

Řešené příklady AP3EJ

Část 1

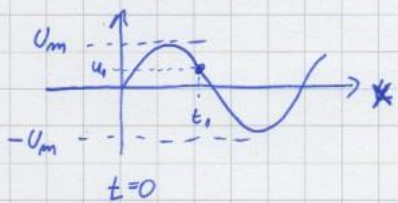
ZS 2023/24

1. a) napětí ve vzdálenosti 3 metry od zdroje, pokud na výstupu zdroje je napětí nulové,
 b) délku vlny na vedení,
 c) délku vlny na vedení v případě, že je celé ponořené do vody.

K výpočtu budete potřebovat následující konstanty: permitivita vakua, permeabilita vakua, relativní permitivita vody.

Řešení

a) Zanedbáme-li stojaté vlnění (např. způsobené odrazem energie od nedokonalého zakončení), pro vlnu postupující po vedení platí



$$U_1 = U_m \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

T je perioda: $T = \frac{1}{f}$

λ je vlnová délka: $\lambda = \frac{c}{f}$

c je rychlost šíření

Pro zadané hodnoty vypočteme:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

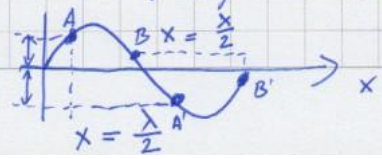
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^7} = 6 \text{ m} \quad \leftarrow \text{toto je zároveň řešením body b)}$$

Uvažujeme čas $t=0$, tj. okamžik, kdy napětí na výstupu zdroje prochází 0 (zde předpokládáme, že zdroj nemá posunutou fázi ... $U_2(t) = U_m \cdot \sin(2\pi f t)$). Pak můžeme psát:

$$U_1 = U_m \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{0}{2 \cdot 10^{-8}} - \frac{3}{6} \right)$$

$$U_1 = 1 \cdot \sin 2\pi \left(0 - \frac{3}{6} \right) = 1 \cdot \sin 2\pi \left(-\frac{1}{2} \right) = \sin \pi = \underline{\underline{0}}$$

Trefili jsme se tak dobře, že vzdálenost $x=3 \text{ m}$ odpovídá polovině délky vlny. Ve stejném časovém okamžiku je při $f=50 \text{ MHz}$ ve vzdálenosti $x=3 \text{ m}$ stejné napětí jako v bodě $x=0$, ale s opačným znaménkem!!



c) Ve skutečnosti bude rychlost šíření vlny c jímá, než $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, protože ji ovlivní přítomnost izolace vodičů. Tuto skutečnost pro jednoduchost zanedbáme a budeme uvažovat jen vliv vody. Relativní permitivita vody pro pomalé děje je $\epsilon_r = 81$, ~~pro světlo~~ je ale silně závislá na frekvenci a teplotě. Dle dostupných dat z měření v oblasti MHz frekvencí vychází $\epsilon_r \approx 45$, pro velmi vysoké frekvence (světlo) pak $\epsilon_r = 1,8$ ($n = 1,33$ pro rozhraní voda/vzduch). Protože jsem na tuto skutečnost nepozorný, akceptuji všechna řešení pro rozsah ϵ_r od 1,8 do 81

Pro c platí: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, tj. délka vlny ve vodě bude

$\sqrt{1,8} \times$ až $\sqrt{81} \times$ větší než ve vzduchu.

2. Popište princip funkce elektromagnetického dipólu a vypočítejte jeho optimální rozměry pro příjem FM vysílání Radia Zlín na frekvenci 91,7 MHz.

K výpočtu budete potřebovat následující konstanty: rychlost šíření vlny ve vakuu (vzduchu).

Princip funkce

Dobře popisuje např. J. Reichl v Encyklopedii fyziky:

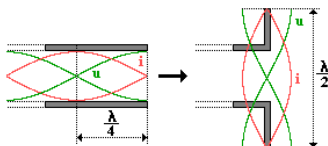
Elektromagnetické vlnění, které se šíří dvou vodičovým vedením je s vedením těsně spjata a jeho **energie** je soustředěna převážně mezi vodiči. Ve sdělovací technice je ale často potřeba vyzařovat elektromagnetické vlnění do většího prostoru.

Např. ve **vysílači**, ...

Tuto funkci plní ve vysílači anténa - z fyzikálního hlediska jde o **elektromagnetický dipól**.

Název dipól vychází z faktu, že popisované zařízení má dva konce.

K jeho fyzikální podstatě lze dospět následující úvahou: Rozevřeme konce dvou vodičového vedení o délce $\frac{\lambda}{4}$ do směru kolmého k vedení (viz obr. 261). V odchýlených částech vedení vznikají proudy, které mají v každém okamžiku souhlasný směr. **Magnetické pole** těchto proudů pak zasahuje do celého prostoru v okolí dipólu. Napětí na koncích vodičů dosahuje periodicky největší hodnoty a vzniká elektrické **pole**, které rovněž zasahuje do okolí. Délka tohoto jednoduchého elektromagnetického dipólu je polovina vlnové délky vyzařovaného elektromagnetického vlnění. Proto se mu říká **půlvlnný dipól**.



Obr. 261

K elektromagnetickému dipólu lze dospět i od **kondenzátoru**. V nabitém **deskovém kondenzátoru** je kumulovaná elektrická energie, mezi vzájemně rovnoběžnými (a navzájem opačně nabitými) deskami kondenzátoru je vytvořeno elektrické pole. **Síločáry** tohoto pole jsou omezeny pouze na prostor mezi deskami kondenzátoru - elektrické pole ani elektrická energie se nedostává mimo objem kondenzátoru. Začneme-li desky kondenzátoru rozvírat na jednom konci od sebe, bude se elektrické pole (a tedy i jeho energie) šířit do prostoru mimo kondenzátor. Postupným rozvíráním desek kondenzátoru lze dospět k „ideálnímu“ tvaru - k elektromagnetickému půlvlnnému dipólu.

V okolí dipólu vzniká pole, které má elektrickou a magnetickou složku, které jsou vzájemně spjaté a nelze je od sebe oddělit. Tvoří jediné **elektromagnetické pole**, které se znázorňuje pomocí siločar elektrické složky a **magnetických indukčních čar** magnetické složky. Siločáry elektrické složky leží v rovině dipólu a magnetické indukční čáry magnetické složky vytvářejí soustředné **kružnice** v rovině kolmé k dipólu. I u dipólu jsou vektory \vec{E} a \vec{B} navzájem kolmé.

Elektromagnetický dipól se používá jako **anténa** u vysílačů i **přijímačů** ve sdělovací technice:

1. anténa vysílače - vyzařuje do okolního prostoru energii v podobě elektromagnetického vlnění. V případě jednoduchého dipólu je největší část energie vyzařována ve směru kolmém k ose dipólu, zatímco ve směru osy dipólu energii nevyzařuje.
2. anténa přijímače - má opačnou funkci: zachytí část elektromagnetického vlnění a vznikne v ní nucené **elektromagnetické kmitání**. Anténní dipól přijímače je často doplněn tzv. pasivními prvky, které zlepšují funkci antény a umožňují příjem signálu z určitého směru (anténa pro příjem **televizního signálu**, ...)

Výpočet

Rádio Zlín vysílá na frekvenci 91,7 MHz. Při rychlosti šíření vlny $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vypočteme délku vlny:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{91,7 \cdot 10^6} \approx 3,27 \text{ m}$$

Základním typem dipólu je tzv. půlvlnný dipól (viz obr. výše). Tem pracuje s délkou $\lambda/2$, jeho délka tedy pro optimální příjem Rádía Zlín musí být:

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{3,27}{2} \approx \underline{\underline{1,64 \text{ m}}}$$

Tak velká anténa je na realizaci vlastně nepraktická, používají se jiné konstrukce, například zkrácený monopól, kdy je jedna polovina konstrukce dipólu nahrazena tzv. protiváhou, například vodivou plochou v přijímači. Pak do prostoru směřuje jen $\lambda/2$ dipólu, tzv. prutová anténa. V současné době je v módě říkat jí „pigtail“. Délka takové antény bude poloviční než u dipólu, tj. cca 0,8 m, viz obr. níže.

Při 2,4 GHz vychází pro Wi-Fi router délka pigtailu asi 3 cm (velmi zjednodušeně)



3. Přehledový radar letiště umístěný ve výšce 560 metrů nad mořem zachytil letadlo letící ve výšce 10 560 metrů. Čas mezi vysláním signálu a přijetím jeho odrazu od letadla byl 275 μ s. Dále určete, jaký je dosah radaru, pracuje-li s opakovací frekvencí 2 kHz.

K výpočtu budete potřebovat následující konstanty: rychlost šíření vlny ve vakuu (vzduchu).

OF THE WORLD

www.meopta.com

Výška $h = 10560 - 560 = 10000 \text{ m}$
 $t = 275 \mu\text{s}$

Při rychlosti $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ určí radarový paprsek vzdálenost:

$$l = c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot 275 \cdot 10^{-6} = 82500 \text{ m}$$

Radar paprsek vyšle a přijme jeho odraz, za čas t tedy signál letí tam a zpět. Proto platí:

$$s = \frac{l}{2} = \frac{82500}{2} = 41250 \text{ km}$$

Dráha paprsku s ale odpovídá přeponě pravoúhlého trojúhelníka, kde jedna odvěsna reprezentuje pozemní vzdálenost s' a druhá pak výšku nad rovinou radaru h .
 Vypočteme s' :

$$s' = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{41250^2 - 10000^2} = 40020 \text{ m}$$

Letadlo je od letiště vzdáleno přibližně 40 km.

Pracuje-li radar s opakovací frekvencí 2 kHz, maximální doba mezi pulzy je $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2000} = 500 \mu\text{s}$. Dosadíme-li za t hodnotu $500 \mu\text{s}$, dostaneme $l = c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 150000 \text{ m}$. Největší teoretický dosah je tedy $s = \frac{l}{2} = 75 \text{ km}$.



4. Olejem chlazený třífázový transformátor 3 x 22 kV / 3 x 230 V napájí malou vesnici. Vinutími sekundárních cívek tečou proudy 600 A, 850 A a 770 A. Účinnost transformátoru je 95 %. Určete, jak velký tepelný výkon je nutné uchlazit a jaká je teplota oleje na výstupu transformátoru, jestliže rychlost proudění chladičho oleje transformátorem je 0,5 l/s a teplota oleje na vstupu transformátoru (po ochlazení chladičem) je 40 °C.

Hustota transformátorového oleje je 960 kg.m⁻³ a jeho měrná tepelná kapacita je 2 100 J.kg⁻¹.K⁻¹.

Třífázový transformátor má 3 primární a 3 sekundární vinutí. Výkon, který odobíráme, můžeme při zanedbání fázového posuvu mezi napětím a proudem spočítat takto:

$$P_{\text{vst}} = U_s \cdot (I_{s_1} + I_{s_2} + I_{s_3}) = 230 \cdot (600 + 850 + 770) \quad \text{2220 A}$$

$$P_{\text{vst}} = 230 \cdot 2220 = 510\,600 \text{ W}$$

Pokud je účinnost 95%, znamená to, že P_{vst} tvoří 95% celkového příkonu:

Pozn.
°C a K mají
stejnou veličnost, takže
je počítat

$$P_{\text{vst}} = P_{\text{vst}} + P_{\text{ztráty}}$$

↑ ↑
95% 5%

Tedy:

$$P_{\text{ztráty}} = \frac{5}{95} \cdot P_{\text{vst}}$$

$$P_{\text{ztráty}} = 26\,870 \text{ W}$$

Toto je teplo, které musíme
vyžádit do okolí

Měrná Tepelná kapacita c vyjadřuje, jaké množství tepla přijme určitá množství látky při oteplení o 1 Kelvin. Pro transformátorový olej platí $c = 2\,100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Pro množství tepla, které ohřívá olej, pak platí:

$$W = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \Delta T \dots \text{oteplení} \quad \text{čas}$$

(kalorimetrická vz.)

Vztah mezi výkonem a tepelnou energií je: $W = P_{\text{ztráty}} \cdot t$

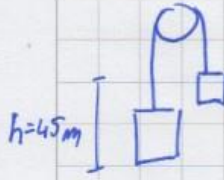
Rychlost proudění chladičho oleje je 0,5 l.s⁻¹. Při hustotě $\rho = 960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ každou sekundu chladičem ohruhem proteče $m = \rho \cdot V = 960 \cdot 0,0005 = 0,48 \text{ kg}$ oleje.

Uvažujeme časový úvazek $t = 1 \text{ s}$. Pak platí $W = P_{\text{ztráty}}$ a $m = 0,48 \text{ kg}$. Vypočteme z kalorimetrické rovnice:

$$\Delta T = \frac{W}{m \cdot c} = \frac{26\,870}{0,48 \cdot 2100} = 25,5^\circ \text{C}$$

Výsledná teplota je $T_{\text{out}} = T_{\text{in}} + \Delta T = 40 + 25,5 = 65,5^\circ \text{C}$

5. Výtah o hmotnosti 1,5 tuny má protizávaží o hmotnosti 650 kg. Během 1 minuty vyjede do výšky 45 metrů. Účinnost pohonu je 80 %. Určete:
- mechanický výkon motoru,
 - příkon výtahu,
 - množství energie změřené elektroměrem a dle aktuální ceny elektřiny na trhu náklady na jednu takovou jízdu.



Protizávaží kompenzuje hmotnost klece výtahu.
Pokud zatížená klec váží $m = 1500 \text{ kg}$ a protizávaží $m_k = 650 \text{ kg}$, u motoru výtahu zvedá jen hmotnost

$$m' = m - m_k = 1500 - 650 = 850 \text{ kg}$$

Tíhové zrychlení je přibližně $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, při zvedání hmotnosti m' musí motor výtahu působit silou:

$$F = m' \cdot g = 850 \cdot 9,81 = 8338,5 \text{ N}$$

Pro potenciální energii gravitačního pole platí $W = F \cdot h$.
Motor tedy musí vykonat práci:

$$W = F \cdot h = 8338,5 \cdot 45 = 375230 \text{ J}$$

a) Výkon je množství vykonané práce za jednotku času, tj.

$$P = \frac{W}{t}$$

V našem případě jede 1 minuta, tj. $t = 60 \text{ s}$:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{375230}{60} \approx \underline{\underline{6250 \text{ W}}}$$

b) Účinnost motoru znamená, že jen část energie ($\eta = 80\%$) kterou motor spotřebuje, se přemění na mechanický pohyb:

$$P = \eta \cdot P' \rightarrow P' = \frac{P}{\eta} = \frac{6250}{0,8} \approx \underline{\underline{7800 \text{ W}}}$$

\uparrow \uparrow
 výkon příkon

c) Množství spotřebované energie udáváme v kWh. Příkon motoru je 7,8 kW a doba jízdy $\frac{1}{60}$ hodiny.

$$W' = 7,8 \cdot \frac{1}{60} = \underline{\underline{0,13 \text{ kWh}}}$$

Při ceně 6 Kč/kWh stojí jedna jízda $6 \cdot 0,13 = \underline{\underline{0,78 \text{ Kč}}}$

6. Rychlovarná konvice ohřeje litr vody z 15 na 95 °C za 2 minuty s účinností 70 % (zejména ztráty sáláním tepla do okolí). Určete:
- spotřebu energie na uvaření 0,5 litrů čaje,
 - při současných cenách elektřiny náklady na uvaření čaje,
 - vypočítejte, kolik půllitrových čajů lze uvařit pomocí stejného množství energie, které se spotřebuje na celodenní (12 hodin) paření hry Counterstrike na herní stanici s trvalým příkonem 500 W.

Měrná tepelná kapacita vody je $4\,200\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Průběh teploty vody (ohřev a chlazení) aproximujte lineární funkcí.

$t = 120\text{ s}$
 $\Delta T = 95 - 15 = 80^\circ\text{C} (= 80\text{ K})$
 $\eta = 0,7$

$c = 4200\text{ J}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}^{-1}$
 $m = 0,5\text{ kg}$ (uvažujeme, že 1 l vody váží cca 1 kg)

a) $W = m \cdot c \cdot \Delta T = 0,5 \cdot 4200 \cdot 80 = 168\,000\text{ J}$
 Toto je množství energie, které jsme dostali do vody. Z celkové spotřebované energie je to jen ale 70%, zbytek umkl do okolí
 $W_{\text{celk}} = \frac{W}{\eta} = \frac{168\,000}{0,7} = \underline{\underline{240\,000\text{ J}}}$

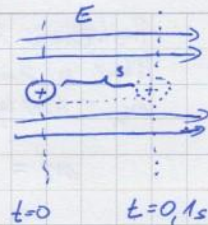
b) 1 kWh je 1000 Wattů odebíraných po dobu 3600 sekund
 ($W = P \cdot t$), tj. 1 kWh = 3600 000 J. Cenu elektřiny uvažujeme
 6 Kč/kWh, tj. 6 Kč za 3,6 MJ:
 $\text{Náklady} = 240\,000 \cdot \frac{6}{3\,600\,000} = \underline{\underline{0,4\text{ Kč}}}$

c) 12 hodin = 43 200 sekund
 $W' = P \cdot t = 500 \cdot 43\,200 = \underline{\underline{21,6\text{ MJ}}}$
 $\text{Počet čajů} = \frac{21,6}{0,24} = \underline{\underline{90}}$
 (v MJ)

7. Uprostřed vakua se nachází malá částice, která má hmotnost 1 mg a náboj 0,5 nC. Do času $t = 0$ je tato částice v klidu. V okamžiku $t = 0$ na ni začne působit homogenní elektrické pole s intenzitou 30 kV/m. S jakým zrychlením se tato částice bude pohybovat? Jakou dráhu urazí za 0,1 sekundy? Jaká bude velikost okamžité rychlosti částice v čase 0,1 sekundy a jak velká intenzita magnetického pole bude nutná k tomu, aby v čase 0,1 sekundy bylo kompenzováno tíhové zrychlení, které na částici působí?

$m = 10^{-6} \text{ kg}$
 $q = 5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$
 $E = 30 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
 $t = 0,1 \text{ s}$

$Q = ?$
 $q = ?$
 $H = ?$



Práce Intenzita el. pole se projevuje silou působící na nabitou částici:

$$F_E = E \cdot q$$

Z druhého Newtonova zákona $F = m \cdot a$ můžeme vyjádřit a :

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_E}{m} = \frac{E \cdot q}{m} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-10}}{10^{-6}} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu, který začal v čase $t = 0$ platí:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 0,1^2 = 0,075 \text{ m}$$

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb, který začal v čase $t = 0$, rovněž platí:

$$v = a \cdot t = 15 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

okamžitá rychlost

Pro síly magnetického pole na pohybující se nabitou částici platí (v nejlepším případě):

$$F_m = q \cdot v \cdot B \rightarrow B = \frac{F_m}{q \cdot v}$$

My požadujeme, aby magnetická síla F_m byla rovná tíhové $F_g = m \cdot g$:

$$F_m = F_g \rightarrow B = \frac{m \cdot g}{q \cdot v} = \frac{10^{-6} \cdot 9,81}{5 \cdot 10^{-10} \cdot 1,5} = 13000 \text{ T}$$

Platí $B = \mu_0 H \rightarrow H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{13000}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 10^4 \text{ A/m}$

parametrizace veličin

\leftarrow velikost indukce
 \leftarrow odpovídající intenzita pole

Poznámka: V reálných podmínkách je nemožné dosáhnout tak vysoké magnetické indukce; urychlovače částic v renomovaných výzkumných ústavech dosahují hodnot okolo 13 T. Částice tak, jak je zadáno v příkladu, je příliš těžká. Pro představu, elektron má hmotnost cca $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ a velikost náboje $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

8. Karel nosí košili s příměsí umělého vlákna, která způsobí, že se na povrchu jeho těla akumuluje náboj o velikosti $1 \mu\text{C}$. Jak velké elektrické napětí vzniká mezi ním a okolím? Pokud je odpor jeho kůže 300Ω , jak dlouho trvá elektrický výboj, když se Karlova ruka přiblíží k uzemněnému předmětu?

Kapacita lidského těla je 150 pF .

Kapacita je schopnost akumulovat elektrický náboj vzhledem k velikosti přivedeného el. napětí:

$$C = \frac{Q}{U} \rightarrow U = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{6700 \text{ V}}}$$

Tato úloha je jednoduchá, ale důsledky tohoto jevu jsou velmi závažné. Odhaduje se, že více než 60 % poruch elektroniky na bázi polovodičů selhává v důsledku poškození způsobeného elektrostatickým výbojem. Otěrem oblečení o tělo člověka, které není uzemněno a nemá možnost odvádět náboj ze svého povrchu pryč, může docházet k situaci, kdy se na povrchu lidského těla vytvoří náboj, který vůči okolí vytváří elektrické napětí až v desítkách kV. Elektrická pevnost vzduchu je asi 3 kV/mm , což pocítí každý, kdo na sobě naakumuloval adekvátní náboj a pak se chtěl dotknout předmětu jinak nabitého a mezi jeho prstem a předmětem přeskočila jiskra. Stejný problém je třeba řešit, když se obsluha dotýká nějakého přístroje; zkušební napětí při zkouškách odolnosti se pohybuje mezi 4 a 16 kV.

Na obrázku je zkušební generátor elektrostatického výboje:



9. Jaderná elektrárna dodává do třífázové sítě výkon 3×300 MW. Jak dlouhé mohou být vodiče dálkové přenosové soustavy o napětí 400 kV, aby ztráta na vedení nepřesáhla 0,25 % vyrobené energie, uvažujeme-li že jsou použity vodiče o průřezu 150 mm^2 ? Měrný elektrický odpor měděného vodiče je $0,0178 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$.

$P = 3 \times 300 = 900 \text{ MW}$, zároveň se používáme 3 vodiče paralelně, takže uvažujeme $P' = 300 \text{ MW}$ na vodič.

$P = U \cdot I$, takže je-li $U = 400 \text{ kV}$, vypočteme $I = \frac{P}{U} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^5} = 750 \text{ A}$

Maximální ztráta smí být $P' = 0,0025 P = 0,0025 \cdot 3 \cdot 10^8 = 750 \text{ kW}$

Z Ohmova zákona: $P = R I^2 \rightarrow R = \frac{I^2}{P}$

Maximální odpor vodiče smí být $R = \frac{I^2}{P} = \frac{750^2}{750000} = 0,75 \Omega$

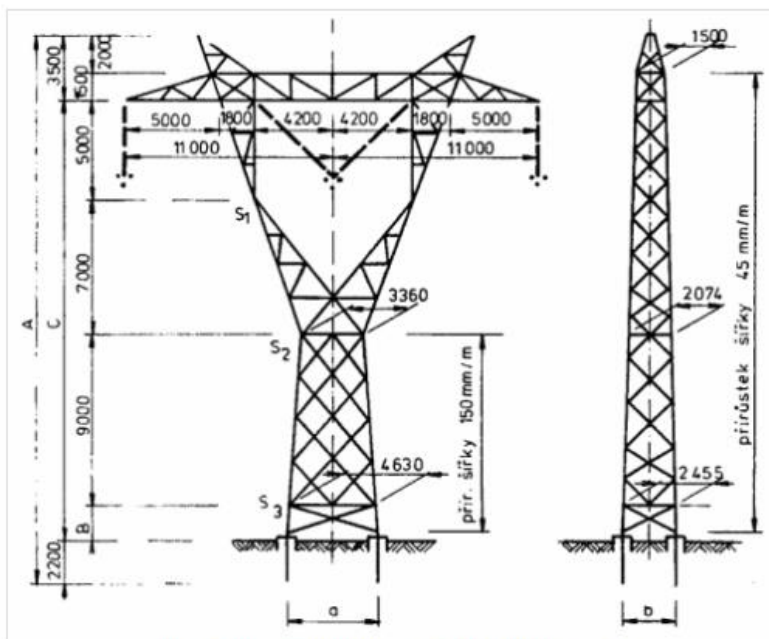
Pro odpor vodiče platí $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$

měrný el. odpor $\rho = 0,0178 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ $S = 150 \text{ mm}^2$

Můžeme dosadit v mm^2 :

$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \rightarrow l = \frac{R \cdot S}{\rho} = \frac{0,75 \cdot 150}{0,0178} = 6320 \text{ m}$

Vodiče mohou být dlouhé cca 6,3 km.



Obr. 15 - Vylehčený stožár vedení 1 400 kV ("kočka")

(ing. Procházka, www.elektro-tzb-info.cz)

10. Hradlo jednoho tranzistoru v procesoru má kapacitu 0,033 pF a jeho prahové napětí je 0,8 V. Napájecí napětí procesoru je 1,15 V. Na jak vysoké pracovní frekvenci smí procesor pracovat, pokud v jednom taktu spíná průměrně 500 000 tranzistorů a výkonová ztráta procesoru nesmí překročit 20 W?

Polem řízené tranzistor (FET) jsou dobře implementovatelné na čipu a tudíž velmi vhodné pro vytváření obvodových struktur mikroprocesorů. Základními prvky jsou vodivý kanál a elektroda zvaná gate. Velikost elektrického pole mezi gate a kanálem ovlivňuje vodivost kanálu. Stínoucí stránkou této technologie je fakt, že mezi gate a kanálem je elektrická kapacita, na které se hromadí náboj. Chceme-li tranzistor otevřít, musíme sem náboj buď přivést nebo jej naopak odvést – podle konstrukce tranzistoru. Tak či tak, při otevírání nebo zavírání tranzistoru teče do gate proud, protože platí $I = \frac{dQ}{dt}$.

$$C = 3,3 \cdot 10^{-14} \text{ F}$$

$U_p = 0,8 \text{ V}$ minimálně o tolik se napětí na gate musí změnit, aby se bezpečně změnil stav tranzistoru; odpovídá to náboji

$$C = \frac{Q}{U} \rightarrow Q = C \cdot U = 3,3 \cdot 10^{-14} \cdot 0,8 = \underline{\underline{2,64 \cdot 10^{-14} \text{ C}}}$$

Tranzistorů je $n = 500\,000$, v jednom taktu potřebujeme na změnu jejího stavu náboj Q_{celk} :

$$Q_{\text{celk}} = n \cdot Q = 500\,000 \cdot 2,64 \cdot 10^{-14} = \underline{\underline{1,32 \cdot 10^{-8} \text{ C}}}$$

Abychom pokynli ztrátám vlivem odporu materiálu, napájecí napětí procesoru je vyšší – $U_H = 1,15 \text{ V}$. Maximální proud, který smí do procesoru tect, je daný maximálním příkonem $P = 20 \text{ W}$:

$$P = U_H \cdot I \rightarrow I = \frac{P}{U_H} = \frac{20}{1,15} = \underline{\underline{17,4 \text{ A}}}$$

Dopustíme se obrovského zjednodušení, když budeme uvažovat, že všechnou energii se spotřebuje jen na nabíjení hradel, situace je mnohem složitější, ale budiž.

$$I = \frac{Q}{t} \rightarrow t = \frac{Q}{I} = \frac{1,32 \cdot 10^{-8}}{17,4} = \underline{\underline{7,59 \cdot 10^{-10} \text{ s}}}$$

Nejkratší doba taktu

$$\text{Pro takovou frekvenci platí: } f = \frac{1}{t} = \frac{1}{7,59 \cdot 10^{-10}} = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^9 \text{ Hz}}}$$

Nejvyšší možná pracovní frekvence, kdy lze procesor ještě ochladit, je 1,3 GHz, ve skutečnosti to bude o dost méně (rezerva, jen část proudu jde do hradel...)

11. Bezdrátová nabíječka mobilního telefonu, využívající standard Qi, dodává výkon 15 W. Akumulátor mobilního telefonu má jmenovité napětí 3,7 V, kapacitu 3 200 mAh a nabíjí se s účinností 75 %. Pracovní frekvence nabíječky je 145 kHz. Určete, za jak dlouho se akumulátor nabije z 10 na 90 % své jmenovité kapacity (uvažujeme aproximaci lineární funkcí – přímkou). Vypočítejte, kolik závitů musí mít přijímací cívka, aby se v ní indukovalo špičkové napětí alespoň 4 V, je-li amplituda magnetického indukčního toku nabíjecí cívky 325 nWb a činitel vazby mezi vysílací a přijímací cívkou je 0,6. Určete, jak velký proud teče vinutím nabíjecí cívky, jestliže počet jejích závitů je 20, a její efektivní plocha je 25 cm². Uvažujeme čtvercovou cívku 5 x 5 cm a harmonické průběhy proudu a napětí, které pro případ derivace magnetického indukčního toku podle času aproximujeme přímkou mezi kladným a záporným maximem harmonické funkce.

Standard Qi: v současné době podporuje výkon až 15W a pracuje na frekvenci 100-200 kHz.
V našem případě má akumulátor kapacitu $C = 3,2 \text{ Ah}$ a nabíjí se z 10 na 90%, tj. $k = 0,8$ s účinností $\eta = 0,75$. Celkové množství energie vyjádříme ve Wh:

$$W = U \cdot \frac{kC}{\eta} = 3,7 \cdot \frac{0,8 \cdot 3,2}{0,75} = 12,63 \text{ Wh}$$

Při výkonu nabíječky $P = 15 \text{ W}$ vypočteme čas:

$$W = P \cdot t \rightarrow t = \frac{W}{P} = \frac{12,63}{15} = 0,842 \text{ h} (= 50,5 \text{ minut})$$

Amplituda magnetického indukčního toku $\Phi_m = 3,25 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$ a činitel vazby $k = 0,6$, tj. 60% toku generovaného buďící cívkou protéká cívkou přijímací:



Přijímací cívkou teče tok $\Phi_{mp} = k \Phi_m$

$$\Phi_{mp} = 0,6 \cdot 3,25 \cdot 10^{-7} = 1,95 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

Při pracovní frekvenci $f = 145 \text{ kHz}$ ($f = 1,45 \cdot 10^5 \text{ Hz}$) a trojúhelníkovém průběhu pole (= aproximace přímkou) vypadá časový průběh generovaného pole takto:



Perioda T :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,45 \cdot 10^5}$$

$$T = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Při pohledu na časový průběh $\Phi(t)$ vidíme, že po dobu $\frac{T}{2}$ pole klesá, po dobu $\frac{T}{2}$ tok pole roste.

TOTO PLATÍ PRO
CÍVKA S 1 ZÁVITEM!

Nyní použijeme Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$u_i(t) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

z grafu odčteme, že $d\Phi = \Phi_{np} - (-\Phi_{np})$,
tj. $d\Phi = 2\Phi_{np}$, a $dt = \frac{T}{2}$.

Pro napětí indukované v cívce platí:

$$u_i(t) = - \frac{2\Phi_{np}}{\frac{T}{2}} = -4 \frac{\Phi_{np}}{T} = -4 \cdot \frac{195 \cdot 10^{-7}}{6,9 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{-0,11V}}$$

Situace je tedy taková:



Magnetický indukční
tok přijímací cívky



Napětí indukované
v 1 závitě cívky

(znaménko mínus říká, že když tok
roste, napětí je záporné a opačně)

Mz ale potřebujeme nabíjet akumulátor, který má napětí
3,7V → napětí na výstupu nabíječky musí být větší než 3,7V.
Proto požadujeme $U_s = 4V$.

Pro celkové napětí platí, že velikost indukovaného napětí je přímo
úměrná počtu závitů cívky n , tj. uvažujeme $U_{icelk} = U_s$

$$U_{icelk}(t) = u_i(t) \cdot n \rightarrow n = \frac{|U_{icelk}(t)|}{|u_i(t)|} = \frac{4}{0,11} = \underline{\underline{37}}$$

Přijímací cívka musí mít alespoň 37 závitů (zadokladujeme nahoru
na celé číslo)

Zbývá nám upočítat proud budící cívky. Bez znalosti všech jejích rozměrů neznáme její indukčnost, ale z Biot-Savartova zákona můžeme odvodit velikost magnetické indukce v jejím středu. To je velmi složité (viz odraz), proto se omezíme na specifický případ čtvercové cívky, pro kterou už to mohl spočítat za nás:



Cívka má všechny strany stejné délky $a = 0,05 \text{ m}$ (zadáno $5 \times 5 \text{ cm}$)

Velikost magnetické indukce v bodě B je dána příspěvky všech elementů vodiče o délce a (20 závitů = celkem 80 elementů)

Pro 1 závit platí:
$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

Pro N závitů platí:
$$B = N \cdot \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \quad (*)$$

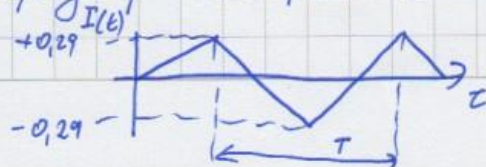
Ny ale zatím neznáme B , jen víme, že maximální magnetický indukční tok je $\Phi_m = 3,25 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$ a plocha je $S = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$:

$$\Phi = B \cdot S \rightarrow B_{\max} = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{3,25 \cdot 10^{-7}}{25 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{1,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}}}$$

Nyní upravíme vzorec (*) do tvaru:

$$I = \frac{B \pi a}{N \cdot 2\sqrt{2} \mu_0} = \frac{1,3 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot 0,05}{20 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{0,29 \text{ A}}}$$

Cívkou nabíjející protéká proud max. $0,29 \text{ A}$:

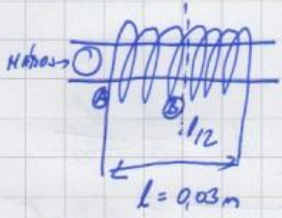


Poznámka: Podrobné odvození velikosti magnetické indukce uprostřed budící cívky a komentář k aplikaci Biot-Savartova zákona jsou uvedeny například na stránkách serveru fyziků na ČVUT FEL:

https://www.aldebaran.cz/elmg/kurz_09_mgpo.pdf

12. Při konstrukci Gaussovy pušky máme k dispozici kondenzátory o celkové kapacitě $1000 \mu\text{F}$. Na jak vysoké napětí je musíme nabít, abychom v nich naakumulovali energii o velikosti 426 J (odpovídá typické energii pistolového náboje Luger 9x19)? Jak velké zrychlení musí mít náboj, který je urychlován cívkou o délce 3 cm tak, aby urychlení proběhlo v první polovině dráhy cívky (princip funkce Gaussovy pušky), přičemž rychlost náboje má být 400 m/s . Jak velká indukčnost cívky je potřeba a kolik závitů musí cívka mít, je-li její vnitřní průměr 9 mm ? Nakonec z energie a rychlosti vypočítejte optimální hmotnost náboje.

$C = 1000 \mu\text{F} = 10^{-3} \text{ F}$ Pro energii akumulovanou v kondenzátoru platí:
 $W = 426 \text{ J}$ $W = \frac{1}{2} C U^2$
 $W = \frac{1}{2} C U^2 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 426}{10^{-3}}} = \underline{\underline{925 \text{ V}}}$

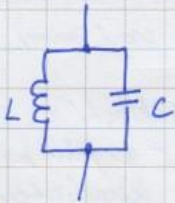


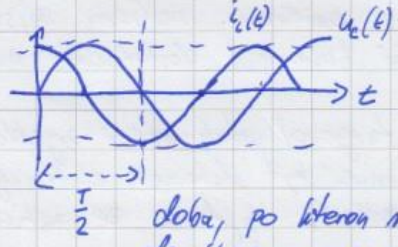
- v bodě A má náboj rychlost $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- v bodě B má náboj rychlost $v = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí platí:
 $s = \frac{1}{2} a t^2$
- pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí platí:
 $v = a \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{a}$
- z bodu a do bodu b se náboj dostane za čas t

$t = \left(\frac{v}{a}\right)$
 $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{v^2}{a^2}$
 $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{a} \rightarrow a = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{s}$

• v našem případě platí $s = \frac{1}{2} l$:
 $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 v^2}{l} = \frac{v^2}{l} = \frac{400^2}{0.03} = \underline{\underline{5,3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}}$

Podmínkou správné funkce je, že v čase t , kdy náboj dosáhne body $\frac{l}{2}$, magnetické pole cívky zaniká. V tom momentu se nepotřebovaná energie přejde zpět do kondenzátoru. Vycházíme z kmitání LC obvodu:





doba, po kterou magnetické pole dosáhne maxima a pak zase zanikne odpovídá $\frac{1}{2}$ periody kmitů LC obvodu

Thomsonův vztah
 $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$

$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{CL}$

Známe kapacitu kondenzátoru, můžeme dopočítat induktivnost cívky:

1. Náboj dosáhne bodu B ($q = \frac{Q}{2}$) v čase $t = \frac{V}{a}$.
2. Tento čas odpovídá $\frac{1}{2}$ periody kmitů LC obvodu $T = 2\pi\sqrt{LC}$

$$t = \frac{1}{2}T$$

$$\frac{V}{a} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}$$

$$\left(\frac{V}{a}\right)^2 = \pi^2 \cdot L \cdot C \rightarrow L = \frac{1}{C} \cdot \frac{V^2}{\pi^2 a^2}$$

$$L = \frac{1}{10^{-3}} \cdot \frac{400^2}{\pi^2 \cdot (5,3 \cdot 10^4)^2} \doteq \underline{\underline{5,8 \cdot 10^{-7} \text{ H}}}$$

Pro dlouhou válečkovou cívku platí: $L = \frac{\mu_0 N^2}{l} \cdot S$

Průřez cívky S je dán velikostí náboje. Pro náboj Lugen 9x19 musíme uvažovat průměr 10 mm (viz výkres). Pro plochu řezu pak platí: $S = \pi d^2$, kde $d = 0,01 \text{ m}$

Tedy: $L = \frac{\mu_0 N^2}{l} \cdot \pi d^2 \rightarrow N = \frac{1}{d} \cdot \sqrt{\frac{L \cdot l}{\mu_0 \pi}}$

$$N = \frac{1}{10^{-2}} \cdot \sqrt{\frac{5,8 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi}} \doteq \underline{\underline{7}}$$

Po zohlednění směrem nahoru zjistíme, že cívka musí mít 7 závitů (vímání dostatečně odolným vodičem).

Aby nám dobře fungoval vztah mezi zrychlením, rychlostí a energií, náboj musí být dokonale elektricky vodivý a jeho hmotnost musí být optimální. Vyděme ze zákona pro kinetickou energii:

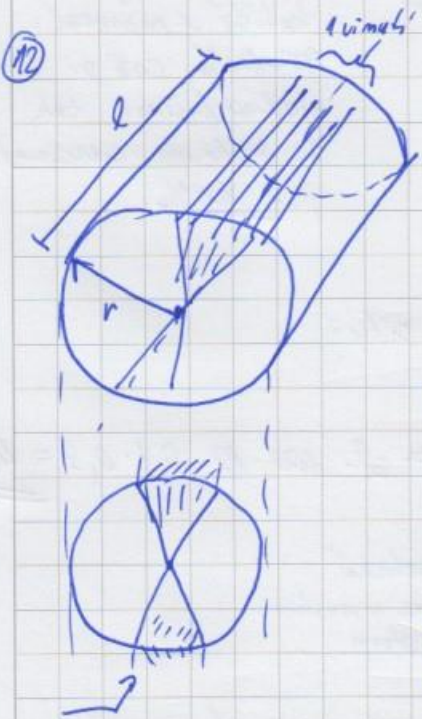
$$W_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow m = \frac{2W_k}{v^2} = \frac{2 \cdot 426}{400^2} = \underline{\underline{5,325 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}}$$

Náboj musí mít hmotnost asi 5,3g.

Poznámka: Podrobnosti lze zjistit např. z popisu této laboratorní úlohy z Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT: <http://fyzsem.fjfi.cvut.cz/2016-2017/Zim400a16/proc/GaussP.pdf>.

13. Stejnoseměrný elektrický motor má rotor o průměru 5 cm a délce 10 cm. Vinutí rotoru je rozděleno na 5 sekcí, z nichž každá má 100 závitů. Magnetické pole statoru je generováno permanentními magnety a jeho velikost je 0,2 T. Komutátor připojí příslušnou sekci vinutí vždy, když je úhel záběru menší nebo roven -36° a odpojí ji vždy, když je úhel záběru větší nebo roven 36° . Střední velikost proudu vinutím je 10 A, motor je napájen z trakční baterie o napětí 48 V. Určete střední velikost krouticího momentu (mění se s úhlem natočení vinutí), výkon (=příkon) motoru a vypočítejte pracovní otáčky motoru při zatížení vypočítaným momentem síly. Všechny ztráty zanedbáváme, počítáme s účinností přeměny energie 100 %.

12



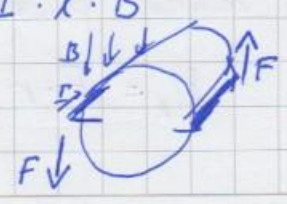
$l = 0,1 \text{ m}$ $N = 100$ $B = 0,2 \text{ T}$
 $r = 0,025 \text{ m}$ $I = 10 \text{ A}$

Rozdělíme-li kruhový tvar rotoru (360°) na 5 sekcí, z nichž každá má dvě části (směr tam a směr zpět), na každou sekci připadne 36° . V ideálnímu případě vinutí zabírá v úhlu -18° od ideální polohy a je vypnuto v úhlu $+18^\circ$ za ideální polohou a jeho funkci přerežme následující vinutí.

Pro maximální sílu (ideální postavení rotoru vůči magnetickému poli) platí:

$$F = 2 \cdot N \cdot I \cdot l \cdot B$$

↑
vinutí zabírá na dvou stranách



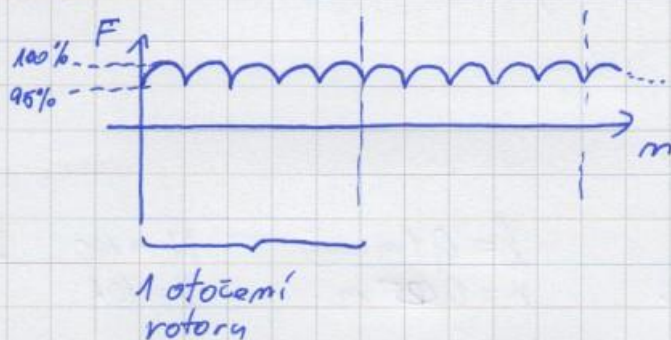
V krajních polohách je síla záběru nižší:

$$F = 2 \cdot N \cdot I \cdot l \cdot B \cdot \cos \varphi$$

↙ odchylka od
ideálního postavení

$$\cos 18^\circ = 0,95$$

Síla otáčející rotorem v průběhu 1 otáčky vypadá takto



Vidíme, že síla podél dráhy otáčení kolísá v rozmezí 95-100%, což si zjednodušíme tak, že budeme uvažovat jen 100%.

Počítáme tedy z Ampérova zákona sílu:

$$F = 2 \cdot N \cdot I \cdot l \cdot B = 2 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = \underline{\underline{40\text{N}}}$$

↗ ↖ ↗ ↖ ↗ ↖
2 ramena síly počet závitů proud délka vodiče (1 závit) magnetická indukce v prostoru motoru

Síla působící na vinutí je 40N, ale musíme uvažovat ne jak velkém rameni působí - spočítáme kroutící moment motoru:

$$M_k = F \cdot r = 40 \cdot 0,025 = \underline{\underline{1\text{Nm}}}$$

Při napětí $U=48\text{V}$ a proudu $I=10\text{A}$ můžeme z elektrické energie získat výkon nejvýše:

$$P = U \cdot I = 48 \cdot 10 = 480\text{ W}$$

Vztah mezi výkonem a rychlostí otáčení hřídele motoru je definován pomocí kroutícího momentu:

$$\omega = \frac{P}{M_k}$$

úhlová rychlost \Rightarrow s rostoucím výkonem při stejné síle roste rychlost otáčení, tj. práce se koná rychleji.)

$$\omega = 2\pi f \rightarrow 2\pi f = \frac{P}{M_k} \rightarrow f = \frac{P}{2\pi M_k}$$

$$f = \frac{480}{2\pi} \approx \underline{\underline{76,4\text{ Hz}}}$$

Motor vykoná 76,4 otáček (cyklů) za sekundu, tj. otáčí se rychlostí asi 4600 otáček za minutu.

14. Vysílač rozhlasové stanice FMrádia pracuje s výkonem 5 kW, přičemž jeho vyzářovací diagram je tvarován tak, že 70 % energie je vyzářeno v oblasti $\pm 22,5^\circ$ od horizontální roviny protínající osu vysílače (viz obrázek). Vypočítejte, kolik výkonu lze teoreticky získat pro technologii energy harvesting ve vzdálenosti 10 km od tohoto vysílače na ploše 1 m^2 .
15. Mezi body A a B je nataženo dvou vodičové telefonní vedení. Vedení je zhotoveno z měděného vodiče průměru 3,2 mm. Na vedení došlo k poruše zkratem mezi vodiči. Měřením pomocí ohmmetru v bodě A bylo zjištěno, že zkratované vedení má odpor $51\ \Omega$. V jaké vzdálenosti od bodu A je porucha?
16. V souvislosti s rozšířením mobilních telefonů pojednejte o problematice specifické míry absorpce (SAR) - co to je, proč se to měří, jakými způsoby se to měří, jak si mobilní telefony stojí a jakým způsobem lze jejich vyzářování omezit (vč. algoritmů řízení radiové části).
17. Pojednejte o datových sítích pro technologii IoT (SigFox apod.). Zaměřte se na datové protokoly, pracovní frekvence, intenzitu signálu, rychlosti datových toků.

18. Pojednejte o součástce zvané varikap a vypočtete následující příklad: Ladicí obvod FM přijímače pracuje s určitou rezervou v rozsahu od 86 do 110 MHz. V jakém rozmezí se musí měnit kapacita varikapu (poměr) umístěného na čipu ladicího obvodu?
19. Dvě pozemní stanice, umístěné na rovníku na povrchu Země ($R = 6\,700\text{ km}$) jsou od sebe vzdáleny 3 000 km. Komunikují přes družici umístěnou na geostacionární dráze ($h = 35\,786\text{ km}$ nad rovníkem). Určete časovou latenci spojení.
20. Šířka komunikačního kanálu mobilního telefonu standardu GSM je 30 kHz, frekvence nosné vlny je 960 MHz. Jakou rychlostí se smí mobilní telefon pohybovat kolmo k pozemní stanici, aby nedošlo k „vypadnutí“ z kanálu? (hint: Dopplerův jev)
21. Ve stanici se právě rozjíždí rychlík tažený elektrickou lokomotivou. Napájecí napětí v troleji je 3 kV (starší, stejnosměrná napájecí soustava používaná v okolí Prahy). Lokomotiva řady 350 (Krysa) odebírá z troleje proud 300 A. Celková hmotnost vlaku je 200 tun. Účinnost pohonu lokomotivy je 88 %.
- Vypočtete:
- a) Jaký mechanický výkon působí na zrychlení vlaku?
 - b) Za jak dlouho vlak dosáhne rychlosti 120 km/h?
 - c) Kolik elektrické energie bylo na dosažení této rychlosti spotřebováno?
 - d) Jak velký elektrický náboj musel protéct vinutím elektromotorů? Kolik elektronů prošlo vedením?
22. Dvě cívky mají vůči sobě pevnou polohu. Jestliže 1. cívkou proud neteče a proud 2. cívkou roste rychlostí 15,0 A/s, na 1. cívce vzniká elektromagnetické napětí 7,0 mV. Určete:
- a) Jaká je vzájemná indukčnost cívek?
 - b) Když poteče 2. cívkou nulový proud a 1. cívkou proud 1 A, jaký je celkový magnetický tok 2. cívkou?