorněny pomocí orientovaných hran.

P/T Petriho sítě

- P/T Petriho síť je tedy tvořena následujícími prvky:
  - **Místy** (places) graficky znázorňované kroužkem.
  - **Přechody** (transitions) graficky znázorňované obdélníky.
  - **Orientovanými hranami** směřujícími buď od místa k přechodu nebo od přechodu k místu.
  - Udáním **kapacity** každého místa sítě (kapacita místa udává maximální počet tokenů, které se mohou v místě v jeden okamžik nacházet).

P/T Petriho sítě

  - Udáním **váhy** (násobnosti) každé hrany sítě. Váha hrany uvádí, kolik tokenů se při provedení přechodu po dané hraně přesouvá.
  - Udáním **počátečního značení** sítě, jež je dáno počty tokenů v jednotlivých místech sítě.
- Není-li kapacita místa uvedena, považuje se kapacita za nekonečnou.
- Není-li váha hrany uvedena, považuje se váha hrany rovna 1.

P/T Petriho sítě

- Stav sítě (značení sítě) v určitém okamžiku je dáno počty tokenů v jednotlivých místech sítě.
- Místo *p* patří do **vstupní množiny** (pre-set) přechodu *t*, jestliže z místa *p* vede hrana do přechodu *t*.
- Místo *p* patří do **výstupní množiny** (post-set) přechodu *t*, jestliže z přechodu *t* vede hrana do místa *p*.

P/T Petriho sítě

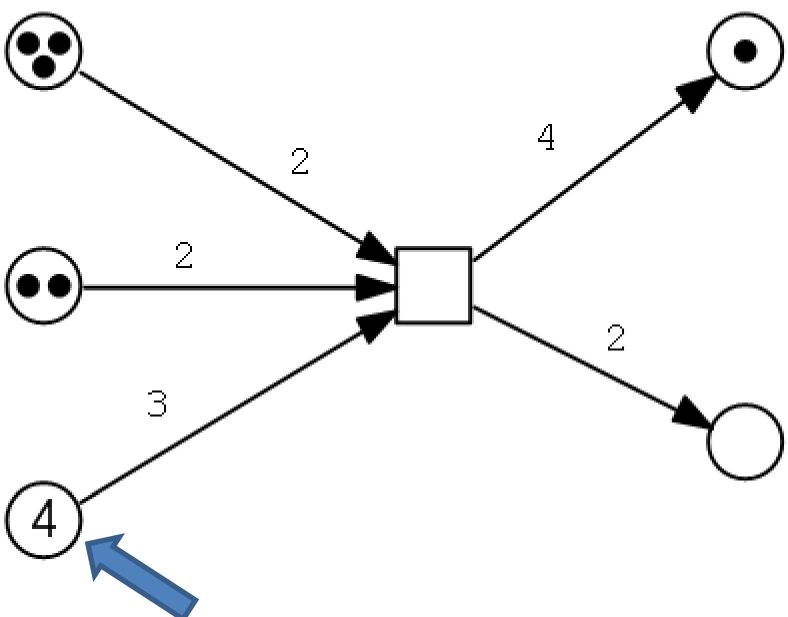
- Přechod *t* je **proveditelný** (enabled, activated), pokud:
  - Pro každé místo *p* vstupní množiny přechodu *t* platí, že obsahuje alespoň tolik tokenů, kolik činí váha hrany vedoucí z místa *p* do přechodu *t*.
  - Pro každé místo *p* výstupní množiny přechodu *t* platí, že počet tokenů obsažených v místě *p* zvětšený o váhu hrany směřující z přechodu *t* do místa *p* nepřevyšuje kapacitu místa *p*.

P/T Petriho sítě

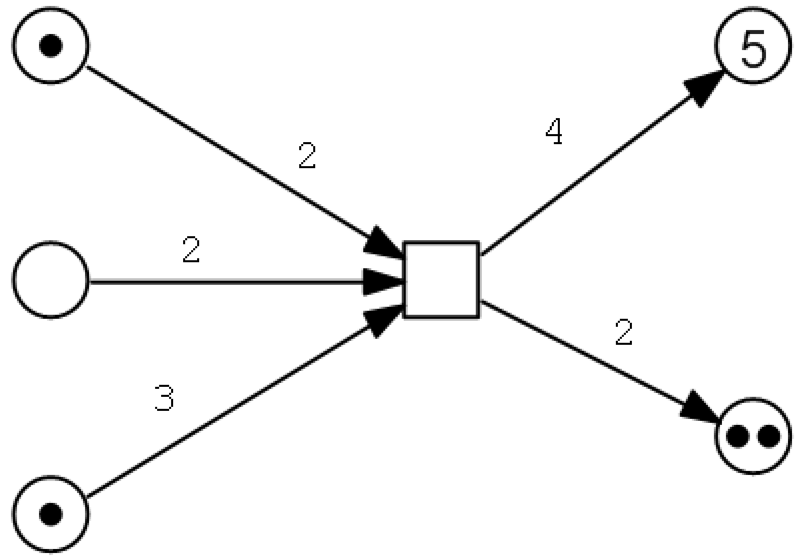
- **Provedením** proveditelného přechodu *t* dojde ke změně značení sítě následujícím způsobem:
  - V každém místě *p* vstupní množiny přechodu *t* se počet tokenů sníží o váhu hrany směřující z místa *p* do přechodu *t*.
  - V každém místě *p* výstupní množiny přechodu *t* se počet tokenů zvýší o váhu hrany směřující z přechodu *t* do místa *p*.

P/T Petriho sítě

Značení před provedením přechodu.



Značení po provedení přechodu.



V případě vyššího počtu tokenů v místě se tokeny nezakreslují, ale jejich počet se vyjádří číslem. Kdyby toto místo obsahovalo např. pouze 2 tokeny, přechod by nebyl proveditelný.

P/T Petriho sítě

- Při provádění přechodů obecně neexistuje žádné pravidlo zachování počtu tokenů, tzn., že provedením přechodu mohou tokeny libovolně vznikat či zanikat.
- Stejný počet tokenů na vstupu i na výstupu bude pouze v případě, kdy součet ohodnocení hran spojujících vstupní místa přechodu s přechodem bude roven součtu ohodnocení hran spojujících výstupní místa přechodu s přechodem.

P/T Petriho sítě

- C/E Petriho síť je speciálním případem P/T Petriho sítě, kde kapacita každého místa je rovna 1 a váha každé hrany je taky rovna 1. Každá P/T Petriho síť lze převést na ekvivalentní C/E Petriho síť (ovšem se složitější strukturou). C/E Petriho sítě tedy pouze umožňují jednodušší zápis.

P/T Petriho sítě

- **Obyčejná Petriho síť** je P/T Petriho síť, ve které je kapacita každého místa nekonečná a násobnost všech hran rovna 1.
- V P/T Petriho síti se mohou samozřejmě vyskytovat i **testovací hrany** jako v C/E Petriho sítích.

P/T Petriho sítě s inhibičními hranami

- **Inhibiční hrana** (inhibitor arc) je speciální hrana, která může směrovat pouze z místa k přechodu. U inhibiční hrany se zpravidla místo šipky zakresluje kolečko. Inhibiční hrany upravují proveditelnost přechodů.
- Místo *p* patří do **vstupní inhibiční množiny** přechodu *t*, jestliže z místa *p* vede inhibiční hrana do přechodu *t*.

P/T Petriho sítě s inhibičními hranami

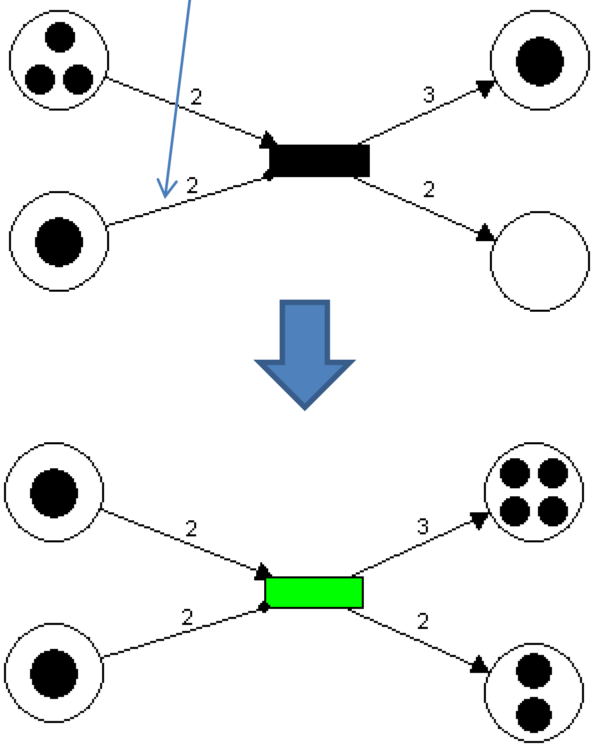
- Přechod *t* je **proveditelný**, jestliže:
  - Je přechod *t* proveditelný v příslušné P/T Petriho síti (tj. v síti, která vznikne z dané sítě odstraněním inhibičních hran).
  - Pro každé místo *p* vstupní inhibiční množiny přechodu *t* platí, že obsahuje méně tokenů než kolik činí násobnost inhibiční hrany vedoucí z místa *p* do přechodu *t*.

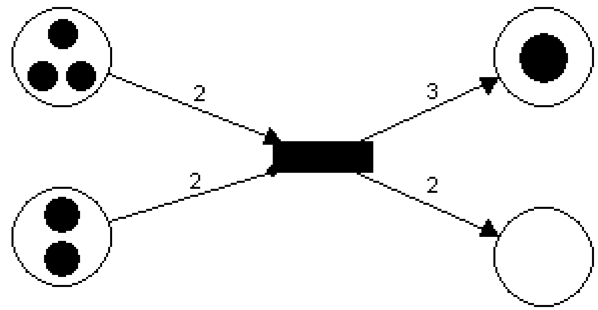
P/T Petriho sítě s inhibičními hranami

- Po **provedení** proveditelného přechodu *t* se změní značení sítě stejným způsobem jako v příslušné P/T Petriho síti. Po inhibiční hraně se tedy tokeny nepřesouvají. Inhibiční hrany můžeme chápat jako negativně pojaté testovací hrany.

P/T Petriho sítě s inhibičními hranami

Tato hrana je inhibiční.





V tomto značení není přechod proveditelný.

P/T Petriho sítě s prioritami

- **Petriho síť s prioritami** je P/T Petriho síť, ve které je každému přechodu přiřazeno celé nezáporné číslo udávající prioritu přechodu. Priority přechodů upravují pravidla pro jejich provádění.
- V Petriho síti s prioritami je přechod *t* **povolen** (has concession), je-li proveditelný v odpovídající P/T síti bez priorit.

P/T Petriho sítě s prioritami

- Přechod *t* je **proveditelný** tehdy, pokud:
  - Je povolen.
  - Žádný jiný povolený přechod nemá vyšší prioritu.
- Po **provedení** přechodu *t* se značení sítě změní stejným způsobem jako v odpovídající P/T síti bez priorit.

Rozšíření Petriho sítí o čas

- Všechny dosud zmíněné typy Petriho síti mají jednu nevýhodu – nepracují s časem, všechny změny v síti jsou provedeny okamžitě. V případě P/T sítí provedení přechodu odpovídá změně stavu systému a my nyní potřebujeme, aby tyto změny trvaly určitou dobu. Toto předchozí typy Petriho sítí neumožňují.

Rozšíření Petriho sítí o čas

- Trvání dějů může být:
  1) Deterministické – v tomto případě se hovoří o **Časovaných Petriho sítích**.
  2) Stochastické – v tomto případě hovoříme o **Stochastických Petriho sítích** (SPN – Stochastic Petri Nets).
  3) Kombinované – v tomto případě hovoříme o **Zobecněných stochastických Petriho sítích** (GSPN – Generalised Stochastic Petri Nets).

Rozšíření Petriho sítí o čas

- Zavedení času může být spojeno s:
  – **Přechody** (T-timed PN) – provedení přechodu trvá určitou dobu, po kterou token pobývá uvnitř přechodu.
  – **Místy** (P-timed PN) – token pobývá stanovenou dobu ve vstupním místě přechodu, jež má být proveden.
  – **Hranami** (A-timed PN) – přesun tokenu po příslušné hraně trvá určitou dobu.

Rozšíření Petriho sítí o čas

- **Tokeny** (Token Timed PN) – Provádění přechodů v síti je sice okamžité, ale tokeny opouštějící příslušný přechod jsou opatřeny **časovým razítkem** (time stamp), jež udává, kdy může být daný token zase použit. Hodnota časového razítka odpovídá aktuální hodnotě simulárního času zvětšnou o příslušnou hodnotu.

Barevné Petriho sítě

- **Barevná Petriho síť** je obyčejná P/T Petriho síť, ve které:
  - Je možno pracovat s více **typy tokenů** („tokeny různých barev“).
  - Každému místu je přiřazena **třída tokenů** (colour set), která se může v daném místě nacházet (místu nemusí být přiřazen pouze jeden typ tokenů, ale i více).

Barevné Petriho sítě

- Každému přechodu může být přiřazena **podmínka přechodu** (**strážní podmínka**, guard) tvořená z konstant a proměnných, která po vyhodnocení dává pravdivostní hodnotu (0 nebo 1).
- Každé hraně je přiřazen **hranový výraz** (arc expression) utvořený z konstant a proměnných, který po vyhodnocení představuje multimnožinu tokenů z té třídy, která je přiřazena incidujícímu místu.

Barevné Petriho sítě

- Počáteční značení Barevné Petriho sítě je dáno počátečním značením všech míst sítě – každému místu je přiřazena konkrétní multimnožina tokenů z té třídy, která je místu přiřazena.

- pozn. **Multimnožina** je zobecněním pojmu množina. Multimnožina umožňuje výskyt stejného prvku víckrát, např. multimnožina {2; 2; 3; 3; 5}.

Barevné Petriho sítě

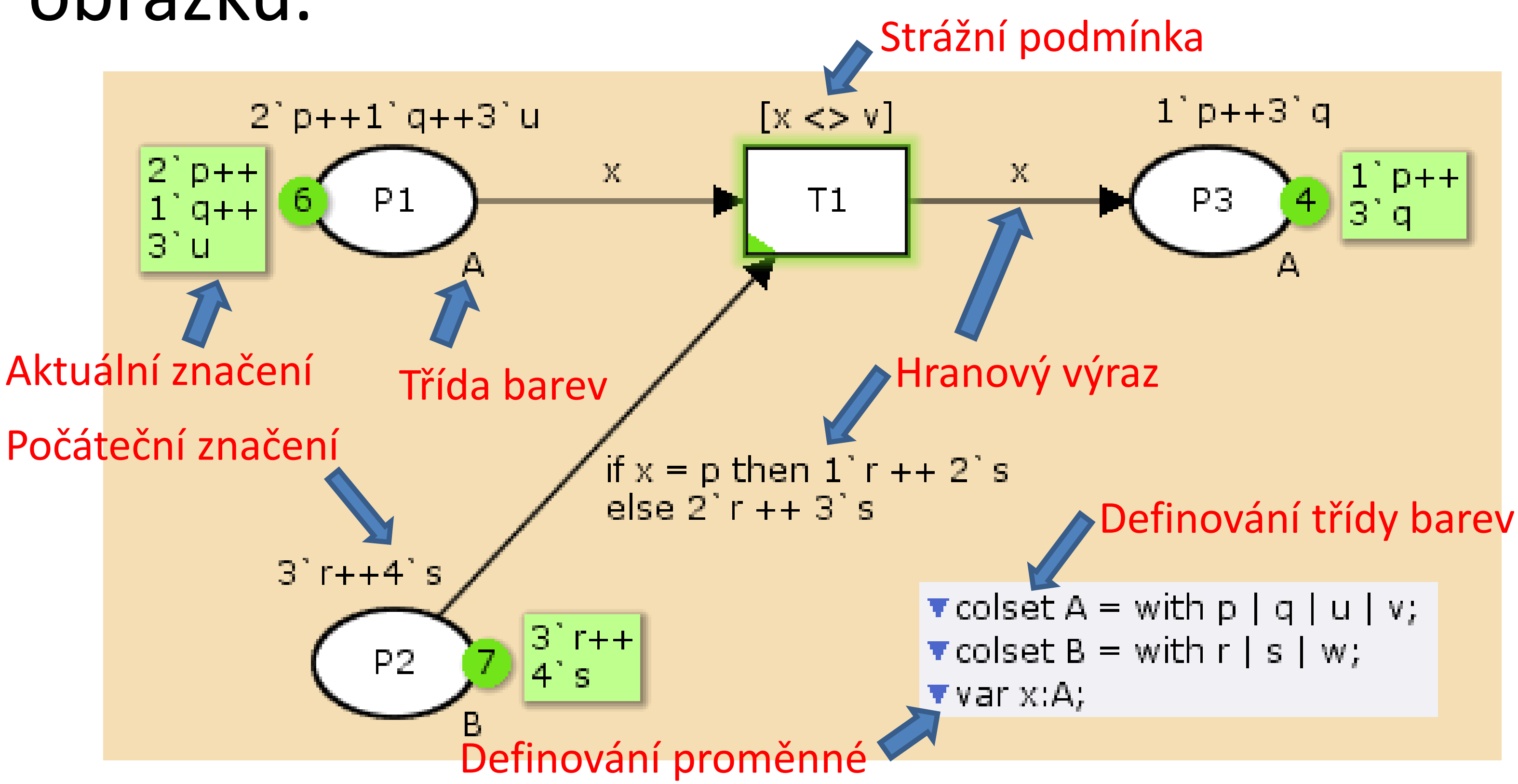
- Přechod *t* je v Barevné Petriho síti **proveditelný**, pokud:
  - Multimnožina tokenů obsažená v každém vstupním místě *p* přechodu *t* je větší nebo rovna multimnožině, která byla vypočtena při vyhodnocení hranového výrazu příslušícího hraně vedoucí z místa *p* do přechodu *t*.
  - Je splněna podmínka přechodu, tj. vyhodnocení strážní podmínky přechodu *t* dává logickou 1.

Barevné Petriho sítě

- Po **provedení** proveditelného přechodu *t* je:
  - V každém vstupním místě *p* odebrána multimnožina tokenů, jež vznikla vyhodnocením hranového výrazu hrany směřující z místa *p* do přechodu *t*.
  - V každém výstupním místě *p* je přidána multimnožina tokenů, jež vznikla vyhodnocením hranového výrazu přiřazeného hraně směřující z přechodu *t* do místa *p*.

Barevné Petriho sítě

- Mějme jednoduchou Barevnou síť vytvořenou v nástroji CPN Tools zobrazenou níže na obrázku.



Hierarchické Petriho sítě

- Hierarchické Petriho sítě umožňují členit vytvářenou síť na jednotlivé podsítě, které jsou navzájem propojeny.
- Hierarchickou Petriho sítí rozumíme částečně uspořádanou množinu nehierarchických Petriho sítí – tzv. stránek. Stránka B je pod stránkou A, jestliže síť na stránce B rozvíjí některý prvek ze stránky A.

Hierarchické Petriho sítě

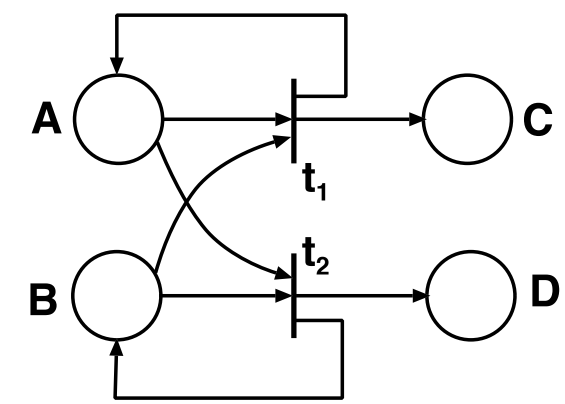
- Za tímto účelem se využívají hierarchizační konstrukty:
  - Substituce přechodů – přechod v dané síti je nahrazen substitující sítí.
  - Substituce míst – místo v dané síti je nahrazeno substitující sítí.
  - Volání přechodů.
  - Slučování přechodů.
  - Slučování míst.

WPN - Workflow PN

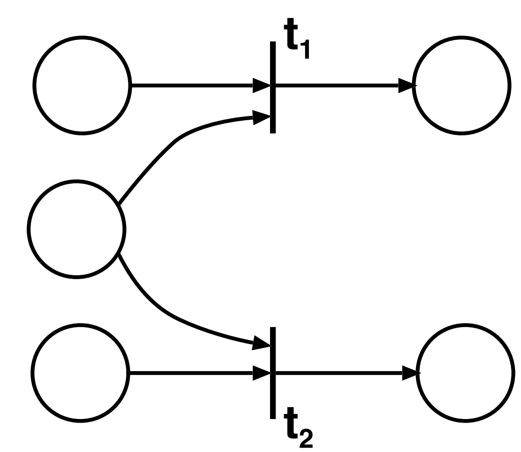
- Rozšíření jednotlivých typů Petriho sítí:
- Metoda PN je schopna modelování workflow, tedy procesu, který má jasně odlišené vstupní místo, které nemá žádnou vstupní hranu (arc), a výstupní místo, které podobně nemá žádnou výstupní hranu (arcs).
- Přídavek hrany propojení vstupních a výstupních míst vede k pevně propojené síti.
- **Často se navrhují i heuristicky (EPN - evolved Petri Nets)**

Příklady PN

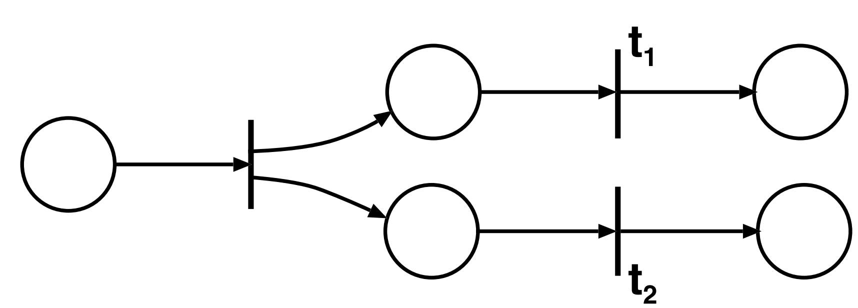
❖ Modelování podmíněnosti:
precondition: $A \wedge B$
postcondition: $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge D)$



❖ Modelování vzájemné výlučnosti:
t_1 a t_2 jsou vzájemně vyloučeny
(konfliktní přechody)

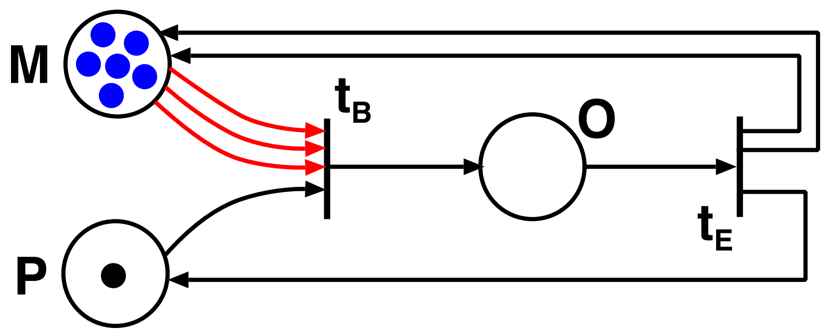


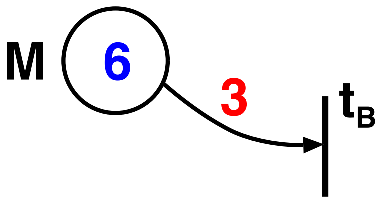
❖ Modelování paralelnosti (simultánnosti):
t_1 a t_2 jsou simultánní
(nezávislé přechody)



Příklady PN

❖ Modelování požadavků na zdroje:

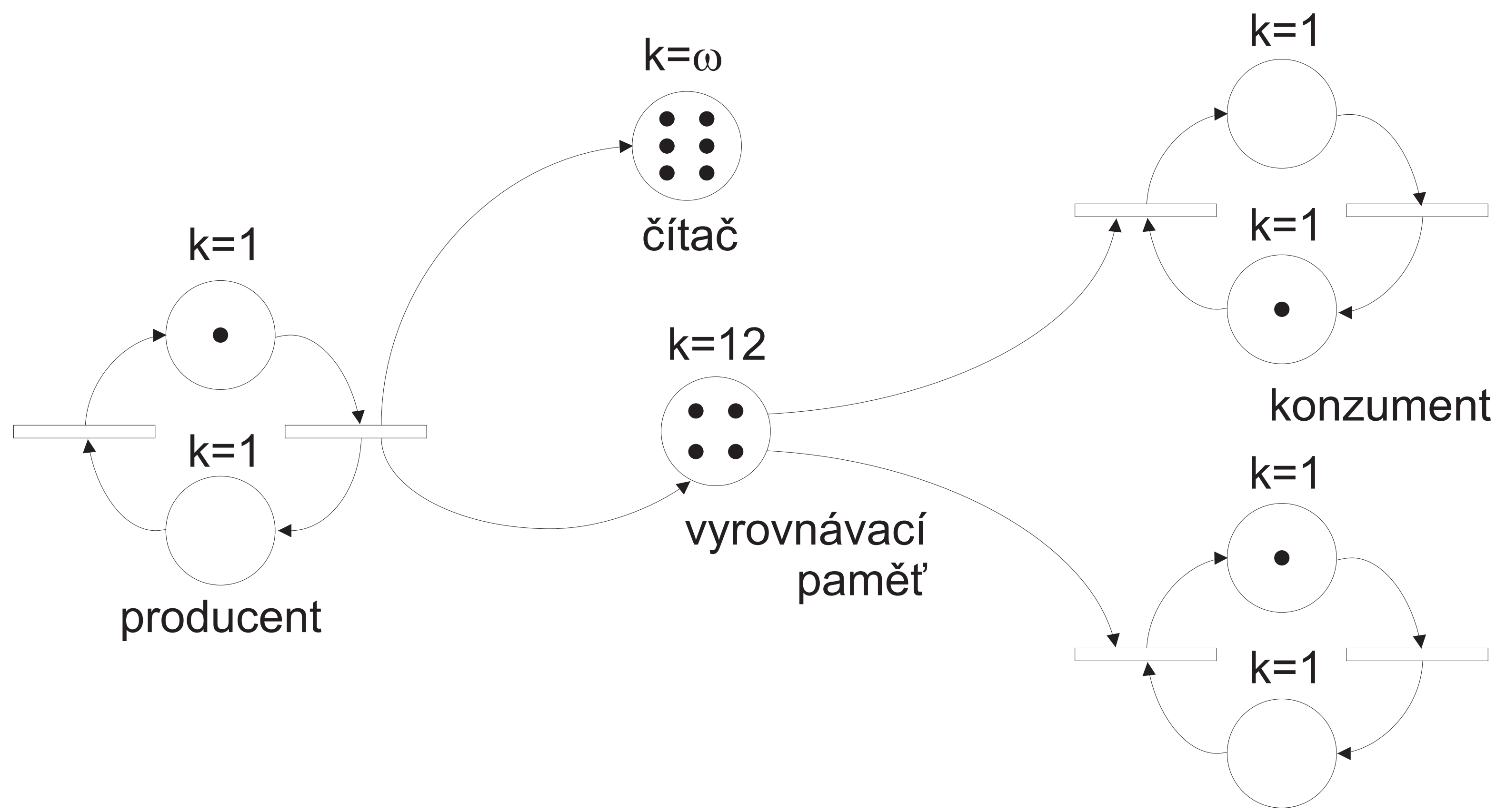




Interpretace míst a přechodů:

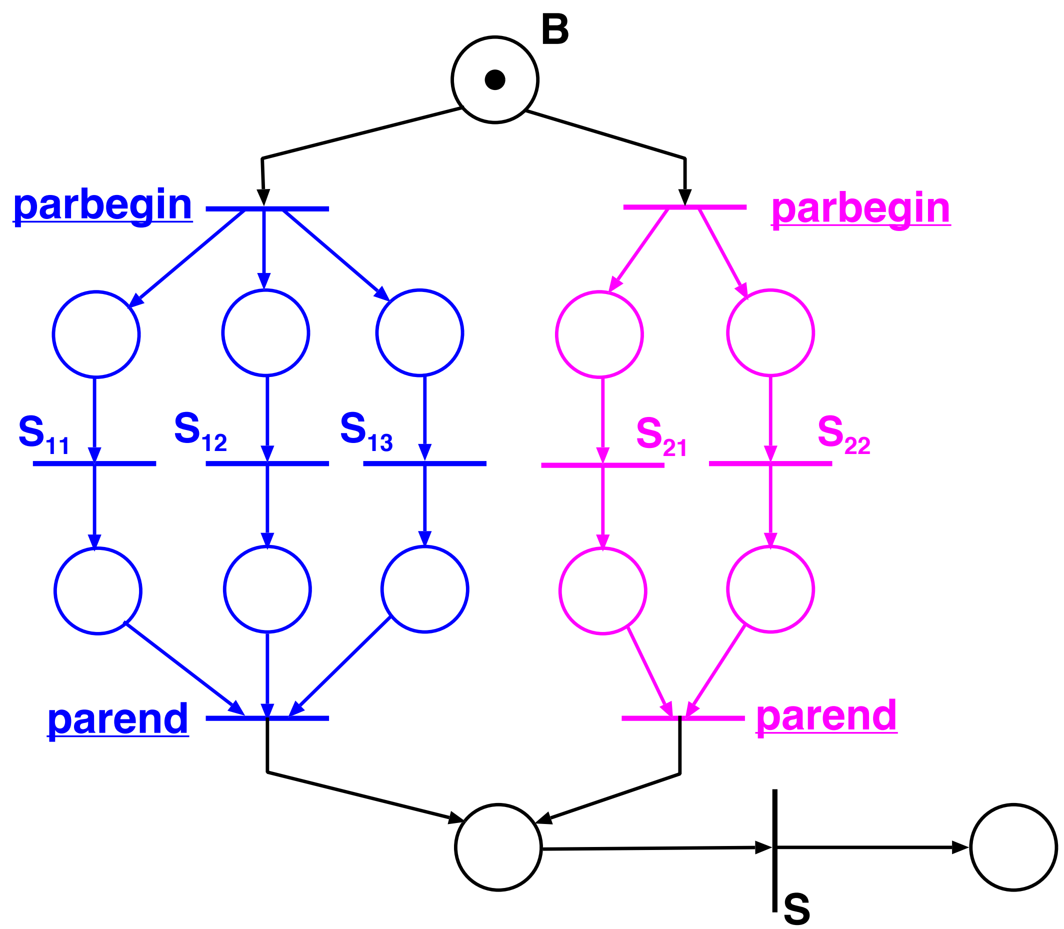
- M – počet volných paměťových bloků
- P – procesor je volný
- O – operace probíhá
- t_B – počátek operace
- t_E – konec operace

Příklady PN



Model producent-konzument

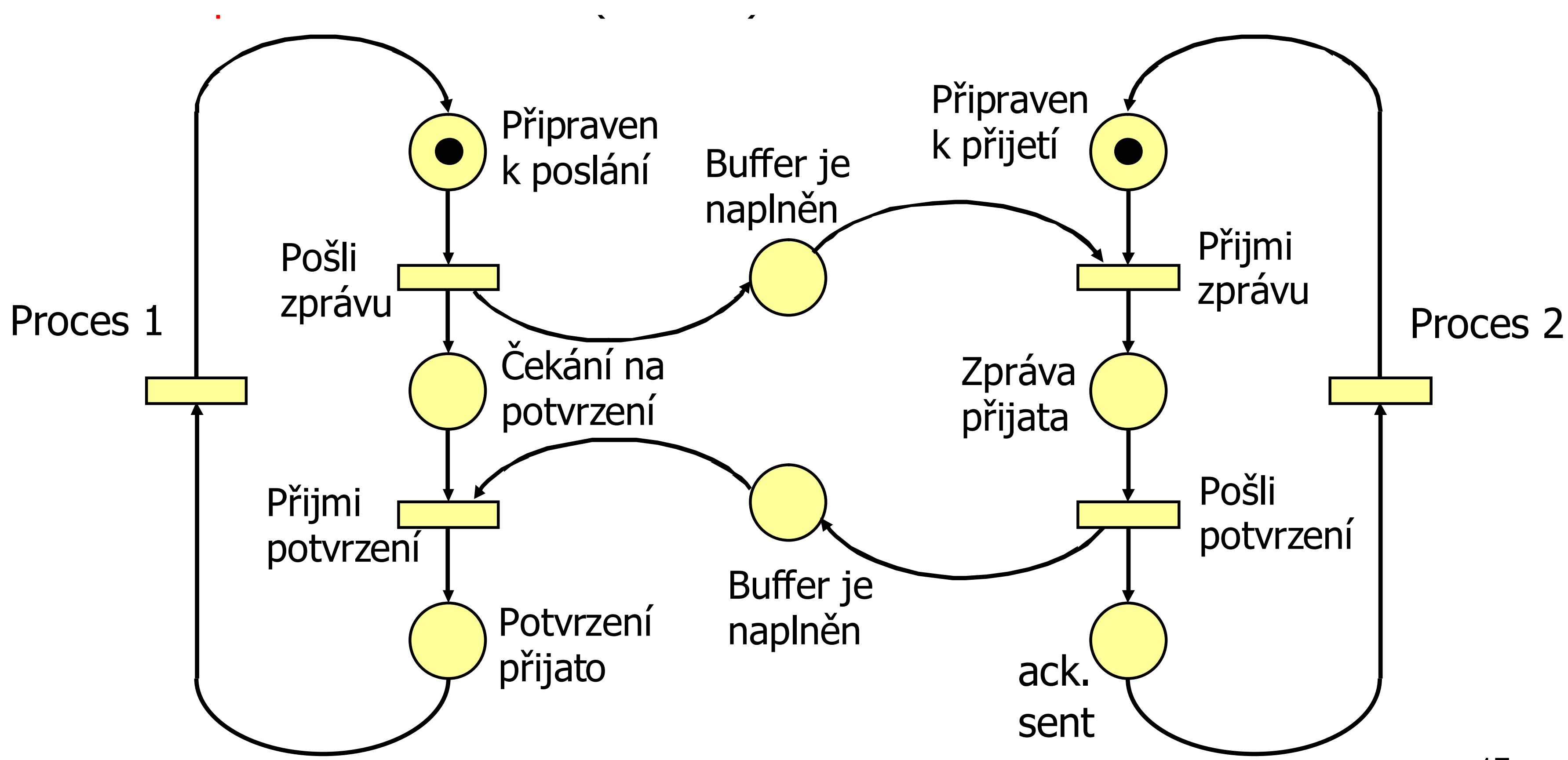
Příklady PN



<u>if</u> B <u>then</u>
    <u>parbegin</u>
        S_{11};
        S_{12};
        S_{13};
    <u>parend</u>
<u>else</u>
    <u>parbegin</u>
        S_{21};
        S_{22};
    <u>parend;</u>
S;

Model paralelního programu

Příklady PN



Model komunikačního protokolu