Konečné Automaty (Finite State Machines) II

DFA vs. NFA, Meale, Moore machines

Assoc. prof. Roman Senkerik

Obsah Prezentace

- Vztah mezi deterministickým a nedeterministickým konečným automatem
- Mealyho automat
- Moorův automat

1. NKA vs. KA

NKA vs. KA

- Pro daný nedeterministický konečný automat je možné sestavit deterministický konečný automat řešící stejný problém následujícím jednoduchým trikem:

- Místo množiny stavů Q bereme jako množinu stavů $\exp(Q) = 2^Q$, tedy všechny podmnožiny Q.

- Skutečnost, že nedeterministický konečný automat může být v jednom ze stavů q1,…, qn, je nahrazena skutečností, že může být ve stavu {q1, ..., qn}.

- Při konstrukci přechodové funkce f* takové, že $Q \in 2^Q$ a:
  $f^*(Q) = \{y \in 2^Q: \exists x \in Q: f(x) = y\}$, pak můžeme snadno sestrojit celý deterministický konečný automat, který bude řešit stejnou úlohu .

NKA vs. KA

- Význam nedeterministických konečných automatů je v tom, že někdy je konstrukce nedeterministického automatu jednodušší než konstrukce deterministického automatu.

- Pokud víme, že množina jazyků rozpoznatelných nedeterministickými a deterministickými konečnými automaty je stejná, stačí sestrojit nedeterministický konečný automat rozpoznávající daný jazyk a víme, že daný jazyk je regulární.

- Převod nedeterministického konečného automatu na deterministický jen ilustruje, že vše, co lze nějak nedeterministicky vyřešit, lze řešit i deterministickou metodou.

- **Nezohledňují se však časové a kapacitní nároky takového výpočtu**.

NKA vs. KA a složitost

- Pokud má nedeterministický konečný automat n stavů, má deterministický konečný automat 2^n stavů (vytvořených dříve zmíněnou konstrukcí).

- Velikost automatu, a tím i doba výpočtu, tedy poroste exponenciálně.

- Množina stavů však může být často redukována. Takovou redukci konečných stavů, tj. nalezení konečného automatu s menším počtem stavů, který rozpoznává stejný jazyk, lze dokonce provést algoritmicky, ale pouze pokud takový jednodušší konečný automat existuje (a tedy algoritmus). Není tomu však vždy tak.

- Někdy se stává, že úkol, který by bylo možné vyřešit bez problémů v rozumném čase nedeterministickými metodami, může být deterministickými metodami skutečně neřešitelný, protože čas potřebný k jeho vyřešení by často přesáhl existenci vesmíru.

- Více v přednášce o výpočetní složitosti (P-complexity).

2. Mealův Automat (Meale automaton)

Mealyho automat

- Pro praktickou práci je často výhodné uvažovat o konečném automatu jako o zařízení, které nejen mění své vnitřní stavy, ale také „tiskne/dá“ výstup.

- Stroj je pak modelem stroje na zpracování dat.

- Při své práci stroj realizuje proces přeměny vstupů na výstupy.

- Se skutečným počítačem nekomunikujeme tak, že v nějakém okamžiku čteme obsah jeho vnitřních registrů, ale díváme se na výstupní zařízení, co počítač konkrétně vypočítal.

Mealyho automat

- K popisu konečného automatu lze přidat další prvek, a to výstupní abecedu.
- V každém diskrétním časovém kroku může (ale nemusí) konečný automat umístit jeden ze symbolů výstupní abecedy na výstup automatu.

- Výstupní abecedou může být jakákoli neprázdná konečná množina **O**.
- Výstupní abeceda vždy obsahuje prázdný symbol ε, představující situaci, kdy automat nedává žádný výstup.

Mealyho automat

- **Přechodová funkce f pak určí nejen nový stav, ale i symbol výstupní abecedy.**

- **Jde tedy o zobrazení (mapování) z množiny Q × I do množiny Q x O.**

- Konečný automat s takto upravenou definicí se nazývá konečný automat s výstupem nebo také Mealyho automat, někdy také Mealyho stroj.

- ***Výstup Mealyho automatu tedy závisí na zpracovávaném vstupním symbolu a na stavu, ve kterém se automat nachází.***

Mealyho automat

- U dříve zmíněného příkladu kávovaru by asi bylo elegantnější řešit popis výdeje kávy pomocí výstupní abecedy.

- Výstupní abeceda “Mealyho” kávovaru by obsahovala pouze dva symboly: ε (automat nereaguje) a „káva“ (automat dávkuje kávu).

- Přechodová funkce přiřadí vnitřním stavům q_0-q_4 a vstupu *K* nový stav q_0 a výstupní symbol „káva“. Ve všech ostatních případech přiřadí přechodová funkce stejný výstupní stav jako v předchozím popisu (tabulka přechodových funkcí), spolu s prázdným výstupním symbolem ε.

Mealyho automat – Formální Definice

Formální definice:

Formálně lze Mealyho konečný automat popsat jako uspořádanou šestici: (*Q, I, O, f, q_0, P*), kde:

- *Q* je jakákoli konečná množina vnitřních stavů,
- *I* je libovolná neprázdná konečná množina, kterou budeme nazývat vstupní abeceda,
- *O* je libovolná neprázdná konečná množina, kterou budeme nazývat výstupní abeceda,
- *f je zobrazení (mapování) z kartézského součinu Q x I do množiny Q x O. Některým uspořádaným dvojicím (vnitřní stav, vstupní znak) je tedy přiřazen nový vnitřní stav automatu a výstupní znak. Zobrazení f se nazývá přechodová funkce konečného automatu.*
- q_0 je jedním z významných prvků množiny Q, ve které automat začíná svou práci. Nazýváme jej počáteční stav.
- *P* je jakákoli podmnožina množiny stavů Q, nazývaná množina konečných stavů, někdy též množina přijímacích stavů automatu.

3. Moorův automat (Moore's machine)

Moorův automat

- Dalším typem konečného automatu s výstupem je tzv. Moorův automat, někdy též Moorův stroj.

- **U Moorova automatu závisí výstupní symbol pouze na aktuálním vnitřním stavu stroje.**
- **Nezáleží na tom, jaký prvek vstupního slova se čte.**

- Pro formální popis Moorova automatu je tedy nutné **samostatně definovat** přechodovou funkci, kterou bude zobrazení z **Q** x **I** do **Q**, a dále výstupní funkci, kterou je zobrazení z **Q** do **O**.

Moorův automat - příklad

- Příklad: stroj realizující součet dvou přirozených čísel zapsaných ve dvojkové soustavě, tzv. binární sčítačka.

- Vstupem pro tento automat budou dvě stejně dlouhé sekvence nul a jedniček představující zápis dvou čísel ve dvojkové soustavě. (V případě potřeby lze zadání kratšího čísla doplnit zleva požadovaným počtem nul.)

- Jednotlivé bity obou čísel budou do automatu zadávány počínaje nejnižším bitem (v pořadí jednotek), tedy zprava doleva. Vzhledem k tomu, že konečný automat má vždy pouze jeden vstup, nahradíme dva potřebné paralelní vstupy pouze jedním vstupem, který bude vždy tvořen uspořádanými dvojicemi bitů z obou vstupů.

Moorův automat - příklad

- Vstupní abeceda tedy bude obsahovat všechny uspořádané dvojice nul a jedniček, tedy čtyři prvky: $I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

- Na výstupu automatu se postupně objeví binární zápis součtu dvou zadaných čísel.

- Automat bude mít celkem čtyři stavy q_0, q_1, q_{p0} a q_{p1}, odpovídající součtu dvou posledních přijatých bitů a tomu, zda se má bit přenést do vyššího řádu.

- Ve stavech q_0 a q_{p0} automat zobrazuje nulu, ve stavech q_1 a q_{p1} pak zobrazuje jedničku.

Moorův automat - příklad

- Definice binární sčítačky:

$Q = \{ q_0, q_1, q_{p0}, q_{p1}\}$,

$I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$,

$O = \{0, 1\}$,

Mapovací funkce *o* z Q do množiny *O:* $o(q_0) = o(q_{p0}) = 0$, $o(q_1) = 0(q_{p1}) = 1$,

Přechodová funkce *f* je dána tabulkou:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
q_0	q_0	q_1	q_1	q_{p0}
q_{p0}	q_1	q_{p0}	q_{p0}	q_{p1}
q_1	q_0	q_1	q_1	q_{p0}
q_{p1}	q_1	q_{p0}	q_{p0}	q_{p1}

Shrnutí

Mealyho a Moorův automat jsou výpočetně stejně silné, tedy ekvivalentní

Moorův automat lze nalézt pro každý Mealyho automat a naopak.

Počet stavů se může během převodu měnit (typicky se zvyšuje při převodu na Moorův), ale řešení vždy existuje.

Děkuji za pozornost