

1. Pomocí kterých axiomů je definována metrika?
  - kladnost, symetrie a trojúhelníková nerovnost
2. Co je Taylorův polynom funkce?
  - ChatGPT: matematická metoda, která slouží k aproximaci hodnot funkce v okolí daného bodu
3. Co je předmětem Schwartzovy věty a její zobecnění?
  - ChatGPT: analýza vlastností Fourierovy transformace pro distribuce s různými vlastnostmi
4. Jaký směr určuje gradient funkce v bodě?
  - smer nejvetsiho rustu
5. Jaký je rozdíl mezi otevřenou a uzavřenou množinou?
  - ChatGPT: uzavřená množina obsahuje všechny své limitní body, zatímco otevřená množina neobsahuje žádný ze svých limitních bodů
6. Definujte stacionární bod funkce jedné reálné proměnné.
  - ChatGPT: derivace funkce v tomto bodě rovna nule nebo neexistuje. To znamená, že je to bod, kde funkce přechází ze vzrůstajícího na klesající nebo naopak. Stacionární bod může být maximem, minimem nebo sedlovým bodem funkce
7. Definujte stacionární bod funkce více reálných proměnných.
  - ChatGPT: je bod, kde parciální derivace této funkce všech jejích proměnných jsou nulové (tj. jejich gradient je nulový vektor). Jinak řečeno, jedná se o bod, kde funkce nemá směr růstu ani klesání. Stacionární bod může být bodem lokálního extrému (maxima nebo minima), ale nemusí být (například může být sedlovým bodem). Stacionární body se využívají například při hledání extrémů funkce více proměnných nebo při lineární aproximaci této funkce v okolí daného bodu.
8. Definujte a formulujte podmínky pro inflexní bod spojitě funkce jedné proměnné.

- ChatGPT:

- Bod  $x_0$  se nazývá inflexní bod funkce  $f$ , pokud existuje kladné reálné číslo  $\epsilon$  takové, že pro každé  $x$  ležící v otevřeném intervalu  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  platí následující podmínky:
  - \* funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0$
  - \* funkce  $f$  má definovanou druhou derivaci v bodě  $x_0$
  - \* první derivace funkce  $f$  se mění z kladné na zápornou (tj. pro  $x$  menší  $x_0$  má funkce kladnou křivost a pro  $x$  větší  $x_0$  má funkce zápornou křivost) nebo se mění ze záporné na kladnou (tj. pro  $x$  menší  $x_0$  má funkce zápornou křivost a pro  $x$  větší  $x_0$  má funkce kladnou křivost)
- V inflexním bodě se tedy křivka získaná proložením bodů grafu funkce mění ze konkávní na konvexní nebo obráceně.

9. Definujte a formulujte podmínky pro sedlový bod funkce dvou proměnných.

- ChatGPT

- Funkce má v bodě  $(x_0, y_0)$  parciální derivace podle obou proměnných rovné nule.
- V bodě  $(x_0, y_0)$  se nachází bod, kde se mění typy extrem na křivkách, pro které dvě podmínky jsou: excentrická kružnice u bodu  $x_0$  se dotýká osy  $x$  odezvy a osy  $y$  odezvy bodu  $(x_0, y_0)$
- V případě, že Hessova matice funkce v bodě  $(x_0, y_0)$  je nedefinitní, lze ji použít k určení toho, že daný bod je sedlovým bodem. Pokud je Hessova matice indefinitní, pak bod  $(x_0, y_0)$  je sedlový bod.

10. Formulujte podmínky pro lokální extrém spojitě funkce jedné proměnné.

- ChatGPT:

- Pokud je první derivace funkce  $f(x)$  v kritickém bodě  $x = c$  kladná doleva a záporná doprava, pak má  $f(x)$  v bodě  $x = c$  lokální minimum.
- Pokud je první derivace funkce  $f(x)$  v kritickém bodě  $x = c$  záporná doleva a kladná doprava, pak má  $f(x)$  v bodě  $x = c$  lokální maximum.

- Pokud je první derivace funkce  $f(x)$  v kritickém bodě  $x = c$  nulová a druhá derivace v kritickém bodě není nulová, pak má  $f(x)$  v bodě  $x = c$  inflexní bod.

11. Co je gradient a Hessova matice funkce více proměnných.

- ChatGPT: Gradient funkce více proměnných je vektor složený z parciálních derivací této funkce podle každé proměnné. Kromě toho, Hessova matice je matice čtvercové symetrické matice druhých parciálních derivací. Formálněji, pokud máme funkci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  funkce s několika proměnnými, pak gradient  $G(f)$  je vektor s komponentami  $\{\partial f / \partial x_i\}$ , kde  $i=1, 2, \dots, n$ . Hessova matice  $H(f)$  je matice s prvky  $\{\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j\}$ , kde  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

12. Formulujte podmínky extrému pro funkce více proměnných.

- ChatGPT:
  - Body, kde je gradient (vektor parciálních derivací) funkce roven nule, mohou být extrémy.
  - Pokud Hesseho matice (matice druhých parciálních derivací) má v bodě vlastní čísla s opačnými znaménky, pak bod je extrém.
  - Pokud jsou všechny vlastní čísla Hesseho matice kladná (resp. záporná), pak je to lokální minimum (resp. maximum).
  - Pokud Hesseho matice v bodě nemá extrém, nemůže být tam extrém funkce.

13. Formulujte úlohu klasického vázaného extrému.

- ChatGPT: Úloha klasického vázaného extrému spočívá v hledání extrémů (maxim nebo minim) funkce  $f(x, y)$  za podmínky  $G(x, y) = 0$ , kde  $G(x, y)$  je omezující podmínka nebo podmínky. Konkrétně, úloha klasického vázaného extrému se formuluje takto: Najděte extrémy funkce  $f(x, y)$  za podmínky  $G(x, y) = 0$  a nalezněte hodnoty  $x$  a  $y$ , pro které jsou tyto extrémy dosaženy. Řešení této úlohy se provádí pomocí Lagrangeových multiplikátorů nebo jiných metod pro řešení soustav rovnic.

14. Formulujte úlohu neklasického vázaného extrému.

- ChatGPT: Úloha neklasického vázaného extrému se týká hledání optimálního řešení funkcionálu. V této úloze jsou kladeny podmínky na řešení, které nejsou lineární nebo nelineární rovnicí.

Místo toho jsou kladeny podmínky ve formě nerovností, například omezení na první derivace řešení. Hledání řešení funkcionálu se pak provádí pomocí neklasických metod, jako je například použití tzv. Variational Inequalities.

15. Napište Kuhn-Tuckerovu větu o sedlovém bodu pro neklasický vázaný extrém.

- ChatGPT: Kuhn-Tuckerova věta o sedlovém bodu pro neklasický vázaný extrém říká, že pokud je funkce, kterou chceme maximalizovat nebo minimalizovat, spojitá a má spojitě parciální derivace, a pokud jsou vedlejší podmínky též spojitě a mají spojitě gradienty a Hessiany na daném množině, pak existuje bod, který splňuje Kuhn-Tuckerovy podmínky prvního a druhého řádu a který je sedlovým bodem (nebo řešením) pro danou optimalizační úlohu. Kuhn-Tuckerovy podmínky řeší neklasické (nebo neslábne) varianty úloh s neomezenými množinami.

16. Napište Kuhn-Tuckerovy lokální podmínky pro neklasický vázaný extrém.

- ChatGPT: Pro neklasický vázaný extrém platí následující Kuhn-Tuckerovy lokální podmínky: Nechť  $f(x)$  je funkce, která má neklasický vázaný extrém v bodě  $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_n)$  za podmínky  $g(x) \leq 0$ , kde  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$  jsou vázané podmínky (nerovnice). Nechť také platí, že vypočtené hodnoty gradientu funkce  $f(x)$  a gradienty vypočtené z nerovnic  $g(x)$  jsou v bodě  $x_0$  nenulové a lineárně nezávislé. Pak existují nezáporná čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  taková, že platí:  $\nabla f(x_0) + \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x_0) = 0$  a  $\lambda_i g_i(x_0) = 0$  pro  $i=1, 2, \dots, m$ . To znamená, že  $\nabla f(x_0)$  a vektor normál ku všem aktivním nerovnicím jsou lineárně závislé a součin Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda_i$  a hodnot nerovnic  $g_i(x_0)$  je nulový pro všechna neaktivní omezení. Toto jsou Lokální Kuhn-Tuckerovy podmínky pro neklasický vázaný extrém.

17. Popište Newtonovu iterační metodu.

- ChatGPT: Newtonova iterační metoda je numerická metoda pro hledání kořenů (nul) reálné funkce. Metoda spočívá v opakovaném použití lineární aproximace funkce ve směru tečny k funkci v bodě, kde se aplikace aproximace provádí. Tento proces konverguje

rychleji než jednodušší metody jako je například metoda půlení intervalů. Iterace pokračují, dokud absolutní hodnota odhadovaného kořene (odhad pomocí aproximace) není menší než požadovaná přesnost. Algoritmus spočívá v rozepsání funkce do Taylorova rozvoje a aproximování nenulových kořenů polynomem prvního stupně (tečna v bodě) pro přibližnější nalézání kořenů funkcí. Při opakování tohoto postupu, kde každé další zavolání využije jako první odhad pro kořen hodnotu nalezenou v předchozím kroku, tak až do konvergence.

18. Formulujte základní úlohu lineárního programování

- $Ax \leq b, x \geq 0$

19. Proveďte klasifikaci úloh lineárního programování.

- soubor metod umožňující výběr optimální varianty při daném kritériu a podmínkách. Patří do odvětví optimalizace. Řeší problém nalezení min/max lin. fce  $n$  proměnných na množině popsané soustavou lineárních nerovností. Je to speciální úloha neklasického vázaného extrému
- $\max^t x, Ax \leq b; \min^t x, Ax \leq b; \max^t x, Ax \geq b; \min^t x, Ax \geq b$
- kombinovane jsou tam taky

20. Popište primární a duální úlohu lineárního programování.

- asi: V primarni hledame maximum, v dualni minimum
- Ke každé základní úloze lineárního programování lze definovat úlohu duální, kdy se vymění minimum a maximum a otočí se nerovnosti v omezení

21. Jak může vypadat množina přípustných řešení úlohy lineárního programování?

- uzavřená, konvexní a má konečný počet krajních bodů.
- jedna se o polyedr

22. V jakých bodech množiny přípustných řešení může být optimální řešení úlohy LP?

- Muze byt ve vseh pripustnych bodech reseni, pokud jsou funkcní hodnoty v techto bodech stejne a tvorí tak optimalní hodnotu

- Máli úloha LP optimální řešení, potom alespoň jedno optimální řešení je krajním bodem množiny přípustných řešení.
  - Pokud je množina přípustných řešení omezená, je množina všech optimálních řešení konvexním obalem množiny všech těch optimálních řešení, která jsou krajními body množiny přípustných řešení.
23. Popište simplexovou tabulku pro úlohu lineárního programování.
- nerovnice doplním prídavnými promennými na rovnice a dodám řádek ucelové fce jako poslední řádek simplexové tabulky (s opačnými znaménky)
24. Jak odečtete řešení duální úlohy lineárního programování v simplexové tabulce?
- Ze simplexové tabulky odečteme hodnoty z pomocných proměnných a funkční hodnotu
25. Jaké podmínky musí splňovat matematický model (resp. jak vypadá), abychom jej nazývali modelem LP?
- lineární fce, lineární omezení a podmínky nezápornosti
26. Uvažujme takovou úlohu LP, kde některé/á omezení není/nejsou vyčerpána. Nicméně, se trvá na plném dočerpání omezení. Co toto rozhodnutí může znamenat pro hodnotu účelové funkce a její řešení?
- Nebude maximální. Např. prodlame
27. Jak se formuluje úloha celočíselného lineárního programování a naznačte, jak se to projeví v řešení.
- lineární programování + podmínka řešení v celých číslech
  - Optimální řešení se nemusí nacházet na hranici polyedru omezení
  - Hodnota účelové funkce při celočíselném řešení je obvykle „horší“ než v neceločíselném
28. Je celočíselné zaokrouhlení cestou k řešení úlohy celočíselného programování?
- Ne
29. Formulujte úlohu síťové (grafické) formy dynamického programování a popište postup řešení.

- formou grafu a jednou od cíle k počátku a jednou, jedna cesta mne vylouci nemožné (slepe uličky), druhá cesta udělá souvislou křivku spojení
30. Popište způsob řešení úlohy dynamického programování v tabulce dynamického programování.
- asi prostě jen popsat ty tabulky
31. Které osobnosti znáte jako tvůrce moderní teorie her.
- Pocátky: Daniel Bernoulli, Gabriel Cramer, Daniel Bernoulli, Émile Borel
  - Modernější: **John von Neumann, Oskar Morgenstern, John Forbes Nash, Reinhard Selten a John C. Harsanyi**, T. C. Schellingovi a R.J. Aumannovi
32. Jaké znáte základní principy v teorii rozhodování? Vyjmenujte aspoň dva.
- Princip minimaxní (pesimistické) kritérium
  - Princip maximaxní (optimistické) kritérium
  - Hurwitzovo kritérium,
  - Minimalizace funkce lítosti,
  - Laplaceův princip,
  - Bernoulliho princip,
  - Cramérův princip postoje k riziku,
  - Rozhodování o preferencích, atd.
33. Co je funkce užitku v teorii rozhodování?
- poskytují jednoduché a jasné pravidlo pro rozřešení obtížných rozhodovacích situací
34. Co je maticová hra dvou hráčů?
- Dvoumaticovou hrou se rozumí hra dvou hráčů v normálním tvaru, kde hráč *H1* má konečnou množinu strategií  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  a hráč *H2* má konečnou množinu strategií  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ . Při volbě strategií  $(s_i, t_j)$  je výhra prvního hráče  $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$  a výhra druhého hráče  $b_{ij} = u_2(s_i, t_j)$ , funkce  $u_1, u_2$  se nazývají výplatní funkce.

35. Co je dolní cena hry a horní cena hry?
- Maximum z minim se nazývá dolní cena hry, minimum z maxim se nazývá horní cena hry
36. Jaký je rozdíl mezi čistou a smíšenou strategií?
- Cista (ryzi) – horní a dolní cesta jsou totožné
  - Matice nemá sedlový prvek – řešení bude pouze ve smíšených strategiích
37. Jaký je vztah čisté strategie a sedlového prvku matice.
- sedlový prvek matice obsahuje hodnotu optimálního řešení a také strategii, kterou mají hráči využít
  - ChatGPT: Vztah mezi čistou strategií a sedlovým prvkem v matici spočívá v tom, že sedlový prvek v matici reprezentuje čistou strategii pro oba hráče, která je nejlepší vzhledem k vybraným strategiím druhého hráče. To znamená, že se jedná o bod, kde hráči dosáhnou největší možné výhry, pokud oba používají tuto optimální strategii
  - Sedlový bod a čistá strategie existuje právě tehdy, jestliže horní a dolní cena hry jsou totožné
  - Vyjadřuje optimální řešení maticové hry
38. Popište, jak se nalezne sedlový prvek matice.
- asi: souřadnice dolní a horní cesty, pokud se svou hodnotou rovnají
  - číslo, které je největší ve sloupci a nejmenší v řádku
39. Popište geometrický způsob nalezení smíšené strategie pro matice  $2 \times 2$ .
- asi ? tr. 80
  - dáváme tam čísla matic a tam, kde se to protne, je extrémální hodnota pravděpodobnosti matic, které nemají sedlový prvek
40. Popište způsob převodu smíšené strategie na úlohu lineárního programování.



- asi: Pokud jsou nektěre prvky záporne, tak přičteme číslo ke všem prvkům matice, abychom se této zápornosti zbavili. Z řádku udeláme podmínky  $\leq 1$  (tedy např.  $3y_1 + y_2 + 2y_3$ ) (a také žádná proměnná není rovna 0). Poté vyřešíme jako normální LP.

41. Definujte separovatelnou funkci reálné funkce  $n$  reálných proměnných

- asi:  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$