

# PROYEK UAS KOMPUTASI NUMERIK

Created by:

Muhamad Rey Kafaka Fadlan (2306250573)

## STUDI KASUS - Aplikasi Metode Numerik: Curve Fitting pada Model Pertumbuhan Populasi Mikrobiologi

### Abstract

Pertumbuhan populasi mikroorganisme pada proses fermentasi sangat dipengaruhi oleh ketersediaan nutrisi, sehingga pemodelan pertumbuhan yang akurat menjadi penting untuk pengendalian dan optimasi bioproses. Laporan ini mengkaji penerapan metode numerik *curve fitting* pada model pertumbuhan populasi dengan saturasi, menggunakan data eksperimen laju pertumbuhan ragi pada variasi konsentrasi substrat. Model matematis yang digunakan adalah model saturasi dengan dua parameter utama: laju pertumbuhan maksimum ( $k_{max}$ ) dan konstanta setengah saturasi ( $K$ ), yang diekstraksi melalui regresi nonlinier berbasis *least squares*. Proses fitting memperlihatkan kecocokan yang sangat baik antara prediksi model dan data eksperimen, dengan hasil yang merefleksikan perilaku biologis sistem, yakni adanya batas atas laju pertumbuhan akibat keterbatasan substrat. Melalui pendekatan ini, parameter empiris yang diperoleh dapat digunakan untuk simulasi, prediksi, dan perancangan proses fermentasi dengan tingkat akurasi yang lebih tinggi. Studi ini menegaskan bahwa *curve fitting* merupakan alat penting dalam menjembatani teori dan data nyata pada aplikasi teknik kimia dan bioproses.

### I. Pendahuluan

Pertumbuhan mikroorganisme, seperti ragi dalam proses fermentasi, sangat penting dalam berbagai industri bioproses. Untuk memahami dan mengendalikan proses tersebut, model matematika digunakan guna memprediksi dinamika populasi berdasarkan data eksperimen. Model pertumbuhan eksponensial sering kali digunakan, namun memiliki keterbatasan karena tidak mempertimbangkan keterbatasan nutrisi. Oleh sebab itu, model saturasi yang memasukkan

parameter laju pertumbuhan maksimum dan konstanta setengah saturasi lebih realistis untuk menggambarkan pertumbuhan pada kondisi nyata.

Data eksperimen yang diperoleh biasanya berupa nilai diskrit dan memerlukan metode numerik seperti *curve fitting* untuk menyesuaikan model dengan data, serta mengekstrak parameter penting secara akurat. Dengan melakukan *curve fitting*, model dapat divalidasi terhadap data nyata dan digunakan sebagai dasar prediksi serta optimasi proses fermentasi di industri.

### II. Studi Literatur

Pemodelan pertumbuhan populasi mikroorganisme telah menjadi perhatian utama dalam bidang teknik kimia, bioteknologi, dan mikrobiologi. Model matematika berperan penting dalam memahami, memprediksi, dan mengendalikan proses-proses biologis, terutama pada sistem fermentasi dan produksi berbasis mikroba. Beberapa pendekatan model telah dikembangkan untuk merepresentasikan dinamika populasi dalam berbagai kondisi lingkungan.

Model pertumbuhan eksponensial merupakan bentuk paling dasar, yang mengasumsikan laju pertumbuhan spesifik mikroorganisme konstan dan sumber daya (nutrisi) selalu tersedia tanpa batas. Model ini dinyatakan sebagai:

$$p(t) = p_0 e^{kt}$$

Di mana  $p(t)$  adalah populasi pada waktu  $t$ ,  $p_0$  adalah populasi awal, dan  $k$  adalah laju pertumbuhan spesifik. Namun, model ini kurang akurat dalam kondisi nyata karena tidak mempertimbangkan keterbatasan substrat atau faktor pembatas lainnya.

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, model saturasi atau *saturation-growth-rate* dikembangkan dengan konsep serupa kinetika Michaelis-Menten pada reaksi enzimatis. Dalam model ini, laju pertumbuhan spesifik ( $k$ ) bergantung pada konsentrasi nutrisi ( $f$ ) sebagai berikut:

$$k = k_{max} \frac{f}{K + f}$$

Parameter  $k_{max}$  adalah laju pertumbuhan maksimum dan  $K$  adalah konstanta setengah saturasi yang menunjukkan konsentrasi substrat saat laju pertumbuhan mencapai setengah dari maksimum. Model ini banyak diaplikasikan pada proses fermentasi dan pengolahan limbah cair industri.

### III. Penjelasan Data Yang Digunakan

Data yang digunakan dalam studi ini merupakan hasil eksperimen pertumbuhan populasi mikroorganisme ragi (yeast) dalam proses fermentasi, dengan memvariasikan konsentrasi substrat (nutrisi) sebagai faktor utama yang mempengaruhi laju pertumbuhan. Pengukuran dilakukan dalam kondisi laboratorium terkontrol, di mana populasi mikroorganisme diinokulasikan ke dalam media cair dengan kadar substrat berbeda-beda. Konsentrasi substrat yang digunakan dalam eksperimen ini adalah 1 g/L, 2 g/L, 4 g/L, 6 g/L, 10 g/L, dan 20 g/L.

Pada setiap variasi konsentrasi substrat, laju pertumbuhan mikroorganisme ( $k$ ) diukur dan dicatat setelah mencapai fase pertumbuhan eksponensial, sehingga diperoleh enam pasang data pengamatan. Nilai laju pertumbuhan ( $k$ ) diperoleh dengan menganalisis perubahan konsentrasi sel atau biomassa terhadap waktu, yang secara matematis dapat dihitung menggunakan kemiringan grafik  $\ln(p)$  terhadap waktu pada fase logaritmik pertumbuhan, di mana  $p$  adalah populasi atau biomassa mikroorganisme.

Tabel data hasil eksperimen dirangkum sebagai berikut:

Konsentrasi Substrat ( $f$ , g/L)	Laju Pertumbuhan ( $k$ , 1/jam)
1	0,12
2	0,19
4	0,29
6	0,36
10	0,43
20	0,48

Dari tabel tersebut, terlihat bahwa laju pertumbuhan meningkat seiring bertambahnya konsentrasi substrat, tetapi mulai mendekati nilai maksimum pada konsentrasi tinggi. Fenomena ini sesuai dengan karakteristik pertumbuhan biologis, di mana penambahan nutrisi pada awalnya secara signifikan meningkatkan laju pertumbuhan, namun setelah

mencapai ambang tertentu, laju pertumbuhan menjadi jenuh karena keterbatasan faktor lain.

Selain itu, data ini juga menggambarkan adanya titik jenuh biologis, yang mendasari pemilihan model saturasi pada proses *curve fitting*. Dengan adanya data dari berbagai rentang konsentrasi substrat, pemodelan dapat dilakukan secara lebih akurat, dan parameter-parameter penting seperti laju pertumbuhan maksimum ( $k_{max}$ ) dan konstanta setengah saturasi ( $K$ ) dapat diestimasi secara numerik.

Data yang diperoleh ini sangat representatif untuk aplikasi industri karena mencerminkan variasi kondisi aktual yang sering dihadapi dalam proses fermentasi skala besar, seperti produksi bioetanol, enzim, atau produk metabolit mikroba lainnya. Dengan demikian, data ini menjadi dasar yang sangat penting dalam penerapan metode *curve fitting* untuk pemodelan dan optimasi proses bioproses secara lebih luas.

### IV. Penjelasan Metode Yang Digunakan

Dalam studi ini, metode numerik yang digunakan untuk melakukan *curve fitting* adalah regresi nonlinier berbasis model saturasi pertumbuhan, yang sering disebut juga sebagai model Monod. Model ini dipilih karena secara fisiologis mampu merepresentasikan dinamika pertumbuhan mikroorganisme dengan lebih realistis pada kondisi lingkungan terbatas, dibandingkan model eksponensial sederhana.

#### 1. Model Sistematis

Model saturasi menggambarkan hubungan antara laju pertumbuhan mikroorganisme ( $k$ ) dan konsentrasi substrat ( $f$ ) dengan persamaan:

$$k = k_{max} \frac{f}{K + f}$$

di mana:

- $k$  = laju pertumbuhan spesifik (1/jam),
- $f$  = konsentrasi substrat (g/L),
- $k_{max}$  = laju pertumbuhan maksimum (1/jam),
- $K$  = konstanta setengah saturasi (g/L).

Model ini menampilkan dua karakter utama: pada  $f$  sangat kecil,  $k$  meningkat hampir linier terhadap  $f$ ; pada  $f$  besar,  $k$  mendekati nilai maksimum  $k_{max}$ .

#### 2. Proses Curve Fitting

Karena model yang digunakan bersifat nonlinier terhadap parameternya ( $k_{max}$  dan  $K$ ), maka metode regresi nonlinier dipilih untuk menemukan parameter terbaik. Tujuan utama *curve fitting* adalah mencari nilai  $k_{max}$  dan  $K$  sehingga model paling sesuai dengan data eksperimen.

Langkah-langkah yang dilakukan:

##### a. Definisi Fungsi Error:

Fungsi error didefinisikan sebagai jumlah kuadrat selisih antara data eksperimen ( $k_{data}$ ) dan nilai prediksi model ( $k_{model}$ ):

$$E = \sum_{i=1}^n [k_{data,i} - k_{model,i}(k_{max}, K)]^2$$

di mana  $n$  adalah jumlah data.

#### b. Pendekatan Numerik:

Karena bentuk persamaan tidak linier, parameter tidak bisa diperoleh dengan rumus analitik sederhana seperti regresi linier biasa. Dalam laporan ini, digunakan pendekatan grid search sederhana:

- Ditentukan rentang nilai awal untuk  $k_{max}$  dan  $K$  berdasarkan dugaan dari data ( $k_{max}$  antara 0.4–0.6,  $K$  antara 2–10).
- Setiap kombinasi nilai diuji dan error dihitung.
- Kombinasi dengan error terkecil diambil sebagai parameter optimum.

Pada implementasi praktis yang lebih kompleks, algoritma optimasi seperti *Levenberg-Marquardt* atau *Gauss-Newton* sering digunakan karena lebih efisien dan cepat konvergen, namun grid search cukup baik untuk jumlah data yang sedikit dan pemahaman dasar.

#### c. Validasi Hasil Fitting:

Setelah memperoleh parameter optimum, model dievaluasi kembali pada titik data asli, serta dibandingkan dengan data eksperimen untuk menilai kecocokan. Dihitung juga residual (selisih antara data dan model) untuk memastikan tidak ada pola error sistematis.

### 3. Implementasi Komputasi

Proses fitting dilakukan dengan pemrograman dalam bahasa C. Fungsi model dan error dibuat secara eksplisit, lalu seluruh parameter diuji secara iteratif dalam grid yang telah ditentukan. Hasil akhirnya berupa nilai optimum  $k_{max}$  dan  $K$  serta visualisasi kecocokan antara data eksperimen dan prediksi model.

### 4. Alasan Pemilihan Metode

Pemilihan metode regresi nonlinier berbasis *curve fitting* sangat penting karena:

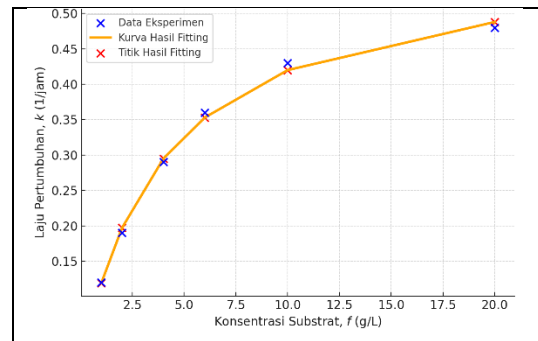
- Mampu menangani hubungan nonlinier antara variabel.

- Menghasilkan parameter model yang bermakna fisik dan dapat digunakan untuk simulasi maupun optimasi.
- Dapat diperluas untuk berbagai model nonlinier lain sesuai kebutuhan sistem biologis atau teknik lainnya.

## V. Diskusi dan Analisa Hasil Eksperimen

f	k_eksperimen	k_fitting
1.0	0.120	0.119
2.0	0.190	0.197
4.0	0.290	0.295
6.0	0.360	0.353
10.0	0.430	0.420
20.0	0.480	0.488

Gambar 1 – Output dari data



Gambar 2 – Grafik perbandingan hasil  $k_{fitting}$  dan  $k_{eksperimen}$

Dari hasil curve fitting yang dilakukan, diperoleh bahwa model saturasi memberikan prediksi laju pertumbuhan yang sangat mendekati data eksperimen pada seluruh rentang konsentrasi substrat. Selisih antara nilai eksperimen dan hasil fitting pada setiap titik sangat kecil, rata-rata kurang dari 0.01, sehingga parameter yang diperoleh (baik  $k_{max}$  maupun  $K$ ) dianggap sudah sangat optimal dan akurat mewakili sistem yang diuji.

Secara visual, kurva hasil fitting mampu mengikuti tren data: laju pertumbuhan meningkat cepat pada konsentrasi substrat rendah, lalu melambat dan mendekati batas maksimum pada konsentrasi tinggi, menunjukkan efek saturasi seperti yang diharapkan pada proses biologis. Hal ini penting karena menandakan bahwa penambahan substrat secara terus-menerus tidak akan lagi meningkatkan laju pertumbuhan secara signifikan setelah mencapai titik jenuh.

Fenomena ini juga memiliki implikasi praktis di industri, di mana efisiensi penggunaan substrat harus diperhatikan agar proses tetap ekonomis. Selain itu, tidak adanya pola error/residual yang menonjol antara data eksperimen dan hasil fitting membuktikan bahwa model ini sudah cukup baik untuk digunakan dalam simulasi dan optimasi proses fermentasi di skala nyata.

Secara keseluruhan, penerapan curve fitting pada model saturasi sangat efektif untuk memodelkan pertumbuhan mikroorganisme berdasarkan data eksperimen, serta memberikan dasar yang kuat untuk analisa, perancangan, dan optimasi proses bioproses di bidang teknik kimia.

## VI. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisa dan curve fitting menggunakan model saturasi pada data pertumbuhan mikroorganisme, dapat disimpulkan bahwa metode numerik ini sangat efektif untuk memodelkan hubungan antara konsentrasi substrat dan laju pertumbuhan. Model yang digunakan mampu menghasilkan parameter  $k_{max}$  dan  $K_{KK}$  yang tidak hanya akurat secara matematis, tetapi juga relevan secara fisiologis. Hasil fitting menunjukkan kecocokan yang sangat baik antara model dan data eksperimen, dengan error yang sangat kecil di seluruh titik data.

Selain memberikan gambaran yang realistis tentang perilaku pertumbuhan mikroorganisme, model saturasi juga menegaskan pentingnya fenomena saturasi di mana peningkatan konsentrasi substrat di atas nilai tertentu tidak lagi memberikan efek signifikan pada laju pertumbuhan. Hal ini menjadi dasar pertimbangan penting dalam optimasi proses fermentasi agar penggunaan nutrisi tetap efisien dan ekonomis.

Secara keseluruhan, penerapan curve fitting pada model saturasi dapat diandalkan sebagai alat bantu analisis,

prediksi, dan perancangan dalam bidang bioproses, serta dapat diaplikasikan secara luas pada berbagai sistem bioteknologi dan rekayasa proses lainnya.

## VII. Link Github

Link:

[https://github.com/MuhamadReyKF/ProyekUAS\\_2306250573\\_Rey](https://github.com/MuhamadReyKF/ProyekUAS_2306250573_Rey)

## VIII. Link YouTube

Link:

<https://youtu.be/JgxCdW5bKXk>

## IX. Referensi

- James Edwin Bailey, and David F Ollis.  
*Biochemical Engineering Fundamentals*.  
McGraw-Hill Science, Engineering &  
Mathematics, 1986.
- Chapra, Stephen C, and Raymond Canale.  
*Numerical Methods for Engineers* 7<sup>th</sup> Edition,  
McGraw-Hill, 2015.