Assignment 1

קורס: מבני נתונים

שם : אמיר אבו אלהיגא   ת"ז: 213034655

שם : מוחמד סואלחה   ת"ז : 207525510

שאלה 1-היררכיית סדרי גודל

טבלת מיון לפי סדר גודל:

מיון לפי סדר גודל	פונקציות	
$\Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$f_{15}(n) = \frac{1}{3n^2}$	1
$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$f_6(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$	2
$\Theta(1)$	$f_1(n) = 2022 \quad , f_8(n) = 2^{64}$	3
$\Theta(log(n))$	$f_2(n) = log(n^8) \ , f_{12}(n) = log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$	4
$\Theta(n)$	$f_{11}(n) = log_2(2^n n^2) \ , f_{14}(n) = \frac{2n}{7}$	5
$\Theta(n^2)$	$f_7(n) = 6^{log_{\sqrt{6}} n}$	6
$\Theta(n^3)$	$f_4(n) = 3n^3 + 2log(n) + 1$	7
$\Theta(2^{\sqrt{n}})$	$f_3(n) = 2^{\sqrt{n}}$	8
$\Theta(4^n)$	$f_{13}(n) = 4^n$	9
$\Theta(n^n)$	$f_{10}(n) = n^n$	10
$\Theta\left(4^{2^n}\right)$	$f_5(n) = 4^{2^n}$	11
$\Theta(2^{4^n})$	$f_9(n) = 2^{4^n}$	12

שלב 1:

נציין את סדר הגודל של כל פונקציה (קרי, מיהי **g(n)**, עבורה מתקיים $\boldsymbol{f_i(n) = \Theta(g(n))}$ ונוכיח זאת לפי ההגדרה.

נוכיח לפי ההגדרה שקיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2 כך שעבור כל $n_0 \leq n$ מתקיים :

$$0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$$f_1(n) = 2022 = \Theta(1)$$

$$0 \leq c_1 \cdot 1 \leq 2022 \leq c_2 \cdot 1$$

ניקח $c_1 = 2022\,, c_2 = 2022\ \ , n_0 = 1$

$$f_2(n) = \log(n^8) = \Theta(\log(n))$$

$$0 \leq c_1 \cdot lo\,g(n) \leq \log(n^8) \leq c_2 \cdot \log(n)$$

$$\bigstar\ \log(a^b) = b \cdot log(a))$$

$$\log(n^8) = 8 \cdot \log(n)$$

$$\Rightarrow\ \ 0 \leq c_1 \cdot lo\,g(n) \leq 8 \cdot \log(n) \leq c_2 \cdot \log(n)$$

נחלק את כל האגפים ב log(n)

$$\Rightarrow\ \ 0 \leq c_1 \leq 8 \leq c_2$$

ניקח $c_1 = 8\,, c_2 = 8\ \ , n_0 = 1$

$$f_3(n) = 2^{\sqrt{n}} = \Theta(2^{\sqrt{n}})$$

$$0 \leq c_1 \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq 2^{\sqrt{n}} \leq c_2 \cdot 2^{\sqrt{n}}$$

נחלק את כל האגפים ב $2^{\sqrt{n}}$ ונקבל

$$\Rightarrow\ \ 0 \leq c_1 \leq 1 \leq c_2$$

ניקח $c_1 = 1\,, c_2 = 1\ \ , n_0 = 1$

$$f_4(n) = 3n^3 + 2\log(n) + 1 = \Theta(n^3)$$

$$0 \leq c_1 \cdot n^3 \leq 3n^3 + 2\log(n) + 1 \leq c_2 \cdot n^3$$

נחלק את כל האגפים ב n^3 ונקבל

$$\Rightarrow\ \ 0 \leq c_1 \leq 3 + \frac{2\log(n)}{n^3} + \frac{1}{3} \leq c_2$$

ניקח $c_1 = 3\,, c_2 = 4\ \ , n_0 = 1$

$$f_5(n) = 4^{2^n} = \Theta(4^{2^n})$$

$$0 \le c_1 \cdot 4^{2^n} \le 4^{2^n} \le c_2 \cdot 4^{2^n}$$

נחלק את כל האגפים ב 4^{2^n} ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1, c_2 = 1 \ , n_0 = 1$

$$f_6(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$0 \le c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

נחלק את כל האגפים ב $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1, c_2 = 1 \ , n_0 = 1$

$$f_7(n) = 6^{\log_{\sqrt{6}} n} = \Theta(n^2)$$

$$0 \le c_1 \cdot n^2 \le 6^{\log_{\sqrt{6}} n} \le c_2 \cdot n^2$$

$$\bigstar \ a^{\log_a b} = b$$

$$6^{\log_{\sqrt{6}} n} = \sqrt{6}^{\log_{\sqrt{6}} n} \cdot \sqrt{6}^{\log_{\sqrt{6}} n} = n \cdot n = n^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \cdot n^2 \le n^2 \le c_2 \cdot n^2$$

נחלק את כל האגפים ב n^2 ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1, c_2 = 1 \ , n_0 = 1$

$$f_8(n) = 2^{64} = \Theta(1)$$

$$0 \le c_1 \cdot 1 \le 2^{64} \le c_2 \cdot 1$$

ניקח $c_1 = 2^{64}, c_2 = 2^{64} \ , n_0 = 1$

$$f_9(n) = 2^{4^n} = \Theta(2^{4^n})$$

$$0 \le c_1 \cdot 2^{4^n} \le 2^{4^n} \le c_2 \cdot 2^{4^n}$$

נחלק את כל האגפים ב 2^{4^n} ונקבל

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1 , c_2 = 1 \; , n_0 = 1$

$$f_{10}(n) = n^n = \Theta(n^n)$$

$$0 \le c_1 \cdot n^n \le n^n \le c_2 \cdot n^n$$

נחלק את כל האגפים ב n^n ונקבל

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1 , c_2 = 1 \; , n_0 = 1$

$$f_{11}(n) = \log(2^n n^2) = \Theta(n)$$

$$0 \le c_1 \cdot n \le \log(2^n n^2) \le c_2 \cdot n$$

$$\bigstar \; \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\bigstar \; \log(a^b) = b \cdot log(a))$$

$$\log(2^n n^2) = \log(2^n) + \log(n^2) = n + 2\log(n)$$

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \cdot n \le n + 2\log(n) \le c_2 \cdot n$$

נחלק את כל האגפים ב n ונקבל

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \le 1 + \frac{2\log(n)}{n} \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1 , c_2 = 3 \; , n_0 = 1$

$$f_{12}(n) = \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = \Theta(\log(n))$$

$$0 \le c_1 \cdot \log(n) \le \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \le c_2 \cdot \log(n)$$

$$\bigstar \; \log(a^b) = b \cdot log(a)$$

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \cdot \log(n) \le \frac{1}{2} \cdot \log(n) \le c_2 \cdot \log(n)$$

נחלק את כל האגפים ב $\log(n)$ ונקבל

$$\Rightarrow \; 0 \le c_1 \le \frac{1}{2} \le c_2$$

ניקח $c_1 = \frac{1}{2} , c_2 = \frac{1}{2} \; , n_0 = 1$

$$f_{13}(n) = 4^n = \Theta(4^n)$$

$$0 \le c_1 \cdot 4^n \le 4^n \le c_2 \cdot 4^n$$

נחלק את כל האגפים ב 4^nונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le 1 \le c_2$$

ניקח $c_1 = 1\ , c_2 = 1\ \ , n_0 = 1$

$$f_{14}(n) = \frac{2n}{7} = \Theta(n)$$

$$0 \le c_1 \cdot n \le \frac{2n}{7} \le c_2 \cdot n$$

נחלק את כל האגפים ב n נקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le \frac{2}{7} \le c_2$$

ניקח $c_1 = \frac{2}{7}\ , c_2 = \frac{2}{7}\ \ , n_0 = 1$

$$f_{15}(n) = \frac{1}{3n^2} = \ \Theta(\frac{1}{n^2})$$

$$0 \le c_1 \cdot \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{3n^2} \le c_2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

נחלק את כל האגפים ב $\frac{1}{n^2}$ נקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le \frac{1}{3} \le c_2$$

ניקח $c_1 = \frac{1}{3}\ , c_2 = \frac{1}{3}\ \ , n_0 = 1$

שלב 2:

נציין אילו פונקציות מקיימות $f_i(n) = \Theta\big(f_k(n)\big)$ ונוכיח זאת לפי ההגדרה
כלומר לכל שתי פונקציות באותה שורה בטבלה נוכיח כיוון אחד $f_i(n) = \Theta\big(f_k(n)\big)$
לפי ההגדרה שקיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2 כך שעבור כל $n_0 \le n$ מתקיים :
$0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$ ואז מתכונת הסימטריות נקבל את הכיוון השני
$f_k(n) = \Theta\big(f_i(n)\big)$

שורה (3) בטבלה :

נוכיח את $f_1(n) = 2022 = \Theta\big(f_8(n)\big) = 2^{64}$ לפי ההגדרה

$$0 \le c_1 \cdot 2^{64} \le 2022 \le c_2 \cdot 2^{64}$$

נחלק את כל האגפים ב 2^{64} נקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le \frac{2022}{2^{64}} \le c_2$$

ניקח $c_1 = \frac{2022}{2^{64}}, c_2 = \frac{2022}{2^{64}}, n_0 = 1$

ומתכונת הסימטריות נקבל ש $f_8(n) = 2^{64} = \Theta(f_1(n)) = 2022$

שורה (4) בטבלה :

נוכיח את $f_{12}(n) = log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = \Theta(f_2(n)) = log(n^8)$ לפי ההגדרה

$$0 \le c1 \cdot log(n^8) \le log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \le c2 \cdot log(n^8)$$

★ $\log(a^b) = b \cdot log(a)$

$$\Rightarrow \quad 0 \le c1 \cdot 8log(n) \le \frac{1}{2}log(n) \le c2 \cdot 8log(n)$$

נחלק את כל האגפים ב $8log(n)$ נקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c_1 \le \frac{1}{16} \le c_2$$

ניקח $c_1 = \frac{1}{16}, c_2 = \frac{1}{16}, n_0 = 1$

ומתכונת הסימטריות נקבל $f_2(n) = log(n^8) = \Theta(f_{12}(n)) = log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

שורה (5) בטבלה :

נוכיח את $f_{14}(n) = \frac{2n}{7} = \Theta(f_{11}(n)) = log_2(2^n n^2)$ לפי ההגדרה

$$0 \le c1 \cdot log_2(2^n n^2) \le \frac{2n}{7} \le c2 \cdot log_2(2^n n^2)$$

★ $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

★ $\log(a^b) = b \cdot log(a))$

$$log_2(2^n n^2) = log_2(2^n) + log_2(n^2)$$

$$log_2(2^n n^2) = n \cdot log_2(2) + 2 \cdot log_2(n)$$

$$log_2(2^n n^2) = n + 2 \cdot log_2(n)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le c1 \cdot (n + 2 \cdot log_2(n)) \le \frac{2n}{7} \le c2 \cdot (n + 2 \cdot log_2(n))$$

נחלק את כל האגפים ב $(n + 2 \cdot log_2(n))$ נקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le c1 \le \frac{2n}{7(n + 2 \cdot log_2(n))} \le c2$$

ניקח $c_1 = \frac{1}{49}, c_2 = 1, n_0 = 1$

ומתכונת הסימטריות נקבל $f_{11}(n) = log_2(2^n n^2) = \Theta(f_{14}(n)) = \frac{2n}{7}$

שלב 3 :

נוכיח לפי ההגדרה את הסדר של הפונקציות בטבלה (כלומר שכל שורה מהווה חסם עליון לשורה שלפניה) .

נסמן ב $g_j(n)$ את סדר הגודל של השורה j בטבלה ונוכיח ש $g_j(n)$ של כל שורה j חסומה מלמעלה על ידי $g_{j+1}(n)$ פונקציית סדר הגודל של השורה שמתחת ל j בטבלה

למה זה מספיק ?

זה מספיק כי אם נוכיח ש $g_j(n) = O\left(g_{j+1}(n)\right)$ וידוע לנו משלב הראשון שכל פונקציה f בשורה j מקיימת $f_j(n) = \Theta\left(g_j(n)\right)$ ולכן מתקיים $f_j(n) = O\left(g_j(n)\right)$ אז מתכונת הטרנזיטיביות נקבל $f_j(n) = O\left(g_{j+1}(n)\right)$

אם $f_j(n) = O\left(g_{j+1}(n)\right)$ וגם ידוע ש $f_{j+1}(n) = \Theta\left(g_{j+1}(n)\right)$ אז נקבל

$$f_j(n) = O\left(f_{j+1}(n)\right)$$

כדי להוכיח נשתמש בהגדרה הבאה : קיימים קבועים חיוביים c, n_0 כך שעבור כל $n_0 \le n$ מתקיים $f_i(n) \le c \cdot f_k(n)$

שורה 1 – שורה 2 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 1 היא $g_1(n) = \frac{1}{n^2}$

פונקציית סדר הגודל של שורה 2 היא $g_1(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

נוכיח את $g_1(n) = \frac{1}{n^2} = O\left(g_2(n)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ לפי ההגדרה

$$0 \le \frac{1}{n^2} \le c \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

נחלק את כל האגפים ב $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{n^{1.5}} \le c$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 1$

שורה 2 – שורה 3 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 2 היא $g_2(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

פונקציית סדר הגודל של שורה 3 היא $g_3(n) = 1$

נוכיח את $g_2(n) = \frac{1}{n^2} = O\left(g_3(n)\right) = 1$ לפי ההגדרה

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le c \cdot 1$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 1$

שורה 3 – שורה 4 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 3 היא $g_3(n) = 1$

פונקציית סדר הגודל של שורה 4 היא $g_4(n) = log(n)$

נוכיח את $g_3(n) = 1 = O(g_4(n)) = log(n)$ לפי ההגדרה

$$0 \le 1 \le c \cdot log(n)$$

נחלק את כל האגפים ב $log(n)$ ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{log(n)} \le c$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 2$

שורה 4 – שורה 5 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 4 היא $g_4(n) = log(n)$

פונקציית סדר הגודל של שורה 5 היא $g_5(n) = n$

נוכיח את $g_4(n) = log(n) = O(g_5(n)) = n$ לפי ההגדרה

$$0 \le log(n) \le c \cdot n$$

נחלק את כל האגפים ב n ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{log(n)}{n} \le c$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 1$

שורה 5 – שורה 6 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 5 היא $g_5(n) = n$

פונקציית סדר הגודל של שורה 6 היא $g_6(n) = n^2$

נוכיח את $g_5(n) = n = O(g_6(n)) = n^2$ לפי ההגדרה

$$0 \le n \le c \cdot n^2$$

נחלק את כל האגפים ב n^2 ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{n} \le c$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 1$

שורה 6 – שורה 7 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 6 היא $g_6(n) = n^2$

פונקציית סדר הגודל של שורה 7 היא $g_7(n) = n^3$

נוכיח את $g_6(n) = n^2 = O(g_7(n)) = n^3$ לפי ההגדרה

$$0 \le n^2 \le c \cdot n^3$$

נחלק את כל האגפים ב n^3 ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{1}{n} \le c$$

ניקח $c = 1 , n_0 = 1$

שורה 7 – שורה 8 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 7 היא $g_7(n) = n^3$

פונקציית סדר הגודל של שורה 8 היא $g_8(n) = 2^{\sqrt{n}}$

נוכיח את $g_7(n) = n^3 = O\big(g_8(n)\big) = 2^{\sqrt{n}}$ לפי ההגדרה

$0 \le n^3 \le c \cdot 2^{\sqrt{n}}$

זה מתקיים עבור n≥900 לכן

ניקח $c = 1\,, n_0 = 900$

שורה 8 – שורה 9 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 8 היא $g_8(n) = 2^{\sqrt{n}}$

פונקציית סדר הגודל של שורה 9 היא $g_9(n) = 4^n$

נוכיח את $g_8(n) = 2^{\sqrt{n}} = O\big(g_9(n)\big) = 4^n$ לפי ההגדרה

$0 \le 2^{\sqrt{n}} \le c \cdot 4^n = c \cdot 2^{2n}$

נחלק את כל האגפים ב 2^{2n} ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{2n}} \le c$$

ניקח $c = 1\,, n_0 = 1$

שורה 9 – שורה 10 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 9 היא $g_9(n) = 4^n$

פונקציית סדר הגודל של שורה 10 היא $g_{10}(n) = n^n$

נוכיח את $g_9(n) = 4^n = O\big(g_{10}(n)\big) = n^n$ לפי ההגדרה

$0 \le 4^n \le c \cdot n^n$

נחלק את כל האגפים ב n^n ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{4^n}{n^n} = \left(\frac{4}{n}\right)^n \le c$$

ניקח $c = 1\,, n_0 = 4$

שורה 10 – שורה 11 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 10 היא $g_{10}(n) = n^n$

פונקציית סדר הגודל של שורה 11 היא $g_{11}(n) = 4^{2^n}$

נוכיח את $g_{10}(n) = n^n = O\big(g_{11}(n)\big) = 4^{2^n}$ לפי ההגדרה

$0 \le n^n \le c \cdot 4^{2^n}$

נציב $c = 1$ ונפעיל log על שני האגפים ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \le n \cdot \log_2(n) \le 2^n \cdot \log_2(4)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le n \cdot \log_2(n) \le 2 \cdot 2^n$$

וזה מתקיים עבור כל n לכן

ניקח $c = 1\,, n_0 = 1$

שורה11 – שורה12 :

פונקציית סדר הגודל של שורה 10 היא $g_{11}(n) = 4^{2^n}$

פונקציית סדר הגודל של שורה 11 היא $g_{12}(n) = 2^{4^n}$

נוכיח את $g_{11}(n) = 4^{2^n} = O\left(g_{12}(n)\right) = 2^{4^n}$ לפי ההגדרה

$$0 \leq 4^{2^n} \leq c \cdot 2^{4^n}$$

$$\bigstar\ 4^{2^{\mathrm{n}}} = (2^2)^{2^{\mathrm{n}}} = 2^{2 \cdot 2^{\mathrm{n}}} = 2^{2^{\mathrm{n}+1}}$$

$$\bigstar\ 2^{4^{\mathrm{n}}} = 2^{\left(2^2\right)^{\mathrm{n}}} = 2^{2^{2\mathrm{n}}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \leq 2^{2^{\mathrm{n}+1}} \leq 2^{2^{2\mathrm{n}}}$$

זה מתקיים עבור כל n לכן

ניקח $c = 1\,, n_0 = 1$

שאלה 2 – תכונות של חסמים אסימפטוטיים

א . <u>טרנזיטיביות:</u>

נניח : $g(n) = \Theta(h(n))$ וגם $f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$

צ"ל : $f(n) = \Theta\left(\mathrm{h(n)}\right)$

פתרון :

$$f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

לכן קיימים b_1, b_2, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \leq b_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq b_2 \cdot g(n)$ לכל $n_0 \leq n$

$$g(n) = \Theta\left(h(n)\right)$$

לכן קיימים a_1, a_2, n_1 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \leq a_1 \cdot h(n) \leq g(n) \leq a_2 \cdot h(n)$ לכל $n_1 \leq n$

נוכיח שקיימים c_1, c_2, n_2 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \leq c_1 \cdot h(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot h(n)$ לכל $n_2 \leq n$

נוכיח כל צד לבד נתחיל בצד השמאלי

צ"ל : $0 \leq c_1 \cdot h(n) \leq f(n)$

לפי ההנחה $a_1 \cdot h(n) \leq g(n)$

נכפול את שני האגפים ב b_1 ונקבל

$$\Rightarrow\ a_1 \cdot b_1 \cdot h(n) \leq b_1 \cdot g(n) \leq f(n)$$

לכן עבור האי שוויון מתקיים

$c_1 = a_1 \cdot b_1$ ואז

$$\Rightarrow\ c_1 \cdot h(n) \leq f(n)$$

עכשיו נוכיח את הצד הימיני

צ״ל : $0 \leq f(n) \leq c2 \cdot h(n)$

לפי ההנחה $g(n) \leq a_2 \cdot h(n)$

נכפול את שני האגפים ב b_2 ונקבל

$$\Rightarrow \quad f(n) \leq b_2 \cdot g(n) \leq b_2 \cdot a_2 \cdot h(n)$$

לכן עבור האי שוויון מתקיים

ואז $c_2 = a_2 \cdot b_2$

$$\Rightarrow \quad f(n) \leq c2 \cdot h(n)$$

הראינו שקיימים קבועים $c_1 = a_1 \cdot b_1$ וגם $c_2 = a_2 \cdot b_2$ וגם

$n_2 = \max\{n_0, n_1\}$

עבורם מתקיים

$0 \leq c_1 \cdot h(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot h(n)$ לכל $n_2 \leq n$

לכן $f(n) = \Theta(h(n))$

ב . <u>רפלקסיביות:</u>

צ״ל : $f(n) = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big),\ \mathrm{f(n)} = \Omega\big(\mathrm{f(n)}\big),\ \mathrm{f(n)} = O(\mathrm{f(n)})$

פתרון : נוכיח את $f(n) = \Theta(f(n)$

נראה שקיימים c_1, c_2, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$$0 \leq c_1 \cdot f(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot f(n)$$

נחלק את שני האגפים ב $f(n)$ ונקבל

$$\Rightarrow \quad 0 \leq c_1 \leq 1 \leq c_2$$

ניקח $n_0 = 1$ וגם c_1, c_2 כלשהם שמקיימים את האי שוויון ואז הוכחנו שכל פונקציה נחסמת באופן הדוק על ידי עצמה.

גם אפשר להוכיח חסם עליון עם הקבוע c_2 וגם חסם תחתון עם הקבוע c_1 בכך הראינו ש $f(n) = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big), \mathrm{f(n)} = \Omega\big(\mathrm{f(n)}\big), \mathrm{f(n)} = O\big(\mathrm{f(n)}\big)$

ג . <u>סימטריות:</u>

צ״ל : $\mathrm{f(n)} = \Theta(\mathrm{g(n)})$ אם״ם $\mathrm{g(n)} = \Theta(\mathrm{f(n)})$

<u>כיוון ראשון:</u>

נניח: $\mathrm{f(n)} = \Theta\big(\mathrm{g(n)}\big)$

צ״ל : $\mathrm{g(n)} = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big)$

פתרון : $\mathrm{f(n)} = \Theta\big(\mathrm{g(n)}\big)$

אז קיימים r_1, r_2, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \leq r_1 \cdot \mathrm{g(n)} \leq \mathrm{f(n)} \leq r_2 \cdot \mathrm{g(n)}$ לכל $n_0 \leq \mathrm{n}$

נתבונן בצד ימין של אי השוויון

$\mathrm{f(n)} \le r_2 \cdot \mathrm{g(n)}$

נחלק את שני האגפים ב r_2 ונקבל

$\Rightarrow\ 0 \le \frac{1}{r_2} \cdot f(n) \le \mathrm{g(n)}$

עכשיו נתבונן בצד שמאל של אי השוויון

$0 \le r_1 \cdot \mathrm{g(n)} \le \mathrm{f(n)}$

נחלק את שני האגפים ב r_1 ונקבל

$$\Rightarrow\ 0 \le \mathrm{g(n)} \le \frac{1}{r_1} \cdot f(n)$$

נחבר את שתי המשוואות שקיבלנו

$\Rightarrow\ 0 \le \frac{1}{r_2} \cdot f(n) \le \mathrm{g(n)}\ \le \frac{1}{r_1} \cdot f(n)$

נסמן $c_2 = \frac{1}{r_2}\ ,\ \ c_1 = \frac{1}{r_1}$

$\Rightarrow\ 0 \le c_2\ \cdot f(n) \le \mathrm{g(n)}\ \le c_1 \cdot f(n)$

אז עבור הקבועים החיובים c_1, c_2, n_0 מתקיים

האי שוויון לכל $n_0 \le \mathrm{n}$ לכן $\mathrm{g(n)} = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big)$

כיוון שני:

נניח: $\mathrm{g(n)} = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big)$

צ״ל : $\mathrm{f(n)} = \Theta\big(\mathrm{g(n)}\big)$

פתרון : $\mathrm{g(n)} = \Theta\big(\mathrm{f(n)}\big)$

אז קיימים r_1, r_2, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \le r_1 \cdot \mathrm{f(n)} \le \mathrm{g(n)} \le r_2 \cdot \mathrm{f(n)}$ לכל $n_0 \le \mathrm{n}$

נתבונן בצד ימין של אי השוויון

$\mathrm{g(n)} \le r_2 \cdot \mathrm{f(n)}$

נחלק את שני האגפים ב r_2 ונקבל

$\Rightarrow\ 0 \le \frac{1}{r_2} \cdot \mathrm{g}(n) \le \mathrm{f(n)}$

עכשיו נתבונן בצד שמאל של אי השוויון

$0 \le r_1 \cdot \mathrm{f(n)} \le \mathrm{g(n)}$

נחלק את שני האגפים ב r_1 ונקבל

$$\Rightarrow\ 0 \le \mathrm{f(n)} \le \frac{1}{r_1} \cdot \mathrm{g}(n)$$

נחבר את שתי המשוואות שקיבלנו

$$\Rightarrow\ 0 \le \frac{1}{r_2}\cdot g(n) \le f(n) \le \frac{1}{r_1}\cdot g(n)$$

נסמן $c_2 = \frac{1}{r_2},\ \ c_1 = \frac{1}{r_1}$

$$\Rightarrow\ 0 \le c_2 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 \cdot g(n)$$

אז עבור הקבועים החיוביים c_1, c_2, n_0 מתקיים

האי שוויון לכל $n_0 \le n$ לכן $f(n) = \Theta(g(n))$

ד . **אנטי-סימטריות:**

צ"ל : $g(n) = \Omega(f(n))$ אמ"ם $f(n) = O(g(n))$

כיוון ראשון:

נניח: $f(n) = O(g(n))$

צ"ל : $g(n) = \Omega(f(n))$

פתרון : $f(n) = O(g(n))$

אז קיימים a_1, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \le f(n) \le a_1 \cdot g(n)$ לכל $n_0 \le n$

נחלק את שני האגפים ב a_1 ונקבל

$$\Rightarrow\ 0 \le \frac{f(n)}{a_1} \le g(n)$$

נסמן $c_1 = \frac{1}{a_1}$

ובך הראינו שקיימים קבועים חיוביים a_1, n_0 המקיימים את ההגדרה

$0 \le c_1 \cdot f(n) \le g(n)$ לכל $n_0 \le n$

לכן $g(n) = \Omega(f(n))$

כיוון שני:

נניח: $g(n) = \Omega(f(n))$

צ"ל : $f(n) = O(g(n))$

פתרון : $g(n) = \Omega(f(n))$

אז קיימים a_1, n_0 קבועים חיוביים כך ש מתקיים

$0 \le a_1 \cdot f(n) \le g(n)$ לכל $n_0 \le n$

נחלק את שני האגפים ב a_1 ונקבל

$$\Rightarrow\ 0 \le f(n) \le \frac{g(n)}{a_1}$$

נסמן $c_1 = \frac{1}{a_1}$

ובך הראינו שקיימים קבועים חיוביים a_1, n_0 המקיימים את ההגדרה

$0 \le f(n) \le c_1 \cdot g(n)$ לכל $n_0 \le n$

לכן $f(n) = O(g(n))$

ה . $p_1(n), p_2(n)$ פולינומים מחזקה n_1, n_2 בהתאמה, צריך למצוא פונקציה g(n) כך שמתקיים $p_1(p_2(n)) = \Theta(g(n))$

$$p_1(n) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i\, n^i$$

$$p_2(n) = \sum_{i=0}^{n_2} c_i\, n^i$$

$$p_1(p_2(n)) = p_1\left(\sum_{i=0}^{n_2} c_i\, n^i\right) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{n_2} c_i\, n^i\right)^k =$$

$$= a_0 + a_1(c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 \ldots\ldots + c_{n2} \cdot n^{n_2}) + \cdots + a_{n_1}(c_0 + c_1 \cdot n + c_2 \cdot n^2 \ldots\ldots + c_{n2} \cdot n^{n2})^{n_1}$$

כפי שרואים החזקה הכי גדולה היא $a_{n1} c_{n_2} n^{n_2 \cdot n_1}$ אזי $g(n) = n^{n_1 \cdot n_2}$
$a_{n_1} c_{n_2}$ מקדם חיובי לכן לא משפיע:

$$p_1(p_2(n)) = p_1\left(\sum_{i=0}^{n_2} c_i\, n^i\right) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{n_2} c_i\, n^i\right)^k = \Theta(g(n) = n^{n_1 \cdot n_2})$$

שאלה 3 – פתרון נוסחאות נסיגה

א. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

פתרון : נתון ש-T(n) קבועה עבור n קבוע אז נשתמש בשיטת האיטרציה עד שנגיע לתנאי העצירה T(2) = S כך ש S קבוע כלשהו

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 =$$
$$= \left(T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + 1\right) + 1 = \left(T\left(n^{\frac{1}{2^2}}\right) + 1\right) + 1 =$$
$$= \left(T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + 1\right) + 1 = \left(T\left(n^{\frac{1}{2^3}}\right) + 1\right) + 1 =$$
$$= *** =$$
$$T\left(n^{\frac{1}{2^k}}\right) + k$$

כדי למצוא את k נשווה בין $T\left(n^{\frac{1}{2^k}}\right) = T(2)$ ונקבל

$$n^{\frac{1}{2^k}} = 2$$

נפעיל log על שני האגפים ונקבל :

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \cdot \log(n) = \log(2)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \cdot \log(n) = 1$$

נכפול את שני האגפים ב 2^k ונקבל :

$$\Rightarrow \log(n) = 2^k$$

נפעיל log עוד פעם על שני האגפים ונקבל :

$$\log(\log(n)) = k \cdot \log(2)$$
$$\log(\log(n)) = k$$

עכשיו נציב את k שמצאנו בנוסחה הרקורסיבית :

$$T(n)=T\left(n^{\frac{1}{2^k}}\right) + k = T\left(n^{\frac{1}{2^{\log(\log(n))}}}\right) + \log(\log(n)) =$$
$$T(2) + \log(\log(n)) = S + \log(\log(n)) =$$
$$\Theta(1) + \log(\log(n))$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(\log(\log(n)))$$

עכשיו נוכיח $\mathrm{T(n)} = \Theta(\log(\log(\mathrm{n})))$ באמצעות אינדוקציה :
נוכיח לפי ההגדרה שקיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2 כך שעבור כל $n_0 \leq n$ מתקיים

$$0 \leq c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) \leq \mathrm{T(n)} \leq c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{n}))$$

<u>מקרה בסיס :</u> עבור $\sqrt{n} = 2$ כלומר $n = 4$
נציב $n = 4$ ב

$$0 \leq c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) \leq \mathrm{T(n)} \leq c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{n}))$$
$$\Rightarrow \ 0 \leq c_1 \cdot \log(\log(4)) \leq \mathrm{T}(4) \leq c_2 \cdot \log(\log(4))$$
$$\Rightarrow \ 0 \leq c_1 \cdot 1 \leq \mathrm{S} \leq c_2 \cdot 1$$

ניקח קבועים חיוביים $\mathrm{S} \leq c_2$ וגם $0 \leq c_1 \leq \mathrm{S}$ ואז מקרה הבסיס מתקיים

<u>הנחת האינדוקציה :</u>
נניח שעבור כל m < n מתקיים :

$$0 \leq c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{m})) \leq \mathrm{T(m)} \leq c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{m}))$$

<u>צעד האינדוקציה :</u>
נוכיח שעבור n מתקיים :
כ$0 \leq c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) \leq \mathrm{T(n)} \leq c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{n}))$
נוכיח קודם את הצד השמאלי של אי השוויון :
כלומר צריך להוכיח ש $c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) \leq \mathrm{T(n)}$
ידוע ש $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$
לפי ההנחה אפשר לגיד ש $c_1 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) \leq \mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$
אם נוסיף 1 על שני האגפים נקבל : $c_1 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) + 1 \leq \mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$

נציב $T(n) = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$ ונקבל $c_1 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) + 1 \leq T(n)$

$$c_1 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) + 1 = c_1 \cdot \log\left(\frac{1}{2} \cdot \log(n)\right) + 1 =$$
$$c_1 \cdot \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(\log(n))\right) + 1 =$$
$$-c_1 + c_1 \cdot \log(\log(n)) + 1 \leq T(n)$$

כדי למצוא c_1 נשווה בין שני הביטויים הבאים :

$$c_1 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) = -c_1 + c_1 \cdot \log(\log(n)) + 1$$

$$\Rightarrow \ c_1 = 1$$

כלומר קיים קבוע חיובי $c_1 = 1$ שעבורו מתקיים $\mathrm{T(n)} = \Omega(\log(\log(\mathrm{n})))$

עכשיו נוכיח את הצד הימיני של אי השוויון:
כלומר צריך להוכיח ש $\mathrm{T(n)} \le c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{n}))$
ידוע ש $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$
לפי ההנחה אפשר לגיד ש $\mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \le c_2 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right)$
אם נוסיף 1 על שני האגפים נקבל : $\mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 \le c_2 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) + 1$

נציב $T(n) = T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1$ ונקבל $T(n) + 1 \le c_2 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right)$

$$T(n) \le c_2 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) + 1 = c_2 \cdot \log\left(\frac{1}{2} \cdot \log(n)\right) + 1 =$$
$$c_2 \cdot \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(\log(n))\right) + 1 =$$
$$-c_2 + c_2 \cdot \log(\log(n)) + 1$$

כדי למצוא c_2 נשווה בין שני הביטויים הבאים :
$$c_2 \cdot \log(\log(\mathrm{n})) = -c_2 + c_2 \cdot \log(\log(n)) + 1$$

$$\Rightarrow \; c_2 = 1$$

כלומר קיים קבוע חיובי $c_2 = 1$ שעבורו מתקיים $\mathrm{T(n)} = \mathrm{O}(\log(\log(\mathrm{n})))$

הוכחנו ש $\mathrm{T(n)} = \Omega(\log(\log(\mathrm{n})))$ וגם $\mathrm{T(n)} = \mathrm{O}(\log(\log(\mathrm{n})))$ אז מתקיים
$\mathrm{T(n)} = \Theta(\log(\log(\mathrm{n})))$

ב. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

נפתור לפי הכלל השני של שיטת מאסטר:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) = n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = \; n$$

$$f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) = \Theta(n)$$

לכן לפי הכלל השני של מאסטר מתקיים :

$$T(n) = \Theta(f(n) = n \cdot \log(n)) = \Theta(n \log(n))$$

ג. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log(n)$

נפתור לפי הכלל השלישי של שיטת מאסטר:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log(n)$$

$$a = 4, b = 2, f(n) = n^3 \log(n)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$$

עבור $\varepsilon = 1$ מתקיים

$$f(n) = n^3 \log(n) \in \Omega(n^{log_2 4+\varepsilon}) = \Omega(n^{log_2 5}) = \Omega(n^{2.321})$$

וגם עבור $\frac{1}{2} < c < 1$ מתקיים

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 \log\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{4}{8} n^3 \log\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} n^3 \cdot (\log(n) - \log(2)) =$$

$$\frac{1}{2} n^3 \cdot (\log(n) - 1) = \frac{1}{2} n^3 \cdot \log(n) - \frac{1}{2} n^3 \leq c \cdot n^3 \log(n)$$

לכל n גבוה מדי

לכן לפי הכלל השלישי של מאסטר:

$$T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n^3 \log(n))$$

ד. $T(n) = T\left(\frac{2n}{5}\right) + 1$

נפתור לפי הכלל השני של שיטת מאסטר:

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{5}\right) + 1$$

$$a = 1, b = \frac{5}{2}, f(n) = 1$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{5}{2}} 1} = 1$$

$$1 = f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{5}{2}} 1}\right) = \Theta(1)$$

לכן לפי הכלל השני של מאסטר מתקיים :

$$T(n) = \Theta(f(n)\cdot\log(n)) = \Theta(\log(n))$$

ה. $0 < c < 1\ ,\ T(n) = T(cn) + T(((1-c)n) + 1$

אם נניח בלי הגבלת הכלליות ש $0 < c \le \frac{1}{2}$ אז $\frac{1}{2} \le 1-c < 1$

לכן מתקיים ש $\log_{\frac{1}{c}} n \le \log_{\frac{1}{1-c}} n$ לכל n

נפתור לפי שיטת עץ הרקורסיה כך שהעץ מלא עבור $\log_{\frac{1}{c}} n$

הסכום של כל הרמות מהווה סדרה הנדסית עם מנה של 2 :

$$T(n) = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{\log_{\frac{1}{c}} n} = 2^{\log_{\frac{1}{c}} n} - 1$$

$$\bigstar\ a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$\Rightarrow\ T(n) = n^{\log_{\frac{1}{c}} 2} - 1$$

הנחנו ש $0 < c \le \frac{1}{2}$ אז מתקיים ש $0 < \log_{\frac{1}{c}} 2 \le 1$

אז ננחש ש $T(n) = \Theta(n)$

נוכיח את הניחוש שלנו לפי ההגדרה שקיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2 כך שעבור כל $n_0 \le n$ מתקיים :

$$0 \le c_1 \cdot n \le T(n) \le c_2 \cdot n$$

נוכיח זאת לפי אינדוקציה :

קודם נוכיח את הצד השמאלי של אי השוויון לפי אינדוקציה :

<u>בסיס האינדוקציה עבור n = 1 :</u>

אם נציב 1 ב $T(n)$ נקבל קבוע לפי הנתון, נסמן את הקבוע ב w אז נקבל

$$0 \le c_1 \cdot 1 \le T(1) = w$$

אז עבור כל $0 \le c_1 \le w$ בסיס האינדוקציה מתקיים

<u>הנחת האינדוקציה :</u>

עבור כל m < n מתקיים $0 \le c_1 \cdot m \le T(m)$

<u>צעד האינדוקציה :</u>

נוכיח שעבור n מתקיים $0 \le c_1 \cdot n \le T(n)$

נתון ש $0 < c < 1$ לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים

$0 \le c_1 \cdot cn \le T(cn)$ וגם $0 \le c_1 \cdot (1-c)n \le T((1-c)n)$

נחבר את שני האי שיוויונים ונקבל :

$$0 \le c_1 \cdot cn + c_1 \cdot (1-c)n \le T(cn) + T((1-c)n)$$

נוסיף 1 על שני האגפים ונקבל :

$$0 \le c_1 \cdot cn + c_1 \cdot (1-c)n + 1 \le T(cn) + T\big((1-c)n\big) + 1$$

$T(n) = T(cn) + T\big((1-c)n\big) + 1$ לכן

$$0 \le c_1 \cdot cn + c_1 \cdot (1-c)n + 1 \le T(n)$$

$$0 \le c_1 \cdot cn + c_1 \cdot (1-c)n + 1 = c_1cn + c_1n - c_1cn + 1 = c_1n + 1$$

אז נקבל ש $c_1n + 1 \le T(n)$

ידוע ש $c_1n < c_1n + 1$

לכן עבור כל $0 \le c_1$ מתקיים

$$0 \le c_1n \le c_1n + 1 \le T(n)$$

ואז מתקיים $T(n) = \Omega(n)$

עכשיו נוכיח את הצד הימיני של אי השוויון לפי אינדוקציה :

נוכיח שקיימים $c_2, \varepsilon > 0$ כך שמתקיים

$$0 \le T(n) \le c_2 \cdot n - \varepsilon$$

<u>בסיס האינדוקציה עבור n = 1 :</u>

אם נציב 1 ב $T(n)$ נקבל קבוע לפי הנתון, נסמן את הקבוע ב w אז נקבל

$$0 \le T(1) = w \le c_2 \cdot 1 - \varepsilon$$

אז עבור כל $0 \le w + \varepsilon \le c_2$ בסיס האינדוקציה מתקיים

<u>הנחת האינדוקציה :</u>

עבור כל m < n מתקיים $0 \le T(m) \le c_2 \cdot m - \varepsilon$

<u>צעד האינדוקציה :</u>

נוכיח שעבור n מתקיים $0 \le T(n) \le c_2 \cdot n - \varepsilon$

נתון ש $0 < c < 1$ לכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים

$0 \le T(cn) \le c_2 \cdot cn - \varepsilon$ וגם $0 \le T((1-c)n) \le c_2 \cdot (1-c)n - \varepsilon$

נחבר את שני האי שוויונים ונקבל :

$$0 \le T(cn) + T((1-c)n) \le c_2 \cdot cn + c_2 \cdot (1-c)n - 2\varepsilon$$

נוסיף 1 על שני האגפים ונקבל :

$$0 \le T(cn) + T\big((1-c)n\big) + 1 \le c_2 \cdot cn + c_2 \cdot (1-c)n - 2\varepsilon + 1$$

לכן $T(n) = T(cn) + T\big((1-c)n\big) + 1$

$$0 \le T(n) \le c_2 \cdot cn + c_2 \cdot (1-c)n - 2\varepsilon + 1$$

$$0 \le c_2 \cdot cn + c_2 \cdot (1-c)n - 2\varepsilon + 1 =$$

$$\mathrm{c_2cn + c_2n - c_2cn} - 2\varepsilon + 1 = \mathrm{c_2n} - 2\varepsilon + 1$$

אז נקבל ש $T(n) \le \mathrm{c_2n} - 2\varepsilon + 1$

מתי מתקיים $-2\varepsilon + 1 \le 0$?

התשובה מתקיים עבור $\frac{1}{2} \le \varepsilon$

לכן עבור $\frac{1}{2} \le \varepsilon$ מתקיים

$$0 \le T(n) \le \mathrm{c_2n} - 2\varepsilon + 1 \le \mathrm{c_2n}$$

ניקח $0 \le c_2$ כלשהו ואז מתקיים $T(n) = \mathrm{O}(n)$

לסיכום הוכחנו שמתקיים $T(n) = \Omega(n)$ וגם $T(n) = \mathrm{O}(n)$ אז

$$T(n) = \Theta(n)$$

ו. $T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$

ראינו בהרצאה שהניחוש של הנוסחה הזאת הוא

$$T(n) = \Theta(nlog(n))$$

נוכיח את הניחוש שלנו לפי ההגדרה שקיימים קבועים חיוביים n_0, c_1, c_2 כך שעבור כל $n_0 \leq n$ מתקיים :

$$0 \leq c_1 \cdot nlog(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot nlog(n)$$

נוכיח זאת לפי אינדוקציה :

<u>בסיס האינדוקציה עבור n = 2 :</u>

אם נציב 2 ב $T(n)$ נקבל קבוע לפי הנתון, נסמן את הקבוע ב w אז נקבל

$$0 \leq c_1 \cdot 2log(2) \leq T(2) = \mathrm{w} \leq c_2 \cdot 2log(2)$$

$$0 \leq c_1 \cdot 2 \leq \mathrm{w} \leq c_2 \cdot 2$$

נחלק את כל האגפים ב 2 ונקבל :

$$0 \leq c_1 \leq \frac{\mathrm{w}}{2} \leq c_2$$

לכן עבור כל $0 \leq c_2, c_1$ שמקיימים את האי שוויון שלמעיל מתקיים בסיס האינדוקציה

<u>הנחת האינדוקציה :</u>

עבור כל m < n מתקיים

$$0 \leq c_1 \cdot mlog(m) \leq T(m) \leq c_2 \cdot mlog(m)$$

<u>צעד האינדוקציה :</u>

נוכיח שעבור n מתקיים

$$0 \leq c_1 \cdot nlog(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot nlog(n)$$

קודם נוכיח את הצד הימיני של אי השוויון:

כלומר להוכיח ש $0 \leq T(n) \leq c_2 \cdot nlog(n)$

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים

$$0 \leq T(\tfrac{3n}{4}) \leq c_2 \cdot \tfrac{3n}{4} log(\tfrac{3n}{4}) \text{ וגם } 0 \leq T(\tfrac{n}{4}) \leq c_2 \cdot \tfrac{n}{4} log(\tfrac{n}{4})$$

נחבר את שני האי שוויונים ונקבל :

$$0 \leq T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) \leq c_2 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_2 \cdot \frac{3n}{4} log(\frac{3n}{4})$$

נוסיף n על שני האגפים ונקבל :

$$0 \leq T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n \leq c_2 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_2 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

נציב ונקבל :

$$0 \leq T(n) \leq c_2 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_2 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

$$0 \le c_2 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_2 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n =$$
$$c_2 \cdot \frac{n}{4}(\log(n) - \log(4)) + c_2 \cdot \frac{3n}{4}\left(\log(n) - \log(\frac{4}{3})\right) + n =$$
$$c_2 \frac{n}{4}\log(n) - c_2\frac{n}{2} + c_2\frac{3n}{4}\log(n) - 0.3112c_2 n + n =$$
$$c_2 n \log(n) - 0.8112 c_2 n + n =$$
נמצא c_2 שמקיים :
$$c_2 n \log(n) - 0.8112 c_2 n + n \le c_2 \cdot nlog(n)$$
$$-0.8112c_2 n + n \le 0$$
$$1 \le 0.8112 c_2$$
$$1.223 \le c_2$$
אזי עבור $1.223 \le c_2$ מתקיים :
$$0 \le T(n) \le c_2 n \log(n) - 0.8112c_2 n + n \le c_2 \cdot nlog(n)$$
$$0 \le T(n) \le c_2 \cdot nlog(n)$$
אזי מתקיים $T(n) = \mathrm{O}(nlog(n))$

עכשיו נוכיח את הצד השמאלי של אי השוויון :
כלומר להוכיח ש $0 \le c_1 \cdot nlog(n) \le T(n)$
לפי הנחת האינדוקציה מתקיים
$0 \le c_1 \cdot \frac{n}{4} log(\frac{n}{4}) \le T(\frac{n}{4})$ וגם $0 \le c_1 \cdot \frac{3n}{4} log(\frac{3n}{4}) \le T(\frac{3n}{4})$
נחבר את שני אי השוויונים ונקבל :
$$0 \le c_1 \cdot \frac{n}{4} log(\frac{n}{4}) + c_1 \cdot \frac{3n}{4} log(\frac{3n}{4}) \le T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4})$$
נוסיף n על שני האגפים ונקבל :
$$0 \le c_1 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_1 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n \le T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$
נציב ונקבל :
$$0 \le c_1 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_1 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n \le T(n)$$
$$0 \le c_1 \cdot \frac{n}{4} log\left(\frac{n}{4}\right) + c_1 \cdot \frac{3n}{4} log\left(\frac{3n}{4}\right) + n =$$
$$c_1 \cdot \frac{n}{4}(\log(n) - \log(4)) + c_1 \cdot \frac{3n}{4}\left(\log(n) - \log(\frac{4}{3})\right) + n =$$
$$c_1 \frac{n}{4}\log(n) - c_1\frac{n}{2} + c_1\frac{3n}{4}\log(n) - 0.3112c_1 n + n =$$
$$c_1 n \log(n) - 0.8112 c_1 n + n =$$
נמצא c_1 שמקיים :

$$c_1 \cdot nlog(n) \leq c_1 n \log(n) - 0.8112 c_1 n + n$$
$$0 \leq -0.8112 c_1 n + n$$
$$0.8112 c_1 \leq 1$$
$$0 \leq c_1 \leq 1.223$$

אזי עבור $0 \leq c_1 \leq 1.223$ מתקיים :

$$0 \leq c_2 \cdot nlog(n) \leq c_1 n \log(n) - 0.8112 c_1 n + n \leq T(n)$$
$$0 \leq c_1 \cdot nlog(n) \leq T(n)$$

אזי מתקיים $T(n) = \Omega(nlog(n))$

לסיכום הוכחנו שמתקיים $T(n) = \Omega(nlog(n))$ וגם $T(n) = O(nlog(n))$ אז
$T(n) = \Theta(nlog(n))$

ז. $T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

נפתור לפי הכלל הראשון של שיטת מאסטר:

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 6, b = 3, f(n) = n$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 6} = n^2$$

עבור $\varepsilon = 0.5$ מתקיים

$$f(n) = n \in \ \Omega(n^{log_3 6 - 0.5}) = \Omega(n^{log_3 5.5}) = O(n^{1.551})$$

לכן לפי הכלל הראשון של מאסטר:

$$T(n) \in \Theta\left(n^{\log_3 6}\right) = \Theta(n^2)$$

שאלה 4 – ניתוח זמן ריצה

a) Input: An array of numbers A, |A|=n and a number key. $T(n)$

```
function Foo1(A, key)
    index ← -1                      1. Θ(1)
    for i←0 to n-1                  2. Θ(n)
        if A[i] == key              3. Θ(n)
            index←i                 4. Θ(1)
            break                   5. Θ(1)
    return index                    6. Θ(1)
```

$T(n)$ =2 $\Theta(n) + 4\ \Theta(1) = \Theta(n)$

הפונקציה מקבלת מערך ומספר, מחפשת את המספר בתוך המערך ומחזירה את האינדקס שלו דרך for שמתחילה מתחילת המערך, אז המקרה החריג הוא שיתכן המספר שאנחנו מחפשים נמצא בסוף המערך או לא נמצא בכלל לכן אנחנו עוברים על כל האיברים שבמערך לכן זמן הריצה במקרה הגרוע הוא $T(n) = \Theta(n)$.

b) Input: An array of numbers A, |A|=n. $T(n)$

```
function Foo2 (A)
    for i ← 0 to n-1                1. Θ(n)
        for j ← n-1 to 0            2. Θ(n^2)
            if (A[i] > A[j])        3. Θ(n^2)
                A[i] = j            4. Θ(n^2)
            else                    5. Θ(n^2)
                A[j] = i            6. Θ(n^2)
```

$T(n) = 5\Theta(n^2) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$

הפונקציה מקבלת מערך ועוברת על כל המערך פעמיים , בגלל שיש שתי לולאות אחת בתוך השנייה

הפקודות בתוך הלולאה השנייה לא משנה מה הקלט הסכום שלהם יוצא $\Theta(n^2)$, אזי אפשר להגיד שבכל מקרה, שזמן ריצה שלה שווה ל $T(n) = \Theta(n^2)$.

c) Input: 2 numbers – n and base. $T(n)$

```
function exp(base , n)
    if (n = 0)                          1. Θ(1)
        return 1                        2. Θ(1)
    else if (n = 1)                     3. Θ(1)
        return base                     4. Θ(1)
    else                                5. Θ(1)
        return base · exp(base, n-1)    6. T(n − 1)
```

$T(n) = T(n-1) + 5\Theta(1)$

הפונקציה מקבלת שני פרמטרים n, base הפונקציה מחזירה את $base^n$ כל פעם מורידים אחד מהחזקה עד שנגיע למקרה הבסיס אז , זה אומר 1 - n קריאות
שורות 1,3, מראות תנאי עצירה לפונקציה, שורות 1-5 כפי שלמדנו אין להם משמעות לפי הגודל כולם בסך הכל $\Theta(1)$.
הפונקציה רקורסיבית לכן נקבל נוסחה נסיגה הבאה:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 0, n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(1) & n \geq 2 \end{cases}$$

נפתור את הנוסחה דרך ההצבה (מנחשים את התשובה ומוכיחים באינדוקציה) ננחש ש
$T(n) = n$
נוכיח באינדוקציה:
בסיס: n=1 $T(1) = \Theta(1) = 1 = n = 1$
נניח שלכל $k < n$, $T(k) = k$
צ"ל: $T(n) = n$
נתחיל עם ההגדרה של הנוסחה שאומרת ש $T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$
$T(n-1) = n - 1$
נציב ונקבל
$T(n) = n - 1 + 1 = n$
אזי $T(n) = n$

d)

	$T(n)$
<u>Input</u>: 2 numbers – n and base.	
<u>function</u> exp2(base , n)	
if (n = 0)	$1.\Theta(1)$
return 1	$2.\Theta(1)$
else if (n = 1)	$3.\Theta(1)$
return base	$4.\Theta(1)$
else if (mod(n, 3) = 0)	$5.\Theta(1)$
tmp ← **exp2**(base, n/3)	$6.T\left(\frac{n}{3}\right)$
return tmp · tmp · tmp	$7.\Theta(1)$
else	$8.\Theta(1)$
return base · **exp2**(base,n-1)	$9.\mathrm{T}(n-1)$

נזהה שיש פקודה שבודקת $n\%3 == 0$ אם התנאי מתקיים הזמן ריצה שונה לגמרי משאר המקרים אז נחלק לשלוש מקרים :

1. $n\%3 == 0$: $T_1(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(1)$
2. $n\%3 == 1$: $T_2(n) = T_2(n-1) + \Theta(1) = T\left(\frac{n-1}{3}\right) + 2\Theta(1)$
3. $n\%3 == 2$: $T_3(n) = T_3(n-1) + \Theta(1) = T_2(n-2) + 2\Theta(1) = T\left(\frac{n-2}{3}\right) + 3\Theta(1)$

אזי כפי שרואים כל שלושת המקרים הצלחנו לייצג לפי המקרה הראשון לכן אפשר לייצג את זמן ריצה לפי משוואה אחד :

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 0, n = 1 \\ T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(1) & n \geq 2 \end{cases}$$

נפתור את הנוסחה לפי הכלל השני בשיטת מאסטר:

$$a = 1, b = 3, f(n) = 1,$$

לפי מקרה 2

$$1 = f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta(1)$$

אזי

$$T(n) = \Theta(f(n) = 1 \cdot \log(n)) = \Theta(\log(n))$$

e)

	$T(n)$
<u>Input</u>: 2 numbers – n and base.	
<u>function</u> expC(base , n)	
if (n = 0)	$1.\Theta(1)$
return 1	$2.\Theta(1)$
else if (n = 1)	$3.\Theta(1)$
return base	$4.\Theta(1)$
else if (mod(n, c) = 0)	$5.\Theta(1)$
tmp ← **expC**(base, n/c)	$6.T\left(\frac{n}{c}\right)$
ans ← 1	$7.\Theta(1)$
for i ← 1 to c:	$8.\Theta(c)$
ans ← ans * tmp	$9.\Theta(c)$
return ans	$10.\Theta(1)$
else	$11.\Theta(1)$
return base · **expC**(base,n-1)	$12.T(n-1)$

כפי שרואים בסעיף זה בדומה לסעיף הקודם יש התייחסות ליותר ממקרה אחד

1. $T_0(n) = T\left(\frac{n}{c}\right) + \Theta(c) + \Theta(1)$,$n\%c == 0$
2. $T_1(n) = T(n-1) + \Theta(1) = T\left(\frac{n-1}{c}\right) + \Theta(c) + 2\Theta(1)$,$n\%c == 1$

.

עד שנגעי למספר הגרוע ביותר $n\%c == c-1$ $T_{c-1}(n)$

אז אפשר להדגים את המקרה הכי גרוע כך

$$=T_{c-1}(n) = T\big(n-(c-1)\big) + (c-1)\cdot\Theta(1)$$

$$= T\left(\frac{n-c+1}{c}\right) + \Theta(c) + (c-1)\cdot\Theta(1)$$

אז אפשר לראות שהנוסחאות של כל המקרים דומים להנוסחה הראשונה לכן אפשר לייצג אותם כנוסחה אחת:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n=0, n=1 \\ T\left(\frac{n}{c}\right) + \Theta(c) + \Theta(1) & n\%c = 0 \\ T\left(\frac{n-n\%c}{c}\right) + \Theta(c) + \Theta(1) & else \end{cases}$$

קודם מכיוון ש c קבוע אזי

$$\Theta(c)+\Theta(1)=\Theta(1)$$

עכשיו נפתור לפי שיטת המאסטר כמו בסעיף הקודם

$$a=1, b=c, f(n)=\Theta(1)$$

לפי המקרה השני מתקיים כי

$$f(n)\in\Theta\left(n^{\log_b a}\right)=\Theta(1)$$

אזי

$$T(n)=\Theta(f(n)=1\cdot\log(n))=\Theta(\log(n))$$

נבחין את המקרה ש n שווה ל c , אזי הרקורסיה מתבצעת פעם אחד מכוון ש
$n\%c==0, \frac{n}{c}=1$ אז נכנסים לתנאי אחד ומבצעים את לולאת for פעם אחת
בסיבוכיות זמן $\Theta(n)$
בגלל ש $c=n$ אם מציבים בנוסחה מקבלים:

$$T(n)=T\left(\frac{n}{n}\right)+\Theta(n)+\Theta(1)=T(1)+\Theta(n)+\Theta(1)=\Theta(n)$$

אזי זמן הריצה הוא $\Theta(n)$

שאלה 5 – פיתוח אלגוריתמים

א)

```
function Intersection(A, B)
    n ← A.size
    Create array temp[0 ... 2 * n]
    for i = 0 to 2 * n
        temp[i] ← 0
    for i = 0 to n − 1
        temp[A[i]] ← 1
    for i = 0 to n − 1
        if temp[B[i]] == 1
            return FALSE
    return TRUE
```

T(n)
1. $\Theta(1)$
2. $\Theta(1)$
3. $\Theta(n)$
4. $\Theta(n)$
5. $\Theta(n)$
6. $\Theta(n)$
7. $\Theta(n)$
8. $\Theta(n)$
9. $\Theta(1)$
10. $\Theta(1)$

קודם הקצינו מערך בגודל 2N+1 אחר כך נכנסנו ללולה של 2N+1 איטרציות כך ששמנו בכל תא במערך temp את הערך אפס (כאילו איפסנו את המערך)

אחר כך עשינו לולאה שעוברת על איברי מערך A בגודל N ומציבים אחד בכל תא באינדקס ששווה לערך האיבר הנוכחי ב A (למשל אם A[1]=5 אז נציב אחד ב temp[5]) אחר כך עשינו לולאה עוד פעם בגודל N על איברי מערך B ובדקנו בכל איטרציה אם קיים אחד בתא בעל אינדקס שווה לאיבר שנמצא במערך B אז מצאנו איבר משותף לשני המערכים ונחזיר FALSE אחרת אם לא מצאנו איבר משותף, נצא מהלולאה ונחזיר TRUE

<u>ניתוח זמן :</u>

נתבונן במקרה הכי גרוע שבו לא נמצא איבר משותף בין שני המערכים ואז צריך לעבור על כל הלולאות במספר איטרציות מקסימלי לכל אחת מהן .

נדגיש שבשורה 3 הלולאה הולכת מ 0 עד 2n+1 אז סיבוכיות הזמן שלה שווה ל $\Theta(n)$ כי

כי מתקיים עבור $c_2 = 3$ וגם $c_1 = 1$ $n_0 = 1$ ש

$$0 \le c_1 n \le 2n + 1 \le c_2 n$$

אזי סך הכל נקבל :

$$T(n) = 6 \cdot \Theta(n) + 4 \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$$

ב)

$function\ findX(A, x)$
- $limit \leftarrow 1$
- $while(limit < A.size()\ And\ A[limit] < x)$
  - $limit \leftarrow limit * 2$
- $return\ BinarySearch(A, limit/2, min(limit, n-1), x)$

1. $\Theta(1)$
2. $\Theta(d), 2^d = n$
3. $\Theta(d)$
4. $T(n)$

$function\ BinarySearch(A, L, H, x)$
- $while(H >= L)$
  - $mid \leftarrow \lfloor (H+L)/2 \rfloor$
  - $if(A[mid] == x)$
    - $Return\ mid$
  - $Else\ if(x < A[mid])$
    - $H = mid - 1$
  - $Else$
    - $l = mid + 1$
- $Return\ -1$

נתבונן במקרה שבו x נמצא במערך במקום כלשהו פרט למקום האחרון במערך

נסמן ב d את מספר האיברים שמופעים לפני x במערך אזי לפי פונקציה $findX$ הלולאה while תתבצע log(d) פעמים אחר כך נכנס לפונקצית חיפוש הבינארי עם טווח שקטן מ d ואז תתבצע פחות מ log(d) פעמים לכן סך הכל נקבל שזמן הריצה שווה ל $\Theta(\log(d)$)

עכשיו נתבונן במקרה הכי גרוע שזה המספר x מופיע בתא האחרון וגם ניקח גודל שהוא אקספוניציאלי ל 2 לנוחות החישוב(שאר המספרים מתנהגים באותו סיבוכיות :

במקרה השה d = n אזי לולאת while תתבצע $\log(n$ = $\Theta(\log(\mathrm{d}))$ אזי בגלל ש גודל המערך אקספונינציאלי ל 2 אז נקבל מספר חיובי שלם אז נכנסים ל חיפוש בינארי

$$L = \frac{n}{2}, H = n$$

כפי שלמדנו בכיתה חיפוש בינארי לוקח $\Theta(\log(y))$ כאשר y = גודל המערך הנוכחי שאנחנו עובדים עליו

אז במקרה הזה הוא שווה ל $\frac{n}{2} = H - l = y,$ $\Theta\left(\log\left(\frac{n}{2}\right)\right)$,

אזי $T(n) = \Theta(\log(n)) + \Theta\left(\log\left(\frac{n}{2}\right)\right) = \Theta(\log(\mathrm{n}))$