PENGANTAR

TEORI PROBABILITAS

Dr. Adi Setiawan, M.Sc

Tisara GRAFIKA

Penerbit Tisara Grafika
SALATIGA
2015

Katalog Dalam Terbitan

519.2
ADI Adi Setiawan
p Pengantar teori probablitas /Adi Setiawan. -- Salatiga: Tisara Grafika, 2015.
v, 215 hlm. ; 25 cm.

ISBN 978-602-9493-23-8

1. Probabilities I. Title.

Cetakan pertama	:	Juni 2015
ISBN	:	978-602-9493-23-8
Hak Cipta	:	Pada Penulis
Desain Sampul	:	Tisara Grafika
Tata letak	:	Harrie Siswanto
Percetakan	:	Tisara Grafika
Penerbit	:	Tisara Grafika

Diterbitkan oleh:

Tisara GRAFIKA

JL. DIPONEGORO 98 D - SALATIGA 50714 - JAWA TENGAH
Telp.: 0298-321798 | Fax : 0298-321798
Mobile: 081 228 598 985 | 0819 0488 340| 0298-6138702
email: harisis_05@yahoo.com, harriesiswanto@gmail.com

KATA PENGANTAR

Teori Probabilitas sangatlah penting dalam memberikan dasar pada Statistika dan Statistika Matematika. Di samping itu, teori probabilitas juga memberikan dasar-dasar dalam pembelajaran tentang pemodelan probabilistik dan studi simulasi probabilistik. Untuk itu, dalam buku ini dibahas tentang dasar-dasar teori probabilitas. Di samping itu, soal-soal beserta pembahasannya sangatlah penting dalam memberikan *feeling* bagi mahasiswa untuk dapat memahami teori dengan baik. Soal-soal yang diberikan akan dapat memperkaya pemahaman sehingga nantinya dapat digunakan dalam mempelajari lebih lanjut tentang Statistika Matematika dan memberikan pondasi yang kuat ketika belajar tentang Statistika Dasar maupun Statistika Lanjut.

Materi kuliah Teori Probabilitas dalam buku ini diberikan judul "Pengantar Teori Probabilitas" yang menggabungkan pustaka acuan utama yaitu pustaka [14] dengan pustaka lain yang digunakan sebagai acuan tambahan maupun untuk melengkapi latihan-latihan. Di samping itu, pengalaman mengajar mata kuliah Teori Probabilitas sangat mempengaruhi gaya penulisan buku ini.

Penulis berharap bahwa buku ini nantinya dapat berguna untuk meningkatkan mutu dalam proses pembelajaran mata kuliah Teori Probabilitas di perguruan tinggi.

Salatiga, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR		iii
DAFTAR ISI		v
I	RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN	1
II	PROBABILITAS	20
III	DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT	46
IV	DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU	68
V	HARGA HARAPAN	90
VI	DISTRIBUSI PROBABILITAS BIVARIAT	118
VII	FUNGSI VARIABEL RANDOM	151
VIII	DISTRIBUSI *t* & DISTRIBUSI *F*	172
IX	DISTRIBUSI SAMPLING	185
X	TEOREMA LIMIT SENTRAL	199
XI	PENUTUP	212
DAFTAR PUSTAKA		213

BAB I
RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Dalam Teori Probabilitas, percobaan (*experiment*) tidak selalu merupakan percobaan yang rumit tetapi seringkali percobaan sederhana dengan menggunakan alat-alat yang sederhana serta dapat juga dibayangkan untuk dilakukan dan tidak harus dilakukan di laboratorium.

Definisi I.1

Percobaan (*experiment*) adalah proses yang menghasilkan pengamatan (*observation*) atau ukuran (*measurement*).

Contoh I.1

Percobaan melempar mata uang logam satu kali dan diperhatikan mata uang yang muncul di bagian atas yaitu dapat berupa Gambar atau sering dinamakan 'Muka' (**M**) atau Angka yang sering dinamakan 'Belakang' (**B**).

Contoh I.2

Apabila kita memproduksi sekrup mesin maka akan ada kemungkinan beberapa diantaranya rusak sehingga kemungkinan hasil yang diperoleh adalah rusak (cacat) atau tidak rusak (tidak cacat).

Definisi I.2

Kejadian adalah hasil dari suatu eksperimen.

Definisi I.3

Suatu kejadian yang tidak dapat didekomposisikan dinamakan kejadian sederhana (*simple event*).

Contoh I.4

Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu maka salah satu kejadian sederhananya kejadian memperoleh mata dadu 3 dan kejadian sederhana yang lain adalah kejadian memperoleh mata dadu 2 dan seterusnya.

Definisi I.3

Kejadian adalah kumpulan dari satu atau lebih kejadian sederhana.

Contoh I.4

Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu maka salah satu kejadian adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan prima.

Himpunan semua kejadian sederhana dalam suatu eksperimen dinamakan ruang sampel (*sample space*). Secara grafik hubungan antara kejadian dan ruang sampel dinyatakan dalam suatu diagram yang dinamakan **diagram Venn**.

Definisi I.4

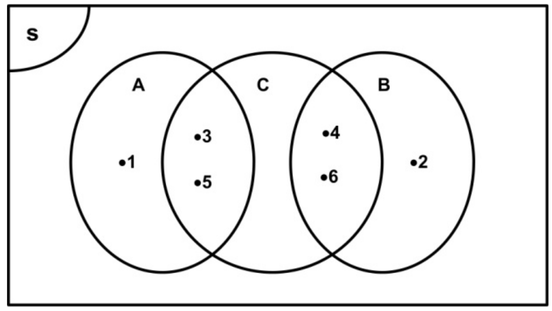
Dua kejadian A dan kejadian B dikatakan saling asing (*mutually exclusive*) jika satu kejadian terjadi dimana yang lain tidak mungkin terjadi dan sebaliknya.

Contoh I.5

Kejadian melempar sebuah dadu dan mencatat angka yang muncul pada sisi atas dadu. Ruang sampel S yang diperoleh adalah

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}.$$

Kejadian A adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan ganjil sedangkan kejadian B adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan genap. Dalam hal ini, $A = \{ 1, 3, 5 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6\}$. Kejadian A dan kejadian B merupakan dua kejadian yang saling asing. Sedangkan bila kejadian C adalah kejadian memperoleh mata dadu yang merupakan bilangan prima yaitu $C = \{ 2, 3, 5\}$ maka kejadian A dan kejadian C tidak saling asing karena ada bilangan ganjil yang sekaligus bilangan prima. Hubungan antara kejadian A, B dan C dapat dinyatakan dalam diagram Venn pada Gambar I.1.



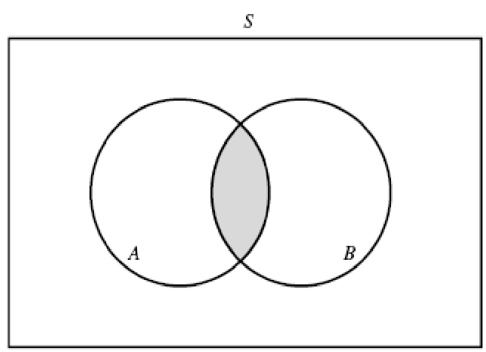
Gambar I.1 Hubungan antara himpunan *A*, *B* dan *C*.

Definisi I.5

Irisan dari kejadian A dan kejadian B yang dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah kejadian yang menyatakan bahwa kejadian A dan kejadian B terjadi bersamaan. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A \cap B = \{ x \in S \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}.$$

Diagram Venn dari $A \cap B$ dinyatakan pada Gambar I.2.



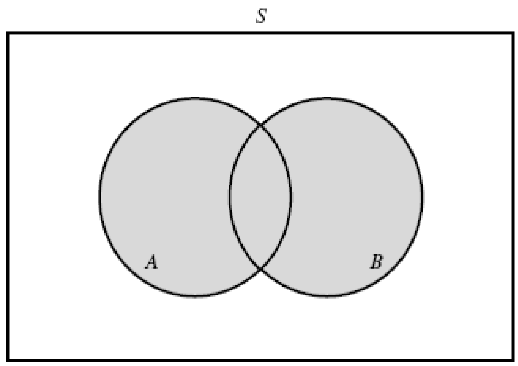
Gambar I.2 Irisan Himpunan *A* dan *B*

Definisi I.6

Gabungan dari kejadian A dan kejadian B yang dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah kejadian yang menyatakan bahwa kejadian A atau kejadian B atau kedua kejadian tersebut terjadi. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A \cup B = \{ x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}.$$

Diagram Venn $A \cup B$ dinyatakan pada Gambar I.3.

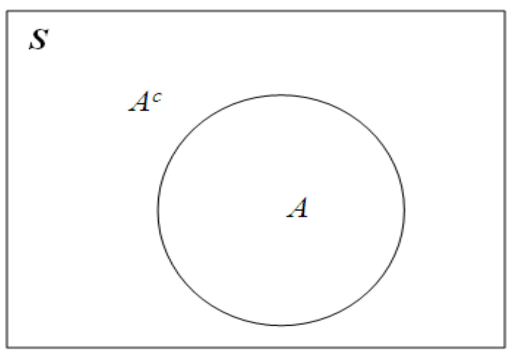


Gambar I.3 Gabungan Himpunan *A* dan *B*

Definisi I.7

Komplemen dari suatu kejadian A yang dinotasikan dengan A^c terdiri dari semua kejadian sederhana dalam ruang sampel S yang tidak berada dalam A. Secara notasi hal tersebut dinyatakan dengan :

$$A^c = \{ x \in S \mid x \notin A \}.$$



Gambar I.4 Himpunan A dan A^c.

Sifat-sifat operasi dari kejadian

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup \varnothing = A$.
3. $A \cap A^c = \varnothing$.

4. $A \cup A^c = S$.
5. $S^c = \varnothing$.
6. $\varnothing^c = S$.
7. $(A^c)^c = A$.

I.3 Analisis Kombinatorial

Dalam pembahasan pasal ini akan dibahas tentang analisis kombinatorial yang dapat digunakan untuk menghitung banyaknya titik sampel dalam ruang sampel atau dalam suatu himpunan (kejadian). Hal ini akan berguna dalam penentuan probabilitas suatu kejadian.

Aturan *mn*

Apabila dimiliki m elemen yaitu $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dan n elemen yaitu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ maka dapat dimungkinkan untuk membuat mn pasangan yang masing-masing mengandung satu elemen dari tiap kelompok.

Contoh I.6

Satu koin dan satu dadu dilempar bersamaan. Berapa banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh ?

Penyelesaian

Satu koin bila dilempar, mempunyai kemungkinan muncul 2 hasil yaitu muka (**M**) atau belakang (**B**), sedangkan satu dadu bila dilempar mempunyai kemungkinan muncul 6 hasil yaitu 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Hal itu berarti, apabila satu koin dan satu dadu dilempar bersamaan, maka banyak kejadian sederhana yang dapat diperoleh adalah 2(6) = 12 cara.

Aturan untuk membentuk pasangan, triplet dan seterusnya

Diberikan k kelompok, terdapat n_1 elemen di kelompok 1, n_2 elemen di kelompok 2, ….., n_k dalam kelompok ke-k, maka banyak cara memilih satu elemen dari masing-masing k kelompok adalah

$$n_1 \, n_2 \ldots . \, n_k.$$

Contoh I.7

Berapa banyak kejadian sederhana dalam ruang sampel ketika tiga koin dilemparkan secara bersamaan.

Penyelesaian

Karena tiap koin mempunyai 2 hasil yang mungkin maka untuk 3 koin yang dilemparkan secara bersamaan akan menghasilkan 2 (2) (2) = 8 cara.

Definisi I.8

Penyusunan dengan memperhatikan urutan dari r objek yang berbeda dinamakan permutasi. Banyaknya cara mengurutkan n benda yang berbeda yang diambil r sekaligus akan dinyatakan dengan P_r^n yaitu

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Contoh I.8

Misalkan dimiliki 3 huruf yang berbeda yaitu **A**, **B** dan **C**. Dari huruf tersebut akan dibuat 'kata' yang terdiri dari 2 huruf. Terdapat berapakah 'kata' yang terbentuk?

Penyelesaian

Karena tersedia 3 huruf yang berbeda dan akan dibentuk 'kata' yang mengandung 2 huruf dan diperhatikan urutannya. Kata yang terbentuk adalah **AB**, **BA**, **AC**, **CA**, **BC** dan **CB** yaitu terdapat 6 kata. Hal itu berarti merupakan permutasi $r = 2$ dari $n = 3$ yaitu $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6.$

Definisi I.9

Banyaknya kombinasi dari n objek yang diambil r sekaligus akan dinotasikan dengan

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}.$$

Contoh I.9

Misalkan pada Contoh I.8, urutan huruf yang terbentuk tidak diperhatikan sehingga akan diperoleh kombinasi 2 huruf dari 3 huruf yang tersedia yaitu AB, AC dan BC. Hal itu berarti banyaknya kombinasi yang terbentuk adalah

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{P_2^3}{2!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Permutasi yang dibuat dengan menyusun benda secara melingkar disebut *permutasi melingkar*. Dua permutasi melingkar dianggap sama, apabila diperoleh dua permutasi yang sama dengan cara permutasi dari suatu benda tertentu dan bergerak melingkar searah gerak jarum jam.

Teorema I.1

Banyak permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah $(n-1)!$

Contoh I.10

Ada berapa carakah 4 pohon yang berbeda dapat ditanam dan membentuk suatu lingkaran?

Penyelesaian

Karena terdapat 4 pohon yang berbeda dan akan ditanam membentuk lingkaran maka banyaknya cara menanamnya merupakan banyak permutasi melingkar dari $n = 4$ benda yaitu $(n-1)! = (4-1)! = 3! = 6$ cara.

Teorema I.2

Banyak cara dimana n bola yang berbeda dapat didistribusikan ke dalam k kotak yang berbeda adalah k^n.

Contoh I.11

Tentukan banyak cara 3 bola yang berbeda dapat didistribusikan ke dalam dua kotak yang berbeda.

Penyelesaian

Karena terdapat $n = 3$ bola yang berbeda maka tiga bola tersebut dapat didistribusikan ke dalam $k = 2$ kotak yang berbeda dengan 2^3 yaitu 8 cara.

Teorema I.3

Banyak cara bahwa n bola yang tidak dapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam k kotak, yang berbeda adalah

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

Jika $n > k$ dan tidak satu kotakpun yang kosong maka

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Contoh I.12

Berapa carakah 2 bola yang tidak dapat dibedakan didistribusikan ke dalam 3 kotak yang berbeda ? Berapa carakah 3 bola yang tidak dapat dibedakan dapat didistribusikan ke dalam dua kotak yang berbeda dan tidak satu kotakpun yang kosong ?

Penyelesaian

Karena ada n=2 bola yang tidak dapat dibedakan dan akan didistribusikan ke dalam k=3 kotak yang berbeda maka banyak cara untuk mendistribusikan adalah

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

Karena terdapat n=3 bola yang tidak dapat dibedakan dan akan didistribusikan ke dalam 2 kotak yang berbeda dengan $n = 3 > k = 2$ serta tidak satu kotakpun kosong adalah

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1} = 2.$$

Teorema I.4

Banyak permutasi n benda yang berlainan bila n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, ..., n_K berjenis ke-K adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_K!}$$

dengan $n = n_1 + n_2 + ... + n_K$.

Contoh I.13

Sebuah jalan dihiasi dengan dengan 9 bolam (bola lampu) yang dirangkai seri. Tentukan banyak cara menyusun 9 bola lampu itu bila tiga diantaranya berwarna putih, empat kuning dan dua biru.

Penyelesaian

Karena terdapat 9 bolam yang terdiri dari 3 bolam putih, empat bolam kuning dan 2 bolam biru maka banyak permutasi yang berlainan dari rangkaian bolam yang dirangkai seri adalah

$$\frac{9!}{3!4!2!} = 1260.$$

Teorema I.5

Banyaknya cara membuat sekat n benda dalam r sel yang masing-masing berisi n_1 elemen dalam sel pertama, n_2 dalam sel kedua, dan seterusnya adalah

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots.\ n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots..\,n_r}\,.$$

Contoh I.14

Dua belas orang bepergian dengan tiga mobil dan masing-masing mobil dapat membawa 3, 4, dan 5 penumpang. Tentukan banyak cara yang dapat dibuat untuk membawa dua belas orang tersebut.

Penyelesaian

Karena terdapat 12 orang dan akan dibagi ke dalam 3 mobil yang masing-masing mobil berkapasitas 3, 4 dan 5 maka banyak cara untuk membawa 12 orang tersebut dengan 3 mobil tersebut adalah sama dengan banyak cara untuk membuat sekat 12 benda ke dalam 3 sel yang masing-masing berisi 3 , 4 dan 5 yaitu

$$\binom{12}{3,4\ ,5} = \frac{12!}{3!\ 4!\ 5!} = 27.720$$

cara.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Misalkan percobaan memilih suatu bilangan bulat dari 1 sampai 3.

a. Tentukan ruang sampel dari percobaan ini.
b. Sebutkan kejadian sederhana yang mungkin.
c. Sebutkan kejadian-kejadian yang ada dalam percobaan ini.

Penyelesaian

a. Ruang sampel S = { 1, 2, 3 }.
b. Kejadian sederhana yaitu { 1 }, { 2} dan { 3 }.
c. Kejadian-kejadian yang mungkin adalam semua himpunan bagian dari ruang sampel S yaitu $\emptyset$, { 1 }, { 2 }, { 3 }, { 1, 2 }, {1, 3}, { 2, 3} dan {1, 2, 3}.

Soal 2

Buktikan bahwa

a. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
b. $A \cap A^c = \emptyset$.

Bukti

a. Akan dibuktikan bahwa $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.
Ambil sebarang $x \in A \cap \emptyset$.
Karena $x \in A \cap \emptyset$ maka $x \in A$ dan $x \in \emptyset$ sehingga $x \in \emptyset$.
Akibatnya $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.
Akan dibuktikan bahwa $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$.
Karena pernyataan $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cap \emptyset$ mempunyai anteseden yang bernilai salah maka implikasi tersebut akan selalu bernilai benar sehingga terbukti $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$.

b. Akan dibuktikan bahwa $A \cap A^c \subseteq \emptyset$ atau sama saja dengan membuktikan benarnya implikasi $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in \emptyset$.
Karena tidak mungkin $x \in A$ dan sekaligus $x \in A^c$ yaitu x $\notin A$ maka anteseden dari implikasi $x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in \emptyset$ selalu bernilai salah sehingga implikasi akan bernilai benar.
Terbukti bahwa $A \cap A^c \subseteq \emptyset$.
Akan dibuktikan bahwa $\emptyset \subseteq A \cap A^c$.

Karena pernyataan $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A \cap A^c$ mempunyai anteseden yang bernilai salah maka implikasi tersebut akan selalu bernilai benar sehingga terbukti $\varnothing \subseteq A \cap A^c$.

Soal 3

Tentukan suku konstanta dalam ekspansi $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^9$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan teorema binomial, diperoleh

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(x)^k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{9-k} = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{3k-18}.$$

Suku konstantanya sama dengan $3k$-18=0 sehingga k = 6. Akibatnya

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{3!\,6!} = 84.$$

Soal 4

Pada sebuah rak buku terdapat 5 buku matematika dan 4 buku kimia. Berapakah banyak cara supaya 2 buku matematika tertentu akan terletak berdampingan?

Penyelesaian

Apabila dianggap bahwa 2 buku matematika tertentu dapat digantikan sebagai 1 buku sehingga ada total 8 buku yang dapat diatur sehingga ada permutasi 8 buku dari 8 buku yang tersedia yaitu $P_8^8 = 8!$ cara dan diantara 2 buku tersebut dapat dibuat permutasi $P_2^2 = 2!$ sehingga total ada 8! 2! cara.

Soal 5

Berapa banyak salad buah yang bisa dibuat bila tersedia buah jambu air, nanas, semangka dan melon?

Penyelesaian

Setiap buah dapat dipilih atau tidak dipilih dalam pembuatan salad. Karena setiap cara dari 2 cara memperlakukan buah dapat dikaitkan dengan 2 cara dari memperlakukan buah yang lain maka banyak cara untuk memperlakukan 4 buah adalah 2^4 cara. Namun 2^4 juga termasuk kasus di mana bila tidak ada buah yang dipilih sehingga banyak salad yang dapat dibuat adalah $2^4 - 1 = 15$ cara.

Soal 6

Dari 8 pemain bulu tangkis terdapat 5 orang pemain putra dan akan dibentuk pasangan ganda campuran, ada berapa banyak pasangan yang dapat terbentuk ?

Penyelesaian

Karena ada 5 pemain bulutangkis putra dan 3 pemain bulu tangkis putri maka dapat dibuat $5 \times 3 = 15$ pasangan ganda campuran dalam permainan bulu tangkis.

Soal 7

Jika terdapat 10 titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka banyak segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 10 titik tersebut?

Penyelesaian

Untuk membuat segitiga, diperlukan 3 titik yang tidak berada pada satu garis dan karena tidak ada tiga titik yang segaris maka dapat dibuat segitiga sebanyak kombinasi 3 dari sebanyak 10 buah yaitu

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120 .$$

Soal 8

Jika 5 kartu diambil dari 1 dek kartu bridge tanpa pengembalian maka tentukan banyak cara yang mungkin. Apabila urutan pengambilan diperhatikan maka ada berapa cara yang mungkin ?

Penyelesaian

Karena 5 kartu diambil dari 1 dek kartu bridge maka banyak cara yang mungkin adalah merupakan kombinasi 5 kartu dari sebanyak 52 kartu yang tersedia

$$C_5^{52} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}$$

Apabila urutan pengambilan diperhatikan maka banyak cara yang mungkin adalah merupakan permutasi 5 kartu dari sebanyak 52 kartu yang tersedia

$$P_5^{52} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}.$$

Soal 9
Misalkan diketahui ada 4 orang dan dari 4 orang tersebut dipilih 3 orang yang akan duduk pada kursi yang membentuk lingkaran. Ada berapa banyak cara susunan yang mungkin dibuat ?
Penyelesaian
Langkah pertama adalah melakukan pemilihan 3 orang dari 4 orang yang tersedia sehingga banyaknya cara yang mungkin adalah

$$C_3^{\,4} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Banyaknya cara untuk menyusun 3 orang yang duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran adalah (3-1)! = 2! cara. Akibatnya banyak cara yang mungkin dibuat adalah 4 × 2 = 8 cara.

Soal 10
Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 6n.$$

Penyelesaian
Karena

$$\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 6n$$

maka

$$\frac{(n+5)(n+4)!}{(n+4)!} = 6n$$

sehingga $n + 5 = 6n$ atau $n = 1$.

Soal 11
Tentukan P_3^n jika $\binom{n}{3} = 12n.$

Penyelesaian

Karena

$$\binom{n}{3}=12n$$

maka

$$\binom{n}{3}=\frac{n!}{(n-3)!3!}=12n$$

sehingga

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{(n-3)!}=72n\\
&n(n-1)(n-2)=72n\\
&(n-1)(n-2)=72\\
&n^2-3n+2=72\\
&n^2-3n-70=0\\
&(n+7)(n-10)=0\\
&n=-7,\ n=10.
\end{aligned}$$

Karena n harus positif maka n = 10 sehingga $P_3^{10}=120$.

Soal 12

Tentukan banyaknya diagonal pada segi 10.

Penyelesaian

Untuk membuat diagonal perlu 2 titik dan setiap dua titik itu hanya menjadi satu diagonal sehingga hal itu merupakan kombinasi 2 dari 10 titik yang tersedia. Di samping itu garis (diagonal pada sisi terluar) akan menjadi sisi segi 10 sehingga banyaknya diagonal yang terbentuk adalah

$$\binom{10}{2}-10=\frac{10!}{8!2!}-10=45-10=35.$$

Soal 13

Jika $\binom{a}{5}=\binom{a}{7}$ dan $b=P_2^a$ maka tentukan nilai a + b.

Penyelesaian

Karena

$$\binom{a}{5}=\binom{a}{7}$$

maka a = 12 dan

$$b = P_2^{12} = 132$$

sehingga $a + b = 12 + 132 = 144$.

Soal 14

Berapakah banyak cara menyusun huruf MATEMATIKA sehingga huruf T tidak berdekatan ?

Penyelesaian

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah

$$\frac{10!}{3!2!2!} = 151200.$$

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA, yaitu

$$\frac{9!}{3!2!} = 30240.$$

Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah $151200 - 30240 = 120960$.

Soal 15

Tentukan nilai dari $\sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k}$.

Penyelesaian

Karena

$$4^{1007} = (3+1)^{1007} = \binom{1007}{0}3^0 + \binom{1007}{1}3^1 + \ldots + \binom{1007}{1007} = \sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k}$$

maka

$$\sum_{k=0}^{1007} 3^k \binom{1007}{k} = 4^{1007} = 2^{2(1007)} = 2^{2014}.$$

LATIHAN

1. Nyatakanlah pernyataan berikut ini benar atau salah.
   a. $(A - B) \cup B = B$.
   b. $(A \cup B) - A = \mathrm{B}$.
   c. $(A \cap B) \cap (A - B) = \varnothing$.
   d. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Tuliskan anggota tiap ruang sampel berikut ini :
   a. himpunan bilangan bulat antara 1 dan 50 yang habis dibagi 7.
   b. himpunan $S = \{ x \mid x^2 + x - 6 = 0 \}$.
   c. himpunan hasil bila sebuah mata dadu dan mata uang dilantunkan sekaligus.
   d. himpunan $S = \{ x \mid x \text{ nama benua} \}$.
   e. himpunan $S = \{ x \mid 2x - 4 = 0 \text{ dan } x > 5 \}$.
3. Gunakan cara aturan atau pernyataan untuk menjelaskan ruang sampal S yang terdiri atas semua titik dalam kuadran pertama di dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 3 dengan pusat titik asal.
4. Diadakan suatu percobaan melantunkan sepasang dadu, satu dadu berwarna merah, yang lainnya hijau, hasil yang muncul kemudian dicatat.
   a. Tuliskan anggota ruang sampel S.
   b. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian A bahwa jumlah kurang dari S.
   c. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian B bahwa bilangan 6 muncul pada kedua dadu.
   d. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian C bahwa bilangan 2 muncul pada dadu hijau.
   e. Buatlah diagram Venn yang menunjukkan hubungan antara kejadian A, B, C dan S.
5. Suatu percobaan dilakukan untuk menentukan kandungan emas dalam sepotong logam. Tentukan ruang sampel dalam percobaan ini.
6. Sebuah kotak berisi 1 bola merah, 1 bola hijau dan 1 bola kuning. Satu bola diambil dari kota tersebut dan dicatat warna bolanya.
   a. Tentukan ruang sampel dari percobaan tersebut.

b. Tuliskan semua kejadian yang mungkin.

c. Jika R adalah kejadian memperoleh bola merah maka sebutkan R^c.

7. Percobaan mengukur lamanya waktu yang diperlukan sampai sebuah bola lampu pijar putus. Tentukan ruang sampel dari percobaan tersebut.
8. Bila $P = \{ X \mid 1 \le X \le 9 \}$ dan $Q = \{ Y \mid Y \ge 5 \}$ maka hitunglah $P \cap Q$ dan $P \cup Q$.
9. Apabila 5 kartu satu demi satu dipilih dari satu dek kartu (yang berisi 52 kartu) dan masing-masing kartu yang terambil dikembalikan maka ada berapa urutan kartu yang terbentuk? Apabila kartu kartu yang terambil tidak dikembalikan maka ada berapa urutan kartu yang terbentuk?
10. Berapa banyak cara untuk membuat permutasi huruf-huruf dalam kata KANTOR ?
    a. Apabila tidak ada batasan.
    b. Huruf pertama harus huruf hidup .
    c. Huruf pertama harus huruf mati (konsonan).
11. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n dengan $n \ge 1$ berlaku sifat-sifat :
    a. $\binom{n}{n} = 1$. Interpretasikan hasilnya.
    b. $\binom{n}{0} = 1$. Interpretasikan hasilnya.
    c. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. Interpretasikan hasilnya.
    d. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
    e. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
12. Ada berapa banyak bilangan positif genap terdiri dari 5 angka berbeda dapat dibuat jika tidak ada satu pun angka 6 dan angka ribuan haruslah angka 0?
13. Jika diketahui $P_4^n = 30 P_2^n$ maka tentukan nilai n.
14. Jika diketahui $\binom{n}{3} = 2n$ maka tentukan nilai $\binom{2n}{7}$.

15. Berapa banyakkah himpunan X yang memenuhi

$$\{ 1, 2 \} \subseteq X \subseteq \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \ ?$$

16. Tentukan koefisien x^2y^3 dari penjabaran $(2x\text{-}3y)^5$.
17. Sebuah plat mobil terdiri dari dua huruf di depan 4 angka di tengah dan dua huruf di belakang.
    a. Berapa banyak plat mobil yang dapat dibuat jika setiap huruf dan setiap angka dapat diulang ?
    b. Berapa banyak plat mobil yang dapat dibuat jika huruf tidak dapat diulang sedangkan angka dapat diulang ?
    c. Berapa banyak plat yang dapat dibuat dalam b sehingga angkanya lebih dari 5500 ?
18. Berapa banyak bilangan ganjil 3 angka yang dapat dibentuk dari angka 0, 1, 2, 3, 4 jika angka-angka tersebut dapat diulang tetapi angka pertama tidak boleh nol ?
19. Berapa banyak cara 3 laki-laki dan 3 perempuan dapat duduk dalam satu baris asalkan laki-laki dan perempuan berselang-seling? Berapa banyak jika hal tersebut disusun dalam bentuk melingkar?
20. Selesaikan untuk jumlahan berikut ini :
    a. $\binom{4}{0}+\binom{4}{2}+\binom{4}{4}$
    b. $\binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}$
    c. $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}$
21. Tentukan banyaknya susunan huruf dari kata PRIVACY jika disyaratkan bahwa dua vokal harus berdekatan.
22. Lima huruf dari kata GOOGLE akan disusun. Ada berapa susunan yang mungkin dibuat ?
23. Jika terdapat 20 titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka berapakah banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 20 titik tersebut ?
24. Dalam suatu rapat yang terdiri dari 6 orang siswa (2 di antara kakak beradik) dalam posisi melingkar. Ada berapa formasi duduk melingkar yang bisa terbentuk jika kakak beradik tersebut :

a. harus berdekatan ?

b. tidak boleh berdekatan ?

25. Tentukan koefisien x^6y^5 dari penjabaran $(2x - 5y)^{11}$.

*****

BAB II
PROBABILITAS

Teori probabilitas untuk ruang sampel berhingga menetapkan suatu himpunan bilangan yang dinamakan bobot dan bernilai dari 0 sampai 1 sehingga probabilitas terjadinya suatu kejadian dapat dihitung. Tiap titik pada ruang sampel dikaitkan dengan suatu bobot sehingga jumlah semua bobot sama dengan 1. Berikut ini aksioma-aksioma probabilitas yang nantinya akan digunakan dalam teori probabilitas.

Aksioma-aksioma probabilitas :

1. Untuk setiap kejadian A berlaku
$$P(A) \geq 0.$$
2. Untuk kejadian pasti S berlaku $P(S) = 1$.
3. Untuk semua kejadian yang saling asing A_1, A_2, ..., berlaku
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots) = P(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots\ldots$$

Definisi II.1

Probabilitas suatu kejadian A adalah jumlahan dari probabilitas kejadian sederhana.

Teorema II.1

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan N macam hasil yang berkemungkinan sama dan bila tepat sebanyak n dari hasil berkaitan dengan kejadian A maka probabilitas kejadian A adalah $P(A) = n/N$.

Contoh II.1

Jika sebuah mata uang logam jujur dilemparkan sekali maka terdapat dua hasil yang mungkin yaitu diperoleh sisi ‘Muka” (**M**) dan sisi ‘Belakang’ (B) masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk diperoleh sehingga probabilitas akan diperoleh sisi ‘Muka’ (**M**) adalah $P(\mathbf{M}) = ½$.

Contoh II.2

Bila sebuah mata uang dilantunkan dua kali maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{ \mathbf{MM}, \mathbf{MB}, \mathbf{BM}, \mathbf{BB} \}.$$

Bila mata uang yang digunakan setangkup maka tiap hasil mempunyai kemungkinan muncul sama. Tiap titik diberi bobot b sehingga $4b = 1$ atau $b = ¼$. Bila A menyatakan kejadian bahwa paling sedikit satu muka muncul maka $P(A) = ¾$.

Contoh II.3

Bila satu kartu ditarik dari satu kotak bridge berisi 52 kartu maka akan ditentukan peluang mendapatkan kartu hati. Banyaknya hasil yang mungkin adalah 52 dan 13 diantaranya adalah kartu hati. Probabilitas kejadian A menarik kartu hati adalah

$$P(A) = 13/52 = ¼.$$

Contoh II.4

Sebuah dadu dilemparkan sekali. Apabila dadu tersebut dipandang sebagai dadu jujur (dadu yang masing-masing sisinya terbuat dari bahan yang sama sehingga kemungkinan sisi-sisinya akan muncul di atas akan sama) maka probabilitas dadu akan menunjukkan angka 5 adalah

$$\text{P(diperoleh 5)} = 1/6.$$

Di samping itu, probabilitas munculnya angka 3 atau lebih adalah

$$\text{P(diperoleh 3 atau lebih)} = 4/6 = 2/3.$$

Contoh II.5

Sebuah keluarga baru mengatakan bahwa mereka menginginkan 2 orang anak dalam keluarga. Apabila keinginan tersebut terpenuhi maka urutan kelahiran yang bisa terjadi adalah **PP**, **PW**, **WP** dan **WW** dengan **W** = wanita dan **P** = Pria. Akibatnya jika anaknya akan wanita semua maka probabilitasnya adalah $P(\mathbf{WW}) = ¼$ yaitu 1 kemungkinan dari empat urutan kelahiran yang mungkin. Di samping itu, probabilitas diperoleh 1 wanita dan 1 pria adalah $P(\mathbf{WP} \text{ atau } \mathbf{PW}) = 2/4 = ½$.

Teorema II.2

Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$ dan $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Bukti :

Karena $B = A \cup (B - A)$ dengan A dan $(B - A)$ saling asing maka

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

sehingga

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

dan karena probabilitas maka $P(B - A) \geq 0$ sehingga $P(B) - P(A) \geq 0$ atau

$$P(B) \geq P(A).$$

Teorema II.3

Untuk setiap kejadian A berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$.

Bukti :

Berdasarkan aksioma 1, maka $P(A) \geq 0$ dan karena untuk setiap kejadian A berlaku $A \subset S$ maka $P(A) \leq P(S) = 1$. Terbukti $0 \leq P(A) \leq 1$.

Teorema II.4

$P(\varnothing) = 0$.

Hal itu berarti bahwa kejadian mustahil mempunyai probabilitas 0.

Bukti :

Karena $S = S \cup \varnothing$ dan $S \cap \varnothing = \varnothing$ maka $P(S) = P(S) + P(\varnothing)$ sehingga $P(\varnothing) = 0$.

Teorema II.5

Jika A^c adalah komplemen dari kejadian A maka berlaku

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Bukti

Karena $A \cup A^c = S$ dan $A \cap A^c = \varnothing$ maka

$$P(A) + P(A^c) = P(S)$$

atau $P(A) + P(A^c) = 1$ sehingga $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Contoh II.6

Suatu mata uang setangkup dilempar berturut-turut sebanyak 6 kali. Misalkan kejadian E paling sedikit sekali muncul muka. Ruang sampel S mengandung $2^6 = 64$ titik sampel karena setiap lemparan dapat menghasilkan dua macam hasil (muka atau belakang). Bila E^c menyatakan kejadian bahwa tidak ada muka yang muncul maka kejadian tersebut adalah bila semua lantunan menghasilkan belakang yaitu $P(E^c) = 1/64$. Probabilitas paling sedikit sekali muncul muka adalah

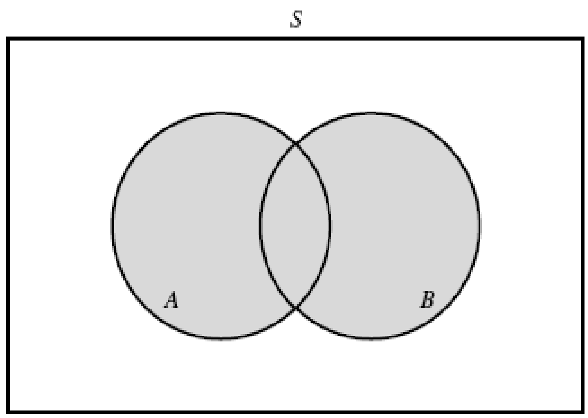
$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 1/64 = 63/64.$$

Teorema II.6

Jika A dan B dua kejadian sebarang maka berlaku

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bukti



Gambar II.1 Diagram Venn $A \cup B$.

Berdasarkan diagram Venn pada Gambar II.1 di atas, diperoleh

$$A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$$

dengan A dan $B - (A \cap B)$ adalah dua kejadian yang saling asing sehingga

$$P(A \cup B) = P(A) + P[B - (A \cap B)]$$

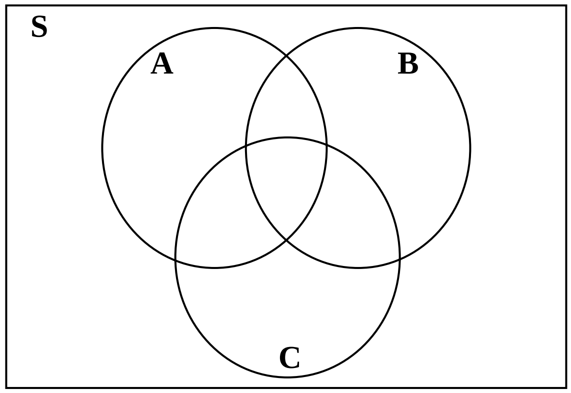
dan dengan hasil Teorema II.2 maka diperoleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Perluasan teorema ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

Jika A, B dan C tiga kejadian sebarang maka berlaku sifat :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$



Gambar II.2 Diagram Venn $A \cup B \cup C$.

Contoh II.7

Diketahui $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/8$ dan $P(C) = ¼$. Apabila kejadian A, B dan C *mutually exclusive* maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= (1/2) + (1/8) + (1/4) \\ &= 7/8. \end{aligned}$$

Di samping itu,

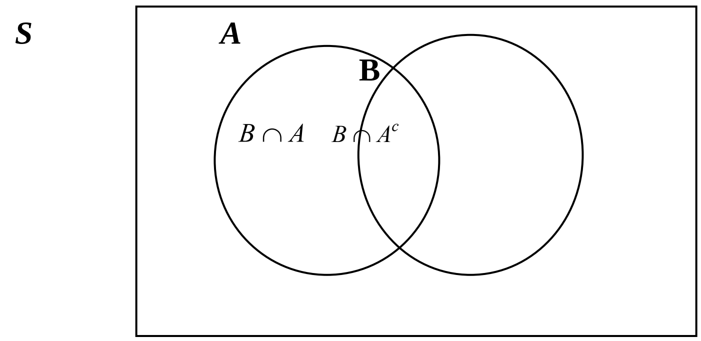
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= P((A \cup B \cup C)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 – (7/8) \\ &= 1/8. \end{aligned}$$

Teorema II.7

Untuk dua kejadian sebarang A dan B berlaku

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

Bukti :



Gambar II.3 Hubungan antara himpunan B, $B \cap A$ dan $B \cap A^c$.

Berdasarkan diagram Venn pada Gambar II.3, terlihat bahwa

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

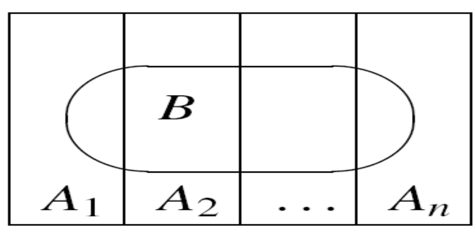
dan dua kejadian tersebut yaitu A ∩ B dan A ∩ B^c saling asing sehingga diperoleh

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

Secara umum, teorema di atas dapat dinyatakan sebagai

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n).$$

dan digambarkan dalam diagram Venn pada Gambar II. 4 berikut ini.



Gambar II.4 Hubungan antara himpunan B, A_1, A_2, …, A_n

Definisi II.2

Probabilitas bersyarat dari B diberikan bahwa A telah terjadi adalah

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

jika $P(A) > 0$.

Akibatnya, probabilitas bersyarat dari A diberikan bahwa B telah terjadi adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}$$

jika $P(B) > 0$.

Definisi II.3

Dua kejadian A dan B dikatakan saling bebas (*independent*) jika dan hanya jika $P(A \mid B) = P(A)$ atau $P(B \mid A) = P(B)$.

Jika tidak demikian maka dua kejadian tersebut dikatakan saling bergantung (*dependent*).

Hukum Multiplikatif Probabilitas

Misalkan diketahui kejadian A dan kejadian B, probabilitas dari irisan $A \cap B$ adalah

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B).$$

Jika A dan B saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.

Teorema II.8

Untuk tiga kejadian sebarang A, B dan C berlaku

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B).$$

Bukti :

Karena

$$P(C|A\cap B)=\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}$$

dan $P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$ sehingga

$$\begin{aligned} P(C|A\cap B)\,P(B|A)\;P(A) &= \frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}\;\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\,P(A) \\ &= P(C\cap A\cap B) \\ &= P(A\cap B\cap C). \end{aligned}$$

Sifat-sifat Probabilitas Bersyarat

1. Jika $A \subset B$ maka $P(A \mid C) \leq P(B \mid C)$.
2. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.
3. $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.
4. Secara umum berlaku hukum multiplikatif :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots. \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots.\, P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots. \cap A_{n-1}).$$

Contoh II.8

Sekotak buah berisi 20 apel dan 5 jeruk. Jika 2 buah diambil secara random berturut-turut maka berapakah probabilitasnya bahwa kedua buah yang terambil adalah apel ?

Penyelesaian :

Misalkan kejadian A adalah bahwa buah yang terambil pertama adalah apel sedangkan kejadian B adalah bahwa buah yang terambil kedua adalah apel. Akan ditentukan $P(A \cap B)$.

Karena $P(A)$=20/25 dan $P(B|A)$=19/24 maka dengan menggunakan hukum multiplikatif diperoleh

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A) = (20/25)\,(19/24) = 0{,}633.$$

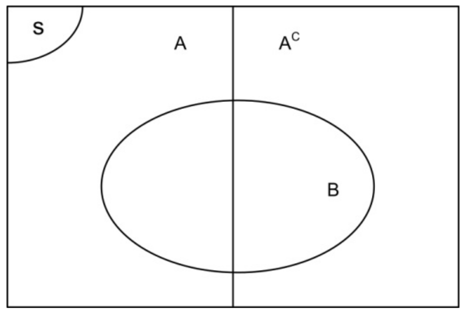
Hal itu berarti bahwa kedua buah yang terambil merupakan apel adalah 0,633.

Teorema Bayes

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

Misalkan kejadian B adalah kejadian mendapatkan bola berwarna merah dan kejadian A adalah kejadian mendapatkan bola dari kotak I. Probabilitas bersyarat yang diinginkan adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Gambar II.5 Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

Kejadian B dapat ditulis sebagai gabungan dari dua kejadian yang terpisah yaitu $B \cap A$ dan $B \cap A^c$ sehingga

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

dan berarti

$$P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)$$

Akibatnya

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)}$$

dan diperoleh

$$P(B\cap A)=\frac{3}{25},$$

$$P(B\cap A^C)=\frac{5}{25},$$

sehingga

$$P(A|B)= \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)} =\frac{3/25}{(3/25)+(5/25)}=\frac{3}{8}.$$

Dalam bentuk teorema Bayes, hal tersebut dapat dinyatakan dengan

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\,|\,A)\,P(A)\,+\,P(B\,|\,A^c)\,P(A^c)}$$

$$= \frac{(3/10)(10/25)}{(3/10)(10/25)+(5/15)(15/25)}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Teorema II.5

Misalkan { A, A^c } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan sederhana dari ruang sampel S dengan $P(A) \neq 0$.

Misalkan B adalah suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$ maka berlaku

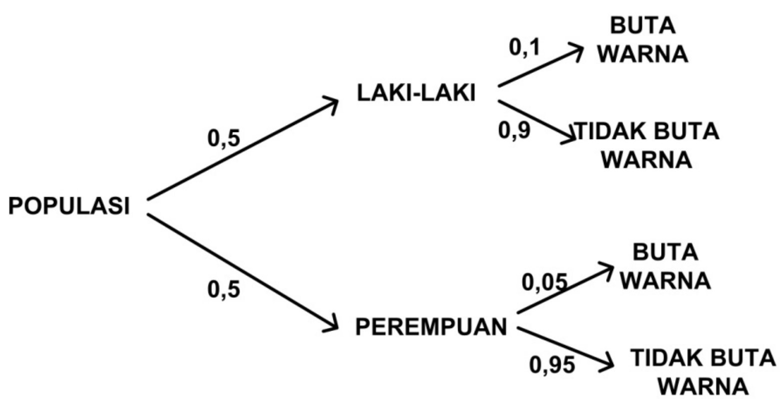
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\,|\,A)\,P(A)\,+\,P(B\,|\,A^c)\,P(A^c)}$$

Contoh II.9

Anggaplah bahwa dalam suatu populasi terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama. Dalam populasi ini 10 % dari laki-laki dan 5 % dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random berapa probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.6 Diagram pohon probabilitas

Populasi terbagi ke dalam dua himpunan bagian yang saling asing yaitu laki-laki (kejadian **M**) dan perempuan (kejadian **F**). Akan dicari probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih dengan syarat buta warna (**BW**). Dengan menggunakan teorema Bayes diperoleh

$$\begin{aligned}
P(M|BW) &= \frac{P(BW\,|\,M)\,P(M)}{P(BW\,|\,M)\,P(M)+P(BW\,|\,F)\,P(F)} \\
&= \frac{(0{,}05)(0{,}5)}{(0{,}05)(0{,}5)+(0{,}0025)(0{,}5)} \\
&= \frac{2500}{2625}. \\
&= \frac{20}{21}.
\end{aligned}$$

Secara umum, teorema Bayes dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema II.6

Misalkan { A_1, A_2, …, A_n } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan ruang sampel S dengan $P(A_i) \neq 0$ untuk i = 1,2, …, n.

Misalkan B suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(B) \neq 0$ maka untuk k = 1,2, …, n berlaku

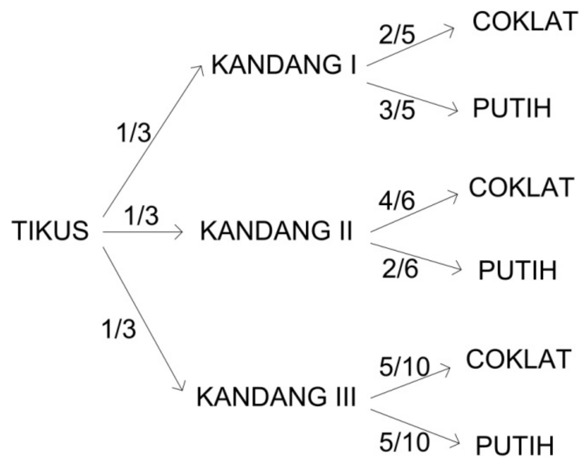
$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)} = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}\,.$$

Contoh II.10

Di suatu laboratorium terdapat 3 kandang tikus. Kandang I terdapat dua tikus coklat dan 3 tikus putih, kandang II terdapat empat tikus coklat dan 2 tikus putih dan kandang III terdapat 5 tikus coklat dan 5 tikus putih. Sebuah kandang dipilih secara random dan seekor tikus dipilih secara random dari kandang tersebut. Jika tikus yang terpilih berwarna putih, berapa probabilitas bahwa tikus yang terpilih berasal dari kandang I ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.7 Diagram Pohon Probabilitas Contoh II.10

$$P(I\,|\,W)=\frac{P(W\,|\,I)\,P(I)}{P(W\,|\,I)\,P(I)+P(W\,|\,II)\,P(II)+P(W\,|\,III)\,P(III)}$$

$$=\frac{(3/5)(1/3)}{(3/5)(1/3)+(2/6)(1/3)+(5/10)(1/3)}$$

$$=\frac{1/5}{43/90}$$

$$=\frac{18}{43}.$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

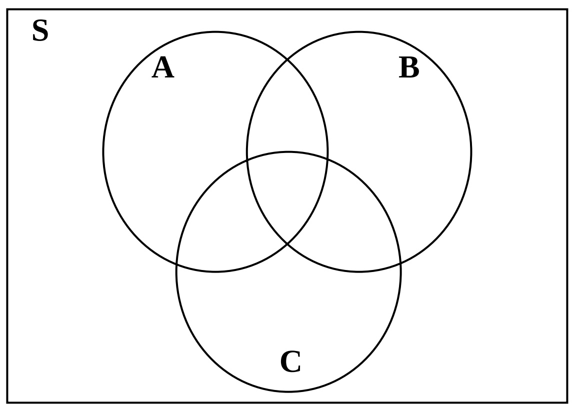
Apabila A menyatakan proyek ke-1 disetujui, B menyatakan proyek ke-2 disetujui dan C menyatakan proyek ke-3 disetujui.

Diketahui bahwa $P(A) = 0{,}22$, $P(B) = 0{,}25$, $P(C) = 0{,}28$, $P(A \cap B) = 0{,}11$, $P(A \cap C) = 0{,}05$, $P(B \cap C) = 0{,}07$ dan $P(A \cap B \cap C) = 0{,}01$. Nyatakan kejadian berikut ini dalam kata-kata dan hitunglah :

a. $A \cup B$
b. $A^c \cap B^c$
c. $A \cup B \cup C$
d. $A^c \cap B^c \cap C^c$

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas maka dapat dibuat diagram Venn berikut probabilitas untuk masing-masing himpunan yang saling asing :



Gambar II.8 Diagram Venn $A \cup B \cup C$.

Akibatnya diperoleh :

a. $A \cup B$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 - 0{,}11 \\ &= 0{,}36. \end{aligned}$$

b. $A^c \cap B^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - 0{,}36 = 0{,}64. \end{aligned}$$

c. $A \cup B \cup C$ menyatakan kejadian proyek ke-1 atau proyek ke-2 disetujui atau proyek ke-3 disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}22 + 0{,}25 + 0{,}28 - 0{,}11 - 0{,}05 - 0{,}07 + 0{,}01 \\ &= 0{,}53. \end{aligned}$$

d. $A^c \cap B^c \cap C^c$ menyatakan kejadian proyek ke-1 tidak disetujui dan proyek ke-2 tidak disetujui dan proyek ke-3 tidak disetujui artinya ketiga proyek tidak disetujui yaitu

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= P((A \cup B \cup C)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - 0{,}53 \\ &= 0{,}47. \end{aligned}$$

Soal 2

Tunjukkan bahwa $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)\, \mathrm{P}(B \mid C)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} P(A \mid B \cap C)\; P(B \mid C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A \cap B \mid C). \end{aligned}$$

Soal 3

Buktikan bahwa jika $P(B \mid A) > P(B)$ maka $P(A \mid B) > P(A)$.

Penyelesaian

Karena $P(B \mid A) > P(B)$ maka

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} > P(B)$$

sehingga $P(B \cap A) > P(B)\,P(A)$. Akibatnya

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} > \frac{P(B)\,P(A)}{P(B)} = P(A).$$

Soal 4

Jika diketahui kejadian A dan B maka buktikan bahwa

a. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

b. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$.

Penyelesaian :

a. Karena $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ dan $A \cap B$ saling asing dengan $A \cap B^c$ maka

$$P(A) = P(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^c)$$

sehingga

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B).$$

b. $P(A \cup B) = 1 - P(\,(A \cup B)^c\,)$

$= 1 - P(\,A^c \cap B^c\,)$.

Soal 5

Misalkan diketahui $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$.

Tentukan :

a. $P(B^c)$.

b. $P(A \cup B^c)$.

c. $P(B \cap A^c)$.

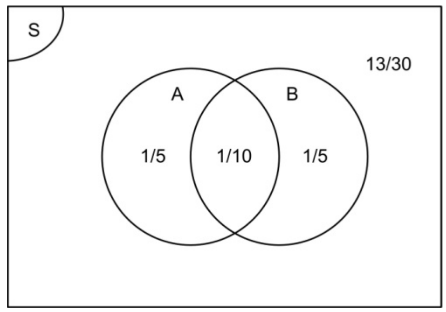
d. $P(A^c \cup B^c)$.

Penyelesaian :

Karena $P(A) = P(B) = 1/3$ dan $P(A \cap B) = 1/10$ maka

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (1/3) + (1/3) - (1/10) \\ &= (10 + 10 - 3)/30 \\ &= 17/30 \end{aligned}$$

sehingga $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 17/30 = 13/30$. Dengan mudah, hal tersebut dapat dinyatakan dalam diagram Venn pada Gambar II.9 berikut ini.



Gambar II.9 Diagram Venn

a. $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - (1/3) = 2/3$.

b. $P(A \cup B^c) = P(A) + P((A \cup B)^c)$

$$= (1/3) + (13/30)$$
$$= 23/30.$$

Dalam hal ini, artinya $A \cup B^c$ kejadian A digabung dengan B^c sehingga sama artinya dengan kejadian A digabung dengan kejadian $(A \cup B)^c$ dengan kejadian A dan $(A \cup B)^c$ adalah dua kejadian yang saling asing.

c. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

Dengan melihat diagram Venn, kejadian $B \cap A^c$ sama artinya dengan kejadian B tetapi tidak di kejadian $A \cap B$.

d. $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - (1/10)$$
$$= 9/10.$$

Soal 6

Dalam populasi lalat buah yang dipelajari, terdapat 2 jenis mutasi yaitu mutasi sayap dan mutasi mata. Mutasi sayap terdapat 25 % populasi, 15 % mutasi mata dan 10 % mutasi keduanya. Jika seekor lalat dipilih secara random maka tentukan :

a. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi sayap, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi mata?
b. Jika lalat tersebut mempunyai mutasi mata, berapakah probabilitasnya juga mempunyai mutasi sayap?
c. Berapakah probabilitasnya bahwa lalat tersebut paling sedikit mempunyai satu mutasi ?

Penyelesaian :

Misalkan W menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi sayap dan E menyatakan bahwa lalat mengalami mutasi mata.

a. $P(E\,|\,W)=\dfrac{P(E\cap W)}{P(W)}=\dfrac{0{,}10}{0{,}25}=\dfrac{2}{5}.$

b. $P(W\,|\,E)=\dfrac{P(W\cap E)}{P(E)}=\dfrac{0{,}10}{0{,}15}=\dfrac{2}{3}.$

c. $P(W \cup E) = P(W) + P(E) - P(W \cap E)$
$= 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10$
$= 0{,}30.$

Soal 7

Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}8$ dan P(B) = 0,7.

(a) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
(b) Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
(c) Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}777$? Beri alasan.
(d) Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}8 + 0{,}7 - P(A \cap B)$
$= 1{,}5 - P(A \cap B)$
dan $P(A \cup B) \leq 1$ maka $P(A \cap B)$ tidak mungkin sama dengan 0,1.
b) Nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,5.
c) Karena $A \cap B \subset A$ dan $A \cap B \subset$ B maka

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0{,}8$$

dan $P(A \cap B) \leq P(B) = 0{,}7$ sehingga $P(A \cap B) \leq 0{,}7$. Berarti $P(A \cap B)$ tidak mungkin 0,777.

d) Nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$ adalah 0,7.

Soal 8

Misalkan bahwa bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) > 1$.

(a) Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

(b) Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?

Penyelesaian :

a) Karena

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

maka dan $P(A \cup B) \leq 1$ maka $P(A \cap B)$ nilai terkecil yang mungkin adalah $P(A) + P(B) - 1$.

e) Karena $A \cap B \subset A$ dan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ maka

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A})$$

dan $P(A \cap B) \leq P(B)$ sehingga $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

Berarti nilai terbesar dari $P(A \cap B)$ adalah $\min\{P(A), P(B)\}$.

Soal 9

Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$? Dapatkah A dan B saling asing jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$? Beri alasan.

Penyelesaian :

Jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}7$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}7 = 1{,}1$$

sehingga A dan B tidak mungkin saling asing sedangkan jika $P(A) = 0{,}4$ dan $P(B) = 0{,}3$ dan kejadian A, B saling asing maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Berarti hal itu dimungkinkan sehingga A dan B mungkin saling asing.

Soal 10

Jika A dan B saling bebas maka tunjukkan bahwa

a. A^c dan B juga saling bebas.

b. A dan B^c juga saling bebas.

c. A^c dan B^c juga saling bebas.

Bukti

a. Karena $A^c \cap B = B - (A \cap B)$ dan maka

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

dan karena A dan B saling bebas maka $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$ sehingga

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A)\ P(B) \\ &= P(B)\ (1 - P(A)) \\ &= P(B)\ P(A^c) \\ &= P(A^c)\ P(B). \end{aligned}$$

Hal itu berarti, kejadian B dan A^c saling bebas.

b. Analog dengan a.

c. Karena
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c\ ) &= P(\ (A \cup B)^c\ ) \\ &= 1 - P(\ A \cup B\ ) \\ &= 1 - (\ P(A) + P(B) - P(A \cap B\ )\ ) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\ P(B) \\ &= (\ 1 - P(A))\ (1 - P(B)) \\ &= P(A^c\ )\ P(B^c\ ) \end{aligned}$$

dengan mengingat A dan B saling bebas.

Soal 11

Misalkan $n(X)$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X.
Jika $n(A \cup B) = 10$ dan $n(A) = 4$, maka tentukan nilai yang mungkin untuk $n(B)$.

Penyelesaian

Karena $n(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = n(\mathrm{A}) + n(B) - n(A \cap \mathrm{B})$ maka

$$\begin{aligned} 10 &= 4 + n(B) - n(A \cap \mathrm{B}) \\ n(B) - n(A \cap \mathrm{B}) &= 6 \end{aligned}$$

sehingga $0 \leq n(A \cap \mathrm{B}) \leq n(B)$ atau $0 \leq n(A \cap \mathrm{B}) \leq 4$. Akibatnya

$$6 \leq n(B) \leq 10.$$

Karena $n(B)$ adalah bilangan bulat tak negatif maka $n(B) = 6, 7, 8, 9$ atau 10.

Soal 12

Sebuah titik (x,y) diambil secara random dari dalam persegi panjang dengan titik sudut (0,0), (2,0), (2,1) dan (0,1). Berapakah probabilitas bahwa $x < y$?

Penyelesaian

Persegi panjang yang dimaksudkan dinyatakan dalam daerah yang diarsir dengan luas 2 satuan luas. Luas bagian di sebelah kiri garis $y = x$ ditunjukkan pada gambar dengan luas ½. Hal itu berarti bahwa titik (x,y) yang dipilih secara random dalam persegi panjang akan memiliki $x < y$ adalah (1/2)/2 = ¼.

Soal 13

Misalkan S adalah kumpulan permutasi dari bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dengan suku pertama permutasi tersebut bukan 1. Sebuah permutasi dipilih secara random dari S. Probabilitas bahwa suku kedua dari permutasi yang dipilih adalah 2, dalam bentuk paling sederhana adalah a/b. Berapakah $a + b$?

Penyelesaian

Karena bilangan 1 tidak bisa menjadi suku pertama maka banyaknya cara membuat urutan permutasi yang dapat diterima adalah

$$4.4.3.2.1=96.$$

dan banyaknya cara sehingga angka 2 berada pada suku kedua dari permutasi yang dapat diterima adalah

$$3.1.3.2.1=18.$$

Akibatnya probabilitas bahwa 2 akan muncul sebagai suku kedua pada permutasi yang dapat diterima adalah 18/96 = 3/16. Hal itu berarti

$$a + b = 3 + 16 = 19.$$

Soal 14

Misalkan bahwa seorang perempuan dengan golongan darah tipe **O** dan golangan darah **AB** mempunyai pasangan kembar laki-laki dengan golongan darah tipe **B**. Jika diketahui bahwa mendekati seperempat dari semua pasangan kembar berasal dari satu telur, berapa probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur ?

Penyelesaian

Misalkan kejadian E adalah kejadian bahwa pasangan kembar berasal dari satu telur dan kejadian B adalah kejadian bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B**. Akan ditentukan probabilitasnya bahwa pasangan kembar ini berasal dari satu telur dengan syarat bahwa pasangan kembar anak mempunyai golongan darah tipe **B** adalah

$$P(E|B) = \frac{P(B|E)P(E)}{P(B|E)P(E) + P(B|E^c)P(E^c)}$$

$$= \frac{(1/4)(1/2)}{(1/4)(1/2)+(3/4)(1/4)}$$

$$= \frac{1/8}{5/16}.$$

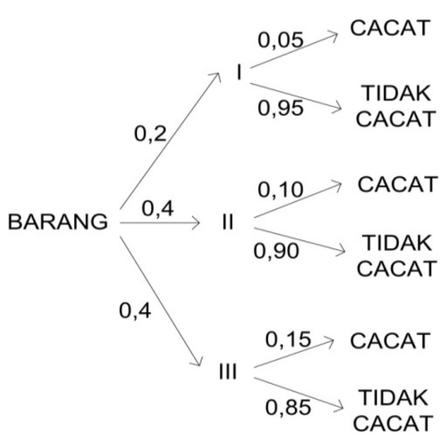
$$= \frac{2}{5}.$$

Soal 15

Tiga mesin **I**, **II** dan **III** masing-masing menghasilkan 20 %, 40%, 40% dari jumlah seluruh produksi. Dari masing- masing terdapat 5 % , 10 % dan 15 % produk yang cacat. Satu produk diambil secara random dan diperiksa dan ternyata cacat. Berapa probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** ?

Penyelesaian

Berdasarkan informasi di atas, dapat dibuat diagram pohon probabilitas berikut ini :



Gambar II.10 Diagram Pohon Probabilitas

Akibatnya probabilitas bahwa produk tersebut dihasilkan oleh mesin **I** dengan syarat produk tersebut cacat adalah

$$\begin{aligned} P(I \mid D) &= \frac{P(D \mid I)\,P(I)}{P(D \mid I)\,P(I) + P(D \mid II)\,P(II) + P(D \mid III)\,P(I)} \\ &= \frac{(0{,}05)(0{,}2)}{(0{,}05)(0{,}2) + (0{,}1)(0{,}4) + (0{,}15)(0{,}4)} \\ &= \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}06} \\ &= \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

LATIHAN

1. Jika $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ dan $P(A) < P(A|B)$ maka tunjukkan bahwa $P(B) < P(B|A)$.
2. Diketahui bahwa suatu ruang sampel dari 5 kejadian sederhana E_1, E_2, E_3, E_4 dan E_5.
   a. Jika $P(E_1) = P(E_2) = 0{,}15$, $P(E_3) = 0{,}4$ dan $P(E_4) = 2P(E_5)$ maka tentukan $P(E_4)$ dan $P(E_5)$.
   b. Jika $P(E_1) = 3P(E_2) = 0{,}3$ maka tentukan probabilitas dari kejadian sederhana yang lain jika diketahui bahwa ketiga kejadian yang lain mempunyai probabilitas yang sama untuk terjadi.
3. Jika dua kejadian A dan B sehingga $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ dan $P(A \cap B) = 0{,}1$ maka tentukan :
   a. $P(A|B)$.
   b. $P(B|A)$.
   c. $P(A|A \cup B)$.
   d. $P(A|A \cap B)$.
   e. $P(A \cap B|A \cup B)$.
4. Misalkan A dan B adalah 2 kejadian dari ruang probabilitas berhingga S sehingga $P(A \cap B) = 1/5$, $P(A^c) = 1/3$ dan $P(B) = ½$.
   a. Tentukan $P(A \cup B)$.
   b. Tentukan $P(A^c \cap B^c)$.
5. Misalkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}3$.
   a. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}1$? Beri alasan.
   b. Berapakah nilai terkecil untuk $P(A \cap B)$?
   c. Apakah mungkin bahwa $P(A \cap B) = 0{,}7$? Beri alasan.
   d. Berapakah nilai terbesar untuk $P(A \cap B)$?
6. Misalkan bahwa bahwa A dan B adalah kejadian-kejadian sehingga $P(A) + P(B) < 1$.
   a. Apakah nilai terkecil yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
   b. Apakah nilai terbesar yang mungkin untuk $P(A \cap B)$?
7. Jika A dan B adalah dua kejadian maka buktikan bahwa

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c).$$

8. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian maka buktikan bahwa

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c).$$

9. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian yang mempunyai probabilitas yang sama maka berapakah nilai terkecil untuk $P(A)$ sehingga $P(A \cap B \cap C)$ selalu melebihi 0,95.
10. Disediakan 6 bilangan positif dan 8 bilangan negatif. Empat buah bilangan diambil secara random. Berapakah probabilitas bahwa perkalian empat bilangan tersebut akan merupakan bilangan positif ?
11. Jika x dan y adalah dua buah bilangan positif lebih dari 0 tapi kurang dari 4, berapakah probabilitas bahwa jumlah x dan y kurang dari 2 ?
12. Jika faktor positif dari 2014 diambil secara random, berapakah probabilitas yang terambil adalah bilangan bulat ?
13. Sebuah titik P dipilih secara random dari bagian dalam sebuah segi lima dengan titik sudut A(0,2), B(4,0), C($2\pi + 1$, 0), D($2\pi + 1$, 4) dan E(0,4). Berapakah probabilitas bahwa sudut APB adalah sebuah sudut tumpul ?
14. Pada sebuah dadu biasa, salah satu noktahnya dihilangkan secara random dengan kemungkinan yang sama bahwa setiap noktah akan terpilih. Dadu tersebut kemudian digulingkan. Berapakah probabilitas bahwa sisi yang muncul memiliki noktah berjumlah ganjil ?
15. Proporsi golongan darah **A**, **B**, **AB** dan **O** di suatu suku berturut-turut adalah 0,41; 0,10; 0,04 dan 0,45. Seseorang diambil dari populasi suku tersebut.
    a. Daftarlah ruang sampel dari eksperimen.
    b. Gunakan informasi tersebut untuk menentukan probabilitas dari masing-masing kejadian sederhana.
    c. Berapa probabilitas bahwa seseorang yang dipilih secara random dari populasi suku tersebut maka tentukan probabilitasnya mempunyai golongan darah **A** atau **AB**.
16. Suatu survei mengklasifikasikan sejumlah besar orang dewasa ke dalam apakah mereka perlu kaca mata baca dan apakah mereka

menggunakan kaca mata ketika membaca. Tabel berikut ini menyatakan proporsi dari masing-masing kategori :

Menggunakan kaca mata untuk membaca Perlu kaca mata	Ya	Tidak
Ya	0,44	0,14
Tidak	0,02	0,40

Jika seorang dewasa dipilih secara random dari sejumlah besar kelompok tersebut maka tentukan probabilitas kejadian yang didefinisikan sebagai berikut :

a. Perlu kaca mata.
b. Perlu kaca mata tetapi tidak menggunakan kaca mata.
c. Menggunakan kaca mata baik perlu kaca mata maupun tidak.

17. Jika diketahui kejadian A dan kejadian B sehingga $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ dan $P(A \cap B) = 0{,}1$ maka tentukan :
    a. $P(A \mid B)$.
    b. $P(B \mid A)$.
    c. $P(A \mid A \cup B)$.
    d. $P(A \mid A \cap B)$.
    e. $P(A \cap B \mid A \cup B)$.
18. Jika A dan B adalah dua kejadian sehingga $B \subset A$ maka kenapa jelas bahwa $P(B) \le P(A)$.
19. Misalkan bahwa $A \subset B$ dan $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$. Tunjukkan bahwa $P(B|A) = 1$ dan $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.
20. Jika A dan B dua kejadian yang saling asing dan $P(B) > 0$ maka tunjukkan bahwa :
$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$
21. Jika $P(B) > 0$ maka :
    a. Tunjukkan bahwa $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$.

b. Tunjukkan bahwa secara umum dua pernyataan berikut ini salah :
   (i) $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$.
   (ii) $P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$.

22. Jika $P(B) = p$, $P(A^c|B) = q$ dan $P(A^c \cap B^c) = r$ maka tentukan :
    a. $P(A \cap B^c)$.
    b. $P(A)$.
    c. $P(B|A)$.
23. Tunjukkan bahwa untuk sebarang tiga kejadian A, B dan C dengan $P(C) > 0$ berlaku :
    $$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C).$$
24. Jika kejadian A dan kejadian B saling bebas maka buktikan juga dua kejadian berikut juga saling bebas :
    a. A^c dan B,
    b. A dan B^c,
    c. A^c dan B^c.
25. Sebuah kotak berisi 3 kelereng dan 2 kelereng merah, sementara yang lain berisi 2 kelereng biru dan 5 kelereng merah. Sebuah kotak diambil secara random dari salah satu kotak adalah biru. Berapakah probabilitas bahwa kelereng biru tersebut berasal dari kotak pertama ?

*****

BAB III
DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel S. Variabel random adalah fungsi berharga real yang didefinisikan pada ruang sampel S.

Contoh III.1

Suatu pemungutan suara dilakukan untuk memilih wakil rakyat di provinsi Jawa Tengah yang terdiri dari : Joko, Bambang dan Cokro. Kita tertarik untuk menyelidiki banyak suara yang memilih suatu wakil rakyat tertentu yang dicalonkan. Kejadian tersebut memunculkan adanya variabel random yaitu banyak suara di provinsi Jawa Tengah yang mencalonkan wakil rakyat tertentu.

Variabel random mempunyai akibat merubah kejadian dalam ruang sampel ke dalam kejadian numerik sehingga variabel random dapat dipandang sebagai

$$f : \text{Ruang Sampel } S \rightarrow \text{ Real } \boldsymbol{R}.$$

Jika variabel random Y hanya dapat berharga sebanyak terbilang bilangan real maka Y disebut variabel random diskrit .

Contoh III .2 :

Banyak telur busuk dalam suatu kotak yang berisi 100 butir telur.

III.1 Distribusi Probabilitas dari Variabel Random Diskrit .

Contoh III .3 :

Seorang manajer mempunyai pekerja yang terdiri dari 2 wanita dan 3 pria. Ia ingin memilih dua pekerja untuk suatu pekerjaan khusus. Keputusan yang diambil adalah memilih secara random 2 pekerja dari pekerja yang dimilikinya. Jika Y adalah banyak wanita yang terpilih maka tentukan distribusi probabilitas Y.

Penyelesaian :

Dari 2 pekerja wanita dan 3 pekerja pria yang tersedia, banyaknya cara untuk memilih 2 pekerja adalah

$$\binom{5}{2}.$$

Dari 2 orang pekerja yang terpilih, banyak pekerja wanita Y yang terpilih dapat bernilai 0, 1 atau 2. Hal itu berarti jika terpilih 0 pekerja wanita maka banyak pekerja pria yang terpilih sebanyak 2 orang sehingga banyak cara terpilih 0 pekerja wanita dari 2 pekerja wanita yang tersedia dan 2 pekerja pria dari 3 pekerja pria yang tersedia adalah

$$\binom{2}{0}\binom{3}{2}.$$

Akibatnya probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 0 adalah

$$P(Y=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}.$$

Dengan cara yang sama probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 1 orang adalah

$$P(Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}.$$

Probabilitas mendapatkan banyak pekerja wanita yang terpilih 2 orang adalah

$$P(Y=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}.$$

Distribusi probabilitas dari variabel random diskrit Y dapat dinyatakan dengan tabel dan rumus.

Distribusi probabilitas pada Contoh III.3, dapat dinyatakan dalam Tabel III. 1.

Tabel III. 1 Tabel distribusi probabilitas variable random Y.

Y	$P(Y = y)$
0	1/10
1	6/10
2	3/10

Distribusi probabilitas pada Contoh III.3 dapat dinyatakan dalam rumus :

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{\binom{2}{y}\binom{3}{2-y}}{\binom{5}{2}}$$

untuk $y = 0, 1, 2$.

Dalam sebarang distribusi probabilitas diskrit berlaku sifat -sifat sebagai berikut :

1. $0 \le p(y) \le 1$ untuk semua y.
2. $\sum_{y} p(y) = 1$.

Catatan : Distribusi probabilitas yang didapatkan di atas merupakan model dan bukan merupakan pernyatan yang tepat untuk distribusi frekuensi dari data nyata yang terjadi di alam.

III.2 Variabel random

Misalkan sebuah eksperimen mempunyai ruang sampel S. Variabel random adalah fungsi berharga real yang didefinisikan atas ruang sampel S.

f : Ruang sampel $\rightarrow$ Himpunan Bilangan Real.

Contoh III. 4 :

Percobaan melanturkan satu mata uang tiga kali. Ruang sampel

S = { MMM, MMB, MBM , BMM , BMB, BBM, MBB, BBB }.

Apabila diinginkan untuk meneliti banyak ' muka ' yang muncul pada tiap titik sampel maka hasil numerik 0, 1, 2 atau 3 akan dikaitkan dengan titik sampel. Misalkan $Y(s)$ = banyak muka dalam S dengan $s \in S$. Fungsi

$$Y : S \rightarrow R$$

dengan $Y(s) = y$. Bilangan 0, 1, 2 dan 3 merupakan pengamatan yang mungkin .

Kejadian sederhana	Y
MMM	3
MMB	2
MBM	2
BMM	2
BBM	1
MBB	1
BMB	1
BBB	0

III.3 Distribusi Probabilitas Diskrit

Suatu variabel random diskrit mempunyai nilai dengan probabilitas tertentu .

Contoh III. 5

Dalam percobaan melantunkan satu mata uang ”jujur” tiga kali. Variabel random Y menyatakan banyak ”muka” yang muncul maka dapat ditentukan probabilitas mendapat Y ”muka”. Tabel berikut ini menyatakan probabilitas mendapatkan Y ”muka”.

Y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Definisi III.3

Fungsi $f(y)$ adalah suatu fungsi probabilitas atau distribusi atau distribusi probabilitas dari suatu variabel random Y bila untuk setiap hasil yang mungkin

1. $f(y) \geq 0$.
2. $\sum_{y} f(y) = 1$.
3. $P(\ Y = y\ ) = f(y)$.

Distribusi probabilitas dari variabel random diskrit Y dapat dinyatakan dengan rumus dan tabel. Distribusi probabilitas pada Contoh III.5 dapat dinyatakan sbb :

$$P(Y = y) = f(y) = \binom{3}{y}(1/2)^3 = \frac{\binom{3}{y}}{8} \qquad \text{untuk } y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Contoh III.6

Variabel random Y mempunyai fungsi probabilitas yang didefinisikan sebagai

$$f(y) = 2^{-y}$$

untuk $y = 1, 2, 3, \ldots.$ Tentukan

a. $P(\ Y \leq -3\ )$.

b. $P(\ Y \leq 3\ )$, $P(Y < 3\ )$, $P(Y > 3)$.

c. $P($ Y bilangan genap).

Penyelesaian :

a. $P(Y \leq -3\ ) = 0$.

b. $P(Y \leq 3) = P(Y = 1) + \mathrm{P}(Y = 2) + \mathrm{P}(Y = 3)$

$= (\ 1/2\ ) + (1/4) + (1/8)$

$= 7/8$.

$P(Y < 3) = P(Y = 1) + P(Y = 2\ )$

$= (\ 1/2\ ) + (\ 1/4\ )$

$= 3/4$.

$P(Y > 2) = P(\ Y = 3\ ) + P(Y = 4\ ) + P(\ Y = 5\ ) + \ldots\ldots$

$= 1 - [\, P(\, Y = 1) + P(\, Y = 2\,)\,]$
$= 1 - (1/2) - (1/4)$
$= 1/4.$

c. $P(Y$ bilangan genap $) = P(\, Y = 2\,) + P(\, Y = 4\,) + P(\, Y = 6\,) + \ldots.$
$= (1/4) + (1/16) + (1/32) + \ldots.$
$= (1/4) / (1-(1/4))$
$= (1/4)/(3/4)$
$= 1/3.$

Jika suatu ruang sampel mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya atau anggotanya sama banyaknya dengan bilangan asli maka ruang sampel itu disebut **ruang sampel diskrit** dan variabel random yang didefinisikan pada ruang sampel diskrit disebut **variabel random diskrit**. Contoh III.1 merupakan salah satu contoh variabel random diskrit .

Contoh III.7

Percobaan mengambil sebuah bolam dari suatu kotak yang berisi 5 bolam rusak dan 5 bolam baik dengan pengembalian sampai didapatkan bolam rusak .

Ruang sampel $S = \{$ R, BR , BBR , BBBR, … $\}$.

Variabel random $Y(s)$ adalah banyak pengambilan yang harus dilakukan sampai mendapatkan bolam rusak yang pertama dengan $s \in S$.

Y(R) $= 1$,
Y(BR) $= 2$,
Y(BBR) $= 3$,
....

$Y(s)$ merupakan variabel random diskrit pada ruang sampel diskrit S.

III.4 Distribusi Probabilitas Binomial

Eksperimen Binomial adalah eksperimen yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Eksperimen mengandung n trial yang identik.
2. Setiap trial menghasilkan 2 hasil yang mungkin yang dinamakan sukses (S) dan tidak sukses (F).

3. Untuk tiap trial, probabilitas sukses adalah $p = P(S)$ dan probabilitas tidak sukses adalah $P(F) = 1 - p = q$.
4. Trial-trial itu independen.
5. Variabel random Y adalah banyak sukses yang ditemukan dalam n trial.

Contoh III. 4 :

Suatu sistem yang dapat mendeteksi pesawat terbang, mengandung 4 unit radar identik yang beroperasi secara independen satu dengan yang lain. Anggap masing-masing radar mempunyai probabilitas 0,95 untuk dapat mendeteksi pesawat terbang musuh. Pada saat pesawat terbang musuh memasuki daerah jangkauan sistem radar tersebut, kita tertarik untuk mengamati variabel random Y, yaitu banyak unit radar yang tidak mendeteksi pesawat musuh. Apakah hal ini merupakan eksperimen binomial ?

Penyelesaian :

Untuk memutuskan apakah hal tersebut merupakan eksperimen binomial perlu diuji apakah setiap sifat dari eksperimen binomial dipenuhi. Jika Y = banyak unit radar yang tidak mendeteksi pesawat terbang maka kejadian "tidak mendeteksi " adalah hasil yang sukses (S).

1. Eksperimen mengandung 4 trial. Suatu trial menentukan apakah unit radar tertentu mendeteksi pesawat terbang musuh.
2. Setiap trial menghasilkan 2 hasil. S menyatakan bahwa pesawat terbang tidak dideteksi. Sedangkan F menyatakan bahwa pesawat musuh dideteksi.
3. Karena semua unit radar mendeteksi pesawat musuh dengan probabilitas yang sama maka $P(\text{S}) = p = P(\text{tidak mendeteksi}) = 0{,}05$.
4. Trial-trial independen karena tiap unit radar beroperasi secara independen.
5. Variabel random Y adalah banyak sukses di dalam 4 trial.

Jadi eksperimen tersebut merupakan eksperimen binomial dengan $n = 4$, $p = 0{,}05$, dan $q = 0{,}95$.

III.5 Distribusi Probabilitas Poisson

Dalam praktek sehari-hari distribusi Poisson digunakan dalam penghitungan Y dari ”peristiwa-peristiwa yang jarang terjadi”, yaitu banyak kejadian suatu peristiwa dengan probabilitas p yang kecil dalam n trial independen (n besar) sehingga hanya diketahui harga Y rata-rata, yaitu $\mu = np$. Distribusi Poisson merupakan model yang baik untuk menentukan distribusi probabilitas dari banyak kecelakaan mobil, kecelakaan dalam industri, banyak partikel radio aktif yang meluruh dalam periode tertentu, dan banyak salah cetak/ketik yang dibuat dalam suatu lembar halaman.

Distribusi probabilitas Poisson dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$P(Y = y) = \frac{\mu^{y} e^{-\mu}}{y!}$$

untuk $y = 0, 1, 2, \ldots\ldots..$

Contoh III.8 :

Apabila probabilitas bahwa seorang individu akan mengalami reaksi yang buruk terhadap injeksi dari suatu serum adalah 0,001 maka tentukan probabilitas bahwa dari 2000 individu, tepat 3 individu akan mengalami reaksi buruk.

Penyelesaian :

Probabilitas bahwa seorang individu akan mengalami reaksi yang buruk terhadap injeksi dari suatu serum adalah 0,001 sehingga probabilitas bahwa dari 2000 individu akan tepat 3 individu yang mengalami reaksi buruk merupakan distribusi Poisson dengan $\lambda = np = 2000(0{,}001) = 2$ sehingga probabilitas tepat 3 individu yang mengalami reaksi buruk adalah

$$P(Y=3)=\frac{2^{3}\, e^{-2}}{3!}=\frac{8e^{-2}}{6}=0{,}1839.$$

III.6 Distribusi Probabilitas Hipergeometrik

Misalkan terdapat N benda yang terdiri atas k benda yang diberi nama 'sukses' sedangkan sisanya N-k akan diberi nama 'gagal'. Akan ditentukan probabilitas memilih Y sukses dari sebanyak k yang tersedia dan n-k gagal dari sebanyak N-k yang tersedia apabila sampel acak ukuran n diambil dari N benda.

Definisi III.4

Banyaknya sukses Y dalam percobaan geometrik dinamakan variabel random hipergeometrik. Distribusi probabilitas peubah acak hipergeometrik Y yaitu banyaknya sukses sampel acak ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung k bernama sukses dan N-k bernama gagal adalah

$$P(Y = y) = \frac{\binom{k}{y}\binom{N-k}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

untuk $y = 0, 1, 2, \dots , n$.

Contoh III. 9

Suatu kotak berisi 40 suku cadang dikatakan dapat diterima bila mengandung paling banyak 3 yang cacat. Suatu kotak akan ditolak bila sampel acak ukuran 5 suku cadang yang terpilih mengandung satu yang cacat. Berapakah probabilitas mendapatkan tepat satu yang cacat dalam sampel bila kotak tersebut mengandung tiga suku cadang yang cacat ?

Penyelesaian :

Misalkan variabel random Y menyatakan banyaknya suku cadang cacat yang terambil. Dengan menggunakan distribusi hipergeometrik untuk $n = 5$, $N = 40$, $k = 3$ dan $Y = 1$, probabilitas mendapatkan tepat satu yang cacat adalah

$$P(Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0{,}3011.$$

III.7 Distribusi Binomial Negatif dan Distribusi Geometrik

Bila usaha yang saling bebas dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan probabilitas p sedangkan gagal dengan probabilitas $q = 1 - p$ maka distribusi probabilitas variabel random Y yaitu banyaknya usaha yang berakhir tepat pada sukses ke-k dinyatakan dengan

$$P(Y=y;k,p)=\binom{y-1}{k-1}p^k\,q^{y-k}$$

untuk $y = k, k + 1, k + 2, \ldots\ldots.$

Contoh III.10

Probabilitas bahwa seseorang yang melantunkan tiga uang logam sekaligus akan mendapatkan semuanya muka atau semuanya belakang untuk kedua kalinya pada lantunan kelima adalah

$$P(Y=5;2,1/4)=\binom{4}{1}(1/4)^2\,(3/4)^3=27/256.$$

Distribusi geometrik merupakan kejadian khusus dari distribusi binomial negatif yaitu bila diambil $k = 1$.

Bila usaha yang saling bebas dan dilakukan berulang kali menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang $q = 1 - p$ maka distribusi probabilitas peubah acak Y yaitu banyaknya usaha yang berakhir pada sukses yang pertama dinyatakan dengan

$$P(Y=y)=p\,q^{y-1}$$

untuk $y = 1, 2, 3, \ldots.$

Contoh III.11

Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata 1 diantara 100 butir hasil produksi adalah cacat. Probabilitas memeriksa 5 barang dan baru menemukan barang yang cacat pada pemeriksaan yang kelima ?

Penyelesaian :

Variabel random Y menyatakan banyaknya pemeriksaan yang harus dilakukan sampai mendapatkan barang cacat yang pertama. Probabilitas menemukan barang cacat yang pertama pada pemeriksaan kelima adalah

$$P(Y = 5) = (0,01)\,(0,99)^4 = 0,0096.$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Variabel random diskrit X mempunyai fungsi probabilitas berbentuk

$$f(x) = c(8-x)$$

untuk $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dan nol untuk x yang lain.

a. Tentukan c.
b. Tentukan fungsi distribusi $F(x)$.
c. Tentukan $P(X > 2)$.

Penyelesaian

a. Karena $f(x)$ fungsi probabilitas maka $\sum_{x=0}^{5} c(8-x) = 1$ sehingga

$$c\,[\,8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3\,] = 1$$
$$33\,c = 1.$$

Berarti $c = 1/33$.

b. Fungsi distribusi $F(x) = P(X \le x)$ sehingga

$$F(x) = 0 \quad \text{untuk } x < 0,$$
$$= \frac{8}{33} \quad \text{untuk } 0 \le x < 1,$$
$$= \frac{15}{33} \quad \text{untuk } 1 \le x < 2,$$
$$= \frac{21}{33} \quad \text{untuk } 1 \le x < 2,$$
$$= \frac{26}{33} \quad \text{untuk } 2 \le x < 3,$$
$$= \frac{30}{33} \quad \text{untuk } 4 \le x < 5,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } x > 5.$$

c. $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{21}{33} = \frac{12}{33}$.

Soal 2

Variabel random bernilai bilangan bulat tidak negatif X mempunyai fungsi distribusi berbentuk

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

untuk x = 0, 1, 2, ... dan $F(x) = 0$ untuk $x < 0$.

a. Tentukan fungsi probabilitas dari X.
b. $P(10 < X \leq 20)$.
c. $P(X$ genap).

Penyelesaian

a. Karena $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ untuk x = 0, 1, 2, ... maka

   $F(0) = ½$,

   $$F(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

   $$F(2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

   $$F(3) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

   Hal itu berarti,

   $$f(x) = F(x) - F(x-1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

   untuk x = 0, 1, 2, ...

b. $P(10 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$

   $$= F(20) - F(10)$$

   $$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$$

   $$= \left(\frac{1}{2}\right)^{11} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}.$$

c. $P(X \text{ genap}) = \sum_{x=0}^{\infty} f(2x) = \sum_{x=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}\right)$

$$= \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right) + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Soal 3

Variabel random diskrit mempunyai fungsi probabilitas $f(x)$.

a. Jika $f(x) = k\ (1/2)^x$ untuk $x = 1, 2, 3$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain maka tentukan k.
b. Adakah fungsi berbentuk

$$f(x) = k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \frac{1}{2}\right]$$

untuk $x = 0, 1, 2$ merupakan fungsi probabilitas untuk suatu k ?

Penyelesaian

a. Supaya $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas maka $\sum_{x} k\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 1$

sehingga $k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1$. Akibatnya $k = 8/7$.

b. Supaya $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas maka

$$\sum_{x} k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

sehingga

$$k\left(\frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = k\,0 = 1.$$

Akibatnya, tidak ada k yang memenuhi.

Soal 4

Suatu individu mempunyai probabilitas rata-rata dapat menyelesaikan suatu pekerjaan tertentu dalam waktu 1 menit sebesar 3/5. Misalkan bahwa pekerjaan tersebut dicoba diselesaikan oleh 10 individu, berapa probabilitasnya tepat 7 individu yang menyelesaikan pekerjaan tersebut dalam waktu 1 menit ?

Penyelesaian

Dalam hal ini, percobaan ini adalah percobaan binomial dengan n = 10, k = 7 dan p = 3/5 sehingga probabilitasnya tepat 7 individu yang menyelesaikan pekerjaan tersebut dalam waktu 1 menit adalah

$$P(X=7)=\binom{10}{7}0{,}6^7\,(0{,}4)^{10-7}=0{,}215.$$

Soal 5

Untuk distribusi Poisson dengan parameter μ, buktikan bahwa

a. $P(k+1)=\dfrac{\mu}{k+1}P(k).$

b. $P(k+2)=\dfrac{\mu^2}{(k+2)(k+1)}P(k).$

Penyelesaian

a. Karena $P(k)=\dfrac{e^{-\mu}\,\mu^k}{k!}$ maka

$$P(k+1)=\frac{e^{-\mu}\,\mu^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{\mu}{k+1}.\frac{e^{-\mu}\,\mu^k}{k!}=\frac{\mu}{k+1}P(k).$$

b. Karena $P(k)=\dfrac{e^{-\mu}\,\mu^k}{k!}$ maka

$$P(k+2)=\frac{e^{-\mu}\,\mu^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{\mu^2}{(k+2)(k+1)}.\frac{e^{-\mu}\,\mu^k}{k!}=\frac{\mu^2}{(k+2)(k+1)}P(k).$$

Soal 6

Tunjukkan bahwa tidak ada k sehingga

$f(x) = k/x$ untuk x = 1, 2, 3, …..
$= 0$ untuk x yang lain,

merupakan fungsi probabilitas.

Penyelesaian

Andaikan $f(x)$ fungsi probabilitas maka

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{k}{x} = k \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = 1$$

dan karena $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$ merupakan deret divergen maka tidak ada k sehingga $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$ dan hal itu berarti tidak ada k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas.

Soal 7

Misalkan fungsi probabilitas

$$f(x) = k \text{ untuk } x = 1, 2, 3, \ldots, N,$$
$$= 0 \text{ untuk } x \text{ yang lain.}$$

a. Tentukan k.
b. Tentukan fungsi distribusinya.

Penyelesaian

a. Karena $f(x)$ fungsi probabilitas maka

$$\sum_{x=1}^{N} f(x) = \sum_{x=1}^{N} k = k\,N = 1$$

sehingga $k = 1/N$.

b. Fungsi distribusinya adalah

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{[x]} \frac{1}{N} = \frac{[x]}{N}$$

dengan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Soal 8

Apabila 10 % dari bolam yang diproduksi oleh suatu mesin rusak maka tentukan probabilitas bahwa 4 bolam yang dipilih secara random akan rusak :

a. Satu bolam.

b. Tidak ada.
c. Kurang dari dua.

Penyelesaian

Probabilitas sebuah bolam akan rusak adalah sebesar p=0,1 sedangkan probabilitas sebuah bolam tidak rusak adalah

$$q = 1 - p = 1\text{-}0{,}1 = 0{,}9.$$

Misalkan X menyatakan banyaknya bolam yang rusak. Variabel random X akan mempunyai distribusi binomial dengan parameter n = 4 dan p = 0,1.

a. Probabilitas terdapat satu bolam yang rusak adalah

$$P(X=1)=\binom{4}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^{4-1}=0{,}2916.$$

b. Probabilitas tidak ada bolam yang rusak adalah

$$P(X=0)=\binom{4}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{4-0}=0{,}6561.$$

c. Probabilitas kurang dari dua bolam rusak

$$\begin{aligned}P(X<2)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=\binom{4}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^{4-0}+\binom{4}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^3\\&= 0{,}2916 + 0{,}6561\\&= 0{,}9477.\end{aligned}$$

Soal 9

Jika 13 kartu dipilih sekaligus secara random dari setumpuk 52 kartu remi biasa maka tentukan

a. Probabilitas bahwa diperoleh 6 kartu bergambar.
b. Probabilitas bahwa tidak ada kartu bergambar yang diperoleh.

Penyelesaian

Karena terdapat 52 kartu dan diambil 13 kartu secara random maka probabilitas diperoleh 6 kartu bergambar adalah

$$\frac{\binom{12}{6}\binom{40}{7}}{\binom{52}{13}}=\frac{912(18.643.560)}{635.013.559.600}=0{,}0271.$$

Probabilitas tidak ada kartu bergambar yang diperoleh adalah

$$\frac{\binom{12}{0}\binom{40}{13}}{\binom{52}{13}}=\frac{1.203.322.880}{635.013.559.600}=0,0189.$$

Soal 10

Dalam pengkonstruksian model matematika populasi, diasumsikan bahwa probabilitas bahwa suatu keluarga mempunyai n anak adalah

$$p_n = (0,3)\ (0,7)^n$$

untuk n = 0, 1, 2, ….

a. Berapa probabilitas bahwa suatu keluarga tidak mempunyai anak ?
b. Berapa probabilitasnya suatu keluarga mempunyai anak kurang dari 4 anak?

Penyelesaian

a. Probabilitas bahwa suatu keluarga tidak mempunyai anak adalah

$$P(X=0)=p_0=(0,3)\,(0,7)^0=0,3.$$

b. Probabilitasnya suatu keluarga mempunyai anak kurang dari 4 anak adalah

$$\begin{aligned}
P(X<4) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3).\\
&= p_0+p_1+p_2+p_3\\
&=(0,3)\,(0,7)^0+(0,3)(0,7)^1+(0,3)\,(0,7)^2+(0,3)\,(0,7)^3\\
&=(0,3)(1+0,7+0,49+0,343)\\
&=0.7599.
\end{aligned}$$

LATIHAN

1. Sebuah mata uang yang baik dilambungkan 4 kali secara independen. Jika variabel random Y yang didefisikan dalam s, dengan $s \in S$ (sebuah mata uang logam mempunyai dua sisi, yang dinamakan muka (M) dan belakang (B)) maka tentukan :
   a. Himpunan harga - harga Y.
   b. Distribusi variabel random Y.
2. Untuk nilai c yang mana fungsi p yang didefinisikan

$$p(k) = c/[\,k\,(k+1)\,] \quad \text{untuk } k = 1, 2, \ldots,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } k \text{ yang lain}$$

   merupakan fungsi probabilitas ?
3. Variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas diskrit.

y	10	11	12	13	14
$p(y)$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

   Karena nilai di bawah Y dapat diasumsikan kejadian saling asing maka kejadian $\{ Y \leq 12 \}$ adalah gabungan dari kejadian saling asing

$$\{ Y = 10 \} \cup \{ Y = 11 \} \cup \{ Y = 12 \}.$$

   a. Tentukan $P(Y \leq 12)$.
   b. Tentukan $P(Y \leq 14)$.
   c. Tentukan $P(Y \leq 11$ atau $Y > 12)$.
   d. $P(Y > 12)$.
   e. $P(Y = 13)$.
4. Untuk nilai c berapa fungsi yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = cx^{\alpha}$$

   untuk $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ dan $0 < \alpha < 1$.
5. Misalkan variabel random X mengambil nilai-nilai 0, 1, 2, ... dengan probabilitas

$$f(j) = P(X = j) = c/3^{j}$$

   untuk $j = 0, 1, 2, \ldots.$
   a. Tentukan konstanta c.
   b. $P(X \geq 10)$.

c. Tentukan $P(X \in A)$ dengan

$$A = \{ j : j = 2k + 1, k = 0, 1, 2, ... \}.$$

d. Tentukan $P(X \in B)$ dengan

$$B = \{ j : j = 3k + 1, k = 0, 1, 2, ... \}.$$

6. Suatu variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas berikut

y	0	1	2	3	4	5
$p(y)$	0,1	0,3	0,4	0,1	?	0,05

a. Tentukan $p(4)$.

b. Gambarkan histogram dan grafik dari Y distribusi probabilitas Y.

7. Suatu perusahaan mempunyai 5 pelamar untuk 2 posisi yaitu 3 laki-laki dan 2 perempuan. Misalkan 5 pelamar mempunyai kualifikasi yang sama dan tidak ada pilih kasih untuk memilih salah satu jenis kelamin. Jika Y merupakan banyak perempuan yang terpilih untuk mengisi posisi tersebut maka

a. Tentukan $p(Y)$.

b. Gambarkan histogram untuk distribusi probabilitas Y.

8. Suatu kotak elektronika mengandung 6 transistor yang 2 diantaranya rusak. Tiga dari kotak diseleksi secara random dan diteliti. Jika Y menyatakan banyak transistor rusak yang terambil dengan $Y = 0$, 1 atau 2. Tentukan probabilitas untuk Y. Nyatakan grafik garisnya.

9. Diketahui Y adalah variabel random yang mempunyai distribusi Poisson dengan mean $\mu = 2$. Tentukan

a. $P(Y = 4)$.

b. $P(Y < 4)$.

c. $P(Y \geq 4)$.

d. $P(Y \geq 4 \mid Y \geq 2)$.

10. Probabilitas seekor tikus yang sudah terinjeksi dengan serum tertentu akan terserang penyakit adalah 0,2. Dengan menggunakan pendekatan Poisson, tentukan probabilitas bahwa paling banyak 3 dari 30 tikus yang diinjeksi akan terserang penyakit tersebut.

11. Probabilitas bahwa pasien yang terkena penyakit kanker usus besar dapat sembuh adalah 0,8. Apabila diketahui bahwa ada 20 orang yang menderita penyakit kanker usus besar maka :
    a. Berapakah probabilitasnya bahwa tepat 14 orang akan sembuh?
    b. Berapakah probabilitasnya bahwa paling sedikit 10 orang akan sembuh?
    c. Berapakah probabilitasnya paling sedikit 14 orang tetapi tidak lebih dari 18 orang akan sembuh?
    d. Berapakah probabilitasnya lebih dari lima orang akan sembuh?
12. Misalkan Y berdistribusi geometrik dengan probabilitas sukses p.
    a. Tunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat a berlaku
    $$P(Y > a) = q^a.$$
    b. Tunjukkan bahwa untuk bilangan positif a dan b berlaku
    $$P(Y > a + b \mid Y > a) = q^b = P(Y > b).$$
13. Jika X mempunyai distribusi Poisson dan $P(X = 0) = 0{,}2$ maka tentukan $P(X > 4)$.
14. Misalkan bahwa X mempunyai distribusi Poisson dengan mean 10. Tentukan $P(5 < X < 15)$ dan gunakan ketidaksamaan Chebychev untuk menentukan batas bawah dari $P(5 < X < 15)$.
15. Dalam 10 pertanyaan B-S, berapakah probabilitas bahwa semua jawaban benar bila hanya menebak jawabannya saja? Berapakah probabilitasnya minimal 8 jawaban benar bila hanya menebak jawabannya saja?
16. Misalkan X adalah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Jika $P(X = 1) = 0{,}1$ maka tentukan probabilitas bahwa $X > 5$.
17. Misalkan X adalah variabel random berdistribusi Poisson dengan parameter λ. Jika $P(X = 1) = P(X = 2)$ maka tentukan $P(X < 10)$. Jika $P(X = 1) = 0{,}1$ dan $P(X = 2) = 0{,}2$ maka hitung probabilitas bahwa $X = 0$.
18. Untuk distribusi Poisson dengan parameter μ, buktikan bahwa jika μ adalah bilangan bulat positif maka $P(k)$ maksimum ketika $k = \mu$.
19. Dari 20 pelamar ke suatu universitas, 5 di antaranya berasal dari Indonesia Timur. Jika 10 pelamar dipilih secara random maka tentukan probabilitas bahwa

a. 3 orang akan berasal dari Indonesia Timur.

b. tidak lebih dari 2 berasal dari Indonesia Timur.

20. Sebuah keluarga berkeinginan untuk memiliki 2 anak laki-laki. Keluarga tersebut akan selalu berusaha untuk mendapatkan 2 anak laki-laki dan berhenti berusaha jika telah diperoleh 2 anak laki-laki. Jika X menyatakan banyak anak yang diperoleh sampai didapat 2 anak laki-laki dan probabilitas untuk memperoleh anak laki-laki dan perempuan sama maka

    a. berapakah probabilitasnya mempunyai tepat 2 anak.

    b. berapa probabilitasnya mempunyai anak kurang dari empat.

*****

BAB IV
DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINU

Misalkan suatu eksperimen dilakukan dengan mencatat variabel random Y yang menunjukkan berat seorang mahasiswa (dalam kilogram) yang dipilih dari populasi mahasiswa UKSW. Pada prinsipnya harga Y dapat sebarang bilangan positif, seperti 52,37 kg berarti $Y > 0$. (Secara praktis harga Y akan berkisar antara 25 kg sampai 200 kg). Jika berat mahasiswa tersebut dapat diukur dengan ketepatan yang sempurna maka hal ini berarti Y akan mengambil harga pada suatu interval (yaitu $y \in (25,200)$).

Variabel random kontinu adalah variabel random yang mengambil harga pada sebarang harga dalam suatu interval.

Contoh IV.1

Panjang hidup t bola lampu merek ”XIYI” merupakan variabel random kontinu dengan $t > 0$.

Definisi IV.1

Fungsi $f(y)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas variabel random kontinu Y, yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real **R** bila

1. $f(y) \geq 0$ untuk semua $y \in$ R,
2. $\int f(y)\ dy = 1$,
3. $P(a < Y < b) = \int_a^b f(y)\,dy$.

Jika variable random Y kontinu maka untuk sebarang y berlaku $P(Y = y) = 0$, sehingga $P(\ a < Y \leq b\ ) = P(\ a < Y < b\ )$.

Contoh IV.2

Misalkan variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = y^2/3 \quad \text{untuk } -1 < y < 2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

a. Buktikan bahwa $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.

b. Hitunglah $P(0 < Y \leq 1)$.

Penyelesaian :

a. Karena $f(y) = y^2/3$ untuk $-1 < y < 2$ dan $f(y) = 0$ untuk y yang lain maka $f(y) \geq 0$ untuk setiap $y \in \mathbf{R}$.

Di samping itu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \int_{-1}^{2} \frac{y^2}{3}\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

Hal itu berarti bahwa $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.

b. $P(0 < Y \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{y^2}{3}\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_0^1 = \frac{1^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \frac{1}{9}$.

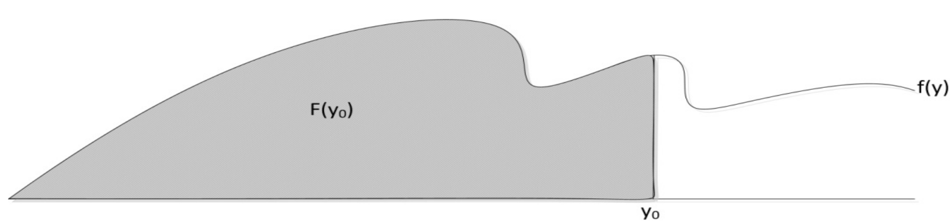
Definisi IV.2

Distribusi kumulatif $F(y)$ suatu variabel random kontinu Y dengan fungsi kepadatan $f(y)$ diberikan oleh

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt$$

dengan $f(t)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas dan t adalah variabel integrasi.

Secara grafik dapat dinyatakan hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif.



Gambar IV.1 Hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan fungsi distribusi kumulatif.

Fungsi distribusi variabel random kontinu harus merupakan fungsi kontinu, tetapi fungsi kepadatan probabilitas tidak perlu kontinu pada setiap titik.

Contoh IV.3 :

Diketahui variabel random Y kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 3y^2 \qquad 0 \leq y \leq 1,$$
$$= 0 \qquad \text{yang lain.}$$

Tentukan $F(y)$ dan gambar grafik $f(y)$ dan $F(y)$.

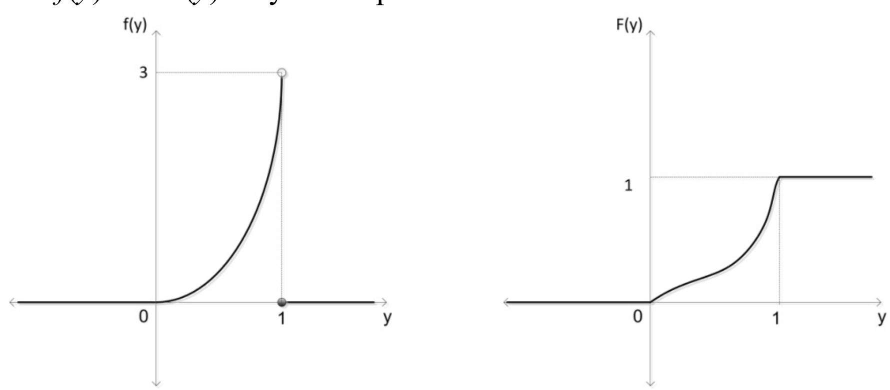
Penyelesaian

$$F(y) = \int_0^y 3t^2 \ dt = \left[t^3\right]_0^y = y^3 \quad \text{untuk } 0 < y < 1.$$

Hal itu berarti

$$F(y) = 0 \quad \text{untuk } y < 0,$$
$$= y^3 \quad \text{untuk } 0 < y < 1,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } y > 1.$$

Grafik $f(y)$ dan $F(y)$ dinyatakan pada Gambar IV.2.



Gambar IV.2 Grafik Fungsi Kepadatan Probabilitas dan Fungsi Distribusi.

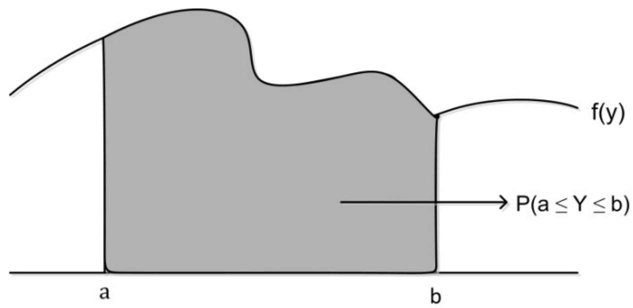
Fungsi $F(y_0)$ menyatakan probabilitas bahwa $Y \leq y_0$. Untuk menentukan probabilitas bahwa Y berada pada interval tertentu, misalnya $a \leq y \leq b$ digunakan rumus

$$P(a \le Y \le b) = \int_a^b f(y)\,dy$$

dengan *f(y)* adalah fungsi kepadatan probabilitas untuk *Y*. Hal itu berakibat bahwa

$$P(a \le Y \le b) = F(b) - F(a).$$

Probabilitas ini ditunjukkan dengan luas daerah arsiran pada Gambar IV.3.



Gambar IV.3 Hubungan antara fungsi kepadatan probabilitas dan $P(a \le Y \le b)$.

Contoh IV.4:

Tentukan probabilitas bahwa $1 \le Y \le 2$ untuk

$$f(y) = (3/8)y^2 \quad \text{untuk } 0 \le y \le 2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Penyelesaian

$$P(1 \le Y \le 2) = \int_1^2 f(y)\,dy$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{8} y^2\,dy$$

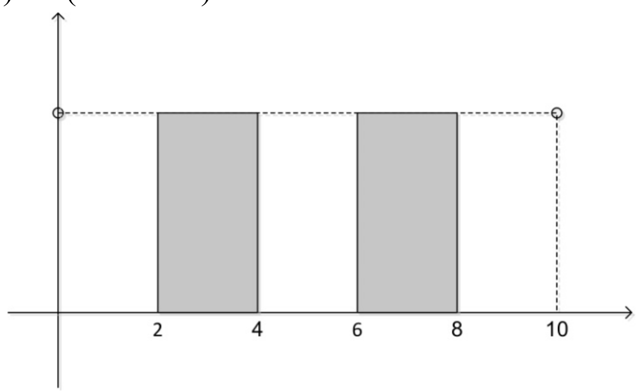
$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left[\frac{8-1}{3}\right]$$

$$= 7/8.$$

IV.2 Distribusi Seragam Kontinu

Misalkan bahwa sebuah bis selalu datang pada suatu halte antara pukul 08.00 dan 08.10 dan bis tersebut datang di halte tersebut pada sebarang interval bagian waktu tersebut sebanding dengan panjang interval bagian tersebut. Hal itu berarti bahwa bis akan mempunyai probabilitas yang sama untuk mendatangi halte antara 08.02 dan 08.04 dibandingkan dengan 08.06 dan 08.08. Model yang beralasan untuk mengambarkan hal di atas dinyatakan pada Gambar IV.4 karena $P(2 \leq Y \leq 4) = \mathrm{P}(6 \leq Y \leq 8)$.



Gambar IV.4 Fungsi Kepadatan Probabilitas Seragam

Definisi IV.2

Variabel random Y yang mempunyai distribusi seragam kontinu akan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \text{untuk } \theta_1 \leq y \leq \theta_2,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Konstanta yang menentukan bentuk khusus dari suatu fungsi kepadatan probabilitas dinamakan *parameter* dari fungsi kepadatan probabilitas. Kuantitas θ_1 dan θ_2 adalah parameter dari fungsi kepadatan probabilitas seragam.

Contoh IV.5

Kedatangan pelanggan pada suatu loket layanan bank mengikuti distribusi Poisson. Diketahui bahwa selama periode waktu 30 menit yang diberikan satu pelanggan datang pada loket. Tentukan probabilitas bahwa pelanggan akan datang 5 menit terakhir dari periode 30 menit tersebut.

Penyelesaian

Sebagaimana disebutkan di atas, waktu aktual kedatangan mengikuti distribusi seragam pada (0,30). Jika Y menyatakan waktu kedatangannya maka

$$P(25 \le Y \le 30) = \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dy = \frac{30-25}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Hal itu berarti bahwa probabilitas bahwa kedatangan akan terjadi dalam sebarang interval 5 menit akan mempunyai nilai 1/6.

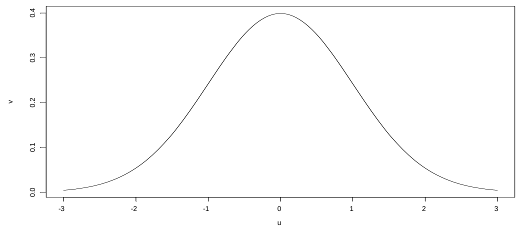
IV.3 Distribusi Normal

Dalam pasal ini akan dibahas tentang distribusi normal yang sangat penting dalam statistika teori maupun terapan. Distribusi ini banyak ditemui dalam pengukuran-pengukuran yang diperoleh dalam percobaan di laboratorium sains maupun pengukuran di bidang ilmu sosial. Pengukuran-pengukuran tersebut seringkali mempunyai distribusi yang berbentuk lonceng (*bell-shaped distribution*) sehingga dikatakan distribusi yang normal ditemui dan dikenal dengan nama distribusi normal. Nama lain dari distribusi normal adalah distribusi Gauss.

Variabel random kontinu Y dinyatakan berdistribusi normal dengan mean μ dan variasi σ^2 jika Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas berbentuk

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dengan $-\infty < y < \infty$. Fungsi kepadatan probabilitas normal mempunyai grafik seperti pada Gambar IV.5



Gambar IV.5 Grafik Distribusi Normal Baku N(0,1).

Sifat Distribusi Normal :

(a) Karena $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas maka jelas bahwa $f(y) \geq 0$ untuk $-\infty < y < \infty$.

(b) Sebagaimana tampak dalam grafik fungsi kepadatan probabilitas normal, grafik $f(y)$ simetrik terhadap $y = \mu$ dan mempunyai titik belok $y = \mu \pm \sigma$.

(c) Jika Z mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(0,1)$ maka Z dikatakan berdistribusi normal baku (*standard normal*), sehingga fungsi kepadatan probabilitas Z dinyatakan sebagai berikut :

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} .$$

Jika Y mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(\mu,\sigma^2)$ dan $X = aY + b$ maka X mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(a\,\mu + b,\ a^2\,\sigma^2)$.

(d) Jika Y mempunyai distribusi $N(\mu,\ \sigma^2)$ dan $Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ maka Z mempunyai distribusi $\boldsymbol{N}(0,1)$.

Contoh IV.6

Misalkan variabel random Z mempunyai distribusi normal dengan parameter mean $\mu = 0$ dan simpangan baku 1.

(a) $P(\ Z > 2) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 2)$
$\quad = 1 - 0{,}9772$
$\quad = 0{,}0228.$

(b) $P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - \mathrm{P}(Z < -2) - \mathrm{P}(Z > 2)$

$= 1 - 0{,}0228 - 0{,}0228$

$= 0{,}9544.$

(c) $P(0 \le Z \le 1{,}73) = 0{,}5 - P(Z > 1{,}73)$

$= 0{,}5 - 0{,}0418$

$= 0{,}4582.$

Contoh IV.7

Nilai ujian masuk UKSW untuk FSM berdistribusi Normal Baku dengan $\mu = 75$ dan $\sigma = 10$. Berapakah probabilitasnya seseorang mempunyai nilai antara 80 dan 90 ?

Penyelesaian :

Misalkan z menyatakan jarak dari mean distribusi normal yang dinyatakan dalam satuan simpangan baku.

Berarti $z = \dfrac{y - \mu}{\sigma}$ sehingga bagian dari populasi yang terletak antara

$$z_1 = \frac{80 - 75}{10} = 0{,}5 \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{90 - 75}{10} = 1{,}5$$

mempunyai luas

$$\begin{aligned} P(80 \le Y \le 90) &= P(0{,}5 \le Z \le 1{,}5) \\ &= P(Z \le 1{,}5) - P(Z < 0{,}5) \\ &= 0{,}3085 - 0{,}0668 \\ &= 0{,}2417. \end{aligned}$$

Hal itu berarti terdapat 0,2417 bagian dari populasinya yang mempunyai nilai tes masuk antara 80 dan 90.

IV.4 Distribusi Gamma, Eksponensial dan Chi – kuadrat.

Sebelum dibahas tentang distribusi Gamma, terlebih dahulu dibahas tentang fungsi Gamma. Fungsi Gamma didefinisikan sebagai

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx .$$

Sifat yang dimiliki dari fungsi Gamma adalah $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha-1)$. Dengan rumus rekursi diperoleh sifat

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,(\alpha - 2)\,(\alpha - 3)\,\Gamma(\alpha-3).$$

Dapat dibuktikan bahwa $\Gamma(1) = 1$ dan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Untuk $\alpha = n$ dengan n bilangan bulat diperoleh $\Gamma(n) = (n-1)!$

Definisi IV.3

Variabel random kontinu Y berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β bila fungsi kepadatan probabilitas Y dinyatakan dengan

$$f(y) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

untuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Contoh IV.8

Di suatu kota pemakaian air sehari (dalam jutaan liter) dapat dianggap berdistribusi Gamma dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$ yaitu

$$f(y) = \frac{1}{3^2\,\Gamma(2)}\, y^{2-1}\, e^{-y/3} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain,}$$

atau

$$f(y) = \frac{1}{9}\, y^{2-1}\, e^{-y/3} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

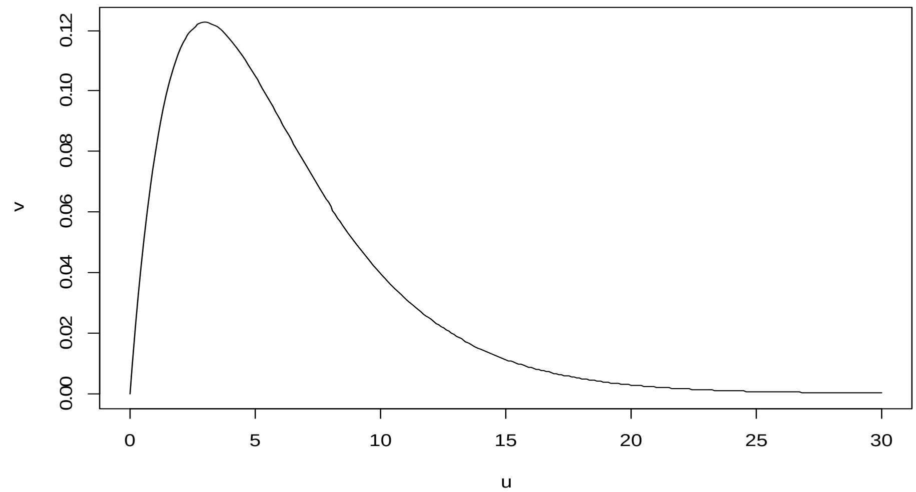
Apabila kemampuan menyediakan air adalah 9 juta liter per hari maka probabilitas bahwa pada suatu hari tertentu persediaan air tidak mencukupi adalah

$$P(\,Y > 9\,) = \int_9^{\infty} \frac{1}{9}\, y^{2-1}\, e^{-y/3}\, dy$$
$$= \int_3^{\infty} \frac{1}{9}(3u)^{2-1}\, e^{-u}\, 3\,du$$
$$= \int_3^{\infty} u\; e^{-u}\; du$$
$$= -u\,e^{-u} - e^{-u}\Big|_3^{\infty}$$
$$= -\lim_{u\to\infty}\left[\,\frac{u}{e^u} - \frac{1}{e^u} + 3e^{-3} + e^{-3}\,\right]$$

$= 4\ e^{-3}$

$= 0{,}1991.$

Grafik distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$ dinyatakan dalam Gambar IV.1



Gambar IV.1 Distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$.

Definisi IV.4

Variabel random Y yang berdistribusi Gamma dengan parameter $\alpha = \nu/2$ dan $\beta = 2$ dinamakan variabel random chi-kuadrat dengan derajat bebas ν atau dinotasikan dengan χ^2_ν.

Definisi IV.5

Variabel random kontinu Y berdistribusi eksponensial dengan parameter β bila fungsi kepadatan probabilitasnya dinyatakan sebagai

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} \quad \text{untuk } y > 0,$$

$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Contoh IV.9

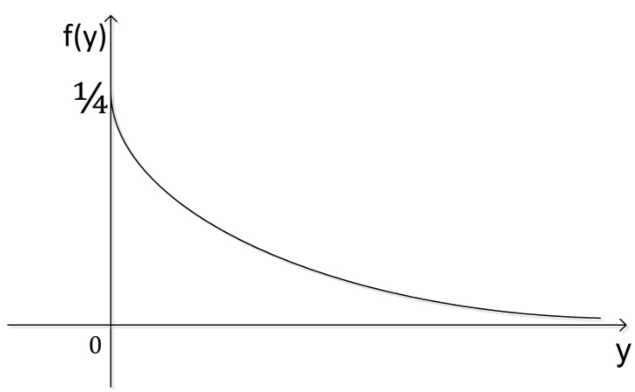
Lamanya waktu untuk melayani seseorang di suatu kafetaria merupakan suatu variabel random berdistribusi eksponensial dengan $\beta = 4$. Hal itu berarti fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(y) = \frac{1}{4} e^{-y/4} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Probabilitas seseorang akan dilayani dalam kurun waktu kurang dari 3 menit adalah

$$\begin{aligned} P(\, Y < 3\,) &= \int_0^3 \frac{1}{4} e^{-y/4}\, dy \\ &= \int_0^{3/4} \frac{1}{4} e^{-u}\, 4\, du \\ &= \int_0^{3/4} e^{-u}\, du \\ &= -e^{-u} \Big|_0^{3/4} \\ &= 1 - e^{-0,75} \\ &= 0,5276. \end{aligned}$$

Grafik distribusi Eksponensial dengan parameter $\beta = 4$ dinyatakan pada Gambar IV.2.



Gambar IV.2 Grafik Fungsi Distribusi Eksponensial dengan mean 4.

IV.3 Distribusi Probabilitas Beta

Distribusi probabilitas Beta mempunyai dua parameter yaitu α dan β yang didefinisikan pada interval [0,1]. Fungsi kepadatan probabilitas Beta didefinisikan sebagai

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{untuk } y \text{ yang lain}$$

dengan $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Contoh IV.5

Distributor bensin mempunyai tangki persediaan yang diisi di setiap Senin. Dalam pengamatan, kita tertarik untuk menyelidiki proporsi dari penjualan bensin dalam seminggu. Setelah penelitian beberapa minggu maka dapat dibuat model yang merupakan distribusi beta dengan α = 4 dan β = 2. Tentukan probabilitas bahwa distributor akan menjual paling sedikit 90% dari persediaannya dalam minggu yang diberikan.

Penyelesaian

Jika Y menyatakan proporsi dari penjualan selama minggu tersebut maka

$$f(y) = \frac{\Gamma(4+2)}{\Gamma(4)\,\Gamma(2)}\, y^3(1-y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

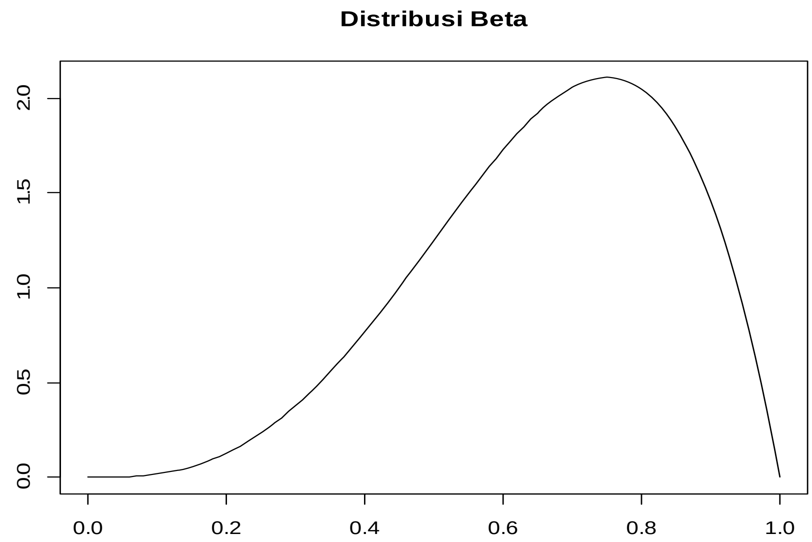
Berarti $P(\ Y > 0{,}9\ ) = \int_{0,9}^{1} f(y)\,dy = \int_{0,9}^{1} 20(y^3 - y^4)\,dy$

$$= 20\left.\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\right|_{0,9}^{1}$$

$$= 20\ (0{,}004)$$

$$= 0{,}08.$$

Hal itu berarti probabilitasnya sangat kecil bahwa 90 % dari persediaan akan terjual. Grafik fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi beta dengan α = 4 dan β = 2 dinyatakan pada Gambar IV.3.



Gambar IV.3. Distribusi beta dengan $\alpha = 4$ dan $\beta = 2$.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Variabel random mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = c\,(1-x)x^2 \quad \text{untuk } 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

Tentukan c.

Penyelesaian

Supaya $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas maka

$$\int_0^1 c\,(1-x)\,x^2\,dx = 1$$

$$c\int_0^1 x^2 - x^3\,dx = 1$$

$$c\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1\right) = 1$$

$$c\left(\frac{1}{12}\right) = 1.$$

Diperoleh $c = 12$.

Soal 2

Tentukan fungsi kepadatan probabilitas yang bersesuaian dengan fungsi distribusi

a. $F(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{16}$ untuk $-1 \le x \le 3$.

b. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x\,e^{-\lambda x}$ untuk $0 \le x < \infty$, $\lambda > 0$.

Penyelesaian

a. Secara lengkap fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = 0 \quad \text{untuk } x < -1.$$
$$= \frac{x^2+2x+1}{16} \quad \text{untuk } -1 \le x \le 3.$$
$$= 1 \quad \text{untuk } x > 3.$$

sehingga fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x+2}{16} = \frac{x+1}{8}$$

untuk $-1 \leq x \leq 3$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain.

b. Secara lengkap fungsi distribusinya dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = 0 \qquad \text{untuk } x < 0,$$
$$= 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x\, e^{-\lambda x} \quad \text{untuk } 0 \leq x < \infty,$$

sehingga fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f(x) = F'(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} + \lambda^2\, x\, e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2\, x\, e^{-\lambda x}$$

untuk $0 \leq x < \infty$, $\lambda > 0$ dan $f(x) = 0$ untuk x yang lain.

Soal 3

Jika X berdistribusi Gamma(1,2) maka tentukan modus dari X.

Penyelesaian

Karena X berdistribusi Gamma(1,2) maka mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x;1,2) = \frac{1}{1^2\,\Gamma(2)}\, x^{2-1}\, e^{-x/1} = xe^{-x}$$

untuk $x > 0$ sehingga $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x} = 0$ atau $x = 1$. Jadi modusnya adalah $x = 1$.

Soal 4

Suatu variabel random Y yang dapat memperoleh harga antara $y = 2$ dan $y = 5$ mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 2(1+y)/27.$$

a. Hitunglah $P(Y < 4)$.

b. Hitung $P(3 < Y < 4)$.

Penyelesaian

Karena fungsi kepadatan probabilitas dari variable random Y adalah

$$P(Y < 4) = \int_2^4 \frac{2+2y}{27}\, dy = \left.\frac{2y + y^2}{27}\right|_2^4 = \frac{8 + 16 - (4+4)}{27} = \frac{16}{27}.$$

Di samping itu,

$$P(3<Y<4)=\int_3^4 \frac{2+2y}{27}\,dy = \left.\frac{2y+y^2}{27}\right|_3^4 = \frac{8+16-(6+9)}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Soal 5

Perubahan kedalaman suatu sungai dari hari ke hari yang diukur dalam desimeter pada suatu tempat tertentu mengikuti fungsi kepadatan probabilitas

$f(x) = k$ untuk $-2 \le y \le 2$,

$= 0$ untuk y yang lain.

a. Tentukan nilai k.
b. Tentukan fungsi distribusi dari Y.

Penyelesaian

a. Karena $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$ maka $\int_{-2}^{2} k\,dy = 4k = 1$ sehingga $k = ¼$.

b. Fungsi distribusi dari Y untuk $-2 \le y \le 2$ adalah

$$F(y) = P(Y \le y) = \int_{-2}^{y} \frac{1}{4}\,dy = \frac{y+2}{4}$$

sehingga secara lengkap fungsi distribusi dari Y adalah

$F(y) = 0$ untuk $y < -2$,

$= \frac{y+2}{4}$ untuk $-2 \le y \le 2$,

$= 1$ untuk $y > 2$.

Soal 6

Prosentase kotoran tiap *batch* dalam suatu produk kimia tertentu merupakan suatu variabel random Y yang mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$f(y) = 12\,y^2\,(1-y)$ untuk $0 \le y \le 1$,

$= 0$ untuk y yang lain.

Suatu *batch* dengan lebih dari 40 % kotoran tidak dapat dijual. Berapakah probabilitas bahwa *batch* yang dipilih secara random tidak dapat dijual karena kelebihan kotoran ?

Penyelesaian

Karena variabel random Y yang mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 12\,y^2\,(1-y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

maka probabilitas bahwa *batch* yang dipilih secara random tidak dapat dijual karena kelebihan kotoran adalah sama dengan probabilitas kotoran yang diperoleh lebih dari 40 % yaitu

$$P(Y > 0{,}4) = \int_{0{,}4}^{1} 12\,y^2(1-y)\,dy = \int_{0{,}4}^{1} 12y^2 - 12y^3\,dy$$
$$= 4y^3 - 3y^4 \Big|_{0{,}4}^{1}$$
$$= 4 - 3 - (4(0{,}4)^3 - 3(0{,}4)^4)$$
$$= 1 - 4(0{,}4)^3 + 3(0{,}4)^4$$
$$= 0{,}6672.$$

Soal 7

Biaya reparasi mingguan Y dari suatu mesin mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang diberikan oleh

$$f(y) = 3(1-y)^2 \quad \text{untuk } 0 < y < 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain,}$$

dengan ukuran dalam ratusan dolar. Berapa anggaran yang seharusnya disediakan untuk biaya reparasi sehingga biaya yang sebenarnya akan melampaui anggaran hanya 10 % darinya.

Penyelesaian

Misalkan b besarnya anggaran dan Y menyatakan biaya reparasi yang sebenarnya. Akan dicari b sehingga $P(Y > b) = 0{,}1$ yaitu

$$P(Y > b) = \int_{b}^{1} 3(1-y)^2\,dy$$
$$= \int_{b}^{1} 3 - 6y + 3y^2\,dy$$
$$= 3y - 3y^2 + y^3 \Big|_{b}^{1}$$
$$0{,}1 = 3 - 3 + 1 - 3b + 3b^2 - b^3.$$

Untuk mendapatkan b dapat juga diperoleh dengan distribusi Beta dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$. Nilai b merupakan kuantil ke 90% dari distribusi Beta dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$ yaitu 0,5358. Hal itu berarti anggaran yang disediakan adalah 53,58 dolar.

Soal 8

Waktu hidup (dalam jam) X dari suatu komponen elektronik merupakan variabel random dengan fungsi kepadatan

$$f(x) = \begin{cases} (1/100)\ \exp(-x/100) & \text{untuk } x > 0, \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Jika tiga komponen bekerja saling bebas dalam sebuah peralatan. Peralatan gagal berfungsi jika paling sedikit dua komponen gagal berfungsi. Tentukan probabilitas bahwa peralatan dapat bekerja tanpa mengalami kegagalan paling sedikit 200 jam.

Penyelesaian

Probabilitas komponen bekerja dengan baik paling sedikit 200 jam adalah

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= 1 - P(X \leq 200) \\ &= 1 - \int_0^{200} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx \\ &= 1 + e^{-x/100} \Big|_0^{200} \\ &= e^{-2} \\ &= 0{,}1353. \end{aligned}$$

Probabilitas peralatan yang terdiri dari 3 komponen bekerja dengan baik paling sedikit 200 jam adalah

$$\begin{aligned} = 1 - P(T \geq 2) &= 1 - 3(0{,}1353)(0{,}8647)^2 - (0{,}8647)^3 \\ &= 1 - 0{,}95 \\ &= 0{,}05. \end{aligned}$$

Soal 9

Suatu pabrik membuat suatu produk dengan bahan mentah tertentu. Banyak bahan mentah yang digunakan per hari mengikuti distribusi eksponensial dengan $\beta = 4$ (diukur dalam ton). Tentukan probabilitas bahwa pabrik tersebut akan menggunakan lebih dari 4 ton pada suatu hari yang diberikan.

Penyelesaian

Probabilitas bahwa pabrik tersebut akan menggunakan lebih dari 4 ton pada suatu hari yang diberikan adalah

$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - \int_0^4 \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx = e^{-1} = 0{,}3679.$$

Soal 10

Proporsi waktu per hari bahwa semua kasir di supermarket tertentu sibuk (terpakai) merupakan variabel random Y dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = cy^2(1-y)^4$$

untuk $0 \le y \le 1$.

a. Tentukan c sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
b. Berapa probabilitasnya bahwa hanya separuh kasir yang terpakai/sibuk?

Penyelesaian

a. Nilai c sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas adalah

$$c = \frac{\Gamma(3+5)}{\Gamma(3)\Gamma(5)} = \frac{7!}{2!4!} = \frac{7(6)5}{2} = 105.$$

b. Probabilitasnya bahwa hanya kurang dari separoh kasir yang terpakai/sibuk adalah

$$P(X < 0{,}5) = \int_0^{0,5} 105\, y^2(1-y)^4\, dy = 0{,}7735.$$

LATIHAN

1. Jika diketahui $f(x) = kx^2(1-x)$ untuk $0 < x < 1$ maka :
   a. Tentukan k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
   b. Tentukan $P(X > 0{,}2)$.
2. Jika diketahui variabel random Y mempunyai distribusi N(3,4) maka tentukan c sehingga
   $$P(Y > c) = 3\,P(Y \le c).$$
3. Tentukan probabilitas variabel random yang berdistribusi normal baku z yang terletak antara – 1,66 dan 1,33.
4. Tentukan nilai z yaitu z_0 dalam distribusi normal baku sehingga hanya dilampaui oleh 10 %. Hal itu berarti, tentukan z_0 sehingga
   $$P(z \ge z_0) = 0.10.$$
5. Misalkan variabel random X mempunyai distribusi probabilitas :
   $$\begin{aligned} f(x) &= k\,x^3 \exp(-x/2) && \text{untuk } x > 0, \\ &= 0 && \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{aligned}$$
   Tentukan k sehingga $f(x)$ merupakan fungsi probabilitas.
6. Jika variabel random Y mempunyai distribusi probabilitas eksponensial maka tunjukkan bahwa untuk $a > 0$ dan $b > 0$ berlaku
   $$P(\,Y > a + b \mid Y > a\,) = P(\,Y > b\,).$$
7. Variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas dinyatakan dengan
   $$\begin{aligned} f(y) &= ky^3\,(1-y)^2 && \text{untuk } 0 \le y \le 1, \\ &= 0 && \text{untuk } y \text{ yang lain.} \end{aligned}$$
   Tentukan k sehingga $f(y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas.
8. Variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang dinyatakan dengan
   $$\begin{aligned} f(y) &= 6\,y\,(1-y) && \text{untuk } 0 \le y \le 1, \\ &= 0 && \text{untuk } y \text{ yang lain.} \end{aligned}$$
   a. Tentukan $F(y)$.
   b. Tentukan gambar $f(y)$ dan $F(y)$.
   c. Hitung $P(\,0{,}5 \le Y \le 0{,}8\,)$.

9. Tentukan c sehingga $f(x) = c/(x^2 + 1)$ untuk $-\infty < x < \infty$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas. Gunakan hasil tersebut untuk menentukan $P(1 < X^2 < 3)$ dan fungsi distribusinya $F(x)$.
10. Jika variabel random mempunyai fungsi distribusi

$$F(x) = 1\text{-}\exp(-3x)$$

untuk $x \geq 0$ dan 0 untuk $x < 0$.

   a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitasnya.
   b. Tentukan $P(X > 3)$.
   c. Tentukan $P(-2 < X \leq 4)$.
11. Dapatkan fungsi $F(x) = k(1\text{-}x^2)$ untuk $0 \leq x \leq 1$ dan 0 untuk x yang lain menjadi fungsi distribusi?
12. Fungsi distribusi dari suatu variabel random ditentukan oleh

$$F(x) = kx^2 \text{ untuk } 0 \leq x < 2,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } x \geq 2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk x} < 0.$$

   a. Tentukan k.
   b. $P(X > 1)$.
   c. Tentukan $P(1 < X < 3/2)$.
13. Misalkan diketahui bahwa dalam distribusi Beta didefinisikan

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx\,.$$

Tunjukkan bahwa $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.
14. Misalkan X variabel random berdistribusi seragam pada $(-\alpha, \alpha)$.
   a. Tentukan α sehingga $P(-1 < X < 2) = 0{,}75$.
   b. Tentukan α sehingga $P(\,|X| < 1) = P(\,|X| > 2)$.
15. Variabel random X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas yang dinyatakan dengan

$$f(x) = cx^2 \text{ untuk } 1 \leq x \leq 2,$$
$$= cx \quad \text{untuk } 2 < \text{x} < 3,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

   a. Tentukan konstanta c.
   b. $P(X > 2)$.
   c. $P(1/2 < X < 3/2)$.
16. Dapatkah fungsi berikut ini merupakan fungsi distribusi? Jelaskan.

$$F(x) = c(1-x^2) \quad \text{untuk } 0 \le x \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } x \text{ yang lain.}$$

17. Pada ujian Pengantar Teori Probabilitas mempunyai mean $\mu = 60$ dan simpangan baku $\sigma = 10$.
    a. Tentukan nilai standard dari dua siswa yang mempunyai nilai 93 dan 52.
    b. Tentukan nilai dari dua siswa yang nilai standardnya berturut-turut -0,6 dan 1,2.
18. Tentukan b sehingga $P(Z > b) = 0{,}85$ dengan Z berdistribusi normal dengan mean $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$.
19. Jika variabel random X berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 8 maka tentukan $P(X < b) = 0{,}8$.
20. Suatu variabel random X mempunyai distribusi Gamma dengan $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$. Tentukan (a) $P(X \le 1)$. (b) $P(1 \le X \le 2)$.

*****

BAB V
HARGA HARAPAN

Dalam pembahasan yang lalu telah dibahas bahwa distribusi probabilitas untuk variabel random adalah model teoritis untuk distribusi empiris dari data yang berhubungan dengan populasi nyata. Jika model sesuai dengan kedaan nyata maka distribusi empirik dari model teoritis akan ekuivalen, sehingga dapat ditentukan mean dan variansi untuk variabel random untuk mendapatkan ukuran deskriptif distribusi probabilitas $f(y)$.

V.1 Harga Harapan dari Variabel Random Diskrit

Definisi V.1

Jika Y adalah variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas $f(y)$ maka harga harapan dari Y didefinisikan dengan

$$E[Y] = \sum_y y\, f(y) \ .$$

Contoh V.1

Berdasarkan pada Tabel V.1, tentukan harga harapan (mean) variabel random Y.

y	0	1	2
$f(y)$	1/10	6/10	3/10

Penyelesaian :

Harga harapan variabel random Y adalah

$$E[Y] = \sum_y y\, f(y) = 0\left(\frac{1}{10}\right) + 1\left(\frac{6}{10}\right) + 2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = 1{,}2\,.$$

Definisi V.2

Jika $g(Y)$ adalah fungsi dari variabel random diskrit Y dengan fungsi probabilitas $f(y)$ maka harga harapan $g(Y)$ didefinisikan dengan

$$E[g(Y)] = \sum_y g(y)\, f(y)\,.$$

Definisi V.3

Variansi variabel random Y didefinisikan sebagai harga harapan dari variabel random $(Y - \mu)^2$ atau $V(Y) = E[(Y - \mu)^2]$ dengan $\mu = E[Y]$.

Simpangan baku dari Y merupakan akar positif dari $V(Y)$. Jika $f(y)$ adalah karakteristik akurat dari distribusi frekuensi populasi maka mean populasinya adalah $\mu = E[\,Y\,]$ dan variansi populasi adalah $V(Y) = \sigma^2$ serta simpangan baku populasi adalah σ.

Contoh V.2

Distribusi probabilitas variabel random Y dinyatakan dalam tabel berikut ini. Tentukan mean, variansi dan deviasi standar.

y	0	1	2	3
$f(y)$	1/8	2/8	3/8	2/8

Penyelesaian :

Harga harapan dari variabel random Y adalah

$$E[Y] = \sum_y y\,f(y) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{2}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{14}{8} = 1{,}75.$$

Variansi dari variabel random Y adalah

$$V[Y] = \sum_y (y-\mu)^2\, f(y)$$

$$= (0-1{,}75)^2\left(\frac{1}{8}\right) + (1-1{,}75)^2\left(\frac{2}{8}\right) + (2-1{,}75)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (3-1{,}75)^2\left(\frac{2}{8}\right)$$

$$= (3{,}0625)\left(\frac{1}{8}\right) + (0{,}5625)\left(\frac{2}{8}\right) + (0{,}0675)\left(\frac{3}{8}\right) + (1{,}5625)\left(\frac{2}{8}\right)$$

$$= 0{,}3828 + 0{,}1406 + 0{,}0234 + 0{,}3906$$

$$= 0{,}9374.$$

Simpangan baku dari variabel random Y adalah

$$\sigma = (0{,}9734)^{0,5} = 0{,}9682.$$

Berikut ini diberikan sifat-sifat dari harga harapan variabel random Y.

1. Jika c konstanta maka $E(c) = c$.
2. Jika $g(y)$ fungsi dari variabel random Y dan c adalah konstanta maka
$$E[\ c\ g(y)\ ] = c\ \mathrm{E}[\ g(y)\ ].$$
3. Jika $g_1(Y)$, $g_2(Y)$, ..., $g_k(Y)$ adalah k fungsi dari variabel random Y maka
$$E[g_1(Y)+g_2(Y)+ ...+g_k(Y)] = \mathrm{E}[g_1(Y)] + \mathrm{E}[g_2(Y)] + \ldots + E[g_k(Y)].$$
4. $V(Y) = E[(Y - \mu)^2\ ] = E[\ Y^2\ ] - \mu^2$.

Contoh V.3 :

Berdasar pada data Contoh V.2. Tentukan variansi variabel random Y dengan menggunakan sifat 4.

Penyelesaian :

Karena $E[Y^2] = \sum_y y^2 f(y)$

$$= (0)^2\left(\frac{1}{8}\right) + (1)^2\left(\frac{2}{8}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (3)^2\left(\frac{2}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{8}\right) + \left(\frac{12}{8}\right) + \left(\frac{18}{8}\right)$$

$$= 32/8$$

$$= 4$$

maka $V[\ Y\ ] = E[\ Y^2\ ] - \mu^2 = 4 - (1{,}75)^2 = 0{,}9375$.

Contoh V.4 :

Tentukan harga harapan $E(Y)$ dan variansi $V(Y)$ dari distribusi probabilitas Poisson.

Penyelesaian :

Karena fungsi probabilitas dari variabel random Y yang berdistribusi Poisson adalah

$$f(y) = \mu^y \frac{e^{-\mu}}{y!}$$

untuk y = 0, 1, 2, 3, …… maka

$$E[Y\ ] = \sum_y y\, f(y) = \sum_{y=0}^{\infty} y\ \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{y!}$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} y\ \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{y!}$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{(y-1)!}$$

$$= \mu \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\mu^{y-1}\ e^{-\mu}}{(y-1)!}$$

$$= \mu \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\mu^z\ e^{-\mu}}{z!}$$

$$= \mu$$

dengan $z = y - 1$. Untuk menghitung $V(Y)$ terlebih dahulu ditentukan

$$E[Y(Y-1)] = \sum_y y\,(y-1) f(y) = \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1) \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{y!}$$

$$= \sum_{y=2}^{\infty} y(y-1) \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{y!}$$

$$= \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\mu^y\ e^{-\mu}}{(y-2)!}$$

$$= \mu^2 \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\mu^{y-2}\ e^{-\mu}}{(y-2)!}$$

$$= \mu^2 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\mu^z\ e^{-\mu}}{z!}$$

$$= \mu^2$$

dengan $z = y - 2$ sehingga

$$V[\ Y\ ] = E[\ Y(Y\text{-}1)\ ] + E[\ Y\ ] - (\ E[\ Y\ ]\ )^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

V. 2 Harga Harapan Untuk Variabel Random Kontinu

Mean, variansi dan deviasi standar dari variabel random kontinu ditentukan dengan tujuan untuk mengetahui ukuran deskriptif dari fungsi kepadatan probabilitasnya. Seringkali sukar untuk menentukan distribusi probabilitas variabel random Y atau fungsi $g(Y)$. Dalam pembahasan yang lalu telah dibahas bahwa integrasi atas interval terhadap fungsi-fungsi tertentu seringkali sulit dilakukan, oleh karena itu kita perlu mendekatinya dengan menggunakan cara yang dapat menggambarkan tingkah laku variabel random.

Definisi V.4 :

Harga harapan untuk variabel random kontinu Y adalah

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy$$

jika integral tersebut ada.

Contoh V.5 :

Tentukan harga harapan dari variabel random Y mempunyai fungsi

kepadatan probabilitas

$$f(y) = y^2/3 \quad \text{untuk } -1 < y < 2,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Penyelesaian

$$E[Y] = \int_{-1}^{2} y\, \frac{y^2}{3}\, dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{y^3}{3}\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} y^3\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left. \frac{y^4}{4} \right|_{-1}^{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{16-1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{15}{4} = \frac{5}{4}.$$

Contoh V.6

Tentukan harga harapan fungsi kepadatan probabilitas uniform pada interval (θ_1, θ_2).

Penyelesaian :

$$E[Y] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y \, \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \, dy$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} y \;\, dy$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left(\left. \frac{y^3}{2} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \right)$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\frac{\theta_2^{\,2} - \theta_1^{\,2}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2 + \theta_1)}{2} \right]$$

$$= \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} .$$

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan harga harapan untuk fungsi variabel random Y.

Definisi V.5 :

Jika $g(Y)$ fungsi dari variabel random Y maka harga harapan $g(Y)$ adalah

$$E[\, g(Y) \,] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \;\, f(y) \, dy$$

jika integral itu ada.

Sifat-sifat Harga Harapan Untuk Variabel Random Kontinu *Y*

Jika c konstanta dan $g(Y)$, $g_1(Y)$, ... , $g_k(Y)$ adalah fungsi dari variabel random kontinu Y maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut :

1. $E(c) = c$.
2. $E[\, c\, g(Y) \,] = c\, E[\, g(Y) \,]$.

3. E[$g_1(Y) + g_2(Y) + \ldots\ldots + g_k(Y)$] = E[$g_1(Y)$] + E[$g_2(Y)$] +... + E[g_k(Y)]

4. Untuk $g(Y) = (Y - \mu)^2$ maka berlaku sifat

$$V(Y) = E[\,(Y - \mu)^2\,] = E[\,Y^2\,] - \mu^2 .$$

Contoh V.7

Tentukan variansi dari variabel random Y dengan fungsi kepadatan

$$\begin{aligned} f(y) &= y^2/3 && \text{untuk } -1 < y < 2, \\ &= 0 && \text{untuk } y \text{ yang lain.} \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-1}^{2} y^2 \, \frac{y^2}{3} dy \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{y^4}{3} dy \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} y^4 \, dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\left. \frac{y^5}{5} \right|_{-1}^{2} \right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{32+1}{5} \right) \\ &= \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

Akibatnya variansi dari variabel random Y adalah

$$V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{11}{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = \frac{176-125}{80} = \frac{51}{80}.$$

Contoh V.8

Tentukan variansi Y yang berdistribusi seragam pada interval (θ_1, θ_2).

Penyelesaian:

Fungsi kepadatan probabilitas variabel random Y yang berdistribusi seragam pada (θ_1, θ_2) adalah

$$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \text{untuk } \theta_1 < y < \theta_2$$

sehingga dan

$$E[Y^2] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y^2 \, \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} dy$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} y^2 \, dy$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left(\frac{y^3}{3} \Bigg|_{\theta_1}^{\theta_2} \right)$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\frac{\theta_2^{\,3} - \theta_1^{\,3}}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_2^{\,2} + \theta_2\theta_1 + \theta_1^{\,2})}{3} \right]$$

$$= \left[\frac{(\theta_2^{\,2} + \theta_2\theta_1 + \theta_1^{\,2})}{3} \right].$$

Akibatnya

$$V[Y] = E[Y^2] - (\, E[Y] \,)^2$$

$$= \frac{\theta_2^{\,2} + \theta_2\,\theta_1 + \theta_1^{\,2}}{3} - \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\theta_2^{\,2} + \theta_2\,\theta_1 + \theta_1^{\,2}}{3} - \left(\frac{\theta_2^{\,2} + 2\theta_1\theta_2 + \theta_1^{\,2}}{4} \right)$$

$$= \frac{4\theta_2^{\,2} + 4\theta_2\,\theta_1 + 4\theta_1^{\,2}}{12} - \left(\frac{3\theta_2^{\,2} + 6\theta_1\theta_2 + 3\theta_1^{\,2}}{12} \right)$$

$$= \frac{\theta_2^{\,2} - 2\theta_2\,\theta_1 + \theta_1^{\,2}}{12}$$

$$= \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}.$$

Contoh V.9

Tentukan $E[\ Y\ ]$ dan $V[\ Y\ ]$ jika Y berdistribusi Gamma(α, β).

Penyelesaian

Karena fungsi kepadatan probabilitas Y adalah

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}$$

maka

$$\begin{aligned}
E[\,Y\,] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} y\, \frac{y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{(\alpha+1)-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, dy \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha+1-}\ e^{-y/\beta}\, dy \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, \beta^{\alpha+1}\, \Gamma(\alpha+1) \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, \beta^{\alpha+1}\, \alpha\, \Gamma(\alpha) \\
&= \alpha\, \beta
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
E[\,Y^2\,] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, \frac{y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{(\alpha+2)-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, dy \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha+2-}\ e^{-y/\beta}\, dy \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, \beta^{\alpha+2}\, \Gamma(\alpha+2) \\
&= \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\, \beta^{\alpha+2}\, (\alpha+1)\, \Gamma(\alpha+1)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha+2}(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$
$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

sehingga $V(Y) = E(Y^2) - (E[Y])^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$.

V.3 Fungsi Pembangkit Momen

Parameter μ dan σ masing-masing menggambarkan ukuran numerik dari lokasi pusat dan persebaran $f(y)$ tetapi tidak menyatakan karakteristik yang tunggal dari distribusi. Artinya banyak fungsi probabilitas mempunyai distribusi yang berbeda meskipun mempunyai mean dan simpangan baku yang sama.

Definisi V.5

Momen ke-i dari variable random Y terhadap titik nol didefinisikan sebagai E[Y^i] dan dilambangkan dengan μ_i' .

Khususnya, momen pertama variabel random Y adalah $E[Y]=\mu_1'=\mu$ dan $E[Y^2] = \mu_2'$.

Definisi V.6

Momen ke-i dari variabel random Y terhadap mean Y atau dikenal dengan momen pusat ke-i dari Y didefinisikan sebagai $E[\ (Y - \mu)^i\ ]$ dan dilambangkan dengan μ_i.

Khususnya momen pusat kedua dinyatakan dengan $\mu_2 = \sigma^2$.

Definisi V.7

Fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk variabel random Y didefinisikan sebagai $E[\ e^{tY}\ ]$.

Catatan

Fungsi pembangkit momen untuk Y ada jika terdapat bilangan positif konstan b sehingga $m(t)$ berhingga untuk $| t | \leq b$.

Sifat-sifat fungsi pembangkit momen :

Jika $m(t)$ ada maka untuk sebarang bilangan bulat positif k berlaku

$$\left[\frac{d^k\, m(t)}{dt^k}\right]_{t=0} = m^{(k)}(t) = \mu_k{}' .$$

Contoh V.10

Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk variabel random yang berdistribusi Poisson.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
E[e^{tY}] = \sum_y e^{ty} f(y) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^y e^{-\mu}}{y!} \\
&= e^{-\mu} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^y}{y!} \\
&= e^{-\mu} \exp[\mu e^t] \\
&= \exp[\mu(e^t - 1)].
\end{aligned}$$

Berikut ini contoh bahwa dengan menggunakan fungsi pembangkit momen dari variabel random Y yang berdistribusi Poisson maka mean dan variansinya dapat ditentukan.

Contoh V.11

Gunakan fungsi pembangkit momen $m(t) = \exp[\mu(e^t - 1)]$ untuk menentukan mean dan variansi dari variabel random Y yang berdistribusi Poisson.

Penyelesaian :

Turunan pertama dari fungsi pembangkit momen

$$m(t) = \exp[\,\mu(e^t - 1)]$$

adalah

$$m'(t) = \mu\, e^t \exp[\,\mu(e^t - 1)]$$

sehingga $E[Y] = m'(0) = \mu\, e^0 \exp[\,\mu(e^0 - 1)] = \mu$.

Turunan kedua dari fungsi pembangkit momen $m(t) = \exp[\,\mu(e^t - 1)]$ adalah

$$\begin{aligned} m''(t) &= \mu\, e^t \exp[\,\mu(e^t - 1)] + \mu\, e^t\, \mu\, e^t \exp[\,\mu(e^t - 1)] \\ &= \mu\, e^t \exp[\,\mu(e^t - 1)] + \mu^2 e^{2t} \exp[\,\mu(e^t - 1)] \end{aligned}$$

sehingga

$E[Y^2] = m''(0) = \mu\, e^0 \exp[\,\mu(e^0 - 1)] + \mu^2\, e^{2(0)} \exp[\,\mu(e^0 - 1)] = \mu + \mu^2$.

Akibatnya $V[Y] = E[Y^2] - (\,\mathrm{E}[Y]\,)^2 = \mu + \mu^2 - \mu^2 = \mu$.

Jika $m(t)$ ada maka distribusi probabilitas $f(y)$ adalah tunggal. Hal itu berarti bahwa tidak mungkin dua variabel random yang berdistribusi berbeda mempunyai fungsi pembangkit momen yang sama. Jika fungsi pembangkit momen dua variabel random Y dan Z adalah sama maka Y dan Z mempunyai distribusi probabilitas yang sama.

Contoh V.12

Tentukan momen ke-k terhadap titik nol dari variabel random Y yang mempunyai distribusi seragam pada $(0, \theta)$.

Penyelesaian

Karena variabel random Y mempunyai distribusi seragam pada $(0, \theta)$ maka fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$\begin{aligned} f(y) &= 1/\theta \quad \text{untuk } 0 < y < \theta, \\ &= 0 \qquad \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{aligned}$$

sehingga momen ke-k terhadap titik nol adalah

$$\mu_k' = E[\,Y^k\,] = \int_{-\infty}^{\infty} y^k\, f(y)\, dy = \int_0^{\theta} y^k\, \frac{1}{\theta}\, dy = \left.\frac{y^{k+1}}{\theta(k+1)}\right|_0^{\theta} = \frac{\theta^k}{k+1}.$$

Akibatnya

$$\mu_1' = \mu = \theta/2 \;;\; \mu_2' = \theta^2/3 \;;\; \mu_3' = \theta^3/4$$

dan seterusnya.

Contoh V.13

Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ jika Y berdistribusi

Gamma(α, β).

Penyelesaian

Karena fungsi kepadatan probabilitas Y adalah

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}$$

maka

$$\begin{aligned} m(t) = E[e^{tY}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}\, f(y)\, dy \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{ty}\, \frac{y^{\alpha-1}\, e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} \exp[-y\left(\frac{1}{\beta} - t\right)]\, dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} \exp[\frac{-y}{\beta/(1-\beta t)}]\, dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \Gamma(\alpha)\right] \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \\ &= (1 - \beta t)^{-\alpha} \text{ untuk } t < (1/\beta). \end{aligned}$$

Contoh V.15

Gunakan hasil pada contoh V.12 untuk mendapatkan rumus μ_k'.

Penyelesaian

Karena fungsi pembangkit momen untuk Y yang berdistribusi Gamma(α, β) adalah

$$m(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha} \text{ untuk } t < (1/\beta)$$

maka

$$m'(t) = \alpha\beta(1 - \beta t)^{-\alpha-1}$$

$$m''(t) = \alpha(\alpha+1)\beta^2(1 - \beta t)^{-\alpha-2}$$

$$m'''(t) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3(1 - \beta t)^{-\alpha-3} .$$

Secara umum dapat dibuktikan bahwa turunan ke-k dari fungsi pembangkit momen $m(t)$ adalah

$$m^{(k)}(t) = \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\ldots.\,(\alpha+k-1)\,\beta^k\,(1 - \beta t)^{-\alpha-k}$$

sehingga

$$E[Y^k] = m^{(k)}(0) = \alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\ldots.\,(\alpha+k-1)\,\beta^k.$$

Sifat-sifat fungsi pembangkit momen

1. Jika $g(Y)$ adalah fungsi variabel random Y dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(y)$ maka fungsi pembangkit momen untuk $g(Y)$ adalah

$$m(t) = E[e^{t\,g(Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}\, g(y)\, f(y)\, dy \quad .$$

2. Jika variabel random Y mempunyai fungsi pembangkit momen $m_Y(t)$ maka $g(Y) = aY$ dengan a konstanta mempunyai fungsi pembangkit momen

$$m_{g(Y)}(t) = e^{at}\, m_Y(t).$$

3. Jika variabel random Y mempunyai fungsi pembangkit momen $m_Y(t)$ maka $g(Y) = aY$ dengan a konstanta mempunyai fungsi pembangkit momen

$$m_{g(Y)}(t) = m_Y(t).$$

4. Jika X, Y variabel random saling bebas yang masing-masing mempunyai fungsi pembangkit momen $m_X(t)$ dan $m_Y(t)$ maka variabel random kontinu $W = X + Y$ mempunyai fungsi pembangkit momen

$$m_W(t) = m_X(t)\, m_Y(t).$$

Contoh V.16

Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk variabel random Y yang berdistribusi seragam pada (0,1). Berdasarkan pada $m(t)$ tentukan mean dan variansinya.

Penyelesaian

$$m(t) = E[e^{tY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y)\,dy$$

$$= E[e^{tY}] = \int_0^1 e^{ty}\,dy$$

$$= \frac{1}{t}\left(e^{ty}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left[e^t - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\ldots - 1\right]$$

$$= \frac{1}{t}\left[\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \left[\frac{1}{1!} + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ldots\ldots\right].$$

Akibatnya $m'(t) = \left[\frac{1}{2!} + \frac{2t}{3!} + \ldots\ldots\right]$ sehingga $E[Y] = m'(0) = ½$ dan

$$m''(t) = \left[\frac{2}{3!} + \frac{3t^2}{4!} + \ldots\ldots\right]$$

sehingga $E[Y^2] = m''(0) = 2/6$. Akhirnya diperoleh

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = (2/6) - (½)^2 = 1/12.$$

Contoh V.17

Tentukan fungsi pembangkit momen untuk $g(Y) = Y - 5$ dengan Y variabel random yang berdistribusi seragam pada interval (0,1).

Penyelesaian

Karena fungsi pembangkit momen untuk Y adalah $m(t) = \frac{1}{t}\left[e^t - 1\right]$ maka fungsi pembangkit momen untuk $m_{g(Y)}$ adalah

$$m_{g(Y)} = \frac{e^{-5t}}{t}\left[e^t - 1\right].$$

Contoh V.15

Tentukan fungsi pembangkit momen untuk $g(Y) = 2Y$ dengan Y variabel random yang berdistribusi seragam pada interval (0,1).

Penyelesaian

Karena fungsi pembangkit momen untuk Y adalah $m(t) = \frac{1}{t}\left[e^t - 1\right]$ maka fungsi pembangkit momen untuk $m_{g(Y)}$ adalah

$$m_{g(Y)} = \frac{1}{2t}\left[e^{2t} - 1\right].$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk variabel random Y yang mempunyai fungsi probabilitas berikut. Gunakan $m(t)$ untuk menentukan mean $E[Y]$ dan varansi $V[Y]$.

y	0	1	2
$f(y)$	0,25	0,5	0,25

Penyelesaian

Fungsi pembangkit momen

$$m(t) = E[e^{tY}] = \sum_y e^{ty}\, p(y)$$

$$= 0{,}25\, e^{t(0)} + 0{,}5\, e^{t(1)} + 0{,}25\, e^{t(2)}$$

$$= 0{,}25 + 0{,}5\, e^{t} + 0{,}25\, e^{2t}.$$

Akibatnya diperoleh

$$m'(t) = 0{,}5\, e^{t} + 0{,}5\, e^{2t}$$

sehingga $E[Y] = m'(0) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$ dan

$$m''(t) = 0{,}5\, e^{t} + e^{2t}$$

sehingga $E[Y^2] = m''(0) = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$. Akibatnya

$$\begin{aligned} V[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ &= 1{,}5 - 1^2 \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Soal 2

Jika diketahui bahwa $m(t) = (1/6)\ e^{t} + (2/6)\ e^{2t} + (3/6)\ e^{3t}$ maka tentukan $E[Y]$, $V[Y]$ dan fungsi probabilitas Y.

Penyelesaian

Karena fungsi pembangkit momen

$$m(\mathrm{t}) = (1/6)\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}} + (2/6)\ \mathrm{e}^{2\mathrm{t}} + (3/6)\ \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$$

maka diperoleh

$$m'(t) = (1/6)\,e^{t} + (4/6)\,e^{2t} + (9/6)\,e^{3t}$$

sehingga $E[Y] = m'(0) = (1/6) + (4/6) + (9/6) = (14/6 = 2\frac{1}{3}$ dan

$$m'(t) = (1/6)\,e^{t} + (8/6)\,e^{2t} + (27/6)\,e^{3t}$$

sehingga $E[Y^2] = m''(0) = (1/6) + (8/6) + (27/6) = 36/6 = 6$. Akibatnya

$$\begin{aligned} V[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ &= 6 - (7/3)^2 \\ &= \frac{54-49}{9} \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen, diperoleh fungsi probabilitas dari variabel random *Y* berikut :

y	1	2	3
$f(y)$	1/6	2/6	3/6

Soal 3

Tentukan mean dan variansi dari variabel random *X* yang berdistribusi binomial dengan parameter *n* dan *p*.

Penyelesaian

Mean dari variabel random *X* yang berdistribusi binomial dengan parameter *n* dan *p* dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} E[X] = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x;n,p) &= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} (1-p)^{n-x} \\ &= n\,p \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

Dengan mengganti indeks dengan $y = x - 1$ maka diperoleh

$$E[X] = np\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-y-1)!} p^y (1-p)^{n-1-y} = np(p+q)^{n-1}$$

dengan $q = 1 - p$. Variansi dari variabel random X yang berdistribusi binomial dengan parameter n dan p dapat ditentukan dengan terlebih dulu menentukan

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) f(x;n,p) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x}.
\end{aligned}$$

Dengan mengganti indeks dengan $y = x - 2$ maka diperoleh

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!(n-2-y)!} p^y (1-p)^{n-2-y} = n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2}$$

atau

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2$$

dengan $q = 1 - p$.

Akibatnya $E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X]$ sehingga

$$E[X^2] = E[X(X-1)] + E[X] = n^2p^2 - np^2 - np$$

dan

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

Soal 4

Tentukan mean dan variansi dari variabel random X yang berdistribusi geometrik dengan parameter p yaitu mempunyai fungsi probabilitas

$$P(X = x) = p\,q^{x-1}$$

untuk x = 1, 2, 3, …..

Penyelesaian

Mean dari X adalah

$$E[X]=p+2qp+3q^2p+...+kq^{k-1}p+......$$

$$qE[X]=qp+2q^2p+3q^3p+...+(k-1)q^{k-1}p+kq^kp+..........$$

$$(1-q)E[X]=p+qp+q^2p+...+q^{k-1}p+......$$

$$p\,E[X]=p(1+q+q^2+...+q^{k-1}+......)=\frac{p}{1-q}.$$

Akibatnya $E[X]=\dfrac{1}{p}.$

Untuk menentukan variansinya, terlebih dahulu ditentukan $E[X]$ yaitu

$$E[X^2]=1^2p+2^2qp+3^2q^2p+...+k^2q^{k-1}p+(k+1)^2q^kp+......$$

$$qE[X^2]=1^2qp+2^2q^2p+3^2q^3p+...+(k-1)^2q^{k-1}p+k^2q^kp+......$$

$$(1-q)E[X^2]=p+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)^2-k^2\right]q^kp=p+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)q^kp.$$

Hal ini berarti $pE[X^2]=p+2q\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p+q\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p.$

Tetapi

$$\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=E(X)=\frac{1}{p}$$

dan

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=1.$$

Akibatnya

$$pE[X^2]=p+\frac{2q}{p}+q=\frac{p^2+2q+qp}{p}=\frac{p^2+2(1-p)+(1-p)p}{p}=\frac{2-p}{p}.$$

sehingga

$$E[X^2]=\frac{2-p}{p^2}=\frac{1+q}{p^2}.$$

Diperoleh

$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Soal 5

Tentukan fungsi pembangkit momen dari variabel random X yang berdistribusi binomial dengan parameter n dan p.

Penyelesaian

Karena variabel random X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p maka fungsi probabilitasnya adalah

$$f(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

untuk x = 0, 1, 2, …., n. Akibatnya fungsi pembangkit momennya adalah

$$m(t)=E[e^{tY}]=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}=(pe^t+q)^n.$$

Soal 6

Tentukan fungsi pembangkit momen dari variabel random Y yang berdistribusi geometrik dengan parameter p yaitu mempunyai fungsi probabilitas

$$P(Y=y)=p\,q^{y-1}$$

untuk y = 1, 2, 3, …..

Penyelesaian

Fungsi pembangkit momen variabel random Y adalah

$$m(t)=E(e^{tY})=\sum_{y=1}^{\infty}e^{ty}\,p\,q^{y-1}=pq^{-1}\sum_{y=1}^{\infty}(qe^t)^y=pq^{-1}\frac{qe^t}{1-qe^t}=\frac{pe^t}{1-qe^t}.$$

Soal 7

Jika variabel random kontinu Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas $f(y) = ky^2$ untuk $0 < y < 1$ maka

a. Tentukan k sehingga $f(y)$ merupakan fungsi probabilitas.
b. Tentukan mean dan variansinya.

Penyelesaian

a. Karena Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas $f(y) = ky^2$ untuk $0 < y < 1$ maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = \int_0^1 ky^2\, dy = \left.\frac{ky^3}{3}\right|_0^1 = \frac{k}{3} = 1$$

sehingga $k = 3$.

a. Karena Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas $f(y) = 3y^2$ untuk $0 < y < 1$ maka

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_0^1 y\,(3y^2)\, dy = \int_0^1 3y^3\, dy = \left.\frac{3y^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}$$

sehingga meannya adalah ¾ dan

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f(y)\, dy = \int_0^1 y^2\,(3y^2)\, dy = \int_0^1 3y^4\, dy = \left.\frac{3y^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Akibatnya variansinya adalah

$$V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}.$$

Soal 8

Misalkan bahwa Y berdistribusi N(1,2).

a. Tentukan E[$(Y\text{-}1)^4$].
b. Tentukan E[Y^4].

Penyelesaian

Dapat dibuktikan bahwa jika X berdistribusi N(μ, σ^2) maka

$$E[(X-\mu)^{2r}] = \frac{(2r)!\sigma^{2r}}{r!2^r}$$

untuk r = 1, 2, 3, ….. dan

$$E[(X-\mu)^{2r-1}] = 0$$

untuk r = 1, 2, 3, …. Akibatnya jika Y berdistribusi N(1,2) maka

$$E[(Y-1)^4] = \frac{(2(2))!2^{(2)}}{2!2^2} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Hal itu berarti

$$E[(Y-1)^4] = E[Y^4 - 4Y^3 + 6Y^2 - 4Y + 1] = 12.$$

Pada sisi lain

$$E[(Y-1)^2] = \frac{2!2^1}{1!2^1} = 2$$

dan diperoleh $E(Y^2) - 2\,E(Y)+1 = E(Y^2) - 2(1) + 1 = 2$ atau

$$E(Y^2) = 3.$$

Di samping itu

$$E[(Y-1)^3] = 0$$

atau $E(Y^3) - 3\,E(Y^2)+3\,E(Y) - 1 = E(Y^3) - 3\,(3) + 3\,(1) - 1 = 0$ sehingga $E(Y^3) = 7$. Akibatnya

$$E[Y^4 - 4Y^3 + 6Y^2 - 4Y + 1] = E[Y^4] - 4\,E[Y^3] + 6\,E[Y^2] - 4E[Y] + 1 = 12.$$

$$E[Y^4] - 4\,E[Y^3] + 6\,E[Y^2] - E[Y] + 1 = E[Y^4] - 4(7) + 6(3) - 4(1) + 1 = 12.$$

$$E[Y^4] = 12 + 28 - 18 + 4 - 1 = 25.$$

Soal 9

Misalkan bahwa variabel random X adalah waktu (dalam jam) sampai kegagalan suatu transistor mempunyai distribusi Pareto dengan parameter $\theta = 100$ dan $\kappa = 2$ yaitu mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x;100,2) = \frac{2}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-3}$$

untuk $x > 0$ maka

a. Tentukan probabilitas bahwa $X > 15$.
b. Tentukan probabilitas bahwa $X > 110$.
c. Jika diamati setelah 95 jam bahwa transistor masih berfungsi maka tentukan probabilitas bahwa $X > 110$. Bagaimana hal ini dibandingkan dengan jawaban (a) ? Jelaskan jawaban anda.

Penyelesaian

a. Probabilitas bahwa $X > 15$ adalah

$$P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{2}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-3} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{15}^{b} \frac{2}{100}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-3} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{-2} \Bigg|_{15}^{b}$$

$$= (1,15)^{-2}$$

$$= 0,7561.$$

b. Probabilitas bahwa $X > 110$ adalah

$$P(X > 110) = \int_{110}^{\infty} \frac{2}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-3} dx = \lim_{b\to\infty}\int_{110}^{b} \frac{2}{100}\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-3} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-2}\Bigg|_{110}^{b}$$

$$= (2{,}10)^{-2}$$

$$= 0{,}2268.$$

c. Probabilitas bahwa $X > 110$ dengan syarat bahwa masih berfungsi sampai 95 jam adalah

$$P(X > 110 \mid X > 95) = \frac{P(X > 110, X > 95)}{P(X > 95)} = \frac{P(X > 110)}{P(X > 95)} = \frac{(2{,}10)^{-2}}{(1{,}95)^{-2}} = 0{,}8622.$$

Hal itu berarti lebih besar dari jawaban (a) sehingga probabilitas bahwa transistor masih akan berfungsi lebih dari 110 jam dengan syarat telah berfungsi sampai 95 jam mempunyai probabilitas yang lebih tinggi dibandingkan dengan probabilitas transistor akan berfungsi lebih dari 15 jam.

Soal 10

Jika variabel random kontinu Y berdistribusi $f(y) = 2y$ untuk $0 < y < 1$ maka tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk Y. Berdasarkan pada $m(t)$ tentukan mean dan variansinya.

Penyelesaian

Fungsi pembangkit momen

$$m(t) = E[e^{tY}] = \int_0^1 e^{ty}\, 2y\, dy$$

$$= 2\int_0^1 y\, e^{ty}\, dy$$

$$= 2\left(\frac{y\, e^{ty}}{t} - \frac{e^{ty}}{t^2}\Bigg|_0^1\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{t}e^{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{t\,e^t - (e^t - 1)}{t^2} \right).$$

Dengan mengingat bahwa

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ...$$

maka diperoleh

$$m(t) = 2\left(\frac{t\,e^t - (e^t - 1)}{t^2} \right) = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{4}t^2 + g(t)$$

dengan $g(t)$ merupakan fungsi kelipatan t. Akibatnya

$$E[Y] = m'(0) = \frac{2}{3}$$

dan

$$E[Y^2] = m''(0) = \frac{1}{2}$$

sehingga $V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$.

LATIHAN

1. Jika Y variabel random dengan distribusi probabilitas yang dinyatakan dalam tabel.

y	1	2	3	4
$f(y)$	0,4	0,3	0,2	0,1

Tentukan $E(Y)$, $E(1/Y)$, $E(Y^2-1)$, $V(Y)$.

2. Dalam permainan judi seorang pemain menerima Rp 15.000,00 jika dia memperoleh jack dan queen dan Rp 5.000,00 jika dia memperoleh King atau ace dari 1 deck kartu yang berisi 52 kartu jika dia memperoleh sembarang kartu Y yang lain dia harus membayar Rp 4.000,00. Apabila seorang ikut bermain dalam permainan judi itu berapa harga harapan dia menang.
3. Misalkan variabel random X = banyaknya jam belajar tiap minggu seorang mahasiswa yang dipilih secara random dari semua mahasiswa UKSW. Jika X mempunyai mean 30 jam dan deviasi standar 8, maka tentukan mean variabel random $Y = (X - 30)^2$ dan deviasi standar $Z = 2X - 3$.
4. Seorang salesman dapat menemui satu atau dua konsumen per hari dengan probabilitas 1/3 dan 2/3 pada setiap pertemuan tersebut seorang konsumen akan membeli produk yang ditawarkan atau tidak membeli masing-masing dengan probabilitas 0,1 dan 0,9. Tentukan distribusi probabilitas penjualan harian dari salesman tersebut. Tentukan mean dan variansinya.
5. Jika variabel random Y mempunyai fungsi probabilitas

$$f(y) = (1/2)^y \quad \text{untuk } y = 1, 2, 3, \ldots..$$

maka tentukan $E(Y)$.

6. Jika fungsi probabilitas dari variabel random Y adalah $f(y) = y/15$ untuk $y = 1, 2, 3, 4, 5$, maka tentukan $E(Y)$.
7. Tentukan mean dan variansi dari distribusi hipergeometrik.
8. Jika Y mempunyai fungsi probabilitas

$$f(y) = y/10$$

untuk $y = 1, 2, 3, 4$.

Tentukan $E(Y)$ dan $E[\,|\,Y - 3\,|\,]$ serta $E[\,(Y - 3)^2\,]$.

9. Misalkan Y adalah variabel random dengan fungsi probabilitas

$$f(y) = 3y^2 \text{ untuk } 0 \le y \le 1.$$

   a. Tentukan mean dan variansi dari Y.
   b. Jika $X = Y^2$ maka tentukan mean dan variansi dari X.

10. Misalkan Y adalah variabel random dengan rungsi probabilitas

$$f(y)=2y/[k(k+1)],\ y = 1, 2, 3, ..., k$$

dengan k adalah bilangan bulat tertentu. Jika diketahui bahwa

$$1 + 2 + 3 + ... + k = k\,(k+1)/2,$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = k\,(k+1)(2k+1)/6$$

maka tentukan mean.

11. Misalkan Y mempunyai fungsi probabilitas dan misalkan terdapat bilangan c sehingga $f(c\text{-}y) = f(c+y)$ untuk semua y. Tunjukkan bahwa jika $E(Y)$ ada maka $E(Y) = c$.
12. Tentukan mean dan variansi dari fungsi seragam pada interval (0,1).
13. Diketahui variabel random Y berdistribusi eksponensial dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = \mu\, e^{-\mu y} \quad \text{untuk } y > 0,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Tentukan mean dan variansinya .

14. Buktikan bahwa variabel random Y yang mempunyai distribusi Beta dengan parameter α dan β mempunyai mean

$$E[\ Y\ ] = \alpha/(\alpha + \beta)$$

dan

$$V[\ Y] = \frac{\alpha\,\beta}{(\alpha+\beta)^2\,(\alpha+\beta+1)}.$$

15. Misalkan $F(x) = 1 - e^{-x}$ $x \ge 0,$
$\qquad = 0 \qquad x < 0.$

adalah fungsi distribusi untuk variabel random X. Tentukan $E(X)$ dan median dari X.

16. Misalkan variable random X berdistribusi N(0,16).
   a. Tentukan $P[\ X \le 14\ ]$.
   b. Tentukan $P[\ 4 \le X \le 18\ ]$.
   c. Tentukan $P[\ 2X - 10 \le 18\ ]$.
   d. Tentukan persentil ke-95 dari X.

17. Misalkan variabel random Y mempunyai fungsi densitas

$$f(y) = k \exp[- y^2/2] \quad - \infty < y < \infty$$

a. Tentukan k.
b. Tentukan fungsi pembangkit momen.
c. Tentukan $E[\ Y]$ dan $V[\ Y]$.

18. Variabel random Y mempunyai fungsi densitas

$$f(y) = \begin{cases} \exp[y] & y < 0, \\ 0 & \text{yang lain.} \end{cases}$$

a. Tentukan $E[\ e^{3Y/2}\ ]$.
b. Tentukan fungsi pembangkit momennya.
c. Tentukan $V(Y)$.

19. Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk variabel random Y yang berdistribusi seragam pada interval (θ_1, θ_2). Berdasarkan fungsi pembangkit momennya tentukan mean dan variansinya.

20. Diketahui variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas $f(y) = k\, y(1-y)$ untuk $0 \leq y \leq 1$.
a. Tentukan k.
b. Tentukan mean $E(Y)$, median dan modusnya.

*****

BAB VI
DISTRIBUSI PROBABILITAS BIVARIAT

Dalam banyak keadaan diperlukan pencatatan hasil beberapa variabel random secara serempak. Misalkan pengukuran tekanan uap air P dan isi gas V yang dihasilkan dari suatu percobaan kimia yang dikendalikan akan menghasilkan ruang dan sampel berdimensi dua yang terdiri dari atas hasil (p, v).

Definisi VI.1

Diketahui Y_1, Y_2 adalah variabe random diskrit .

Distribusi probabilitas bersama untuk y_1 dan y_2 dinyatakan dengan

$$p(y_1, y_2) = P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$$

didefinisikan untuk y_1, y_2 bilangan real.

Sifat-sifat fungsi probabilitas bersama $p(y_1, y_2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

1) $p(y_1, y_2) \geq 0$,
2) $\sum_{y_1}\sum_{y_2} p(y_1, y_2) = 1$.

Contoh VI.1

Dua isi ballpoint dipilih secara random dari sebuah kotak yang berisi tiga warna biru, dua merah, dan tiga hijau. Apabila Y_1 menyatakan banyaknya ballpoint yang isinya berwarna biru dan Y_2 menyatakan banyaknya ballpoint yang isinya berwarna merah yang terpilih. Tentukan distribusi probabilitas bersama $f(y_1, y_2)$ dan $P[(y_1, y_2) \in A]$ bila A menyatakan daerah

$$\{ (y_1, y_2): y_1 + y_2 \leq 1 \}$$

maka tentukan $P(A)$.

Penyelesaian :

Bila dimiliki *ballpoint* yang terdiri dari tiga warna biru, dua merah, dan tiga hijau dan diambil 2 *ballpoint* maka Y_1 yang menyatakan banyaknya ballpoint yang isinya berwarna biru, mungkin bernilai 0, 1 atau 2 dan Y_2 yang menyatakan banyaknya *ballpoint* yang isinya berwarna merah, mungkin bernilai 0, 1 atau 2. Banyak cara melakukan pengambilan 2 ballpoint dari seluruhnya 8 *ballpoint* adalah

$$\binom{8}{2} = 28 \text{ cara.}$$

Bila dari 2 ballpoint yang diambil tidak ada yang berwarna biru maupun yang berwarna merah maka berarti keduanya berwarna hijau sehingga banyak cara pengambilan dua ballpoint dari 3 *ballpoint* yang berwarna hijau adalah

$$\binom{3}{2} = 3 \text{ cara.}$$

Hal itu berarti probabilitas 2 *ballpoint* yang terambil tidak ada yang berwarna biru maupun yang berwarna merah adalah 3/28. Dengan cara yang sama dapat disusun tabel distribusi probabilitas untuk variabel random (Y_1, Y_2) berikut ini :

	$Y_2 = 0$	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 2$
$Y_1 = 0$	3/28	6/28	1/28
$Y_1 = 1$	9/28	6/28	0
$Y_1 = 2$	3/28	0	0

Dengan menggunakan rumus, tabel tersebut juga dapat dinyatakan sebagai

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \frac{\binom{3}{y_1}\binom{2}{y_2}\binom{3}{2 - y_1 - y_2}}{\binom{8}{2}}$$

dengan y_1 = 0, 1, 2 dan y_2 = 0, 1, 2.

Definisi VI.2

Untuk sebarang variabel random Y_1 dan Y_2 .

Fungsi distribusi bersama $F(a,b)$ dinyatakan sebagai

$$F(a,b) = P(Y_1 \leq a, Y_2 \leq b).$$

Untuk dua variabel random diskrit Y_1 dan Y_2 maka $F(a,b)$ berbentuk

$$F(a,b) = \sum_{y_1 \leq a} \sum_{y_2 \leq b} p(y_1, y_2) \ .$$

Untuk Y_1, Y_2 variabel random kontinu dengan fungsi distribusi bersama $F(a, b)$.

Jika terdapat fungsi tidak negatif $f(a,b)$ sedemikian hingga untuk sebarang bilangan real a dan b berlaku

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(y_1, y_2)\, dy_2 \ dy_1$$

maka Y_1 dan Y_2 dikatakan variabel random bersama kontinu.

Fungsi $f(y_1, y_2)$ disebut fungsi kepadatan probabilitas bersama.

Sifat- sifat distribusi probabilitas bersama $F(a, b)$

1. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y_2) = F(y_1, -\infty) = 0.$
2. $F(\infty, \infty) = 1.$

Jika $a_2 \geq a_1$ dan $b_2 \geq b_1$ maka

$$F(a_2,b_2) - F(a_2,b_1) - F(a_1,b_2) + F(a_1,b_1) \geq 0 \quad \text{(non negatif)} .$$

Sifat-sifat fungsi kepadatan bersama $f(Y_1, Y_2)$ adalah

1) $F(y_1,y_2) \geq 0$ untuk semua Y_1, Y_2.

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\ dy_1\, dy_2 \ = 1$$

$P(a_1 \leq Y_1 \leq a_2 \ , b_1 \leq Y_2 \leq b_2)$ merupakan volume di bawah bidang luasan $f(y_1, y_2)$ dan akan sama dengan

$$\int_{b1}^{b2} \int_{a1}^{a2} f(y_1, y_2) dy_1, dy_2$$

Contoh VI.2

Misalkan diberikan fungsi kepadatan probabilitas bersama :

$f(y_1, y_2) \quad = \quad 4\ y_1\, y_2 \qquad$ untuk $0 < y_1 < 1$ dan $0 < y_2 < 1$.

a. Tentukan $P(\ Y_1 < 0{,}5\ ,\ Y_2 < 0{,}5)$.
b. Tentukan $P(\ Y_1 + Y_2 < 1)$.

Penyelesaian :

a. $$P(\ Y_1 < 0{,}5\ ,\ Y_2 < 0{,}5) = \int_0^{0,5}\int_0^{0,5} 4\, y_1\, y_2\, dy_1\, dy_2$$
$$= \int_0^{0,5} 2\, y_2 \left(y_1^{\,2}\Big|_0^{0,5} \right) dy_2$$
$$= \int_0^{0,5} 0{,}5\, y_2\ \ dy_2$$
$$= \left(\frac{y_2^{\,2}}{4}\Bigg|_0^{0,5} \right)$$
$$= 1/16.$$

b. $$P(\ Y_1 + Y_2 < 1) = \int_0^1\int_0^{1-y_1} 4\, y_1\, y_2\, dy_2\, dy_1\,.$$
$$= \int_0^1 2\, y_1\, y_2^{\,2}\Big|_0^1\ dy_1$$
$$= \int_0^1 2 y_1 (1 - y_1)^2\, dy_1$$
$$= \int_0^1 2 y_1 - 4\, y_1^{\,2} + 2\, y_1^{\,3}\, dy_1$$
$$= y_1^{\,2} - 4\, y_1^{\,2} + 2\, y_1^{\,3}\Big|_0^1$$
$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Contoh VI.3

Misalkan diberikan fungsi kepadatan probabilitas bersama :

$f(y_1, y_2) \quad = \quad y_1\,[\,1 + 3\,(y_2)^2]/4 \qquad$ untuk $0 < y_1 < 1$ dan $0 < y_2 < 1$,

$\qquad\qquad\quad = \quad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad$ untuk yang lain.

Tentukan $P((y_1, y_2) \in A)$ bila A daerah

$$\{ (y_1, y_2) \; ; 0 < y_1 < 1, ¼ < y_2 < ½ \}.$$

Penyelesaian

$$P(0 < Y_1 < 1 , 1/4 < Y_2 < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} \int_0^1 y_1 \frac{1 + 3y_2}{4} \; dy_1 \, dy_2$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{1 + 3y_2}{4} \left(\left. \frac{y_1^{\,2}}{2} \right|_0^1 \right) dy_2$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{1 + 3y_2}{8} \; dy_2$$

$$= \left(\left. \frac{y_1 + (3y_2^{\,2})/2}{8} \right|_{0,25}^{0,5} \right)$$

$$= 3/64.$$

Contoh VI.4

Diketahui

$f(x,y) = 2(x + y)$ untuk $0 \le x \le y \le 1$,

$= 0$ untuk (x, y) yang lain.

a. Tentukan $P(X \le 0{,}5,\ Y \le 0{,}5)$.

b. Tentukan $P(X + Y \le 1)$.

Penyelesaian

a. $$P(X < 0{,}5 , Y < 0{,}5) = \int_0^{0,5} \int_y^{0,5} 2x + 2y \;\; dx \; dy$$

$$= \int_0^{0,5} \left(x^2 + 2xy \Big|_y^{0,5} \right) dy$$

$$= \int_0^{0,5} 0{,}25 + y - y^2 - y^2 \; dy$$

$$= \int_0^{0,5} 0{,}25 + y - 2y^2 \;\; dy$$

$$= \left(\left. \frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right|_0^{0,5} \right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \quad = \frac{1}{6}.$$

b. $P(X+Y<1) = \int_0^1 \int_{1-y}^{y} 2x+2y\ dx\ dy$

$$= \int_0^1 x^2 + 2xy\Big|_{1-y}^{y}\ dy$$

$$= \int_0^1 y^2 + 2y^2 - (1-y)^2 - 2(1-y)y\,dy$$

$$= \int_0^1 4y^2 - 1\ dy$$

$$= \frac{4y^3}{3} - y\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - 1$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Contoh VI.4

Suatu sistem elektronik terdiri dari dua komponen yang berbeda yang beroperasi secara bersama. Misalkan Y_1 dan Y_2 menyatakan lama hidup dari komponen tipe I dan tipe II. Fungsi kepadatan probabilitas bersama dinyatakan dengan

$f(y_1, y_2) = 8\, y_1 \exp[-(y_1 + y_2)]$ untuk $y_1 > 0$; $y_2 > 0$.

Tentukan $P(Y_1 > 1\ ,\ Y_2 > 1)$.

Penyelesaian

$$P(Y_1 > 1\ ,\ Y_2 > 1) = \int_1^\infty \int_1^\infty 8\,y_1 \exp[-(y_1+y_2)]\,dy_2\ dy_1$$

$$= \left(\int_1^\infty 8\,y_1 \exp[-y_1]\,dy_1\right)\left(\int_1^\infty \exp[-y_2]\,dy_2\right)$$

dengan

$$\int_1^\infty \exp[-y_2]\,dy_2 = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \exp[-y_2]\,dy_2$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\exp(-y_2)\Big|_1^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-1} - e^{-b}\right]$$

$= e^{-1}.$

$$\int_1^{\infty} 8\, y_1 \exp[-y_1]\, dy_1 = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} 8\; y_1 \exp[-y_1]\, dy_1$$

$$= 8 \lim_{b \to \infty}\left(- y_1 \exp(-y_1) - \exp(-y_1) \Big|_1^b \right)$$

$$= 8 \lim_{b \to \infty} \left[2\; e^{-1} - b \exp[-b] - \exp[-b] \right]$$

$$= 16\, e^{-1}.$$

Akibatnya $P(Y_1 > 1 , Y_2 > 1) = 16\, e^{-2}$.

VI.1 Nilai harapan dari Fungsi Variabel Random

Jika $g(Y_1, Y_2)$ fungsi variabel random Y_1 dan Y_2 yang mempunyai fungsi probabilitas bersama $p(Y_1, Y_2)$ adalah

$$E[\; g(Y_1, Y_2)] = \sum_{y_1} \sum_{y_2} g(y_1, y_2)\, p(y_1, y_2)\;.$$

Jika Y_1, Y_2 adalah variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(y_1, y_2)$ maka

$$E[\, g(Y_1, Y_2)\,] = \int_{y_1} \int_{y_2} g(y_1, y_2)\, f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2\;.$$

Sifat – sifat nilai harapan

1. Jika c konstanta maka $E[\, c\,] = c$.
2. Jika $g(Y_1, Y_2)$ adalah fungsi variabel random Y_1 dan Y_2 dengan c konstanta maka $E[\, c\, g(Y_1, Y_2)\,] = c\, E[\, g(Y_1, Y_2)\,]$.
3. Jika Y_1 dan Y_2 adalah variabel random dengan fungsi kepadatan prob. bersama $f(Y_1, Y_2)$ dan $g_1(Y_1, Y_2)$, …., $g_k(Y_1, Y_2)$ maka
   $E[\, g_1(Y_1, Y_2) + \ldots + g_k(Y_1, Y_2)] = E[\, g_1(Y_1, Y_2)] + \; ... \; + E[\, g_k(Y_1, Y_2)]$.

Contoh VI.5

Diketahui Y_1 dan Y_2 mempunyai fungsi kepadatan bersama

$$f(y_1, y_2) = 2y_1 \quad \text{untuk} \quad 0 \le y_1 \le 1 \;;\; 0 \le y_2 \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk yang lain.}$$

Tentukan harga harapan $E(Y_1\, Y_2)$ dan $E[\, Y_1 + Y_1\, (Y_2)^2\,]$.

Penyelesaian :

$$E(Y_1\, Y_2) \;=\; \int_0^1 \int_0^1 (y_1\, y_2)\; 2\, y_1\; dy_1\, dy_2$$

$$= \int_0^1 2\,y_2 \left(\frac{y_1^{\,3}}{3} \bigg| \right) dy_2$$

$$= \int_0^1 (2/3)\, y_2 \;\, dy_2$$

$$= \left(\frac{y_2^{\,2}}{3} \bigg|_0^1 \right)$$

$$= 1/3.$$

$$E[\, Y_1 + Y_1\,(Y_2)^2\,] = E[\, Y_1\,] + E[\, Y_1\,(Y_2)^2\,]$$

$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 (y_1)\; 2\,y_1\;\, dy_1\, dy_2 \quad + \quad \int_0^1\!\!\int_0^1 (y_1\; y_2^{\,2})\; 2\,y_1\;\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2y_1^{\,3}}{3} \bigg|_0^1 \right) dy_2 \;+\; \int_0^1 2\,y_2^{\,2} \left(\frac{y_1^{\,3}}{3} \bigg|_0^1 \right) dy_2$$

$$= \int_0^1 (2/3)\;\, dy_2 \;+\; \int_0^1 (2/3)\, y_2^{\,2} \;\; dy_2$$

$$= (2/3) \;+\; \left(\frac{2\,y_2^{\,3}}{9} \bigg|_0^1 \right)$$

$$= (2/3) + (2/9)$$

$$= 8/9.$$

VI.2 Kovariansi dari Dua Variabel Random

Apabila variabel random Y_1 dan Y_2 mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(y_1, y_2)$ maka nilai harapan fungsi

$$g(y_1, y_2) = (Y_1 - \mu_1)\,(Y_2 - \mu_2)$$

dengan $\mu_1 = E(Y_1)$ dan $\mu_2 = E(Y_2)$ yaitu dinamakan kovariansi Y_1 dan Y_2 dan dilambangkan dengan Cov(Y_1, Y_2). Hal itu berarti

$$Cov(Y_1, Y_2) = \sum_{y_1}\sum_{y_2} \;(Y_1 - \mu_1)\;(Y_2 - \mu_2)\,p(y_1, y_2)$$

dan $\qquad Cov(Y_1, Y_2) = \int_{y_2}\int_{y_1} (y_1 - \mu_1)(y_2 - \mu_2)\, f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2\,.$

Kovariansi akan bernilai *positif* jika nilai Y_1 yang besar berpadanan dengan nilai Y_2 yang besar sedangkan nilai Y_1 yang kecil berpadanan dengan nilai Y_2 yang kecil. Sebaliknya, kovariansi akan *negatif* bila nilai Y_1 yang kecil berpadanan dengan nilai Y_2 yang besar dan nilai Y_1 yang besar berpadanan dengan nilai Y_2 yang kecil. Apabila variabel random Y_1 dan Y_2 saling bebas maka kovariansi Y_1 dan Y_2 akan bernilai nol. Tetapi, dua variabel random mungkin mempunyai kovariansi nol meskipun variabel random itu tidak saling bebas.

Teorema VI.1

Jika Y_1 dan Y_2 adalah variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(y_1, y_2)$ maka

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E[\,(Y_1 - \mu_1)\,(Y_2 - \mu_2)\,] = E[Y_1\, Y_2] - E(Y_1)\, E(Y_2).$$

Contoh VI.6

Diketahui Y_1 dan Y_2 mempunyai fungsi kepadatan bersama

$$f(y_1, y_2) = 2y_1 \quad \text{untuk} \quad 0 \le y_1 \le 1 \;;\; 0 \le y_2 \le 1$$

Tentukan Cov(Y_1, Y_2).

Penyelesian :

$$\begin{aligned} E[\,Y_1] &= \int_0^1\int_0^1 (y_1)\; 2\,y_1\; dy_1\, dy_2 \\ &= \int_0^1 \left(\left. \frac{2y_1^{\,3}}{3} \right|_0^1 \right) dy_2 \\ &= \int_0^1 (2/3)\; dy_2 \\ &= (2/3)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\,Y_2] &= \int_0^1\int_0^1 (y_2)\; 2\,y_1\; dy_1\, dy_2 \\ &= \int_0^1 \left(\left. y_1^{\,2} \right|_0^1 \right) y_2\, dy_2 \\ &= \int_0^1 \frac{y_2^{\,2}}{2} dy_2 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Karena E[Y_1 Y_2] = 1/3 maka

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) &= E[Y_1\, Y_2] - E(Y_1)\, E(Y_2) \\ &= 1/3 - (2/3)\,(1/2) \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

VI.2 Distribusi Probabilitas Marginal dan Bersyarat

Definisi VI.3

Jika Y_1 dan Y_2 variabel random diskrit bersama dengan fungsi probabilitas bersama $p(y_1,\ y_2)$ maka fungsi probabilitas marginal dari Y_1 dan Y_2 masing-masing dinyatakan dengan

$$p_1(y_1) = \sum_{y_2} p(y_1, y_2)$$

$$p_2(y_2) = \sum_{y_1} p(y_1\,, y_2).$$

Definisi VI.4

Jika Y_1 dan Y_2 variabel random kontinu bersama dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(y_1,\ y_2)$ maka fungsi kepadatan probabilitas marginal untuk Y_1 dan Y_2 masing-masing dinyatakan dengan :

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1\,, y_2)\, dy_2$$

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1\,, y_2)\, dy_1.$$

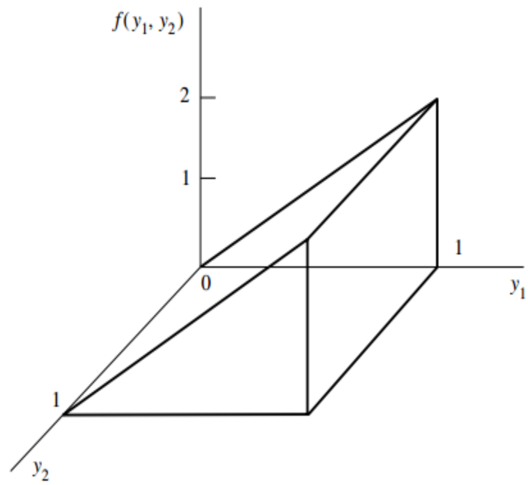
Contoh VI.7

Diketahui $f(y_1, y_2) = 2y_1$ untuk $0 \le y_1 \le 1$ dan $0 \le y_2 \le 1$.

a. Tentukan sketsa fungsi kepadatan probabilitas bersama Y_1 dan Y_2.
b. Fungsi kepadatan marginal Y_1.
c. Fungsi kepadatan marginal Y_2.

Penyelesian :

a. Sketsa fungsi kepadatan probabilitas bersama Y_1 dan Y_2 pada Gambar VI.2.



Gambar VI.2

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y_1 adalah

$$f_1(y_1) = \int_0^1 2\, y_1 \; dy_2 = 2\, y_1$$

untuk $0 \le y_1 \le 1$.

c. Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y_2 adalah

$$f_2(y_2) = \int_0^1 2\, y_1 \; dy_1 = \left. y_1 \right|_0^1 = 1$$

untuk $0 \le y_2 \le 1$.

Contoh VI.8

Diketahui

$$f(x,y) = 2\,(x+y) \qquad \text{untuk } 0 \le x \le y \le 1,$$
$$= 0 \qquad \text{untuk } (x, y) \text{ yang lain.}$$

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal Y.
c. Tentukan $P(\,Y > 2X)$.

Penyelesaian :

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal X adalah

$$f_1(x) = \int_0^1 2x + 2y \; dy$$

$$= \left(2xy + y^2 \Big|_x^1 \right)$$

$$= 2x + 1 - 2x^2 - x^2$$

$$f_1(x) = 2x + 1 - 3x^2 \quad \text{untuk } 0 < x < 1.$$

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y adalah

$$f_2(y) = \int_0^y 2x + 2y \; dx$$

$$= \left(x^2 + 2xy \Big|_0^y \right)$$

$$= y^2 + 2y^2$$

$$= 3y^2$$

$$f_2(x) = 3y^2 \quad \text{untuk } 0 < y < 1.$$

c. $P(\,Y > 2X) = \int_0^1 \int_0^{y/2} 2x + 2y \; dx\, dy$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + 2yx \Big|_0^{y/2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4} + y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{5y^2}{4} dy$$

$$= \left(\frac{5y^3}{12} \Bigg|_0^1 \right)$$

$$= 5/12.$$

Contoh VI.9

Berdasarkan contoh maka dapat ditentukan fungsi probabilitas marginal Y_1 sebagai berikut

Y_1	0	1	2
$p_1(y_1)$	10/28	15/28	3/28

dan fungsi probabilitas marginal Y_2 sebagai berikut

Y_2	0	1	2
$p_2(y_2)$	15/28	12/28	1/28

Akibatnya padat diperoleh nilai harapan :

$$E[\ Y_1\ ] = \sum_{y_1=0}^{2} y_1 p_1(y_1)$$

$$= 0\left(\frac{10}{28}\right) + 1\left(\frac{15}{28}\right) + 2\left(\frac{3}{28}\right)$$

$$= \frac{21}{28}.$$

$$E[\ Y_2\ ] = \sum_{y_2=0}^{2} y_2 p_2(y_2)$$

$$= 0\left(\frac{15}{28}\right) + 1\left(\frac{12}{28}\right) + 2\left(\frac{1}{28}\right)$$

$$= \frac{14}{28}.$$

Contoh VI.10

Dari suatu kelompok yang terdiri dari 3 Partai Golkar, 2 Partai Demokrat dan 1 PDIP dibentuk suatu komite yang terdiri dari 2 orang yang terpilih secara random. Diketahui Y_1 menyatakan banyak Partai Golkar dan Y_2 menyatakan banyak Partai Demokrat pada komite. Tentukan probabilitas bersama dari Y_1 dan Y_2 dan tentukan distribusi probabilitas marginal Y_1 .

Penyelesaian :

Distribusi probabilitas bersama variabel random Y_1 dan Y_2 dapat dinyatakan dalam rumus

$$P(Y_1 = y_1 \,,\, Y_2 = y_2) = \frac{\binom{3}{y_1}\binom{2}{y_2}\binom{1}{2-y_1-y_2}}{\binom{6}{2}}$$

untuk $y_1 = 0, 1, 2$, $y_2 = 0, 1, 2$ dan $1 \le y_1 + y_2 \le 2$. Dalam bentuk tabel hal itu dinyatakan pada tabel :

	$Y_2 = 0$	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 2$	$P(Y_1 = y_1)$
$Y_1 = 0$	0	2/15	1/15	3/15
$Y_1 = 1$	3/15	6/15	0	9/15
$Y_1 = 2$	3/15	0	0	3/15
$P(Y_2 = y_2)$	6/15	8/15	1/15	1

Distribusi probabilitas marginal Y_1 dinyatakan pada kolom terakhir.

Definisi VI.6

Jika $p(y_1, y_2)$ menyatakan distribusi probabilitas bersama variabel random Y_1 dan Y_2 sedangkan $p(y_2)$ menyatakan distribusi probabilitas marginal variabel Y_2 maka distribusi probabilitas bersyarat untuk Y_1 bila diberikan variabel $Y_2 = y_2$ dinyatakan dengan

$$p(y_1 \,|\, y_2) = \frac{p(y_1 \,,\, y_2)}{p(y_2)}.$$

Contoh VI.11

Tentukan distribusi bersyarat untuk Y_1 jika diberikan $Y_2 = 1$ yaitu bila diketahui satu dari dua orang pada komite adalah dari Partai Demokrat, tentukan distribusi probabilitas bersyarat untuk banyak anggota Partai Golkar yang dipilih untuk komite tersebut.

Penyelesaian :

$$p(0|1) = \frac{p(0,1)}{p(1)} = \frac{2/15}{8/15} = \frac{1}{4}.$$

$$p(1|1) = \frac{p(1,1)}{p(1)} = \frac{6/15}{8/15} = \frac{3}{4}.$$

$$p(2|1) = \frac{p(2,1)}{p(1)} = \frac{0/15}{8/15} = 0 .$$

Hal itu berarti jika diketahui satu dari dua orang pada komite dari Partai Demokrat maka probabilitas tidak ada anggota Partai Golkar yang terpilih dalam komite adalah ¼. Demikian juga, jika diketahui satu dari dua orang pada komite dari Demokrat maka probabilitas terdapat satu anggota partai Republik yang terpilih dalam komite adalah 3/4. Akhirnya, jika diketahui satu dari dua orang pada komite dari Partai Demokrat maka tidak mungkin terdapat dua anggota Partai Golkar yang terpilih dalam komite.

Untuk variabel random bersama kontinu Y_1 dan Y_2, fungsi kepadatan probabilitas bersyarat didefinisikan secara analog.

VI.3 Nilai Harapan dari Fungsi Probabilitas Bersyarat

Definisi VI.7

Diketahui Y_1 dan Y_2 adalah variabel random bivariat diskrit. Nilai harapan bersyarat dari Y_1 bila diberikan $Y_2 = y_2$ didefinisikan dengan

$$E[\ Y_1 | Y_2 = y_2] = \sum_{y_1} y_1\ p(y_1 \mid y_2) .$$

Sedangkan untuk Y_1 dan Y_2 variabel random bivariat kontinu nilai harapan bersyarat dari Y_1 bila diberikan $Y_2 = y_2$ didefinisikan dengan

$$E[\ Y_1 | Y_2 = y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} y_1\ f(y_1 \mid y_2)\ dy_1 .$$

Contoh VI.12

Suatu tangki minuman mempunyai kapasitas Y_2 yang merupakan variabel random yaitu banyak persediaan minuman pada pagi hari dan banyak penjualan Y_1 merupakan variabel random. Apabila tidak dilakukan penambahan persediaan minuman pada tangki tersebut selama hari itu maka $Y_1 \le Y_2$. Bila Y_1 dan Y_2 mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 1/2 & \text{untuk } 0 \le y_1 \le y_2;\ 0 \le y_2 \le 2, \\ 0 & \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Hal itu berarti bahwa titik (y_1, y_2) berdistribusi seragam pada daerah segitiga yang diberikan. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari Y_1 bila diberikan $Y_2 = y_2$. Tentukan nilai harapan bersyarat dari banyak penjualan Y_1 bila diberikan Y_2 yaitu banyak persediaannya 1 galon.

Penyelesaian :

Untuk menentukan nilai harapan bersyarat terlebih dahulu ditentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal dari variabel Y_2 yaitu

$$\int_0^{y_2} 1/2 \; dy_1 = \left(\frac{y_1}{2} \Big|_0^{y_2} \right) = \frac{y_2}{2}$$

untuk $0 \le y_2 \le 2$. Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari Y_1 bila diberikan $Y_2 = y_2$ adalah

$$f(y_1 \,|\, y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)} = \frac{1/2}{y_2/2} = \frac{1}{y_2}$$

untuk $0 \le y_1 \le y_2$. Nilai harapan bersyarat dari banyak penjualan bila diberikan $Y_2 = 1$ adalah

$$E[\; Y_1 \mid Y_2 = 1 \;] = \int_0^1 y_1 \; dy_1 = 1/2 .$$

Hal itu berarti bahwa jika banyaknya persediaan minuman pada pagi hari adalah1 galon maka harapan banyak penjualan selama hari itu adalah ½ galon.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Diketahui variabel random X dan Y mempunyai fungsi probabilitas bersama

		Y		
		1	2	3
X	1	1/12	1/6	0
	2	0	1/9	1/5
	3	1/18	1/4	2/15

a. Tentukan fungsi probabilitas marginal X.
b. Tentukan fungsi probabilitas marginal Y.
c. Apakah variabel random X dan Y saling bebas?
d. Tentukan $P(X \leq 2)$.
e. Tentukan $P(X \leq Y)$.
f. Tentukan $f(y|x)$.

Penyelesaian

a. Fungsi probabilitas marginal X adalah

x	1	2	3
$g(x)$	3/12	14/45	119/180

b. Fungsi probabilitas marginal Y adalah

y	1	2	3
$h(y)$	5/36	19/36	1/3

c. Karena $0 = f(1,3) \neq g(1)\, h(3) = (119/180)(1/3)$ maka X dan Y tidak saling bebas.
d. $P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 3) = 1 - (119/180) = 61/180$.
e. $P(X \leq Y) = 1 - P(X > Y) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{15}\right) = 1 - \frac{35}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$.

Soal 2

Diketahui $f(x,y) = c(x + y)$ untuk $x = 0, 1, 2$ dan $y = 0,1,2$.

Tentukan c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi probabilitas bivariat.

Penyelesaian

$0 + c + 2c + 2c + 3c + 2c + 3c + 4c = 1$

$c(1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 4) = 1$

$18\, c = 1$

$c = 1/18.$

Soal 3

Diketahui $f(x,y) = c\dfrac{2^{x+y}}{x!\,y!}$ untuk $x = 0, 1, 2, ...$ dan $y = 0,1,2,......$

a. Tentukan c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi probabilitas bivariat.
b. Tentukan fungsi probabilitas marginal X.
c. Tentukan fungsi probabilitas marginal Y.
d. Apakah variabel random X dan Y saling bebas.

Penyelesaian

a. Konstanta c ditentukan sehingga

$$\sum_x \sum_y f(x,y) = 1\,.$$

Akibatnya

$$c\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{2^{x+y}}{x!\,y!}=1$$

$$c\sum_{x=0}^{\infty}\frac{2^x}{x!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{2^y}{y!}=1$$

$$c\,e^2\,e^2=1$$

sehingga $c = e^{-4}$.

b. Fungsi probabilitas marginal X adalah

$$g(x)=\sum_{y=0}^{\infty}e^{-4}\frac{2^{x+y}}{x!\,y!}=\frac{2^x\,e^{-2}}{x!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{2^y\,e^{-2}}{y!}=\frac{2^x\,e^{-2}}{x!}\,.$$

d. Fungsi probabilitas marginal Y adalah

$$h(y)=\sum_{x=0}^{\infty} e^{-4}\,\frac{2^{x+y}}{x!\,y!}=\frac{2^y\,e^{-2}}{y!}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{2^x\,e^{-2}}{x!}=\frac{2^y\,e^{-2}}{y!}\,.$$

e. Karena $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ dengan $g(x)$ fungsi probabilitas marginal X dan $h(y)$ fungsi probabilitas marginal Y maka X dan Y saling bebas.

Soal 4

Misalkan diketahui variabel random X dan Y mempunyai fungsi probabilitas bersama

$$f(x,y)=8xy$$

untuk $0 \le x \le y \le 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
b. Tentukan $f(y \mid x)$ dan $f(x|y)$.
c. Tentukan $P(X \le 0{,}5 \mid Y = 0{,}75)$.
d. Tentukan $P(X \le 0{,}5 \mid Y \le 0{,}5)$.

Penyelesaian

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal X adalah

$$f(x)=\int_x^1 8xy\,dy = 4xy^2\ \Big|_x^1 = 4x-4x^3 = 4x(1-x^2)\,.$$

b. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat Y untuk $X = x$ yaitu

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{8xy}{4x(1-x^2)}=\frac{8y}{4(1-x^2)}$$

untuk $x \le y \le 1$.

Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y adalah

$$f(y)=\int_0^y 8xy\,dx = 4yx^2\ \Big|_0^y = 4y^3$$

untuk $0 \le y \le 1$.

Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat X untuk $Y = y$ yaitu

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{8xy}{4y^3}=\frac{2x}{y^2}$$

untuk $0 \le x \le y$.

c. $P(X \le 0{,}5 \mid Y = 0{,}75) =$

$$\int_0^{0,5}\frac{2x}{(0{,}75)^2}\,dx\ =\ \frac{16}{9}\int_0^{0,5} 2x\,dx=\frac{16}{9}\ x^2\ \Big|_0^{0,5}\ =\ \frac{16}{9}\,\frac{1}{4}=\frac{4}{9}.$$

d. Karena $P(X \leq 0{,}5 \mid Y \leq 0{,}5) = \dfrac{P(X \leq 0{,}5, Y \leq 0{,}5)}{P(Y \leq 0{,}5)}$ maka terlebih dahulu dihitung $P(X \leq 0{,}5\ ,\ Y \leq 0{,}5)$ dan $P(Y \leq 0{,}5)$ sehingga

$$P(X \leq 0{,}5\ ,\ Y \leq 0{,}5) = \int_0^{0,5}\int_0^{y} 8xy\ dx\ dy = \int_0^{0,5} y\,4x^2 \Big|_0^y dy$$

$$= \int_0^{0,5} 4y^3\ dy$$

$$= y^3 \Big|_0^{0,5}$$

dan

$P(Y \leq 0{,}5) = \int_0^{0,5} 4y^3 dy = y^4 \Big|_0^{0,5} = \dfrac{1}{16}$. Akibatnya

$$P(X \leq 0{,}5 \mid Y \leq 0{,}5) = \frac{P(X \leq 0{,}5, Y \leq 0{,}5)}{P(Y \leq 0{,}5)} = \frac{1/16}{1/16} = 1\ .$$

Soal 5

Diketahui fungsi kepadatan probabilitas bivariat dari variabel random X dan Y adalah

$$f(x,y) = 2(x+1)/3$$

untuk $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal Y.
c. Tentukan $f(y|x)$ dan $f(x|y)$.
d. Tentukan $P(X + Y \leq 1)$.
e. Tentukan $P(X < 2Y < 3X)$.

Penyelesaian

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal X adalah

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2x+2}{3} dy = \frac{2x+2}{3}$$

untuk $0 < x < 1$.

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y adalah

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2x+2}{3} dy = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2} + x \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = 1$$

untuk $0 < y < 1$.

c. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat Y diberikan $X = x$ adalah

$$f(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{(2/3)(x+1)}{(2/3)(x+1)} = 1$$

untuk $0 < y < 1$.

Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat X diberikan $Y = y$ adalah

$$f(x\,|\,y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{(2/3)(x+1)}{1} = (2/3)(x+1)$$

untuk $0 < x < 1$.

d. $P(\,X + Y \leq 1) \;=\; P(\,Y \leq 1 - X)$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{2}{3}(\,x+1)\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1+x)\,(\,y\,\Big|_0^{1-x})\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2)\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$= 4/9$.

e. $P(\,X < 2Y < \;3X) \;=\; P(\,X < 2Y < \;3X)$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{3x/2} \frac{2}{3}(1+x)\;dy\;dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \;(1+x)\left(y\Big|_{x/2}^{3x/2}\right)\;dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \;(1+x)\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right)\;dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \;(1+x)\,x\;dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 5/9.$$

Soal 6

Diketahui bahwa variabel random X dan Y saling bebas dan masing-masing mempunyai fungsi probabilitas marginal X

$$f(1) = f(3) = 0{,}2 \text{ dan } f(2) = 0{,}6$$

dan fungsi probabilitas marginal Y yaitu

$$f(1) = f(3) = 0{,}2 \text{ dan } f(2) = 0{,}6.$$

a. Tentukan fungsi probabilitas bersama X dan Y.
b. Tentukan $P(X + Y \leq 4)$.

Penyelesaian

Karena $f(x,y) = f(x)\, f(y)$ maka

$f(1,1) = f(1)\, f(1) = 0{,}2\ (0{,}2) = 0{,}04,$
$f(1,2) = f(1)\, f(2) = 0{,}2\ (0{,}6) = 0{,}12,$
$f(1,3) = f(1)\, f(3) = 0{,}2\ (0{,}2) = 0{,}04,$
$f(2,1) = f(2)\, f(1) = 0{,}6\ (0{,}2) = 0{,}12,$
$f(2,2) = f(2)\, f(2) = 0{,}6\ (0{,}6) = 0{,}36,$
$f(2,3) = f(2)\, f(3) = 0{,}6\ (0{,}2) = 0{,}12,$
$f(3,1) = f(3)\, f(1) = 0{,}2\ (0{,}2) = 0{,}04,$
$f(3,2) = f(3)\, f(2) = 0{,}2\ (0{,}6) = 0{,}12,$
$f(3,3) = f(3)\, f(3) = 0{,}2\ (0{,}2) = 0{,}04.$

Dalam bentuk tabel fungsi probabilitas marginal dapat dinyatakan sebagai

$$P(X + Y \leq 4) = 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}36 = 0{,}72.$$

Soal 7

Diketahui fungsi kepadatan probabilitas bersama variabel random X dan Y adalah

$$f(x,y) = 24xy$$

untuk $x > 0$, $y > 0$ dan $x + y < 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal Y.
c. Apakah X dan Y saling bebas?
d. Tentukan $P(Y > 2X)$.

Penyelesaian

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal *X*.

$$f(x) = \int_0^{1-x} 24xy\ dy$$

$$= 12xy^2\Big|_0^{1-x}$$

$$= 12x(1\text{-}x)^2$$

untuk $0 < x < 1$.

b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal *Y*

$$f(y) = \int_0^{1-y} 24xy\ dx$$

$$= 12yx^2\Big|_0^{1-y}$$

$$= 12y(1\text{-}y)^2$$

untuk $0 < y < 1$.

c. Karena $f(x,y) \neq f(x)\,f(y)$ maka *X* dan *Y* tidak saling bebas.

d. $P(Y > 2X) = \int_0^{1/3}\int_{2x}^{1-x} 24xy\ dy\ dx$

$$= \int_0^{1/3}\left(12xy^2\Big|_{2x}^{1-x}\right)dx$$

$$= \int_0^{1/3}\left(12x(1-x)^2 - (2x)^2\right)dx$$

$$= \int_0^{1/3}\left(12x - 28x^2 + 12x^3\right)dx$$

$$= 6x^2 - \frac{28x^3}{3} + 3x^4\Big|_0^{1/3}$$

$$= \frac{6}{9} - \frac{28}{81} + \frac{3}{81} = \frac{29}{81}.$$

Soal 8

Diketahui fungsi kepadatan probabilitas bersama variabel random *X* dan *Y* adalah $f(x,y) = 60x^2y$ untuk $x > 0$, $y > 0$ dan $x + y < 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas *X* yaitu $f(x)$.

b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas *Y* yaitu $f(y)$.

c. Tentukan $P(X < Y)$.
d. Tentukan $P(Y \mid X = x)$.
e. Tentukan $P(Y > 0{,}1 \mid X = 0{,}5)$.

Penyelesaian

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal X adalah

$$f(x) = \int_0^{1-x} 60x^2 y \; dy$$
$$= 30x^2 \left(y^2 \Big|_0^{1-x} \right)$$
$$= 30x^2 \left((1-x)^2 \right)$$

untuk $0 < x < 1$.

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal Y adalah

$$f(y) = \int_0^{1-y} 60x^2 y \; dx$$
$$= 20y \left(x^3 \Big|_0^{1-y} \right)$$
$$= 20y^2 \left((1-y)^3 \right)$$

untuk $0 < y < 1$.

c. $P(X < Y) = \int_0^{1/2} \int_x^{1-x} 60x^2 y \, dy \, dx$

$$= \int_0^{1/2} 30x^2 \left(y^2 \Big|_x^{1-x} \right) dx$$
$$= \int_0^{1/2} 30x^2 \left((1-x)^2 - x^2 \right) dx$$
$$= \int_0^{1/2} 30x^2 - 60x^3 \; dx$$
$$= \; 10x^3 - 15x^4 \Big|_0^{1/2}$$
$$= \frac{10}{8} - \frac{15}{16} = \frac{20-15}{16} = \frac{5}{16}.$$

d. $P(Y \mid X = x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)} = \dfrac{60x^2 y}{30x^2 (1-x)^2} = \dfrac{2y}{(1-x)^2}$

untuk $0 < y < 1\text{-}x$.

e. $P(Y > 0{,}1 \mid X = 0{,}5) = \int_{0,1}^{0,5} \frac{2y}{(1-0{,}5)^2}\, dy$

$$= \int_{0,1}^{0,5} 8y\, dy \;=\; 4y^2\Big|_0^{0,5} = 4((0{,}5)^2 - (0{,}1)^2) = 0{,}96.$$

Soal 9

Diketahui bahwa $f(x, y) = 6x$ untuk $0 < x < y < 1$.

Tentukan

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal dari X.
b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal dari Y.
c. Kovariansi X dan Y yaitu Cov(X,Y).
d. Korelasi dari X dan Y yaitu $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.
e. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari Y jika diberikan X yaitu $f(y|x)$.
f. $E[\, Y \mid X\,]$.

Penyelesaian

a. Fungsi kepadatan probabilitas marginal dari X adalah

$$f_1(x) = \int_x^1 6x\, dy = 6xy\Big|_x^1 = 6x(1-x)$$

untuk $0 < x < 1$.

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal dari Y adalah

$$f_2(y) = \int_0^y 6x\, dx = 3x^2\Big|_0^y = 3y^2$$

untuk $0 < y < 1$.

c. Untuk menentukan kovariansi X dan Y yaitu Cov(X,Y) maka terlebih dulu ditentukan $E[X]$, $E[Y]$ dan $E[XY]$:

$$E[\,X\,] = \int_0^1 x\,(6x(1-x))\, dx = \int_0^1 6x^{3-1}(1-x)^{2-1}\, dx = \frac{6\,\Gamma(3)\,\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

$$E[\,Y\,] = \int_0^1 3y^3\, dx = \frac{3y^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

$$E[\,XY\,] = \int_0^1\int_x^1 xy\,(6x)\, dy\, dx = \int_0^1\int_x^1 6x^2 y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 3x^2 y^2\Big|_x^1\, dx = \int_0^1 3x^2(1-x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 3x^2 - 3x^4\, dx$$

$$= x^3 - \frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1$$

$$= 1 - 3/5$$

$$= 2/5.$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{16-15}{40} = \frac{1}{40}.$$

d. Untuk menentukan korelasi X dan Y yaitu ρ = Corr(X,Y) maka terlebih dulu ditentukan $V(X)$ dan $V(Y)$. Sedangkan untuk menentukan $V(X)$ dan $V(Y)$, terlebih dahulu dihitung $E[X^2]$ dan $E[Y^2]$:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2(6x(1-x))\,dx = \int_0^1 6x^{4-1}(1-x)^{2-1}\,dx = \frac{6\,\Gamma(4)\,\Gamma(2)}{\Gamma(6)} = \frac{36}{120} = \frac{9}{30}.$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 3y^4\,dx = \frac{3y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{9}{30} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{30} - \frac{1}{4} = \frac{18-15}{60} = \frac{3}{60}.$$

$$V(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}.$$

Korelasi dari X dan Y yaitu

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1/40}{\sqrt{(3/60)(3/80)}} = 0{,}5774.$$

e. Fungsi kepadatan probabilitas bersyarat dari Y jika diberikan X yaitu $f(y|x)$ adalah

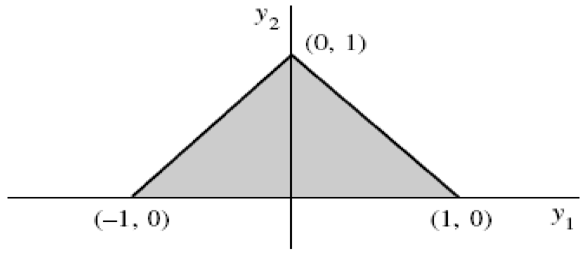
$$f(y\,|\,x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6x}{6x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

untuk $x < y < 1$ dan $0 < x < 1$.

f. $E[Y|x] = \int_x^1 \frac{y}{1-x}\,dy = \frac{y^2}{2(1-x)}\Big|_x^1 = \frac{1-x^2}{2(1-x)} = \frac{1+x}{2}$ untuk $0 < x < 1$.

Soal 10

Misalkan variabel random X dan Y berdistribusi seragam atas daerah segitiga yang diarsir di bawah ini.



Gambar VI.2

a. Tentukan $P(X \leq ¾, Y \leq ¾)$.
b. Tentukan $P(X - Y \geq 0)$.

Penyelesaian

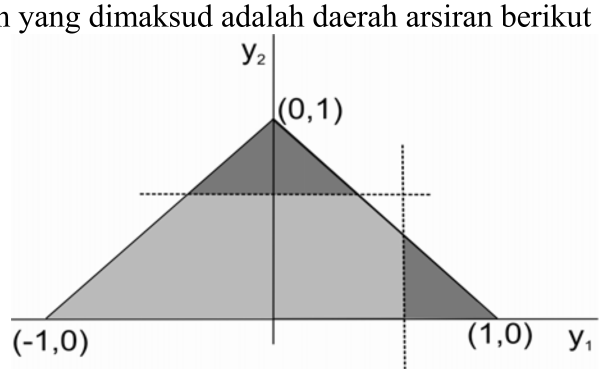
a. Karena variabel random X dan Y berdistribusi seragam atas daerah segitiga di atas maka fungsi kepadatan probabilitas bersamanya adalah

$$f(x, y) = 1$$

untuk $x \geq 0$, $x + y \leq 1$ dan $x - y \geq -1$. Akibatnya

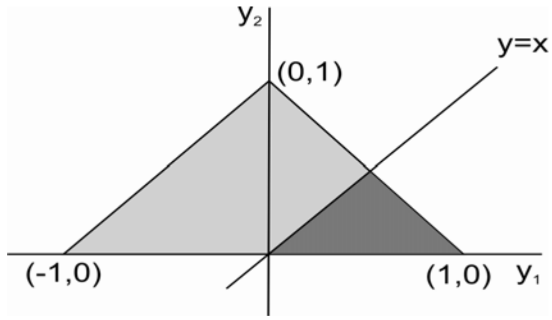
$$P(X \leq \frac{3}{4}, Y \leq \frac{3}{4}) = 1 - P(X > \frac{3}{4}, Y > \frac{3}{4}) = 1 - P(X > \frac{3}{4}) - P(Y > \frac{3}{4})$$
$$= 1 - \frac{1}{32} - \frac{1}{16}$$
$$= \frac{29}{32}.$$

Daerah yang dimaksud adalah daerah arsiran berikut :



Gambar VI.3

b. $P(X - Y \geq 0) = P(X \geq Y) = \frac{1}{4}$. Daerah yang dimaksud adalah daerah arsiran pada Gambar VI.2 berikut.



Gambar VI.3

LATIHAN

1. Misalkan X dan Y variabel random diskrit dengan fungsi probabilitas bersama $f(x, y) = 4/(5xy)$ untuk $x = 1, 2$ dan $y = 2, 3$ dan 0 untuk yang lain. Tentukan :
   a. E[X].
   b. E[Y].
   c. E[XY].
   d. Cov(X, Y).
2. Jika X dan Y saling bebas dan X mempunyai distribusi seragam pada (-1,1) dan Y mempunyai distribusi seragam ada (0,1). Tentukan probabilitas bahwa akar-akar dari persamaan $h(t) = 0$ adalah bilangan real dengan
$$h(t) = t^2 + 2Xt + Y.$$
3. Misalkan variabel random kontinu X dan Y mempunyai fungsi distribusi bersama berbentuk
$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0{,}5xy(x + y) && \text{jika } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ &= 0{,}5x(x + 1) && \text{jika } 0 < x < 1,\ 1 \le y, \\ &= 0{,}5x(x + 1) && \text{jika } x \ge 1,\ 0 < y < 1, \\ &= 1 && \text{jika } x \ge 1,\ y \ge 1. \end{aligned}$$

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(x, y)$.
b. $P(X \le 0{,}5,\ Y \le 0{,}5)$.
c. $P(X < Y)$.
d. $P(X + Y \le 0{,}5)$.
e. $P(X + Y \le 1{,}5)$.
f. $P(X + Y \le z)$ dan $z > 0$.

4. Misalkan X dan Y variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama
$$f(x, y) = x + y \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } 0 < y < 1.$$
   a. Tentukan E[X].
   b. E[$X + Y$].
   c. E[$X\,Y$].
   d. Cov(2X, 3Y).
   e. E[$Y \mid x$].

5. Jika variabel random X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(x, y) = 24xy \text{ untuk } x > 0,\ y > 0 \text{ dan } x + y < 1$$

maka

a. Tentukan E[XY].
b. Tentukan Cov(X,Y).
c. Tentukan Cov(3X, 5Y).
d. Tentukan Cov(X+1, Y-2).
e. Tentukan Cov(X+1, 5Y-2).
f. Tentukan Cov(3X+5, X).

6. Misalkan variabel random X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(x, y) = 4(x - xy) \text{ untuk } 0 < x < 1 \text{ dan } 0 < y < 1.$$

a. Tentukan E[X^2Y].
b. Tentukan E[X-Y].
c. Tentukan Var($X-Y$).
d. Tentukan koefisien korelasi X dan Y.
e. Tentukan $E[Y \mid x]$.

7. Misalkan bahwa X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(x, y) = e^{-y}$ untuk $0 < x < y < \infty$. Tentukan $E[X \mid y]$.

8. Misalkan bahwa X dan Y variabel random saling bebas dengan $E[X] = 2$, E[Y] = 3, V(X) = 4 dan V(Y) = 16.

a. E[5$X - Y$].
b. Var(5X-Y).
c. Cov(3$X + Y$, Y).
d. Cov(X, 5X-Y).

9. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari populasi berdistribusi binomial dengan parameter $n = 5$ dan $p = 0{,}5$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari X_1, X_2, ….., X_n .
b. Tentukan probabilitas bahwa pengamatan pertama kurang dari 3 yaitu P[$X_1 < 3$].
c. Tentukan probabilitas bahwa semua pengamatan lebih dari 1.

10. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel random dari populasi $f(x) = 3x^2$ untuk $0 < x < 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari X_1, X_2, ….., X_n .
b. Tentukan probabilitas bahwa pengamatan pertama kurang dari 0,5 yaitu P[$X_1 < 0.5$].
c. Tentukan probabilitas bahwa semua pengamatan lebih dari 0,5.

11. Diketahui $f(x, y) = k(x + y)$ untuk $0 < x < 2$ dan $0 < y < 2$.
    a. Tentukan k sehingga $f(x, y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas bivariat.
    b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
    c. Tentukan $E[X]$.
    d. Tentukan $P(X + Y < 1)$.
12. Diketahui $f(x, y) = kxy$ untuk $0 \leq x \leq y \leq 2$.
    a. Tentukan k sehingga $f(x, y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas bivariat.
    b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal Y.
    c. Tentukan E[Y].
    d. Tentukan $P(X + Y < 1)$.
13. Misalkan X dan Y adalah waktu survival (dalam hari) dua tikus putih yang dikenai tingkat radiasi yang berbeda. Misalkan bahwa X dan Y saling bebas dan X berdistribusi PAR(1,1) dan Y berdistribusi PAR(1,2).
    a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama X dan Y.
    b. Tentukan probabilitas bahwa tikus putih kedua lebih lama bertahan hidup dibandingkan tikus pertama yaitu $P(X < Y)$.
14. Misalkan variabel random X dan Y mempunyai fungsi probabilitas bersama

    $p(x, y) = 1/3$ untuk $(x, y) = (-1,0), (0,1)$ dan $(0,0)$.

    Tentukan Cov(X, Y). Ternyata X dan Y saling tak bebas. Hal ini contoh variabel random tidak berkorelasi X dan Y yang tidak saling bebas.
15. Misalkan X dan Y variabel random bersama dengan variansi berhingga.
    a. Tunjukkan bahwa $(E[XY])^2 \leq E(X^2)\, \mathrm{E}(Y^2)$.
    b. Misalkan menyatakan korelasi dari X dan Y. Dengan menggunakan hasil (a), tunjukkan bahwa $\rho^2 \leq 1$.

16. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari dua variabel random kontinu X dan Y yaitu

$$f(x,y) = cxy$$

untuk $0 < x < 3$ dan $0 < y < 4$.

   a. Tentukan c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas bersama.
   b. Tentukan $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$.
   c. Tentukan $P(X \geq 3, Y \leq 2)$.

17. Misalkan variabel X dan Y adalah variabel random kontinu dan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(x,y) = c\,(x^2 + y^2)$$

untuk $0 < x < 2$ dan $0 < y < 2$.

   a. Tentukan konstanta c.
   b. $P(X < 1, Y > 1)$.
   c. $P(\frac{1}{4} < X > \frac{3}{4})$
   d. $P(Y < 1)$
   e. Apakah X dan Y saling bebas ?

18. Misalkan diketahui variabel random X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(x,y) = c\,x^2y$$

untuk $0 < y < x < 2$.

   a. Tentukan nilai c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas bersama.
   b. Tentukan apakah X dan Y saling bebas.
   c. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.
   d. Tentukan $E[\, Y \mid x\,]$.

19. Diketahui variabel random X dan Y mempunyai fungsi probabilitas gabungan

$$f(x,y) = c\,x^2y$$

untuk $x = 1, 2, 3$ dan $y = 1, 2, 3$.

   a. Tentukan konstanta c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi probabilitas bersama.
   b. $P(X = 2, Y = 3)$.
   c. $P(1 \leq X \leq 2, Y \leq 2)$
   d. Apakah X dan Y saling bebas.

e. Tentukan $E[X \mid y]$.

20. Misalkan variabel random X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas gabungan yang ditentukan oleh

$$f(x,y) = c\,(2x + y^2)$$

untuk $2 < x < 4$ dan $0 < y < 2$.

a. Tentukan c sehingga $f(x,y)$ merupakan fungsi kepadatan probabilitas gabungan.

b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal X.

c. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersyarat $f(y|x)$.

d. Tentukan $P(1 < Y < \frac{3}{2} | X = 3)$.

*****

BAB VII
FUNGSI VARIABEL RANDOM

Misalkan variabel random Y_1, Y_2, ..., Y_n dan suatu fungsi $U(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ (disimbulkan dengan U), metode berikut ini untuk menentukan distribusi probabilitas dari fungsi variabel random U.

Metode Fungsi Distribusi

1. Tentukan daerah $U = u$ dalam ruang $(y_1, y_2, ..., y_n)$.
2. Tentukan daerah $U \leq u$.
3. Tentukan $F_U(u) = P(U \leq u)$ dengan mengintegralkan

$$f(y_1, y_2, ..., y_n)$$

   atas daerah $U \leq u$.

4. Tentukan fungsi kepadatan $f(u)$ dengan mendiferensialkan $F_U(u)$ maka

$$\frac{dF_U(u)}{dt} = f(u).$$

Metode Transformasi

1. Tentukan fungsi invers dari $Y = h^{-1}(U)$.
2. Hitung dy/du.
3. Tentukan $f(u)$ dengan $f_U(u) = f_Y(y)\,|dy/du|$ dengan $y = h^{-1}(u)$.

Metode Fungsi Pembangkit Momen

1. Tentukan fungsi pembangkit momen $m(t)$ untuk U.
2. Bandingkan $m_U(t)$ dengan fungsi pembangkit momen lain yang telah dikenal. Jika $m_U(t) = m_V(t)$ untuk semua harga maka U dan V mempunyai fungsi probabilitas yang identik.

VII.1 Metode Fungsi Distribusi

Apabila Y mempunyai fungsi kepadatan $f(y)$ dan U adalah fungsi dari Y, maka kita akan dapat menentukan :

$$F_U(u) = P(U \leq u)$$

secara langsung dengan mengitegrasikan $f(y)$ atas daerah $U \leq u$ untuk mendapatkan fungsi kepadatan U maka kita mendiferensialkan $F_U(u)$.

Contoh IV.1 :

Dalam proses pemurnian gula menghasilkan 1 ton gula murni tetapi banyak produksi yang sebenarnya Y merupakan variabel random karena mesin yang sering macet. Misalkan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 2y \text{ untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \text{ untuk } y \text{ yang lain.}$$

Perusahaan menerima pembayaran rata-rata Rp 300.000,00 per ton gula murni tetapi juga harus mengeluarkan biaya tambahan Rp 100.000,00 tiap hari. Keuntungan harian dinyatakan sebagai $U = 3Y - 1$ (dalam ratusan ribuan). Tentukan fungsi kepadatan probabilitas untuk U.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan metode fungsi distribusi akan ditentukan

$$F_U(u) = P(\, U \le u) = P(3Y - 1 \le u) = P(\, Y \le \frac{u+1}{3}\,)\,.$$

Jika $u < -1$ maka $(u + 1)/3 < 0$ sehingga

$$F_U(u) = P[\, Y \le (u+1)/3\,] = 0.$$

Demikian juga jika $u > 2$ maka $(u+1)/3 > 1$ sehingga

$$F_U(u) = P[\, Y \le (u+1)/3\,] = 1.$$

Akan tetapi jika $-1 \le u \le 2$ maka probabilitas tersebut dapat ditulis sebagai

$$P(Y \le \frac{u+1}{3}) = \int_0^{(u+1)/3} f(y)\,dy$$
$$= \int_0^{(u+1)/3} 2y\,dy$$
$$= \left(\frac{u+1}{3}\right)^2.$$

Diperoleh fungsi distribusi dari U adalah

$$F(\mathrm{u}) = 0 \quad \text{untuk } u < -1,$$
$$= \left(\frac{u+1}{3}\right)^2 \quad \text{untuk } -1 \le u \le 2,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } u > 2.$$

Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas dari U adalah

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{dt} = (2/9)(u+1) \quad \text{untuk } -1 \le u \le 2,$$

$$= 0 \quad \text{untuk } u \text{ yang lain.}$$

Variabel random Y_1, Y_2 dengan fungsi densitas bersama $f(y_1, y_2)$ dan $U = g(y_1, y_2)$ adalah fungsi dari Y_1 dan Y_2 maka untuk setiap titik (y_1, y_2) berkorespondensi satu-satu dengan u. Apabila dapat ditentukan titik (y_1, y_2) sedemikian hingga $U \le u$ maka integral dari fungsi densitas $f(y_1, y_2)$ atau suatu daerah akan sama dengan $P(U \le u) = F_U(u)$ sehingga fungsi densitas U dapat diperoleh dengan mendeferensialkan $F_U(u)$.

VII.2 Metode Transformasi

Metode transformasi untuk menentukan distribusi probabilitas dari fungsi variabel random merupakan cara langsung dari metode fungsi distribusi. Metode transformasi merupakan metode yang sederhana untuk menentukan fungsi kepadatan $U = h(y)$ bila $h(y)$ adalah fungsi naik atau fungsi turun.

Misalkan $h(y)$ fungsi naik untuk y dan $U = h(Y)$ dengan Y mempunyai fungsi densitas $f_Y(y)$. Dalam grafik di atas himpunan titik-titik y sedemikian hingga $h(y) \le u$ akan persis sama dengan himpunan titik-titik y sedemikian hingga $y \le h^{-1}(u)$. Oleh karena itu

$$P(U \le u) = P(Y \le y) \quad \text{dengan } y = h^{-1}(u)$$

atau

$$F_U(u) = F_Y(y) \quad \text{dengan } y = h^{-1}(u)$$

bila kedua ruas dideferensialkan terhadap u maka diperoleh

$$f(u) = \frac{dF_u(u)}{du} = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y)\frac{dy}{du}$$

dengan $y = h^{-1}(y)$.

Catatan : $dy/du = 1/(du/dy)$.

Contoh VII.2 :

Berdasar pada contoh VII.1 variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 2y \quad \text{untuk } 0 \leq y \leq 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk yang lain.}$$

Bila diketahui variabel random $U = 3Y - 1$ menyatakan keuntungan maka tentukan fungsi kepadatan probabilitas U dengan metode transformasi.

Penyelesaian :

Fungsi $h(y) = 3y - 1$ merupakan fungsi naik dalam y.

Jika $u = 3y - 1$ maka $y = h^{-1}(u) = \dfrac{u+1}{3}$ sehingga $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{3}$.

Fungsi kepadatan probabilitas untuk U adalah

$$f_U(u) = f_Y(y)\left|\frac{dy}{du}\right|$$
$$= 2y\left|\frac{dy}{du}\right|$$
$$= \left(\frac{2(u+1)}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{2(u+1)}{9} \quad \text{untuk } -1 < u < 2,$$
$$f_U(u) = 0 \quad \text{untuk } u \text{ yang lain.}$$

Jika $h(y)$ fungsi turun maka himpunan titik-titik y sedemikian hingga $h(y) \leq u$ akan sama dengan himpunan titik-titik sedemikian hingga $y \geq h^{-1}(u)$. Untuk $U = h(Y)$ maka

$$P(U \leq u) = P(Y \geq y)$$

dengan $y = h^{-1}(u)$ atau

$$f(u) = -f_Y(y)\frac{dy}{du}$$

karena $\dfrac{dy}{du}$ negatif, untuk fungsi turun maka

$$f(u) = -f_Y(y)\left|\frac{dy}{du}\right|.$$

Contoh VII.3 :

Diketahui variabel random Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$\begin{aligned} f(y) &= 2y \quad \text{untuk } 0 < y < 1, \\ &= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.} \end{aligned}$$

Tentukan fungsi kepadatan probabilitas untuk $U = -4Y + 3$.

Penyelesaian :

Fungsi $h(y) = -4y + 3$ merupakan fungsi turun dalam y.

Jika $u = -4y + 3$ maka $y = h^{-1}(u) = \dfrac{3-u}{4}$, sehingga $\dfrac{dy}{du} = -\dfrac{1}{4}$.

Fungsi kepadatan probabilitas U adalah

$$\begin{aligned} f_U(u) &= f(y)\left|\frac{dy}{du}\right| \\ &= 2y\left|\frac{dy}{du}\right| \\ &= 2\left(\frac{3-u}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3-u}{8} \quad \text{untuk } -1 < u < 3, \\ f_U(u) &= 0 \quad \text{untuk } u \text{ yang lain.} \end{aligned}$$

Contoh VII.4 :

Diketahui variabel random Y_1 dan Y_2 mempunyai fungsi kepadatan bersama

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= e^{-(y_1+y_2)} \quad \text{untuk } 0 \leq y_1 \,;\; 0 \leq y_2, \\ &= 0 \quad \text{untuk yang lain} \end{aligned}$$

Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari $U = Y_1 + Y_2$.

Penyelesaian :

Masalah ini akan diselesaikan dalam dua tahap :

1. Ditentukan fungsi kepadatan bersama Y_1 dan U.

2. Ditentukan fungsi kepadatan marginal U.

Berarti $U = Y_1 + Y_2$ dan dianggap masalah transformasi 1 dimensi dalam

$$U = h(Y) = y_1 + Y_2.$$

Misalkan $g(y_2, u)$ fungsi kepadatan probabilitas bersama Y_2 dan U maka diperoleh (dengan $y_2 = u - y_1$)

$$g(y_1, u) = f(y_1, y_2)\left|\frac{dy_2}{du}\right|$$
$$= e^{-u} \cdot 1$$

yaitu

$$g(y_1, u) = e^{-u} \quad \text{untuk } 0 \le u,\ 0 \le y_1 \le u,$$
$$= 0 \quad \text{untuk yang lain.}$$

(catatan : $Y_1 \le u$) .

Fungsi kepadatan marginal dari U dinyatakan dengan

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, u)\, dy_1 = \int_0^u e^{-u}\, dy_1 = u\, e^{-u} \quad \text{untuk } 0 \le u,$$
$$= 0 \quad \text{untuk yang lain.}$$

Contoh VII.5

Jika Y merupakan variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = (y+1)/2 \quad \text{untuk } -1 \le y \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain}$$

maka untuk $U = Y^2$ dapat ditentukan fungsi distribusinya

$$F_U(u) = P(U \le u)$$
$$= P(Y^2 \le u)$$
$$= P(-u \le Y^2 \le u)$$
$$= F_Y(\sqrt{u}) - F_Y(-\sqrt{u})$$

sehingga fungsi kepadatan probabilitasnya adalah

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[f_Y(\sqrt{u}) + f_Y(-\sqrt{u})\right].$$

Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas U adalah

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[\frac{\sqrt{u}+1}{2} + \frac{-\sqrt{u}+1}{2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{untuk } 0 \le u \le 1,$$

$= 0$ untuk u yang lain.

Contoh VII.7

Jika diketahui variabel random Y mempunyai distribusi normal baku yaitu N(0,1) maka akan dibuktikan bahwa $U = Y^2$ akan berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan 1.

Bukti

Karena Y berdistribusi N(0,1) maka Y mempunyai fungsi pembangkit momen

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

untuk $-\infty < y < \infty$. Akibatnya $U = Y^2$ mempunyai fungsi kepadatan probabilitas untuk $u > 0$ yaitu

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[f_Y(\sqrt{u}) + f_Y(-\sqrt{u})\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{u})^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{u})^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)} u^{1/2-1} e^{-u/2}.$$

Hal itu berarti bahwa U mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 1 atau $\chi^2{}_1$.

Teorema VII.1

Misalkan variabel random X dan Y adalah variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas bersama $f(x,y)$. Jika didefinisikan $U = g(X,Y)$ dan $V = h(X,Y)$ sehingga $X = \phi(U,V)$ dan $Y = \psi(U,V)$ maka fungsi kepadatan probabilitas bersama untuk variabel random U dan V adalah

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)|J|$$

dengan J adalah Jacobian yaitu

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Contoh VII.7

Misalkan X dan Y masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan saling bebas. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari $V = X + Y$.

Penyelesaian

Karena X dan Y masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan saling bebas maka fungsi kepadatan probabilitas bersama dari X dan Y adalah

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

untuk $x > 0$ dan $y > 0$.

Misalkan $U = X$ dan $V = X + Y$. Diperoleh $x = u$ dan $y = v - u$ sehingga Jacobiannya adalah

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas bersama untuk U dan V adalah

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u, v-u)|J| = e^{-v}.1 = e^{-v}$$

untuk $x = u > 0$, $u - v = y > 0$ atau $u > v$. Diperoleh fungsi kepadatan probabilitas marginal dari V adalah

$$f(v) = \int_0^v e^{-v}\,du = v\,e^{-v}$$

untuk $v > 0$.

VII.3 Metode Fungsi Pembangkit Momen

Metode fungsi pembangkit momen untuk menentukan distribusi probabilitas dari fungsi variabel random Y_1, Y_2, ..., Y_n berdasar pada teorema berikut.

Teorema VII.2

Misalkan variabel random X dan Y masing-masing mempunyai fungsi pembangkit momen $m_X(t)$ dan $m_Y(t)$. Jika $m_X(t) = m_Y(t)$ untuk semua harga t maka X dan Y mempunyai distribusi probabilitas yang sama.

Contoh VII.8 :

Misalkan variabel random Y mempunyai distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2. Dengan menggunakan fungsi pembangkit momen tunjukkan bahwa

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Penyelesaian :

Karena Y mempunyai fungsi pembangkit momen

$$m(t) = \exp[\ \mu t + \sigma^2 t^2/2\ ]$$

maka Y - μ mempunyai fungsi pembangkit momen $\exp[\ \sigma^2 t^2/2\ ]$ sehingga fungsi pembangkit momen dari Z adalah

$$\begin{aligned} m_Z(t) = E[\ e^{tZ}\ ] &= \mathrm{E}[\ e^{(t/\sigma)\,(Y-\mu)}\ ] \\ &= m_{Y-\mu}(t/\ \sigma) \\ &= \exp[\ \sigma^2\ (t/\sigma)^2/2\ ] \\ &= \exp[\ t^2/2\ ]. \end{aligned}$$

Dengan membandingkan $m(t)$ dengan fungsi pembangkit momen dari variabel random normal, maka terlihat bahwa Z berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1.

Teorema VII.3

Diketahui Y_1, Y_2, ..., Y_n adalah variabel random independen dengan fungsi pembangkit momen masing-masing $m_{Y1}(t)$, $m_{Y2}(t)$,...., $m_{Yn}(t)$. Jika

$$U = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$$

maka

$$m_U(t) = m_{Y1}(t)\ m_{Y2}(t)\ .....\ m_{Yn}(t)\ .$$

Contoh VII.9 :
Jika diketahui Y_1, Y_2 variabel random independen dan keduanya berdistribusi $\boldsymbol{N}(0,1)$. Dengan metode fungsi pembangkit momen tentukan distribusi probabilitas $Z = Y_1 + Y_2$.
Penyelesaian :
Karena Y_1 dan Y_2 variabel random dengan fungsi kepadatan $\boldsymbol{N}(0,1)$ maka

$$m_{Y1}(t) = m_{Y2}(t) = \exp[\, t^2/2 \,].$$

Dengan mengingat variabel random Y_1 dan Y_2 saling bebas maka fungsi pembangkit momen Z dapat ditentukan dengan

$$\begin{aligned} m_Z(t) &= m_{Y1\,+\,Y2}(t) \\ &= m_{Y1}(\mathrm{t})\, m_{Y2}(t) \\ &= \exp[\, t^2/2 \,]\ \exp[\, t^2/2 \,] \\ &= \exp[\, 2t^2/2 \,]. \end{aligned}$$

Dengan membandingkan $m(t)$ dengan fungsi pembangkit momen pada variabel random normal maka Z berdistribusi $\boldsymbol{N}(0,2)$.

Berdasarkan pada Contoh VII.6 secara umum hasil di atas dapat dinyatakan dalam Teorema VII.3 berikut.

Teorema VII.4
Misalkan diketahui $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ variabel random independen yang masing-masing berdistribusi dengan $E(Y_i) = \mu_i$ dan $V(Y)=\sigma^2{}_i$ dengan $i = 1, 2, ..., n$. Bila didefinisikan U sebagai

$$U = a_1\, Y_1 + a_2\, Y_2 + \ldots + a_n\, Y_n$$

dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konstanta maka U berdistribusi normal dengan mean

$$E[\, U \,] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i$$

dan variansi

$$V[\, U \,] = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\, \sigma^2{}_i\ .$$

Teorema VII.5 :

Diketahui Y_1, Y_2, ... , Y_n variabel random independen yang masing-masing berdistribusi normal dengan $E(Y_i) = \mu_i$ dan $V(Y) = \sigma^2_i$ dengan $i = 1, 2, ..., n$. Jika

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

maka $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ mempunyai distribusi χ^2 dengan derajat bebas n.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Misalkan variabel random X mempunyai fungsi probabilitas

$$f_X(x)=\frac{4}{31}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

untuk x = -2, -1, 0, 1, 2. Tentukan fungsi probabilitas untuk variabel random $Y = |\,X\,|$.

Penyelesaian

Karena variabel random $Y = |\,X\,|$ maka jelas bahwa nilai-nilai y adalah 0, 1, dan 2 sehingga

$$f_Y(0)=f_X(0)=\frac{4}{31},$$

$$f_Y(1)=f_X(-1)+f_X(1)=\frac{8}{31}+\frac{2}{31}=\frac{10}{31},$$

$$f_Y(2)=f_X(-2)+f_X(2)=\frac{16}{31}+\frac{1}{31}=\frac{17}{31}.$$

Soal 2

Misalkan variabel random X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p. Tentukan fungsi probabilitas dari variabel random $Y = X$-n.

Penyelesaian

Karena variabel random X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p maka X mempunyai fungsi probabilitas

$$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

untuk x = 0, 1, 2, …., n sehingga y mempunyai nilai-nilai n, n-1, …, 2, 1 dan mempunyai fungsi probabilitas

$$f_Y(y)=\binom{n}{n-y}p^{n-y}(1-p)^y=\binom{n}{y}(1-p)^y(1-(1-p))^{n-y}$$

untuk y = 0, 1, 2, …, n sehingg variabel random Y mempunyai distribusi binomial dengan parameter n dan 1-p.

Soal 3

Misalkan diketahui bahwa fungsi distribusi variabel random X adalah $F(x) = 1 - e^{-2x}$ untuk $0 < x < \infty$. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random $Y = e^X$.

Penyelesaian

Karena fungsi distribusi variabel random X adalah $F(x) = 1 - e^{-2x}$ untuk $0 < x < \infty$ maka fungsi distribusi dari variabel random $Y = e^X$ untuk $e^0 = 1 < e^x < \infty$ adalah

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le \ln(y)) = F_X(\ln(y)) = 1 - e^{-2\ln(y)} = 1 - e^{\ln(y^{-2})} = 1 - y^{-2}$$

sehingga diperoleh fungsi kepadatan probabilitas dari Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = 2y^{-3} = \frac{2}{y^3}$$

untuk $1 < y < \infty$.

Soal 4

Misalkan variabel random X berdistribusi seragam pada (0,1).

a. Tentukan fungsi probabilitas dari variabel random $Y = x^{1/4}$.
b. Tentukan fungsi probabilitas dari variabel random $W = e^{-x}$.
c. Tentukan fungsi probabilitas dari variabel random $Z = 1 - e^{-x}$.

Penyelesaian

a. Karena variabel random X berdistribusi seragam pada (0,1) maka fungsi distribusinya adalah

$$F_X(x) = x$$

untuk $0 < x < 1$. Akibatnya fungsi distribusi dari variabel random $Y = x^{1/4}$ adalah

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^{1/4} \le y) = P(X \le y^4) = F_X(y^4) = y^4$$

untuk $0 < y < 1$ sehingga fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random Y adalah

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = 4y^3$$

untuk $0 < y < 1$.

b. Fungsi distribusi dari variabel random $W = e^{-X}$ adalah

$$F_W(w) = P(W \le w) = P(e^{-X} \le w) = P(-X \le \ln(w)) = P(X \ge -\ln(w))$$

$$F_W(w)=1-P(X<-\ln(w))=1-P(X\le -\ln(w))=1-F_X(-\ln(w))=1-(-\ln(w))$$

atau

$$F_W(w)=1+\ln(w)$$

untuk 1 > w > e^{-1} sehingga fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random W adalah

$$f_W(w)=\frac{dF_W(w)}{dw}=\ln(w).$$

untuk $e^{-1} < w < 1$.

c. Fungsi distribusi dari variabel random Z = 1-e^{-X} adalah

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(1-e^{-X}\le z)=P(-e^{-X}\le z-1)=P(e^{-X}\le 1-z)$$

$$F_W(w)=P(-X\le \ln(1-z))=P(X>\ln(1-z))=1-P(X\le \ln(1-z))=1-F_X(\ln(1-z))$$

atau

$$F_Z(z)=1-\ln(1-z)$$

untuk 0 < z < 1-e^{-1} sehingga fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random Z adalah

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\frac{1}{1-z}.$$

untuk $0 < z < 1-e^{-1}$.

Soal 5

Gunakan metode fungsi pembangkit momen untuk menentukan distribusi dari variabel random $Y = X_1 - X_2$ jika variabel random X_1 dan X_2 masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean θ dan saling bebas.

Penyelesaian

Karena X_1 dan X_2 masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean θ maka fungsi pembangkit momen keduanya adalah

$$m(t)=\frac{1}{1-\theta t}=(1-\theta t)^{-1}$$

dan karena X_2 berdistribusi eksponensial dengan mean θ maka - X_2 mempunyai fungsi pembangkit momen

$$m(-t)=\frac{1}{1+\theta t}=(1+\theta t)^{-1}$$

dengan mengingat X_1 dan X_2 saling bebas maka X_1 dan $-X_2$ juga saling bebas, sehingga diperoleh fungsi pembangkit momen dari variabel random Y adalah

$$m_Y(t)=m_{X_1-X_2}(t)=m_{X_1+(-X_2)}(t)=m_{X_1}(t)\,m_{X_2}(-t)=(1-\theta t)^{-1}(1+\theta t)^{-1}$$

sehingga

$$m_Y(t)=(1-\theta^2 t^2)^{-1}.$$

Akibatnya Y berdistribusi dobel eksponensial dan mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y)=\frac{1}{2\theta}\exp\left(-\frac{|y|}{\theta}\right)$$

untuk $-\infty < y < \infty$.

Soal 6

Misalkan X variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x) = 4x^3$ untuk $0 < x < 1$. Gunakan metode transformasi untuk menentukan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi variabel random $Y = X^4$.

Penyelesaian

Karena $y = x^4$ fungsi naik untuk $0 < x < 1$ dan $y = x^4$ mempunyai invers $x = y^{1/4}$ sehingga $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{4}y^{-3/4}$. Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random Y adalah

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=4(y^{1/4})^3\frac{1}{4}y^{-3/4}=1$$

untuk $0 < y < 1$ sehingga Y berdistribusi seragam pada (0,1).

Soal 7

Misalkan X variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x) = 4x^3$ untuk $0 < x < 1$. Gunakan metode transformasi untuk menentukan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi variabel random $Y = e^X$.

Penyelesaian

Karena $y = e^x$ fungsi naik untuk $0 < x < 1$ dan $y = e^x$ mempunyai invers $x = \ln(y)$ sehingga $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$. Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random Y adalah

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = 4(\ln y)^3 \frac{1}{y} = \frac{4(\ln y)^3}{y}$$

untuk $1 < y < e$.

Soal 8

Jika X berdistribusi Weibull dengan parameter θ dan β maka tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random

$$Y = (X/\theta)^\beta.$$

Penyelesaian

Karena X berdistribusi Weibull dengan parameter θ dan β maka X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta^\beta} x^{\beta-1} \exp(-(x/\theta)^\beta)$$

untuk $0 < x < \infty$ dan karena $y = (x/\theta)^\beta$ fungsi naik untuk $0 < x < \infty$ dan $y = (x/\theta)^\beta$ mempunyai invers $x = \theta\, y^{1/\beta}$ sehingga $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\beta}\theta\, y^{\frac{1}{\beta}-1}$.

Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random Y adalah

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\beta}{\theta^\beta}(\theta\, y^{1/\beta})^{\beta-1} e^{-y} \frac{1}{\beta}\theta\, y^{\frac{1}{\beta}-1} = e^{-y}$$

untuk $0 < y < \infty$. Hal itu berarti variabel random Y berdistribusi eksponensial dengan mean 1.

Soal 9

Misalkan X_1 dan X_2 masing-masing variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x) = 2x$ untuk $0 < x < 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari

$$Y = \min\{ X_1, X_2 \}.$$

b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari

$$Z = \max\{ X_1, X_2 \}.$$

Penyelesaian

Karena X_1 dan X_2 masing-masing variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x) = 2x$ untuk $0 < x < 1$ maka fungsi distribusi masing-masing adalah $F(x) = x^2$ untuk $0 < x < 1$.

a. Fungsi distribusi dari variabel random Y adalah

$$\begin{aligned} F(y) = P(Y \le y) = P(\min\{X_1, X_2\} \le y) &= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y)^2 \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \le y))^2 \\ &= 1 - (1 - F_X(y))^2 \\ &= 1 - (1 - y^2)^2 \ . \end{aligned}$$

Akibatnya fungsi kepadatan dari variabel random Y adalah

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = -2(1 - y^2)(-2y) = 4y(1 - y^2)$$

untuk $0 < y < 1$.

b. Fungsi distribusi dari variabel random Z adalah

$$\begin{aligned} F(z) = P(Z \le z) = P(\max\{X_1, X_2\} \le z) &= P(X_1 \le z, X_2 \le z) \\ &= P(X_1 \le z)P(X_2 \le z) \\ &= P(X_1 \le z)^2 \\ &= (F_X(z))^2 \\ &= z^4 \ . \end{aligned}$$

Akibatnya fungsi kepadatan dari variabel random Z adalah

$$f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = 4z^3$$

untuk $0 < z < 1$.

Soal 10

Misalkan X dan Y masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan saling bebas. Jika $U = X - Y$ dan $V = X + Y$ maka :

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari U dan V .
b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal V.

Penyelesaian

a. Karena X dan Y masing-masing berdistribusi eksponensial dengan mean 1 dan saling bebas maka fungsi kepadatan probabilitas bersama dari X dan Y adalah

$$f(x,y) = e^{-(x+y)}$$

untuk $x > 0$ dan $y > 0$. Misalkan $U = X - Y$ dan $V = X + Y$. Diperoleh $x = (u + v)/2$ dan $y = (v - u)/2$ sehingga Jacobiannya adalah

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 1/2.$$

Akibatnya fungsi kepadatan probabilitas bersama untuk U dan V adalah

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u, v-u)\,|J| = e^{-v}.(1/2) = \frac{1}{2}e^{-v}$$

untuk $-v < u < v$, $v > 0$.

b. Fungsi kepadatan probabilitas marginal dari V adalah

$$f(v) = \int_{-v}^{v} \frac{1}{2}e^{-v}du = v\,e^{-v}$$

untuk $v > 0$. Hal itu berarti variabel random V mempunyai distribusi Gamma(1,2). Di samping itu fungsi kepadatan probabilitas marginal untuk U adalah

$$f(u) = \int_{-u}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-v}\,dv = \frac{1}{2}e^{u}$$

untuk $u < 0$,

$$f(u) = \int_{u}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-v}\,dv = \frac{1}{2}e^{-u}$$

untuk $u > 0$. Hal itu berarti

$$f(u) = \frac{1}{2}e^{-|u|}$$

untuk $-\infty < u < \infty$. Dengan kata lain U mempunyai distribusi dobel eksponensial.

LATIHAN

1. Diketahui variabel random Y dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(y) = 2(1-y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Dengan menggunakan fungsi densitas tersebut tentukan $E(U)$.

2. Seorang pengusaha pompa bensin mempunyai permintaan mingguan Y yang mempunyai fungsi kepadatan

$$f(y) = y \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 1 \quad \text{untuk } 1 < y \le 1{,}5,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Dalam ukuran ratusan galon. Keuntungan yang didapat pengusaha pompa bensin adalah $U = 10\,Y - 4$.

(a) Tentukan fungsi kepadatan probabilitas U.

(b) Gunakan (a) untuk menentukan $E(U)$.

3. Penggunaan tepung per hari dari perusahaan roti merupakan variabel random Y yang mempunyai distribusi eksponensial dengan mean 4 ton. Biaya pembelian tepung proporsional dengan $U = 3Y + 1$.

a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas U.

b. Tentukan $E(U)$ dengan berdasar pada (a).

4. Proporsi kotoran dalam sampel bijih besi merupakan variabel random Y dengan fungsi kepadatan

$$f(y) = (3/2)\,(y^2 + y) \quad \text{untuk } 0 \le y \le 1,$$
$$= 0 \quad \text{untuk yang lain.}$$

Harga dari sampel random adalah $U = 5 - Y/2$ (dalam ribuan rupiah). Tentukan fungsi kepadatan U dengan metode transformasi.

5. Diketahui Y_1, Y_2, ..., Y_n variabel random normal dengan mean μ dan variansi σ^2 dan saling bebas satu sama lain. Jika a_1, a_2, ..., a_n konstanta yang diketahui maka tentukan fungsi kepadatan dari

$$U = \sum_{i=1}^{n} a_i\, Y_i\,.$$

6. Tipe elevator tertentu mempunyai kapasitas berat maksimum Y_1 yang berdistribusi normal dengan mean 5000 kg dan deviasi standar 300 kg.

Untuk suatu bangunan yang dilengkapi dengan elevator tipe ini, pemuatan elevator Y_2 mean 4000 dan deviasi standar 400 kg. Untuk sebarang waktu yang diberikan elevator yang digunakan. Tentukan probabilitas elevator akan kelebihan muatan dengan anggapan Y_1 dan Y_2 independen.

7. Diketahui Y_1 dan Y_2 variabel random yang berdistribusi $N(0,\sigma^2)$ dan independen. Didefinisikan $U_1 = Y_1 + Y_2$ dan $U_2 = Y_1 - Y_2$. Tunjukkan bahwa U_1 dan U_2 variabel random normal dengan mean 0 dan variansi $2\sigma^2$.
8. Jika X variabel random kontinu yang mempunyai fungsi distribusi $F(x)$ maka $U = F(x)$ berdistribusi seragam pada interval (0,1).
9. Misalkan X variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = 4x^3 \text{ untuk } 0 < x < 1.$$

Gunakan metode fungsi distribusi untuk menentukan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi variabel random berikut :

a. $Z = \ln(X)$

b. $U = (X\text{-}0.5)^2$.

10. Misalkan X mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$f(x) = x^2/24$$

untuk $-2 < x < 4$. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari $Y = X^2$.

11. Jika X_1 dan X_2 sampel random ukuran 2 dari populasi yang berdistribusi Poisson dengan mean λ maka tentukan fungsi probabilitas $Y = X_1 + X_2$.
12. Jika Y_1, Y_2, ..., Y_n variabel random saling bebas dan masing-masing mempunyai distribusi geometri dengan parameter p maka tentukan $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$.
13. Misalkan X_1, X_2, ..., X_n sampel random ukuran n = 10 dari distribusi eksponensial dengan mean 2. Tentukan fungsi pembangkit momen dari $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ dan tentukan juga fungsi kepadatan probabilitas Y.
14. Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel random dari distribusi eksponensial dengan mean 1. Tentukan fungsi fungsi kepadatan probabilitas dari

a. $\min\{ X_1, X_2, ..., X_n \}$,

b. $\max\{ X_1, X_2, ..., X_n \}$.

15. Misalkan jari-jari dari lingkaran R mempunyai fungsi kepadatan probabilitas $f(r) = 6r(1-r)$ untuk $0 < r < 1$.
    a. Tentukan distribusi dari keliling lingkaran.
    b. Tentukan distribusi dari luas lingkaran.
16. Jika X berdistribusi Weibull dengan parameter θ dan β maka tentukan fungsi kepadatan probabilitas dari fungsi variabel random berikut :
    a. $W = \ln(X)$.
    b. $Z = (\ln X)^2$.
17. Misalkan X variabel random dengan fungsi kepadatan probabilitas $f(x) = 4x^3$ untuk $0 < x < 1$. Tentukan transformasi $y = u(x)$ sehingga $Y = u(X)$ berdistribusi seragam pada (0,1).
18. Jika X berdistribusi seragam pada (0,1) maka tentukan $y = G_1(u)$ dan $w = G_2(u)$ sehingga
    a. $Y = G_1(U)$ berdistribusi eksponensial dengan mean 1.
    b. $W = G_2(U)$ berdistribusi binomial dengan parameter $n = 3$ dan $p = ½$.
19. Diketahui variabel random X dan Y mempunyai fungsi kepadatan probabilitas bersama

$$f(x,\mathrm{y}) = \mathrm{e}^{-y}$$

    untuk $0 < x < y < \infty$.
    a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama untuk $S = X + Y$ dan $T = X$.
    b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal untuk S.
20. Misalkan variabel random X dan Y adalah sampel ukuran 2 dari populasi yang mempunyai distribusi $f(x) = 1/x^2$ untuk $1 \le x < \infty$.
    a. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas bersama dari $U = XY$ dan $V = X$.
    b. Tentukan fungsi kepadatan probabilitas marginal dari U.

*****

BAB VIII
DISTRIBUSI *t* dan DISTRIBUSI *F*

Distribusi *t* dan distribusi *F* yang akan dibahas dalam bab ini banyak digunakan dalam statistika dasar. Dalam bab ini dibahas tentang definisi dan sifat-sifat dasar dari distribusi *t* dan distribusi *F*.

VIII.1 Distribusi *t*

Variansi populasi dari populasi yang ingin diambil sampelnya biasanya sulit diketahui. Untuk *n* besar (secara praktis $n \geq 30$) estimasi σ^2 yang baik dapat diperoleh dengan menghitung nilai S^2. Apabila Y_1, Y_2, … Y_n berdistribusi N(μ, σ^2) maka $\dfrac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ mempunyai distribusi normal standard $\boldsymbol{N}(0,1)$. Apa yang akan terjadi pada $\dfrac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ dengan $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$ dan $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$?

Bila $n \geq 30$, distribusi statistik $\dfrac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ secara hampiran, berdistribusi sama dengan distribusi normal baku. Bila $n < 30$, distribusi $\dfrac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ tidak lagi berdistribusi normal baku. Misalkan

$$T = \frac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}}$$

dengan $Z = \dfrac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ~ $\boldsymbol{N}(0,1)$ dan $V = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$ ~ $\chi^2_{(n-1)}$. Bila sampel berasal dari populasi normal maka $\overline{Y}$ dan S^2 saling bebas sehingga *Z* dan *V* juga saling bebas.

Teorema VIII.1

Misalkan Z variabel random $\boldsymbol{N}(0,1)$ dan V variabel random χ^2_{ν}. Bila Z dan V saling bebas maka distribusi variabel random T bila dinyatakan dengan $T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/\upsilon}}$ dan fungsi kepadatan probabilitasnya dinyatakan dengan

$$h(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+2}{2}\right)}{\Gamma(\upsilon/2)\sqrt{\pi\upsilon}}\left(1+\frac{t^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}} \quad \text{untuk } -\infty < t < \infty.$$

Distribusi ini dinamakan distribusi t dengan derajat bebas ν.

Teorema VIII.2

Jika $T \sim t(\nu)$ maka untuk $\nu > 2r$ berlaku sifat

$$E[T^{2r}] = \frac{\Gamma\left(\frac{2r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-2r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^r,$$

$$E[T^{2r-1}] = 0.$$

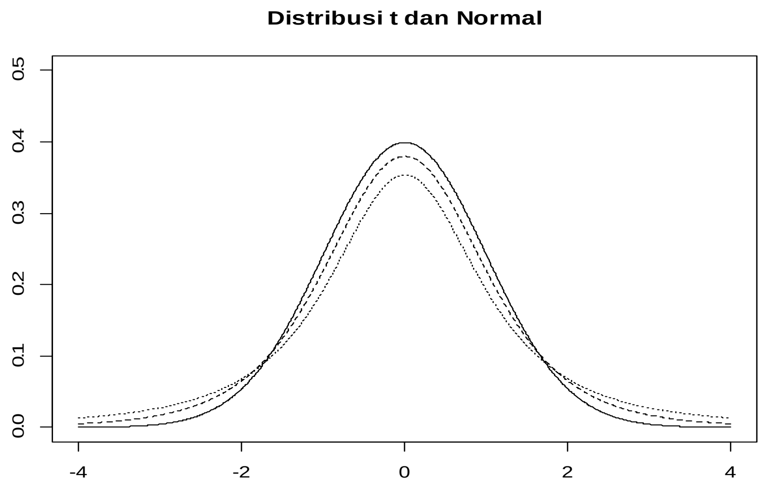
untuk $r = 1, 2, \ldots$.. dan untuk $\nu > 2$ berlaku sifat

$$V(T) = \frac{\nu}{\nu-2}.$$

Catatan :

Distribusi probabilitas t diperkenalkan pada tahun 1908 dalam suatu makalah oleh W. S. Gosset, dan pada waktu terbit dia memakai nama samaran '*student*' sehingga distribusi t juga dinamakan distribusi student t.

Gambar VIII.1 berikut memberikan ilustrasi hubungan antara distribusi normal baku (berarti $\nu = \infty$) dan distribusi t untuk derajat bebas 2 dan 5.



Gambar VIII.1 distribusi *t* untuk derajat bebas 2 (titik-titik) dan 5 (garis putus-putus) dan distribusi N(0,1) (garis tidak terputus).

VIII.2 Distribusi *F*

Statistik *F* didefinisikan sebagai perbandingan 2 variabel random chi-kuadrat yang independen dan masing-masing dibagi dengan derajat bebasnya. Berarti

$$F = \frac{U / \upsilon_1}{V / \upsilon_2}$$

dengan $U \sim \chi^2_{\nu 1}$ dan $V \sim \chi^2_{\nu 2}$.

Teorema VIII.3

Misalkan *U* dan *V* dua variabel random masing-masing berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas ν_1 dan ν_2.

Fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random $F = \dfrac{U / \upsilon_1}{V / \upsilon_2}$

dinyatakan dengan

$$h(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{f^{(\nu_1/2-1)}}{\left(1+\frac{\nu_1 f}{\nu_2}\right)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} \quad \text{untuk } 0 < f < \infty,$$

$$= 0 \qquad \text{untuk } f \text{ yang lain.}$$

Distribusi ini dinamakan distribusi F dengan derajat bebas ν_1 dan ν_2. Distribusi F juga dinamakan distribusi Scenedor.

Teorema VIII.4

Jika $Y \sim F(\nu_1, \nu_2)$ maka berlaku sifat

$$E[Y] = \frac{\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\Gamma\left(\frac{2\nu_1}{2} + r\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2} - r\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}$$

untuk $\nu_2 > 2r$ dengan r suatu bilangan bulat dan untuk $\nu_2 > 2$ berlaku

$$E(Y) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$$

dan berlaku $V(Y) = \dfrac{2\nu_2^{\,2}(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu^2 - 4)}$ untuk $\nu_2 > 4$.

Teorema VIII.5

Jika $Y \sim F(\nu_1, \nu_2)$ maka Y mempunyai modus yang tunggal yaitu pada saat y sama dengan

$$\left(\frac{\nu_1 - 2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + 2}\right)$$

untuk $\nu_1 > 2$.

Teorema VIII.6

Jika $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ untuk bila luas ekor sebesar α untuk distribusi F dengan ν_1 dan ν_2 maka luas ekor 1 - α untuk distribusi F dengan derajat bebas ν_2 dan ν_1 adalah

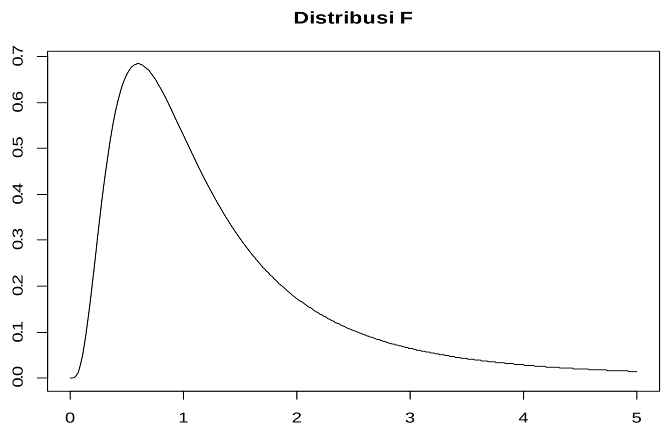
$$F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1) = 1/F_{\alpha}(\nu_1, \nu_2).$$

Contoh VIII.2

Berdasarkan tabel diperoleh bahwa bila luas ekor 0,05 untuk distribusi *F* dengan derajat bebas 10 dan 6 adalah 4,06 maka

$$\begin{aligned} F_{0,95}(6,10) &= 1/F_{0,05}(10,6) \\ &= 1/(4,06) \\ &= 0,246. \end{aligned}$$

Gambar VIII.2 menyatakan grafik distribusi F dengan derajat bebas pembilang 10 dan derajat bebas penyebut 6.



Gambar VIII.2 Distribusi F dengan derajat bebas 10 dan 6.

Teorema VIII.7

Hubungan antara distribusi *F* dan distribusi *t* dinyatakan sebagai berikut

$$F_{1-p;1,v} = (t_{1-p/2;v})^2.$$

Contoh VIII.3

Karena $t_{0,95;10} = 1{,}812$ maka $F_{0,90;1,10}$ dapat ditentukan dengan

$$F_{0,90;1,10} = (1{,}812)^2 = 3{,}285.$$

Teorema VIII.8

Hubungan antara distribusi *F* dan distribusi χ^2 dinyatakan sebagai berikut

$$F_{1-p;\nu,\infty} = \frac{\chi^2_{p;\nu}}{\nu}.$$

Contoh VIII.4

Karena $\chi^2_{0,95;2} = 4{,}605$ maka $F_{0,90;\,2,\infty}$ dapat ditentukan dengan

$$F_{0,90;2,\,\infty} = \frac{4{,}605}{2} = 2{,}3025.$$

Teorema VIII.9

Jika $Y \sim F(\nu_1, \nu_2)$ maka Y mempunyai *skewness* (ukuran kemencengan) sama dengan

$$\frac{(2\nu_1 + \nu_2 - 2)\sqrt{8(\nu_2 - 4)}}{(\nu_2 - 6)\sqrt{\nu_1(\nu_1 + \nu_2 - 2)}}$$

untuk $\nu_1 > 2$.

Misalkan sampel random ukuran n_1 dan n_2 diambil dari populasi normal masing-masing dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2. Diperoleh

$$X_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1-1)}$$

dan

$$X_2^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(n_2-1)} \quad .$$

Teorema VIII.10

Bila S_1^2 dan S_2^2 variansi sampel random ukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari 2 populasi normal, masing-masing dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 maka

$$F = \frac{X_1^2/(n_1 - 1)}{X_2^2/(n_2 - 1)} \sim F(n_1 - 1; n_2 - 1)\,.$$

Contoh VIII.5

Jika $X_1, X_2, .., X_m$ adalah sampel random dari distribusi N(μ_1,σ_1^2) dan Y_1, Y_2, …., Y_n adalah sampel random dari distribusi ***N***(μ_2 , σ_2^2).

Gunakan distribusi F untuk menentukan interval kepercayaan dari σ_1^2/σ_2^2 .

Penyelesaian :

Karena $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$ maka

$$P\left[\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \leq F_{0,95}(\nu_1,\nu_2)\right] = 0,95$$

$$P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2\, F_{0,95}(\nu_1,\nu_2)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right] = 0,95 .$$

Jika m = 16 dan n = 21 maka $F_{0,95}(15, 20) = 2,20$ sehingga untuk dua sampel biasanya dikatakan bahwa kita percaya 95 % bahwa rasio σ_1^2/σ_2^2 lebih besar dari

$$\frac{S_1^2}{S_2^2\, F_{0,95}(15,20)} .$$

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Jika diketahui $t_{0,05}(6)$ yaitu kuantil 95% dari distribusi t dengan derajat bebas 6 adalah 1,9432 maka tentukan $t_{0,95}(6)$ yaitu kuantil 5% dari distribusi t dengan derajat bebas 6.

Penyelesaian

Karena distribusi t simetris pada titik 0 maka jika kuantil 95% dari distribusi t dengan derajat bebas 6 adalah 1,9432 maka $t_{0,95}(6)$ yaitu kuantil 5% dari distribusi t dengan derajat bebas 6 adalah – 1,9432.

Soal 2

Tentukan mean dan variansi dari distribusi t dengan derajat bebas 6.

Penyelesaian

Karena distribusi t simetris pada titik nol maka distribusi t dengan derajat 6 mempunyai mean 0. Variansi dari distribusi t dengan derajat 6 adalah 6/(6-2) = 3/2.

Soal 3

Jika T berdistribusi t dengan derajat bebas υ maka tentukan $E[T^2]$.

Penyelesaian

Karena T berdistribusi t dengan derajat bebas υ maka $E[T] = 0$ dan $V(T) = \upsilon/(\upsilon -2)$ untuk $\upsilon > 0$ sehingga

$$V(T) = E[T^2] - (E[T]\,)^2 = E[T^2] - (0)^2 = E[T^2] = \upsilon/(\upsilon -2).$$

Soal 4

Jika diketahui bahwa $F_{0,95}(7,8)$ yaitu kuantil ke 5% dari distribusi F dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8 adalah 5,2954 maka tentukan $F_{0,05}(8,7)$ yaitu kuantil ke 95% dari distribusi F dengan derajat bebas pembilang 8 dan derajat bebas penyebut 7.

Penyelesaian

Karena $F_{0,95}(7,8)$ yaitu kuantil ke 5% dari distribusi F dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8 adalah 0,2984 maka kuantil ke 95% dari distribusi F dengan derajat bebas pembilang 8 dan derajat bebas penyebut 7 yaitu $F_{0,05}(8,7)$ adalah 1/0,2984 = 3,7257.

Soal 5

Tentukan mean dan variansi dari distribusi *F* dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8.

Penyelesaian

Mean dari distribusi *F* dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8 adalah

$$E(Y) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} = \frac{8}{8-2} = \frac{8}{6}.$$

dan variansi dari distribusi *F* dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8

$$V(Y) = \frac{2\nu_2^{\,2}(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} = \frac{2(8^2)(7+8-2)}{7(8-2)^2(8-4)} = \frac{2(64)(13)}{7(36)4} = 1{,}65.$$

Soal 6

Tentukan modus dari distribusi *F* dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8.

Penyelesaian

Berdasarkan Teorema VIII.6 maka modus dari distribusi *F* dengan derajat bebas pembilang 7 dan derajat bebas penyebut 8 adalah

$$\left(\frac{\nu_1 - 2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + 2}\right) = \left(\frac{7-2}{7}\right)\left(\frac{8}{8+2}\right) = \frac{5}{7}\frac{8}{10} = \frac{4}{7}.$$

Soal 7

Tentukan nilai-nilai dari *t* di mana untuk nilai-nilai ini area di ekor sebelah kanan dari distribusi *t* adalah 0,01 jika derajat bebas *v* sama dengan (a) 4, (b) 12, (c) 25.

Penyelesaian

a. Dari tabel distribusi *t* dengan derajat bebas $v = 4$ dan luas ekor di sebelah kanan sebesar 0,01 diperoleh 3,7469.
b. Dari tabel distribusi *t* dengan derajat bebas $v = 12$ dan luas ekor di sebelah kanan sebesar 0,01 diperoleh 2,6810.
c. Dari tabel distribusi *t* dengan derajat bebas $v = 25$ dan luas ekor di sebelah kanan sebesar 0,01 diperoleh 2,4851.

Soal 8

Jika variabel random U memiliki distribusi t dengan derajat bebas $v = 10$ maka tentukan c sehingga

a. $P(U > c) = 0{,}05$.
b. $P(U \leq c) = 0{,}10$.

Penyelesaian

a. Karena $P(U > c) = 0{,}05$ maka hal itu berarti luas daerah di sebelah kanan c adalah 0,05 sehingga dari tabel distribusi t dengan derajat bebas $v = 10$ diperoleh $c = 1{,}8124$.
c. Akan dicari c sehingga $P(U \leq c) = 0{,}10$. Dari tabel distribusi t dengan derajat bebas 10 diperoleh $c = -1{,}3722$.

Soal 9

Tentukan nilai dari t_1 untuk distribusi Student t yang memenuhi keadaan berikut :

a. Luas daerah antara $-t_1$ dan t_1 adalah 0,90 dan derajat bebas $v = 5$.
b. Luas daerah di sebelah kiri $-t_1$ adalah 0,025 dan derajat bebas $v = 15$.
c. Luas daerah gabungan di sebelah kanan t_1 dan di sebelah kiri $-t_1$ adalah 0,01 dan derajat bebas $v = 10$.

Penyelesaian

a. Karena luas daerah antara $-t_1$ dan t_1 adalah 0,90 dan derajat bebas $v = 5$ maka luas daerah di sebelah kanan t_1 adalah 0,05 sehingga

$$P(T_5 > t_1) = 0{,}05.$$

Akibatnya

$$1 - P(T_5 \leq t_1) = 0{,}05.$$

$$P(T_5 \leq t_1) = 0{,}95.$$

Dari tabel distribusi t dengan derajat bebas 5 diperoleh $t_1 = 2{,}015$.

b. Karena luas daerah di sebelah kiri $-t_1$ adalah 0,025 dan derajat bebas $v = 15$ maka akan dicari t_1 sehingga

$$P(T_5 \leq -t_1) = 0{,}025$$

Dari tabel distribusi t dengan derajat bebas 15 diperoleh

$$-t_1 = -2.1315$$

sehingga $t_1 = 2.1315$.

c. Karena luas daerah gabungan di sebelah kanan t_1 dan di sebelah kiri $-t_1$ adalah 0,01 maka luas daerah di sebelah kanan t_1 adalah 0,005 dan hal itu berarti

$$P(T_{10} \leq t_1) = 0{,}995.$$

sehingga dari tabel distribusi t dengan derajat bebas 10 diperoleh $t_1 = 3.1693$.

Soal 10

Tentukan koefisien variasi dan skewness dari distribusi F dengan dengan derajat bebas pembilang $v_1 = 6$ dan derajat bebas penyebut $v_2 = 7$.

Penyelesaian

Karena distribusi F dengan derajat bebas pembilang $v_1 = 6$ dan derajat bebas penyebut $v_2 = 7$ mempunyai mean

$$\mu = \frac{v_2}{v_2 - 2} = \frac{7}{7-2} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

dan mempunyai variansi

$$\sigma^2 = \frac{2{v_2}^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)} = \frac{2(7^2)(6+7-2)}{6(7-2)^2(7-4)} = \frac{2(49)(11)}{6(25)3} = 2{,}3956$$

maka koefisien variasi yaitu

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{2{,}3956}}{1{,}4} = 1{,}1056.$$

Skewness dari distribusi F dengan derajat bebas $v_1 = 6$ dan derajat bebas pembilang $v_2 = 7$ adalah

$$\frac{(2v_1 + v_2 - 2)\sqrt{8(v_2 - 4)}}{(v_2 - 6)\sqrt{v_1(v_1 + v_2 - 2)}} = \frac{(2(6) + 7 - 2)\sqrt{8(7-4)}}{(7-6)\sqrt{6(6+7-2)}} = \frac{17\sqrt{24}}{\sqrt{66}} = 10{,}2514.$$

LATIHAN

1. Jika diketahui $t_{0,05}(4)$ adalah 2,1318 maka tentukan $t_{0,95}(4)$.
2. Jika diketahui bahwa $F_{0,05}(4,5) = 5{,}1922$ adalah tentukan $F_{0,95}(5,4)$.
3. Jika diketahui bahwa $F_{0,95}(7,5) = 0{,}2518$ adalah tentukan $F_{0,05}(5,7)$.
4. Jika T berdistribusi t dengan derajat bebas υ maka tentukan distribusi T^2.
5. Jika T berdistribusi t dengan derajat bebas 1 maka tunjukkan bahwa fungsi distribusi dari T adalah
$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arc\,tg(t).$$
6. Jika T berdistribusi t dengan derajat bebas 1 maka tentukan E[T].
7. Jika T berdistribusi t dengan derajat bebas 1 maka tunjukkan bahwa persentil ke-100 × γ adalah
$$t_\gamma(1) = tg\big(\pi(\gamma - 1/2)\big).$$
8. Jika X berdistribusi F dengan derajat bebas 2 dan 2b maka buktikan bahwa
$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-b}$$
untuk semua $x > 0$.
9. Jika X berdistribusi F dengan derajat bebas 2 dan 2b maka tentukan E[X].
10. Jika X berdistribusi F dengan derajat bebas 2 dan 2b maka buktikan bahwa persentil ke-100 × γ adalah
$$f_Y(2,2b) = b\big((1-\gamma)^{-1/b} - 1\big).$$
11. Untuk distribusi t dengan derajat bebas 15, tentukan nilai dari t_1 sehingga :
    a. Luas daerah di sebelah kanan dari t_1 adalah 0,01.
    b. Luas daerah di sebelah kiri dari t_1 adalah 0,95.
    c. Luas daerah gabungan di sebelah kanan t_1 dan di sebelah kiri - t_1 adalah 0,01.
    d. Luas daerah antara -t_1 dan t_1 adalah 0,95.

12. Jika variabel random U memiliki distribusi t dengan derajat bebas $v = 5$ maka tentukan c sehingga
    a. $P(-c \leq U \leq c) = 0{,}98$.
    b. $P(U \geq c) = 0{,}90$.
13. Tentukan nilai berikut ini :
    a. $F_{0,95;15,10}$
    b. $F_{0,99;120,60}$
    c. $F_{0,01;30,12}$
    d. $F_{0,05;9,20}$
14. Jika variabel random F berdistribusi F dengan dengan derajat bebas pembilang v_1 dan derajat bebas penyebut v_2 maka tentukan distribusi dari $1/F$.
15. Tentukan koefisien variasi dan skewness dari distribusi F dengan dengan derajat bebas pembilang $v_1 = 5$ dan derajat bebas penyebut $v_2 = 8$.

*****

BAB IX
DISTRIBUSI SAMPLING

Dalam melakukan penelitian, terlebih dahulu perlu diketahui himpunan keseluruhan objek yang akan diselidiki, yang disebut populasi. Untuk populasi yang besar tidak praktis meneliti seluruh populasi, sehingga dilakukan pengambilan sampel yaitu himpunan bagian dari populasi tersebut. Analisis statistik dilakukan untuk mengambil kesimpulan tentang parameter populasi berdasarkan sampel. Untuk itu diusahakan supaya dapat diperoleh sampel yang representatif untuk populasinya. Salah satu macam sampel yang dianggap representatif, khususnya untuk populasi yang tidak terlalu heterogen adalah sampel random yaitu sampel yang pengambilannya sedemikian hingga tiap elemen populasinya mempunyai kemungkinan yang sama untuk terambil dalam sampel dan observasi-observasi dalam sampel ini independen satu sama lain. Secara formal sampel random dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi IX.1:
Misalkan Y_1, Y_2, ... , Y_n merupakan n variabel random independen yang masing-masing mempunyai distribusi probabilitas $f(y)$. Dalam hal ini, Y_1, Y_2, ... , Y_n didefinisikan sebagai *sampel random* ukuran n dari populasi $f(y)$dan distribusi probabilitas bersamanya dinyatakan sebagai

$$f(y_1, y_2, \ldots ,y_n) = f(y_1)\, f(y_2) \ldots\ldots f(y_n).$$

Dalam pembahasan yang lalu telah dinyatakan bahwa tujuan utama dari pengambilan sampel random adalah untuk mendapatkan keterangan mengenai parameter populasi yang tidak diketahui. Suatu nilai yang dihitung dari sampel random disebut ***statistik***. Jadi statistik adalah fungsi dari variabel random yang diambil dari sampel random.

Contoh IX.1:
Misalkan Y_1, Y_2, ... , Y_n sampel random berukuran n yang telah diurutkan menurut besarnya.

(a) Statistik $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ disebut mean sampel.

(b) Statistik $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ disebut variansi sampel.

(c) Statistik $\tilde{X} = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ untuk n ganjil dan $\tilde{X} = \frac{\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right]}{2}$ untuk n genap disebut median sampel.

Karena statistik merupakan fungsi dari variabel random yang diambil dari suatu populasi maka statistik juga merupakan variabel random sehingga dapat ditentukan distribusi probabilitasnya maupun mean dan variansinya. Distribusi probabilitas ini kemudian dinamakan *distribusi sampling*.

IX.1 Distribusi Sampling

Banyak fenomena alam mempunyai distribusi frekuensi relatif yang mendekati distribusi probabilitas normal, sehingga dalam banyak hal adalah beralasan untuk menganggap bahwa variabel random yang diambil dari sampel random Y_1, Y_2, ... , Y_n adalah independen satu sama lain dan masing-masing berdistribusi normal.

Teorema IX.1

Jika diketahui Y_1, Y_2, ... , Y_n adalah sampel random berukuran n dan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n.

Bukti

Karena Y_1, Y_2, ... , Y_n adalah sampel random berukuran n dan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka Y_i variabel random berdistribusi normal dengan $E[Y_i] = \mu$ dan $V[Y_i] = \sigma^2$, untuk $i = 1,2, 3, \ldots, n$. Lebih jauh

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \;=\; \frac{1}{n}Y_1 + \frac{1}{n}Y_2 + \ldots + \frac{1}{n}Y_n$$

sehingga merupakan kombinasi linear dari Y_1, Y_2, ... , Y_n. Akibatnya $\overline{Y}$ berdistribusi normal dengan mean

$$E[\overline{Y}] = E[\frac{1}{n}Y_1 + \ldots + \frac{1}{n}Y_n] = \frac{1}{n}\mu + \ldots + \frac{1}{n}\mu = \mu\,,$$

$$V[\overline{Y}] = V[\frac{1}{n}Y_1 + \ldots + \frac{1}{n}Y_n] = \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Hal itu berarti distribusi sampling $\overline{Y}$ adalah normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n.

Jika diketahui Y_1, Y_2, ... , Y_n adalah sampel random berukuran n dan berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2/n sehingga

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma}\right)$$

mempunyai distribusi normal baku. Hal itu digambarkan dalam contoh berikut ini.

Contoh IX.2

Suatu mesin minuman dapat diatur sedemikian rupa sehingga banyak minuman yang dikeluarkan secara hampiran berdistribusi normal dengan mean 200 ml dan variansi 10 ml^2. Secara berkala dilakukan pemeriksaan mesin dengan mengambil sampel 9 botol dan dihitung mean isinya. Bila mean $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ kesembilan botol tersebut jatuh pada interval

$$(\,\mu_{\overline{Y}} - 2\sigma_{\overline{Y}}\,, \mu_{\overline{Y}} + 2\sigma_{\overline{Y}}\,)$$

maka mesin dianggap bekerja dengan baik, jika tidak mesin perlu diatur kembali. Jika mean kesembilan botol tersebut 210 ml, tindakan apa yang harus dilakukan ?

Penyelesaian :

Jika $Y_1, Y_2, \ldots, Y_9$ menyatakan kandungan minuman per botol maka Y_i berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi $\sigma^2 = 1$ untuk $i = 1, 2, .., 9$. Oleh karena itu $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ mempunyai distribusi sampling normal dengan mean μ dan variansi $\frac{\sigma^2}{n}$. Akan ditentukan

$$
\begin{aligned}
P[\,|\overline{Y}-\mu| \le 0,3\,] &= P[\,-0,3 \le \overline{Y}-\mu \le 0,3\,] \\
&= P[-\frac{0,3}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0,3}{\sigma/\sqrt{n}}] \\
&= P[-\frac{0,3}{1/\sqrt{9}} \le Z \le \frac{0,3}{1/\sqrt{9}}] \\
&= P[\,-0,9 \le Z \le 0,9\,].
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan tabel distribusi normal baku diperoleh

$$
\begin{aligned}
P[\,-0,9 \le Z \le 0,9\,] &= 1 - 2\,P(\,Z > 0,9\,) \\
&= 1 - 2(0,1841) \\
&= 0,6318.
\end{aligned}
$$

Hal itu berarti bahwa probabilitasnya hanya 0,6318 bahwa sampel akan terletak dalam jarak 0,3 ons dari mean populasi.

Contoh IX.3

Dengan menggunakan keterangan pada Contoh IX.2 berapa ukuran sampel yang diperlukan supaya dapat diharapkan bahwa $\overline{Y}$ terletak dalam 0,3 ons dari μ dengan probabilitas 0,95 ?

Penyelesaian :

Diinginkan

$$P[\,|\overline{Y} - \mu| \le 0,3\,] = P[\,-0,3 \le (\overline{Y} - \mu) \le 0,3\,] = 0,95$$

dan dengan mengalikan semua ruas dengan $\sqrt{n}/\sigma = \sqrt{n}/1 = \sqrt{n}$ diperoleh

$$P[-0{,}3\sqrt{n} \le \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma}\right) \le 0{,}3\sqrt{n}\,] \;=\; P[-0{,}3\sqrt{n} \le Z \le 0{,}3\sqrt{n}\,] \;=0{,}95.$$

Dengan menggunakan tabel distribusi normal baku diperoleh bahwa

$$P[\,-1{,}96 \le Z \le 1{,}96\,] = 0{,}95$$

sehingga $0{,}3\ \sqrt{n} = 1{,}96$ atau $n = (1{,}96/0{,}3)^2 = 42{,}68$. Hal itu berarti bahwa jika diambil $n = 43$ maka P[| $\overline{Y}$ - μ | $\le$ 0,3] akan sedikit melampaui 0,95.

Teorema IX.2

Jika Y_1, Y_2, ... , Y_n didefinisikan seperti pada Teorema IX.1 maka $Z_i = \dfrac{Y_i - \mu}{\sigma}$ saling bebas dan mempunyai distribusi normal baku dan $U = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{Y_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ mempunyai distribusi χ^2 dengan derajat kebebasan n.

Bukti :

Karena Y_1, Y_2, ... , Y_n sampel random dari distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka $Z_i = \dfrac{Y_i - \mu}{\sigma}$ mempunyai distribusi normal baku untuk i = 1, 2, …, n. Karena Y_i saling bebas maka Z_i saling bebas untuk i = 1, 2, …, n sehingga Z_i^2 juga saling bebas dengan masing-masing berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas 1. Akibatnya

$$U = \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas n.

Contoh IX.3

Jika Z_1, Z_2, ... , Z_6 sampel random dari distribusi normal baku maka tentukan bilangan b sehingga P($\sum_{i=1}^{6} Z_i \le b$) = 0,95.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Teorema X.2 diperoleh berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 6. Berdasarkan tabel distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 6 maka diperoleh b = 12,5916 yaitu

$$P(\sum_{i=1}^{6} Z_i \leq 12{,}5916) = 0{,}95 \text{ atau } P(\sum_{i=1}^{6} Z_i > 12{,}5916) = 0{,}05 .$$

Untuk membuat suatu inferensi tentang variansi populasi σ^2 berdasar pada sampel random Y_1, Y_2, ... , Y_n dari populasi normal, maka distribusi χ^2 akan memainkan peranan penting. Estimator yang baik untuk σ^2 adalah variansi sampel

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 .$$

Teorema IX.2

Diketahui Y_1, Y_2, ... , Y_n adalah sampel random dari distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ mempunyai distribusi χ^2 dengan derajat kebebasan n-1.

Contoh IX.4

Berdasar pada Contoh IX.2, volume minuman yang diisikan ke dalam botol dianggap berdistribusi normal dengan variansi 10 ml^2. Misalkan direncanakan untuk mengambil sampel random sebanyak 10 botol dan diukur banyak volume pada setiap botol. Jika 10 sampel ini digunakan untuk menentukan S^2 maka akan berguna untuk menentukan interval (b_1, b_2) yang memuat S^2 dengan probabilitas yang tinggi. Tentukan b_1 dan b_2 sehingga

$$P(b_1 \leq S^2 \leq b_2) = 0{,}90.$$

Penyelesaian :

Perlu dicatat bahwa

$$P(b_1 \leq S^2 \leq b_2) = P\left[\frac{(n-1)\,b_1}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)\,b_2}{\sigma^2}\right].$$

Karena $\sigma^2 = 1$ maka $(n\text{-}1)S^2/\sigma^2 = (n\text{-}1)S^2$ mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas n-1. Oleh karena itu dengan menggunakan tabel distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas n-1 dapat ditentukan a_1 dan a_2 sehingga

$$P(a_1 \leq (n\text{-}1)S^2 \leq a_2) = 0{,}90.$$

Suatu metode yang biasa digunakan adalah dengan metode ekor sama sehingga dengan menggunakan tabel distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 9 diperoleh $a_1 = 3{,}325$ dan $a_2 = 16{,}919$. Akibatnya diperoleh

$$a_1 = \frac{(n-1)\,b_1}{\sigma^2} = (n\text{-}1)b_1 = 9\ b_1\ ,$$

$$a_2 = \frac{(n-1)\,b_2}{\sigma^2} = (n\text{-}1)b_2 = 9\ b_2$$

atau $b_1 = 3{,}325/9 = 0{,}369$ dan $b_2 = 16{,}919/9 = 1{,}880$.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Misalkan Z_1 dan Z_2 berdistribusi N(0,1) serta saling bebas. Tentukan $P(Z_1 - Z_2 < 2)$.

Penyelesaian

Karena Z_1 , Z_2 berdistribusi N(0,1) dan saling bebas maka Z_1 - Z_2 berdistribusi normal dengan mean E[Z_1 - Z_2] = E[Z_1] – E[Z_2] = 0 dan V(Z_1 - Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2) = 1 + 1 = 2 sehingga

$$P(Z_1 - Z_2 < 2) = P\left(\frac{Z_1 - Z_2 - 0}{\sqrt{2}} < \frac{2-0}{\sqrt{2}}\right) = P(Z < \sqrt{2}) = 0{,}9214.$$

Soal 2

Misalkan Z_i berdistribusi N(0,1) untuk i = 1, 2, ..., 16 dan saling bebas. Tentukan $P(\sum_{i=1}^{16} Z_i^2 < 32)$.

Penyelesaian

Karena Z_i berdistribusi N(0,1) dan saling bebas maka Z_i^2 berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 1 untuk i = 1, 2, ..., 16. Akibatnya

$$\sum_{i=1}^{16} Z_i^2$$

berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 16 sehingga

$$P(\sum_{i=1}^{16} Z_i^2 < 32) = P(\chi^2_{16} < 32) = 0{,}99.$$

Soal 3

Misalkan X_1, X_2 masing-masing berdistribusi N(0,25).

Tentukan $P(D \leq 12{,}25)$ dengan $D^2 = X_1^2 + X_2^2$.

Penyelesaian

Karena X_1, X_2 masing-masing berdistribusi N(0,25) maka $\frac{X_i}{5}$ berdistribusi N(0,1) sehingga $\frac{X_i^2}{25}$ chi-kuadrat dengan derajat bebas 1 sehingga

$$P(D \leq 12{,}25) = P(D^2 \leq 12{,}25^2)$$

$$= P(X_1^2 + X_2^2 \leq 150{,}0625)$$

$$= P\left(\frac{X_1^2 + X_2^2}{25} \leq \frac{150{,}0625}{25}\right)$$

$$= P(\chi_2^2 \leq 6{,}0025)$$

$$= 0{,}95.$$

Soal 4

Misalkan X_i berdistribusi N(μ , σ^2) untuk i = 1, 2, ..., n dan Z_i berdistribusi N(0,1) untuk i = 1, 2, ..., k dan semua variabel saling bebas. Nyatakan distribusi dari masing-masing variabel apakah dapat ditentukan atau tidak untuk statistik berikut ini :

a. $\dfrac{Z_1^2}{Z_2^2}$

b. $\dfrac{\sqrt{nk}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k} Z_i^2}}$.

Penyelesaian

a. Karena Z_1 dan Z_2 berdistribusi N(0,1) maka Z_1^2 dan Z_2^2 masing-masing berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 1. Akibatnya

$$\frac{Z_1^2}{Z_2^2}$$

dapat ditulis sebagai

$$\frac{Z_1^2}{Z_2^2} = \frac{Z_1^2/1}{Z_1^2/1}$$

sehingga berdistribusi F dengan derajat bebas pembilang 1 dan derajat bebas penyebut 1.

b. Karena X_i berdistribusi N(μ , σ^2) untuk i = 1, 2, ..., n maka $\overline{X}$ berdistribusi N(μ , σ^2/n) sehingga $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ berdistribusi N(0,1) dan karena Z_i berdistribusi N(0,1) untuk i = 1, 2, ..., k maka $\sum_{i=1}^{k} Z_i^2$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas k. Akibatnya

$$\frac{\sqrt{nk}\,(\overline{X}-\mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k} Z_i^2}}$$

berdistribusi t dengan derajat bebas k.

Soal 5

Gunakan tabel distribusi chi-kuadrat, t atau F untuk menghitung :

a. $P\left(\frac{Y}{1+Y} > \frac{11}{16}\right)$ jika Y berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 6.

b. Nilai c sehingga $P(\ |\ T\ |\ \geq\ c) = 0{,}02$ jika T berdistribusi t dengan derajat bebas 23.

c. $P\left(\frac{1}{X} > 0{,}25\right)$ jika X berdistribusi F dengan derajat bebas 20 dan 8.

Penyelesaian

a. Karena Y berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 6 maka

$$P\left(\frac{Y}{1+Y} > \frac{11}{16}\right) = P(16Y > 11 + 11Y)$$

$$= P(5Y > 11) = P(Y > 11/5) = 1 - P(Y < 2{,}2) = 0{,}9.$$

b. Karena T berdistribusi t dengan derajat bebas 23 dan distribusi T simetris pada titik 0 maka maka

$$P(\ T \leq \text{-}c) = 0{,}01$$

sehingga diperoleh c = -2,5.

c. Karena X berdistribusi F dengan derajat bebas 20 dan 8 maka

$$P\left(\frac{1}{X} > 0{,}25\right) = P(X < 4) = P(F_{2,4} < 4) = 0{,}975.$$

LATIHAN

1. Bila X menyatakan berat karung beras dalam kilogram dengan X berdistribusi N(101, 4). Berapakah probabilitas bahwa 20 karung akan mempunyai berat paling sedikit 2 ton?
2. Suatu komponen digunakan dan tersedia sembilan suku cadang. Waktu sampai komponen tersebut gagal adalah saling bebas dan berdistribusi eksponensial dengan mean 100 hari.
   a. Apakah distribusi dari $\sum_{i=1}^{10} T_i$?
   b. Probabilitas bahwa operasi secara sukses dapat dipelihara dengan 10 komponen tersebut paling sedikit 1,5 tahun.
   c. Berapa banyak cuku cadang yang diperlukan bila kita yakin 95 % bahwa operasi akan sukses paling sedikit 2 tahun.
3. Jika X berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas m dan $S = X + Y$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas $m + n$ dan X dan Y saling bebas maka gunakan fungsi pembangkit momen untuk menunjukkan bahwa $S – X$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas n.
4. Jika sampel random ukuran n = 15 diambil dari populasi yang berdistribusi eksponensial dengan mean maka tentukan c sehingga $P(c\overline{X} < \theta) = 0{,}95$ dengan $\overline{X}$ adalah mean sampel.
5. Misalkan Z berdistribusi N(0,1).
   a. Tentukan $P(Z^2 < 3{,}84)$ dengan menggunakan tabel distribusi normal baku.
   b. Tentukan $P(Z^2 < 3{,}84)$ dengan menggunakan tabel distribusi chi-kuadrat.
6. Misalkan Z_i berdistribusi N(0,1) untuk i = 1, 2, ..., 16 dan saling bebas dan misalkan $\overline{Z}$ adalah mean sampel.
   a. $P(\overline{Z} < 0{,}5)$.
   b. $P(Z_1 + Z_2 < 2)$.
   c. $P(\sum_{i=1}^{16} (Z_i - \overline{Z})^2 < 25)$.

7. Misalkan X_i berdistribusi N(μ , σ^2) untuk i = 1, 2, ..., n dan Z berdistribusi N(0,1) untuk i = 1, 2, ..., k dan semua variabel saling bebas. Nyatakan distribusi dari masing-masing variabel apakah dapat ditentukan atau tidak untuk statistik berikut ini :
   a. $X_1 - X_2$.
   b. $X_2 + 2\,X_3$.
   c. $Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2}$.
   d. $Z_1^{\ 2} - Z_2^{\ 2}$.
   e. $\dfrac{Z_1^{\ 2}}{Z_2^{\ 2}}$.
   f. $\dfrac{Z_1}{\sqrt{Z_2^{\ 2}}}$
   g. $\dfrac{\sqrt{nk}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{i=1}^{k} Z_i^{\ 2}}}$
   h. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{k}(Z_i - \overline{Z})^2$.
   i. $\dfrac{\overline{X}}{\sigma^2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{k} Z_i}{k}$
   j. $\dfrac{(k-1)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{(n-1)\,\sigma^2\sum_{i=1}^{k}(Z_i - \overline{Z})^2}$
8. Misalkan X_1, X_2, ... , X_n adalah sampel random ukuran 9 dari distribusi normal dengan X_i berdistribusi N(6,25) dan menyatakan $\overline{X}$ mean sampel dan S^2 adalah variansi sampel. Gunakan tabel distribusi normal baku untuk menghitung :
   a. $P(3 < \overline{X} < 7)$.

b. $P(1{,}860 < 3(\overline{X} - 6)/S)$.

c. $P(S^2 \leq 31{,}9375)$.

9. Gunakan tabel distribusi chi-kuadrat, *t* atau *F* untuk menghitung :
   a. $P[\,7{,}26 < Y < 22.31]$ jika *Y* berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 23.
   b. Nilai *b* sehingga $P(X \leq b) = 0{,}75$ jika *X* berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 23.
   c. $P\left(\frac{Y}{1+Y} > \frac{11}{16}\right)$ jika *Y* berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 6.
   d. $P(\,0{,}87 < T < 2{,}65)$ jika *T* berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 13.
   e. Nilai *b* sehingga $P(T < b) = 0{,}6$ jika *T* berdistribusi *t* dengan derajat bebas 26.
   f. Nilai *b* sehingga $P(\,|\,T\,| \geq c) = 0{,}02$ jika *T* berdistribusi *t* dengan derajat bebas 23.
   g. $P(\,2{,}91 < X < 5{,}52)$ jika *X* berdistribusi *F* dengan derajat bebas 7 dan 12.
   h. $P\left(\frac{1}{X} > 0{,}25\right)$ jika *X* berdistribusi *F* dengan derajat bebas 20 dan 8.
10. Bila suatu sampel berukuran 10 diambil dari populasi normal dengan mean 60 dan deviasi standar 5, tentukan peluang bahwa mean sampel $\overline{Y}$ akan terletak dalam interval sampai dengan menganggap mean sampel dapat diukur sampai tingkat ketelitian yang diinginkan.
11. Sampel ukuran 5 diambil dari suatu variabel random dengan distribusi N(12,4). Tentukan probabilitas bahwa mean sampel tidak melebihi 13.
12. Misalkan bahwa variabel random *X* mempunyai variabel random distribusi N(0, 0,09). Suatu sampel berukuran 25 diambil dari *X*,

misalkan X_1, X_2, ..., X_{25} tentukan probabilitas bahwa $\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$ lebih dari 1,5.

13. Jika diasumsikan bahwa Z, V_1 dan V_2 adalah variabel random yang saling bebas dengan Z berdistribusi N(0,1), V_1 berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 5 dan V_2 berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 9 maka tentukan :
    a. $P(V_1 + V_2 < 8{,}6)$.
    b. $P\left(\dfrac{Z}{\sqrt{V_1/5}} < 2{,}015\right)$.
    c. $P(Z > 0{,}611\sqrt{V_2})$.
    d. $P(V_1/V_2 < 1{,}450)$.
    e. Nilai b sehingga $P\left(\dfrac{V_1}{V_1+V_2} < b\right) = 0{,}90$.
14. Misalkan adalah sampel random dari distribusi yang mempunyai 4 momen pertama dan misalkan

$$S_n^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

    Tunjukkan bahwa $S_n^{\,2} \xrightarrow{P} \sigma^2$ untuk $n \to \infty$.
15. Jika $Y_n \sim \chi_n^{\,2}$ maka tentukan distribusi limit dari $\dfrac{Y_n - n}{\sqrt{2n}}$ jika $n \to \infty$ dengan menggunakan fungsi pembangkit momen.

*****

BAB X
TEOREMA LIMIT SENTRAL

Dalam bab terdahulu telah ditunjukkan bahwa apabila Y_1, Y_2, …... , Y_n menyatakan sampel random dan sebarang distribusi dengan mean μ dan variansi σ^2 maka $E(\overline{Y}) = \mu$ dan $V(\overline{Y}) = \sigma^2/n$. Dalam pasal ini akan dikembangkan suatu pendekatan distribusi sampling $\overline{Y}$ tanpa memandang dari distribusi populasi yang manakah sampelnya diambil.

Jika sampel random dari populasi normal maka Teorema IX.1 telah menyatakan bahwa distribusi samplingnya akan normal. Tetapi apakah yang dapat dikatakan tentang distribusi sampling $\overline{Y}$ jika Y tidak berdistribusi normal ? Dalam pasal ini akan terlihat bahwa $\overline{Y}$ berdistribusi sampling yang mendekati normal bila ukuran sampel besar. Secara formal hasil tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema X.1 (***Teorema Limit Sentral***):
Diketahui Y_1, Y_2, …... , Y_n variabel random independen dan berdistribusi identik dengan $E(Y_i) = \mu$ dan $V(Y_i) = \sigma^2$ untuk setiap i. Jika didefinisikan $U_n = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{Y} - \mu)}{\sigma}$ dengan $\overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ maka untuk $n \to \infty$, fungsi distribusi U_n akan konvergen ke fungsi distribusi normal standar.

Pendekatan normal untuk $\overline{Y}$ akan cukup baik bila $n \geq 30$, terlepas dari bentuk populasi. Bila $n < 30$ pendekatan tersebut akan baik bila populasinya tidak jauh dari normal. Bila populasinya berdistribusi normal maka distribusi sampel $\overline{Y}$ akan tepat berdistribusi normal tanpa memandang ukuran sampel.

Contoh X.1

Diketahui populasi yang berdistribusi uniform diskrit

$$f(y) = 1/4 \quad \text{untuk } y = 0, 1, 2, 3,$$
$$= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.}$$

Tentukan probabilitas bahwa sampel random yang berukuran 36 yang diambil dari populasi tersebut akan menghasilkan mean sampel lebih besar 1,4 tetapi lebih kecil dari 1,8 bila mean diukur sampai persepuluhan terdekat.

Penyelesaian :

Karena sampel random diambil dari populasi tersebut maka meannya adalah

$$\mu = E[\ Y\ ] = 3/2$$

dan variansinya adalah

$$\sigma^2 = 5/4 .$$

Akibatnya

$$\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - (3/2)}{\sqrt{5}/2/\sqrt{36}} \sim N(0,1)$$

sehingga

$$\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{Y} - (3/2)}{\sqrt{5}/12} \sim N(0,1) .$$

Probabilitas mean sampel lebih besar 1,4 tetapi lebih kecil dari 1,8 adalah

$$P\left(1,4 \le \overline{Y} \le 1,8 \right) = P\left(\frac{1,4-1,5}{\sqrt{5}/12} \le \frac{\overline{Y} - 1,5}{\sqrt{5}/12} \le \frac{1,8-1,5}{\sqrt{5}/12} \right)$$
$$= \text{P}[- 0,0037 \le Z \le 0,0112]$$
$$= 0.0059.$$

Pendekatan Normal untuk Distribusi Binomial

Probabilitas distribusi Binomial dengan mudah dapat diperoleh dari fungsi probabilitas binomial

$$f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \ , y = 0, 1, 2, ..., n$$

atau dari tabel distribusi Binomial komulatif bila n kecil. Jika n cukup besar sehingga tidak terdapat dalam tabel yang ada maka dengan menggunakan cara pendekatan akan dapat dihitung probabilitas binomial. Berikut ini teorema yang memungkinkan penggunaan luas di bawah kurva normal untuk memungkinkan memperkirakan probabilitas binomial bila n cukup besar.

Teorema X.2

Bila Y variabel random binomial dengan mean $\mu = np$ dan variansi $\sigma^2 = npq$ dengan $q = 1 - p$ maka bentuk limit distribusi $Z = \dfrac{Y - np}{\sqrt{npq}}$ adalah normal standar bila $n \to \infty$.

Distribusi normal akan memberikan pendekatan yang baik terhadap distribusi binomial bila n besar dan p dekat dengan 1/2.

Contoh X.2

Suatu proses menghasilkan sejumlah barang yang 10% cacat, bila 100 barang diambil secara random dari proses tersebut. Tentukan probabilitas bahwa banyak yang cacat melebihi 13.

Penyelesaian

Banyak yang cacat berdistribusi binomial dengan parameter $n = 100$, $p = 0{,}1$ dan $q = 1\text{-}p = 1\text{-}\ 0{,}1 = 0{,}9$. Karena ukuran sampel besar maka mestinya pendekatan normal akan memberikan hasil yang cukup teliti dengan

$$\mu = np = (100)(0{,}1) = 10,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0{,}1)(0{,}9)} = 3\,.$$

Untuk mendapatkan probabilitas yang ditanyakan harus dicari luas sebelah kanan $y = 13{,}5$. Harga z yang sesuai dengan 13,5 adalah

$$z = (13{,}5\text{-}10)/3 = 1{,}167.$$

Probabilitas banyak cacat melebihi 13 adalah

$$P(Y > 13) = \sum_{y=14}^{100} B(y;100;0{,}1)$$

$$= \mathrm{P}(Z > 1{,}167)$$

$= 1 - P(Z < 1{,}167)$
$= 1 - 0{,}8784$
$= 0{,}1216.$

Contoh X.3

Suatu ujian pilihan ganda terdiri dari 200 soal dan masing-masing soal mempunyai 4 pilihan jawaban dengan hanya satu jawaban yang benar. Dari 200 soal tersebut seorang siswa tidak dapat menjawab 80 soal sehingga ia memilih jawabannya secara random. Tentukan probabilitas bahwa siswa tersebut akan dapat mendapatkan jawaban yang benar antara 25 sampai 30 soal dari 80 soal tersebut.

Penyelesaian

Probabilitas menjawab benar untuk tiap soal dari 80 soal adalah 1/4. Jika Y menyatakan banyak jawaban yang benar dengan hanya menebak maka

$$\text{P}(25 \le Y \le 30) = \sum_{y=25}^{30} B(y; 80; 1/4).$$

Dengan menggunakan pendekatan normal dengan

$$\mu = np = 80\ (1/4) = 20,$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80(0{,}25)(0{,}75)} = 3{,}87$$

dan diperlukan luas antara $y_1 = 24{,}5$ dan $y_2 = 30{,}5$.

Harga z yang sesuai adalah

$z_1 = (24{,}5\text{-}20) / 3{,}87 = 1{,}163,$

$z_2 = (30{,}5\text{-}20) / 3{,}87 = 2{,}713.$

Probabilitas menebak tepat 25 sampai 30 dinyatakan dengan daerah yang diarsir dalam grafik di atas.

$$P(25 \le Y \le 30) = \sum_{y=25}^{30} B(y; 80, 1/4)$$
$$= P(1{,}163 < Z < 2{,}713)$$
$$= P(Z < 2{,}713) - P(Z < 1{,}163)$$
$$= 0{,}9966 - 0{,}8776$$
$$= 0{,}1190.$$

Contoh X.4

Misalkan variabel random Y mempunyai distribusi binomial dengan $n = 25$ dan $p = 0{,}4$. Tentukan probabilitas eksak bahwa $Y \leq 8$ dan $Y = 8$ dan bandingkan hasilnya dengan metode pendekatan normal.

Penyelesaian :

Berdasarkan pada tabel binomial dengan $n = 25$ dan $p = 0{,}4$ maka

$$P(Y \leq 8) = 0{,}274$$

dan

$$\begin{aligned} P(Y = 8) &= P(Y \leq 8) - P(Y \leq 7) \\ &= 0{,}274 - 0{,}154 \\ &= 0{,}120. \end{aligned}$$

Untuk pendekatan normal maka $U = Y/n$ akan mendekati distribusi normal dengan mean p dan variansi $p(1-p)/n$. Dengan cara yang sama maka dapat dipilih bahwa Y akan mendekati distribusi normal W dengan mean np dan variansi $np(1-p)$. Untuk menentukan $P(Y \leq 8)$ dengan berdasarkan pada kurva normal maka didapat

$$\begin{aligned} P(Y \leq 8) &= P(W \leq 8{,}5) \\ &= P\left(\frac{W-10}{\sqrt{25(0{,}4)(0{,}6)}} \leq \frac{8{,}5-10}{\sqrt{25(0{,}4)(0{,}6)}}\right) \\ &= P(Z \leq -0{,}61) \\ &= 0{,}2709. \end{aligned}$$

Untuk menentukan pendekatan normal terhadap probabilitas Binomial $P(Y = 8)$ ditentukan area di bawah kurva normal antara titik 7,5 dan 8,5. Karena Y mempunyai distribusi yang sama dengan W yang berdistribusi normal dengan mean

$$np = 25(0{,}40) = 10$$

dan variansi $np(1-p) = 6$ maka

$$\begin{aligned} P(Y = 8) &= P(7{,}5 \leq W \leq 8{,}5) \\ &= P\left(\frac{7{,}5-10}{\sqrt{6}} \leq \frac{W-10}{\sqrt{6}} \leq \frac{8{,}5-10}{\sqrt{6}}\right) \\ &= P(-1{,}02 \leq Z \leq -0{,}61) \\ &= P(Z \leq -0{,}61) - \mathrm{P}(Z < -1{,}02) \end{aligned}$$

$$= 0{,}2709 - 0{,}1539$$
$$= 0{,}1170.$$

Terlihat bahwa pendekatan normal untuk $P(Y = 8)$ cukup dekat dengan perhitungan eksak yaitu 0,1198.

SOAL-SOAL & PENYELESAIAN

Soal 1

Misalkan X_1, X_2, …., X_{100} sampel random dari distribusi eksponensial dengan mean 1. Jika $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ maka tentukan pendekatan normal dari $P(Y > 110)$.

Penyelesaian

Karena X_1, X_2, …., X_{100} sampel random dari distribusi eksponensial dengan mean 1 maka

$$E[Y] = 100\, E[X_1] = 100\,(1) = 100$$

dan

$$V(Y) = 100 V(X_1) = 100\,(1) = 100.$$

Dengan menggunakan pendekatan normal diperoleh

$$P(Y > 110) \approx P\left(\frac{Y-100}{\sqrt{100}} \le \frac{110-100}{\sqrt{100}}\right) = P(Z \le 1) = 0{,}8413.$$

Soal 2

Misalkan X_1, X_2, …., X_{20} berdistribusi seragam pada (0,1) dan saling bebas.

a. Tentukan pendekatan normal dari $P(\sum_{i=1}^{20} X_i \le 12)$.

b. Tentukan juga persentil ke-90 dari $\sum_{i=1}^{20} X_i$.

Penyelesaian

a. Karena X_1, X_2, …., X_{20} berdistribusi seragam pada (0,1) dan saling bebas maka
   $E[X_1+X_2+ \ldots +X_{20}] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots +E[X_{20}] = 10$
   dan
   $V(X_1+X_2+ \ldots +X_{20}) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots +V(X_{20}) = 20/12$
   sehingga pendekatan normal yaitu

$$P(\sum_{i=1}^{20} X_i \le 12) \approx P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 10}{\sqrt{20/12}} \le \frac{12-10}{\sqrt{20/12}} \right) = P(Z \le 1{,}549) = 0{,}9393.$$

b. Persentil ke-90 dari $\sum_{i=1}^{20} X_i$ sama artinya mencari a sehingga

$$P(\sum_{i=1}^{20} X_i \le a) \approx P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 10}{\sqrt{10/12}} \le \frac{a-10}{\sqrt{10/12}} \right) = 0{,}90$$

sehingga diperoleh

$$\frac{a-10}{\sqrt{10/12}} = 1{,}2816$$

atau

$$a = 10 + \sqrt{\frac{5}{6}} 1{,}2816 = 11{,}1699.$$

Soal 3

Variable random X_i berdistribusi Beta(α,β) dengan $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Gunakan Teorema Limit Sentral untuk mendekati $P(\overline{X} \le 0{,}5)$ dengan $n = 12$.

Penyelesaian

Karena variabel random X_1 berdistribusi Beta(α, β) dengan $\alpha = 1$, $\beta = 2$ maka

$$E[X_1] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

dan

$$V(X_1) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1(2)}{(1+2)^2(1+2+1)} = \frac{2}{9(4)} = \frac{1}{18}.$$

Akibatnya $E[\overline{X}] = E[X_1] = \frac{1}{3}$ dan $V(\overline{X}) = \frac{V(X_1)}{12} = \frac{1/18}{12} = \frac{1}{216}$ sehingga dengan menggunakan Teorema limit Sentral diperoleh

$$P(\overline{X} \le 0{,}5) \approx P\left(\frac{\overline{X}-\frac{1}{3}}{\sqrt{216}} \le \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\sqrt{216}}\right) = P\left(Z \le \frac{\frac{1}{6}}{6\sqrt{6}}\right) = P\left(Z \le \frac{1}{36\sqrt{6}}\right) = 0{,}5063.$$

Soal 4

Nilai tes hasil belajar siswa di suatu daerah mempunyai rata-rata (mean) μ = 60 dan variansi σ^2 = 64. Suatu sampel random ukuran n = 100 dari suatu sekolah yang mempunyai siswa besar diperoleh rata-ratanya adalah 58. Apakah ada bukti bahwa sekolah tersebut mempunyai skor rata-rata yang jauh dibandingkan dengan skor rata-rata di daerah tersebut ?

Penyelesaian

Misalkan bahwa $\overline{Y}$ menyatakan rata-rata dari sampel ukuran n = 100 yang diambil dari populasi yang mempunyai rata-rata (mean) μ = 60 dan variansi σ^2 = 64. Akan dicari nilai pendekatan dari $P(\overline{Y} < 58)$ yaitu

$$P(\overline{Y} < 58) = P\left(\frac{\overline{Y}-60}{\sqrt{64/100}} \le \frac{58-60}{\sqrt{64/100}}\right) = P\left(Z \le -\frac{2(10)}{8}\right) = P(Z \le -2{,}5) = 0{,}0062.$$

Hal itu berarti bahwa sekolah yang seperti ini jarang ditemui dari seluruh populasi sehingga rata-rata nilai siswa di sekolah tersebut lebih rendah dari rata-rata sekolah pada umumnya.

Soal 5

Waktu pelayanan pelanggan di loket kasir dapat dipandang sebagai variabel random yang saling bebas dengan mean 1,5 dan variansi 1,0. Hitunglah dengan pendekatan probabilitas bahwa 100 pelanggan dapat dilayani dengan waktu kurang dari 2 jam.

Penyelesaian

Misalkan Y_i menyatakan waktu layanan pelanggan ke-i maka akan dihitung

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \le 120\right) = P(\overline{Y} \le 1{,}2).$$

Karena ukuran sampel besar maka $\overline{Y}$ akan mendekati berdistribusi normal dengan mean $\mu_{\overline{X}} = 1{,}5$ dan variansi $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{100}$ sehingga diperoleh pendekatan normal

$$P(\overline{Y} \le 1{,}2) \approx P\left(\frac{\overline{Y} - 1{,}5}{\sqrt{1/100}} \le \frac{1{,}2 - 1{,}5}{\sqrt{1/100}}\right) = P(Z \le -3) = 0{,}0013.$$

Hal itu berarti bahwa probabilitas 100 pelanggan dapat dilayani dengan waktu kurang dari 2 jam adalah 0,0013 sehingga hampir tidak mungkin melayani 100 pelanggan kurang dari 2 jam.

LATIHAN

1. Dalam ujian pilihan ganda tersedia 100 pertanyaan dengan 5 alternatif jawaban untuk setiap pertanyaan dan hanya ada satu jawaban yang benar. Berapakah probabilitas bahwa peserta ujian yang tidak tahu apa-apa akan lulus ujian bila batas kelulusan minimal 55 jawaban benar.
2. Diketahui hanya 5% mahasiswa di kota Salatiga yang mempunyai IQ = 130 atau lebih. Jika diambil sampel random sebanyak 50 mahasiswa di Salatiga. Tentukan $P(Y = 110)$ dan $P(Y \geq 120)$ dengan menggunakan pendekatan normal.
3. Misalkan bahwa $Y_1, Y_2, ..., Y_{40}$ menyatakan sampel random dari ukuran proporsi kemurnian bijih besi dalam sampel. Misalkan untuk setiap Y_i mempunyai fungsi kepadatan probabilitas

$$\begin{aligned} f(y) &= 3y^2 \quad \text{untuk } 0 \leq y \leq 1, \\ &= 0 \quad \text{untuk } y \text{ yang lain.} \end{aligned}$$

   Bijih besi ditolak oleh pembeli potensial jika $\overline{Y}$ melampaui 0,7. Tentukan $P(\overline{Y} > 0{,}7)$ untuk ukuran sampel 40.
4. Jika Y mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas n maka Y dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   dengan masing-masing X_i saling bebas dan masing-masing mempunyai distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas 1. Tunjukkan bahwa

$$Z = \frac{(Y - n)}{\sqrt{2n}}$$

   mempunyai distribusi normal secara asimptotik.
5. Misalkan X mempunyai distribusi Poisson dengan parameter λ.
   a. Buktikan bahwa fungsi pembangkit momen dari

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

   dinyatakan dengan

$$m(t) = \exp(t/\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\, t - \lambda) .$$

b. Gunakan ekspansi

$$e^{t/\sqrt{\lambda}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(t/\sqrt{\lambda}\right)^i}{i!}$$

untuk menunjukkan bahwa

$$\lim_{\lambda \to \infty} m_Y(t) = e^{t^2/2}.$$

6. Diketahui bahwa variabel random Y_n mempunyai distribusi binomial dengan parameter n dan p. Misalkan bahwa n membesar dan p mengecil dengan np cenderung tetap pada $\lambda = np$. Buktikan bahwa distribusi Y_n konvergen ke distribusi Poisson dengan parameter λ.
7. Tunjukkan bahwa variansi dari Y/n dengan Y mempunyai distribusi binomial dengan parameter n dan p mempunyai nilai maksimum pada p = 0,5 untuk n tetap.
8. Sebuah dadu jujur dilempar dengan saling bebas sebanyak 1200 kali. Tentukan pendekatan banyaknya angka satu yang diperoleh yaitu X sehingga $180 \leq X \leq 200$.
9. Misalkan X_j untuk j = 1, 2, ..., 100 merupakan variabel random yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi binomial dengan parameter 1 dan p. Tentukan nilai eksak dan nilai pendekatan dari probabilitas .
10. Dalam permainan, anda dapat menang atau kalah Rp 100.000,00 masing-masing dengan probabilitas ½. Jika anda bermain terus permainan tersebut sebanyak 1000 kali, berapakah probabilitas bahwa anda beruntung yaitu total kemenangan anda paling sedikit 1 juta rupiah.
11. Suatu maskapai penerbangan menemukan bahwa 5 % dari calon penumpang yang memesan tiket akan membatalkan penerbangannya. Jika maskapai penerbangan tersebut menjual 160 tiket dengan hanya memiliki 155 tempat duduk, berapakah probabilitasnya tempat duduk akan tersedia untuk setiap pemegang tiket dan berencana untuk terbang ?

12. Tunjukkan bahwa variansi dari Y/n dengan Y mempunyai distribusi binomial dengan parameter n dan p akan mempunyai nilai maksimum untuk $p = 0{,}5$ dengan n tetap.
13. Sampel random ukuran n dipilih dari populasi dan Y menyatakan banyaknya barang yang rusak dalam sampel diamati. Tentukan ukuran sampel n yang menjamin bahwa Y/n akan berada di dalam 0,1 dari proporsi yang rusak yang sebenarnya dengan probabilitas 0,95.
14. Seperti perbedaan antara dua mean sampel akan cenderung mempunyai distribusi normal untuk ukuran sampel besar, demikian juga perbedaan antara dua proporsi sampel yaitu jika Y_1 dan Y_2 masing-masing menyatakan variabel random saling bebas dan berdistribusi binomial dengan parameter (n_1, p_1) dan (n_2, p_2) maka akan mendekati distribusi normal untuk ukuran sampel n besar.
    a. Tentukan $E\left(\frac{Y_1}{n_1} - \frac{Y_2}{n_2}\right)$.
    b. Tentukan $V\left(\frac{Y_1}{n_1} - \frac{Y_2}{n_2}\right)$.
15. Lima ratus *ball bearing* mempunyai mean berat 5,02 ons dan simpangan baku 0,30 ons. Tentukan probabilitas bahwa sampel dari 100 *ball bearing* yang dipilih dari kelompok ini akan mempunyai berat gabungan :
    a. antara 496 dan 500 ons.
    b. lebih dari 510 ons.

*****

BAB XI
PENUTUP

Pengantar teori probabilitas yang telah dibahas dalam buku ini, memberikan dasar-dasar teori probabilitas. Dalam teori probabilitas, teorema diberikan dengan menggunakan bukti-bukti. Dalam buku ini, sifat-sifat dan teorema diberikan tanpa bukti. Pengantar teori probabilitas sangatlah penting dalam memberikan dasar pada Statistika Dasar, Statistika Lanjut dan Statistika Matematika. Di samping itu, juga memberikan dasar-dasar dalam pembelajaran tentang pemodelan probabilistik, pemodelan stokastik dan studi simulasi probabilistik.

Pembelajaran teori probabilitas kini dan mendatang akan lebih menarik jika kita menggunakan bantuan paket program komputer (misalnya **R** atau **Matlab**) dalam memberikan gambaran bagaimana suatu percobaan probabilitas dilakukan dan hasil-hasilnya diolah dalam ukuran sampel yang berhingga. Apabila ukuran sampel dibuat membesar atau menuju tak hingga maka hasil itu akan seperti yang kita harapkan yaitu sesuai dengan teorinya. Dengan demikian, hal itu akan menjadi lebih menarik dan mudah dipahami. Hal itu akan banyak dipelajari pada studi simulasi probabilistik atau simulasi Monte Carlo (sebagai contoh lihat Ross, 2012). Di samping itu, berbagai macam distribusi yang dipelajari baik distribusi probabilitas diskrit maupun distribusi probabilitas kontinu akan memberikan dasar yang kuat dalam mempelajari pemodelan probabilistik (sebagai contoh lihat Ross, 2014 dan Asmussen, 2003), rantai Markov dan pemodelan stokastik. Aplikasi teori probabilitas banyak sekali ditemui dan masih akan terus berkembang dalam dunia yang tidak bersifat deterministik namun lebih bersifat probabilistik atau mengandung kebolehjadian.

*****

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asmussen, S., 2003, Applied Probability and Queues, Sringer-Verlag, New York Inc, New York.

[2] Bain, L. J dan M. Engelhardt, 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, Duxbury, Pasific Grove.

[3] Devore, J. L. dan K. N. Berk, 2012, *Modern Mathematical Statistics with Applications 2nd ed.*, Spinger, Dordrecht.

[4] Faires, J. D, 2007, *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika* (Terjemahan), Pakar Raya, Bandung.

[5] Grossman, S. I dan J. E. Turner, 1974, *Mathematics for the Biological Science*, Macmillan Publishing Co. Inc, New York.

[6] Hermanto, E., 2005, *Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika Tahun Pelajaran 2005/2006* , SMAN 5 Bengkulu, Bengkulu.

[7] Hermanto, E., 2011, *Diktat Pembinaan Olimpiade Matematika*, SMAN 5 Bengkulu, Bengkulu.

[8] Mendenhall, W. dan R. J. Beaver, 1991, *Introduction to Probability and Statistics*, PWS-Kent Pub. Co. , Boston.

[9] Ramachandran, K. M., C. P. Tsokos, 2009, *Mathematical Statistics with Applications*, Elsevier, Amsterdam.

[10] Ross, S. M., 2013, *Simulation*, Academic Press, San Diego.

[11] Ross, S. M., 2014, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, San Diego.

[12] Roussas, 1997, *A Course in Mathematical Statistics*, Academic Press, San Diego.

[13] Spiegel, M. R, J. Schiller, R. A. Srinivasan, 2000, *Probabilitas dan Statistik Edisi Kedua* (Terjemahan), Penerbit Erlangga, Jakarta.

[14] Wackerly, D. D, W. Mendenhall III, R. L. Schaeffer, 2008, *Mathematical Statistics with Application*, Thomson Brooks/Cole, Duxbury.

[15] Walpole, R. E., R. H. Meyers, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, Pearson Education, London.

*****