

P/NP Složitost

Assoc. prof. Roman Senkerik



Obsah prezentace

- P-complexity (P-složitost): definice
- P/NP problémy
- NPH/NPC problémy
- Typické příklady NP (hard/complete) reálných problémů

P-složitost: definice

- Výpočetní problémy se složitostí patřící do třídy $\Theta(n^k)$ se nazývají P-složitě nebo alternativně „P-těžké“.
- P-složitě problémy jsou považovány za vyčíslitelné (rozhodnutelné), ačkoli pro větší hodnoty k mohou být náročné (nebo může být téměř nemožné dokončit výpočet).
- Problémy, které nejsou P-složitě, nejsou prakticky použitelné pro větší objemy dat.
- Třída P je jednou z nejzákladnějších tříd složitosti. Obsahuje všechny problémy řešitelné v polynomiálním čase pomocí deterministického Turingova stroje (tedy algoritmu) nebo RAM/RASP strojů (s přihlédnutím k Churchově teorému).

Deterministická vs. Nedeterministická složitost

- **Deterministické** časové a prostorové složitosti $T(f)$ a $S(f)$ představují horní odhady složitosti hledání řešení „bez nápovědy“ – tedy čas a prostor k nalezení neznámého řešení.
- **Nedeterministické** časové a prostorové složitosti $NT(f)$ a $NS(f)$ představují horní odhady složitosti ověření, zda je nalezené řešení skutečně řešením - tedy čas a prostor pro "test" správnosti již známého řešení.

NP-složitost: definice

- V reálném životě však existují problémy, které je těžké vyřešit „přesným“ neboli deterministickým algoritmem (strojem).
- NP (zkratka pro nedeterministicky polynomiální) je soubor problémů, které lze vyřešit (rozhodnout) v polynomiálně omezeném čase na nedeterministickém Turingově stroji (algoritmu) nebo RASP/RAM stroji.
- Ekvivalentně mluvíme o stroji (algoritmu), který „uhádne“ správnou cestu výpočtu v bodě rozhodování. Alternativně lze tyto problémy definovat jako množinu problémů, u kterých lze ověřit přesnost daného výsledku v polynomiálním čase (obecně však nelze nalézt přesné řešení v polynomiálním čase).
- Zobecnění (nadmnožina) P je NP. Každý problém P je zároveň problémem NP, takže platí $NP = P$. Otázka rovnosti $P = NP$ je matematickým problémem tisíciletí a stále není vyřešena.
- Vztah mezi třídami P a NP tedy není dosud zcela vyřešen, je možné, že jsou si tyto třídy rovny. Ačkoli důkazy zatím neexistují, většina odborníků se domnívá, že P je vlastní podmnožinou NP, tj. $P \neq NP$.

Třídy P-složitosti (kompletní přehled)

- P-složité problémy (P)
- NP-složité problémy (NP)
- NP-těžké (hard) problémy (NPH)
- NP-úplné (complete) problémy (NPC)

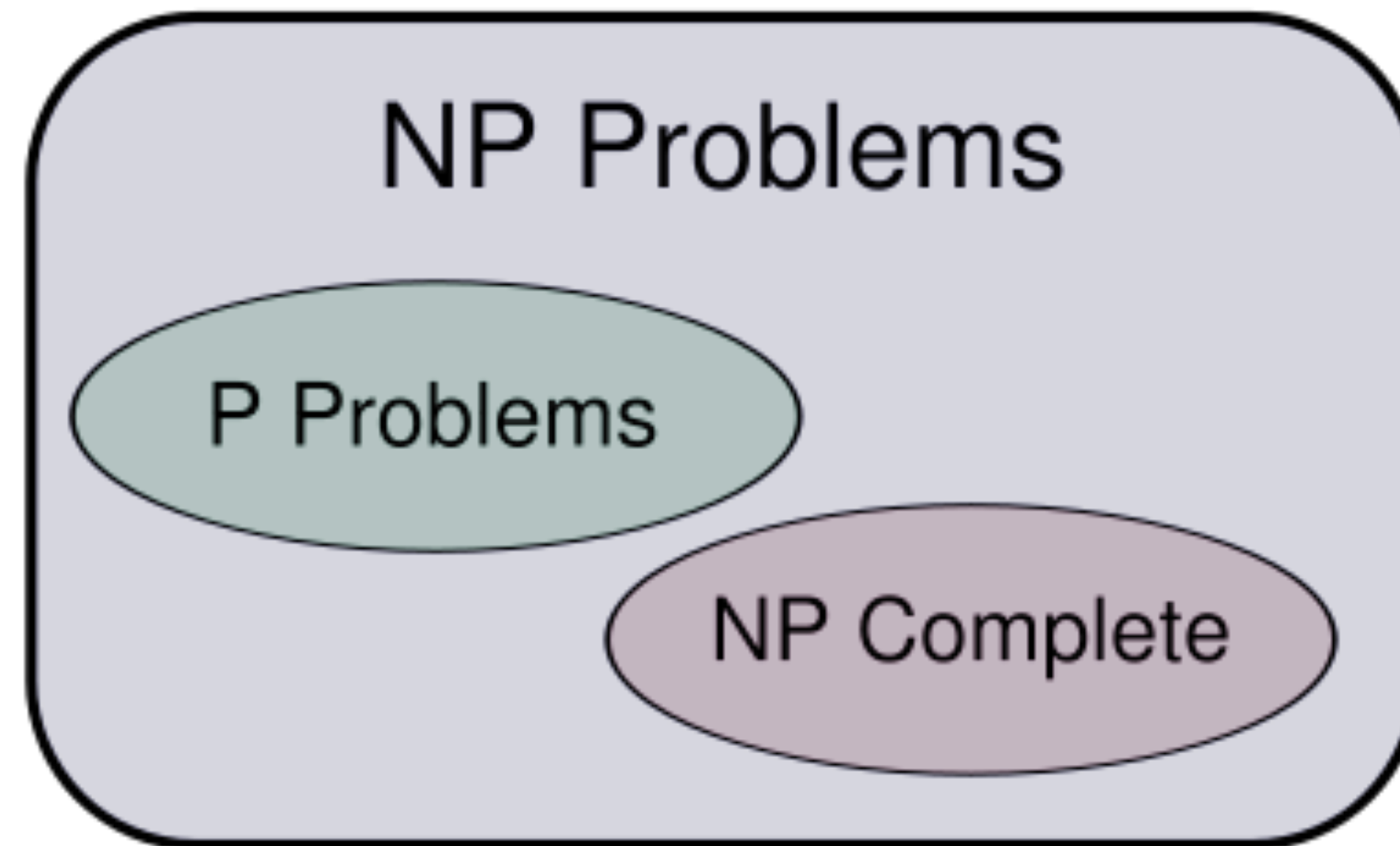
NPH a NPC problémy

- NP-těžký problém - jakýkoli problém z NP je na něj polynomiálně převoditelný.
- Problém A je polynomiálně převoditelný na problém B, pokud existuje transformace (v polynomiálním čase deterministickým algoritmem/stroji) definice (vstupu) problému A na definici (vstup) problému B tak, že:
 - odpověď na problém A je kladná \Leftrightarrow odpověď na problém B je kladná
 - Vstup (input) problému je převoditelný v polynomiálním čase

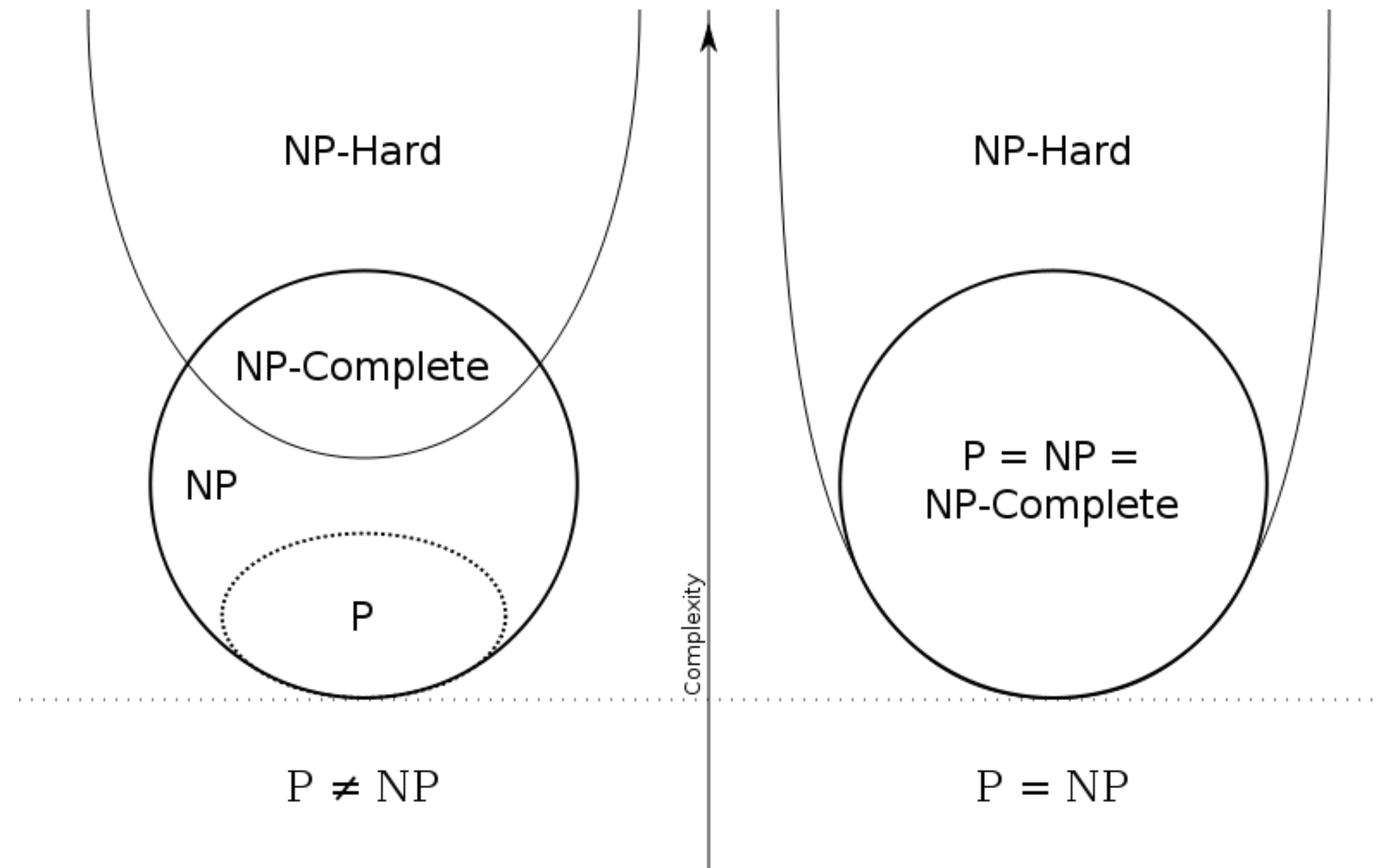
NPH a NPC problémy

- Velmi “zajímavou” třídou je NPC
- NP-úplné problémy - patří do NP a zároveň do NP-hard
- *A důsledek tohoto:*
- *Pokud bychom znali algoritmus pro řešení jakéhokoli problému NPC, vyřešili bychom všechny ostatní problémy NP a NPC současně.*

Grafická souvislost tříd I (není správná)



Grafická souvislost tříd II (to už je lepší)



Praktické příklady NPC problémů

- Problém obchodního cestujícího
- Problém batohu
- Problém prvočísel
- Problémy s plánováním úloh (Job Shop, Flow Shop, atd.)
- Problém řešení kvadratické diofantické rovnice
- Problém optimalizace programu
- Problém plánování víceprocesorového zpracování
- Problémy teorie grafů (Hamiltonův cyklus, Hamiltonovská cesta)

Děkuji za pozornost