

11-МАВЗУ. СТАНДАРТ МАСШТАБДАГИ РЕГРЕССИЯ ТЕНГЛАМАСИ

11.1. Оддий регрессиянинг коэффицентлари.

11.2. Кўп омили чизиқли регрессия. Корреляция коэффицентлари матрицаси.

11.3. Стандарт масштабдаги регрессиянинг коэффицентлари.

Таянч иборалар: Регрессиянинг хусусий тенгламаси, эластикликнинг хусусий коэффиценти, хусусий корреляция, кўп омили корреляция.

11.1. Оддий регрессиянинг коэффицентлари

$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$ - кўп омили регрессия чизиқли тенгламаси асосида регрессиянинг хусусий тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_p} = f(x_1), \\ y_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \dots x_p} = f(x_2), \\ \dots \dots \dots \\ y_{x_p \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1}} = f(x_p). \end{cases}, \quad (11.1)$$

яъни ушбу тенгламалар система натижавий белгини мос x омил белги билан, кўп ўлчовли регрессияда эътиборга олинувчи қолган белгиларини ўртача қийматида ушлаб турган ҳолда, боғланишини ифодаладиган регрессия тенгламаларидан иборат.

Регрессиянинг хусусий тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_p} = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \\ y_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \dots x_p} = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \\ \dots \dots \dots \\ y_{x_p \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1}} = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \end{cases} \quad (11.2)$$

Ушбу тенгламаларга мос омилларнинг ўртача қийматларини қўйиб чиқсак, улар жуфт чизиқли регрессия тенгламасининг кўринишини олиб қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_p} = A_1 + b_1 \cdot x_1, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \dots x_p} = A_2 + b_2 \cdot x_2, \\ \dots \dots \dots \\ \hat{y}_{x_p \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1}} = A_p + b_p \cdot x_p \end{cases},$$

бу ерда,

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ A_2 = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ \dots \dots \dots \\ A_p = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} \end{cases}$$

Жуфт регрессиядан регрессиянинг хусусий тенгламасини фарқи шундан иборатки, у омилларни натижага алоҳида-алоҳида таъсирини тавсифлайди, чунки бир омилни таъсирини ўрганилаётганда қолганлари ўзгармас ҳолда ушлаб турилади. Қолган омилларни таъсир даражаси кўп омили регрессия тенгламасининг озод хадида ҳисобга олинади. Бундай ҳолат регрессиянинг хусусий тенгламаси асосида эластикликнинг хусусий коэффицентини аниқлаш имконини беради, у қуйидагича ифодаланади:

$$\dot{Y}_{yx_i} = b_i \frac{x_i}{\hat{y}_{x_i \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}}, \quad (11.3)$$

бу ерда: b_i - кўп омили регрессия тенгламасида x_i омил учун регрессия коэффиценти;

$\hat{y}_{x_1 \cdot x_2 \dots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}$ - регрессиянинг хусусий тенгламаси.

11.2. Кўп омили чизикли регрессия. Корреляция коэффициентлари матрицаси.

Кўп омили регрессия тенгламасининг амалий аҳамияти кўп омили корреляция коэффициентлари ва унинг квадрати - детерминация коэффициентлари ёрдамида баҳоланади.

Кўп омили корреляция коэффициентлари қаралаётган омиллар тўпламини ўрганилаётган белгига боғланиш даражасини тавсифлайди, яъни омилларни биргаликда натижавий белгига таъсир кучини тавсифлаб беради.

Кўп омили корреляция кўрсаткичи ўзаро боғланиш шаклларида қатъий назар кўп ўлчовли корреляция индекси каби аниқланиши мумкин:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{qol}^2}{\sigma_y^2}}, \quad (8.4)$$

бу ерда: $\sigma_{qol}^2 - y = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ тенглама учун қолдиқ дисперсия, $\sigma_{qol}^2 = \frac{\sum (y - \hat{y}_{x_1x_2\dots x_p})^2}{n}$;

σ_y^2 - натижавий белгининг умумий дисперсияси, $\sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}$.

Кўп омили корреляция индексини тузиш методикаси жуфт боғланишникига ўхшаш. Унинг ўзгариш чегараси ҳам 0 дан 1 гача. У 1 га қанчалик яқин бўлса натижавий белгининг барча омиллар билан боғланиш даражаси шунчалик юқори бўлади. Кўп омили корреляция индексининг қиймати жуфт омили корреляциялар индексларининг максимал қийматидан катта ёки унга тенг бўлиши керак, яъни,

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} \geq R_{yx_i} \quad (i = \overline{1, p}).$$

Боғланиш чизикли бўлганда корреляция индекси формуласини жуфт корреляция коэффициентлари орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{\sum \beta_{x_i} \cdot r_{yx_i}}. \quad (8.5)$$

бу ерда: β_{x_i} - регрессиянинг стандартлашган коэффициентлари;

r_{yx_i} - натижанинг ҳар бир омил билан жуфт корреляция коэффициентлари.

Чизикли регрессия учун кўп омили корреляция индекси формуласи *кўп омили корреляция чизикли коэффициентлари ёки корреляция коэффициентлари тўплами* деб номланади.

Чизиксиз боғланиш учун ҳам кўп омили корреляция индекси корреляция коэффициентлари тўпламига тенг бўлиши мумкин. Фирма учун даромад модели у қуйидаги кўринишга эга бўлса:

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \ln x_2 + b_3 \cdot \ln x_3 + b_4 \cdot \ln x_4 + \varepsilon,$$

бу ерда: x_1 - реклама учун харажатлар;

x_2 - фирма капитали;

x_3 - регион бўйича сотилган маълум бир гуруҳ товарларни фирманинг умумий маҳсулотларидаги улуши;

x_4 - фирманинг аввалги йилга нисбатан сотилган маҳсулотлари ҳажмининг кўпайиш фоизи.

x_1 омил чизикли, x_2, x_3, x_4 - омиллар логарифмик шаклда берилгани билан боғланиш зичлигини баҳолаш чизикли кўп омили корреляция коэффициентлари ёрдамида амалга оширилиши мумкин.

11.3. Стандарт масштабдаги регрессиянинг коэффицентлари

Юқорида кўриб ўтилганидек, кўп омили чизиқли регрессияда қатнашувчи омилларни ранжирлаш регрессиянинг стандартлаштирилган коэффицентлари (β) орқали ҳам амалга оширилиши мумкин. Бунга, чизиқли боғланишлар учун, хусусий корреляция коэффицентлари орқали ҳам эришиш мумкин. Ўрганилаётган белгилар чизиқли боғланишларда бўлмаган ҳолатларда эса бу вазифани хусусий детерминация коэффицентлари бажаради. Бундан ташқари, хусусий корреляция коэффицентлари омилларни саралаш муаммоларини ечишда қўлланилади, яъни у ёки бу омилни моделга киритиш масаласи хусусий корреляция коэффицентлари орқали исботлаб берилади.

Хусусий корреляция коэффиценти (ёки индекси) натижа билан регрессия тенгламасига киритилган битта омил орасидаги боғланишнинг зичлигини, бошқа омиллар таъсири ўзгармаган ҳолда, тавсифлайди.

Хусусий корреляция коэффицентлари таҳлил учун моделга киритилган янги омил ҳисобига камайган қолдиқ дисперсияни янги омил киритилмасдан олдинги қолдиқ дисперсияга бўлган нисбатига тенг.

Агар қолдиқ дисперсияни $S_{qol}^2 = \sigma_y^2(1-r)^2$ кўринишда детерминация коэффиценти орқали ифодаласак, у ҳолда хусусий корреляция коэффиценти формуласи қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$r_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{S_{yx_2}^2 - S_{yx_1x_2}^2}{S_{yx_2}^2}} = \sqrt{1 - \frac{S_{yx_1x_2}^2}{S_{yx_2}^2}} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_2}^2}},$$

ва мос равишда x_2 учун

$$r_{yx_2x_1} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1}^2}}.$$

Юқоридаги хусусий корреляция коэффицентлари биринчи тартибли хусусий корреляция коэффицентлари (индекслари) деб аталади. Улар икки ўзгарувчининг боғланиш зичлигини, омиллардан бири ўзгармас бўлган ҳолда, аниқлаш имконини беради.

Агар p донга омиллардан иборат бўлган регрессияни кўрадиган бўлсак, у ҳолда биринчи тартибли хусусий корреляция коэффицентларидан ташқари иккинчи, учинчи ва ҳ.к. $(p-1)$ -тартибли хусусий корреляция коэффицентларини аниқлаш мумкин. Яъни, натижавий белгига x_1 омилнинг таъсирини қолган омилларни қуйидаги турлича боғлиқ бўлмаган ҳолатларидаги таъсирини баҳолаш мумкин:

$r_{yx_1 \cdot x_2}$ - x_2 омилни ўзгарманган ҳолда таъсирида;

$r_{yx_1 \cdot x_2x_3}$ - x_2 ва x_3 омиллар ўзгармаган ҳолда таъсирида;

$r_{yx_1 \cdot x_2x_3 \dots x_p}$ - регрессия тенгламасига киритилган барча омилларни ўзгармаган ҳолатдаги таъсирида.

Умумий кўринишда p омили $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$, тенглама учун у га x_i – омилни, бошқа омиллар ўзгармаган ҳолатда, таъсир кучини ўлчовчи хусусий корреляция коэффицентини қуйидаги формула бўйича аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_1x_2 \dots x_i \dots x_p}^2}{1 - R_{yx_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p}^2}},$$

бу ерда: $R_{yx_1x_2 \dots x_p}^2$ - p омиллар комплексининг натижа билан кўп омили детерминация коэффиценти;

$R_{yx_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p}$ - x_i омилни моделга киритилмаган ҳолатдаги детерминация коэффиценти.

$i=1$ бўлганда хусусий корреляция коэффиценти қуйидаги қўринишни олади:

$$r_{yx_1x_2 \dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_1x_2 \dots x_p}^2}{1 - R_{yx_2 \dots x_p}^2}}.$$

Ушбу хусусий корреляция коэффиценти y ва x_1 ни боғланиш зичлигини, регрессия тенгламасига киритилган бошқа омиллар ўзгармаган ҳолда, ўлчаш(аниқлаш) имкониятини беради.

Хусусий корреляция коэффицентининг тартиби натижавий белгига таъсири ўзгармас ҳолатда ушлаб туриладиган омиллар сони билан аниқланилади. Масалан, $r_{yx_1x_2}$ - биринчи тартибли хусусий корреляция коэффиценти. Бундан келиб чиққан ҳолда жуфт корреляция коэффиценти нолинчи тартибли коэффицент дейилади.

Юқорида тартибли хусусий корреляция коэффицентларини қуйи тартибли хусусий корреляция коэффицентлари орқали қуйидаги рекуррент формула ёрдамида аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}} \cdot r_{x_ix_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r_{yx_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}}^2) \cdot (1 - r_{x_ix_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}}^2)}}.$$

Икки омиллида ва $i=1$ бўлганда ушбу формула қуйидаги қўринишда бўлади:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2) \cdot (1 - r_{x_1x_2}^2)}}.$$

Мос равишда $i=2$ ва омил иккита бўлганда y ни x_2 омил билан хусусий корреляция коэффицентини қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_1}^2) \cdot (1 - r_{x_1x_2}^2)}}.$$

Уч омилли регрессия тенгламаси учун иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффиценти биринчи тартибли хусусий корреляция коэффиценти асосида аниқланилади.

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon,$$

тенгламада ҳар бири рекуррент формула асосида аниқланадиган учта иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффицентини аниқлаш мумкин, улар:

$$r_{yx_1 \cdot x_2 \cdot x_3}; \quad r_{yx_2 \cdot x_1 \cdot x_3}; \quad r_{yx_3 \cdot x_1 \cdot x_2};$$

Масалан, $i=1$ бўлганда $r_{yx_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$ ни ҳисоблаш учун қуйидаги формула қўлланилади:

$$r_{yx_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \frac{r_{yx_1x_2} - r_{yx_3x_2} \cdot r_{x_1x_2x_3}}{\sqrt{(1 - r_{yx_3x_2}^2) \cdot (1 - r_{x_1x_2x_3}^2)}}.$$

Назорат учун саволлар

1. Регрессиянинг хусусий тенгламаси қандай ёзилади?
2. Жуфт регрессиядан регрессиянинг хусусий тенгламасини фарқи нимадан иборат?
3. Эластикликнинг хусусий коэффиценти нимани англатади ва у қандай аниқланилади?

4. Регрессиянинг хусусий тенгламасида ўртача эластиклик ва омиллар учун эластикликлар қандай ҳисобланади?
5. Кўп омилли регрессия тенгламасининг аҳамиятлилиги қандай баҳоланади?
6. Кўп омилли корреляция коэффиценти нималарни тавсифлайди ва у қандай аниқланилади?
7. Кўп омилли корреляция индекси жуфт омилли корреляция индексига нисбатан қандай муносабатда бўлиши керак ва у жуфт корреляция коэффиценти орқали қандай аниқланилади?
8. Корреляция коэффиценти тўплами деганда нимани тушунасиз?
9. Корреляциянинг хусусий коэффиценти деганда нимани тушунасиз ва у қандай мақсадларда қўлланилади?
10. Омиллар орасидаги боғланиш Чизиксиз ҳолда унинг боғланиш кучи қайси коэффицент орқали топилади?
11. Икки омилли регрессияда ҳар бир омилнинг натижага таъсир кучини аниқлаш формулаларини ёзинг.
12. Юқори тартибли хусусий корреляция коэффиценти қандай ва қайси формула билан аниқланилади?

Тестлар

1. Корреляция – бу:

- a) *Омиллар орасидаги боғланиш зичлиги;
- b) Нормал тенгламалар тизими;
- c) Омилларнинг координата ўқидан узоқлашиши;
- d) Модел ишончлилиги.

2. Корреляция коэффицентини аниқловчи бандни кўрсатинг:

- a) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x - \sigma_y}$;
- b) * $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$;
- c) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$;
- d) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x + \sigma_y}$.

3. Корреляция коэффицентлари неча хил турда бўлади?

- a) *Жуфт, хусусий ва кўпликдаги;
- b) Жуфт, кўпликдаги, доимий;
- c) Хусусий, кўпликдаги, ўзгарувчан;
- d) Кўпликдаги, доимий, мультиколлинеар.

4. Корреляцион боғланиш тури бўйича:

- a) *Тўғри, тесқари бўлади
- b) Тўғри чизикли, эгри чизикли бўлади
- c) Кучсиз, ўртача, зич бўлади
- d) Жуфт, кўп омилли бўлади

5. Корреляцион боғланиш шакли бўйича:

- a) *Тўғри чизиқли, эгри чизиқли бўлади
- b) Тўғри, тескари бўлади
- c) Кучсиз, ўртача, зич бўлади
- d) Жуфт, қўп омилли бўлади

6. Корреляцион боғланиш зичлиги бўйича:

- a) *Кучсиз, ўртача, зич бўлади
- b) Тўғри чизиқли, эгри чизиқли бўлади
- c) Тўғри, тескари бўлади
- d) Жуфт, қўп омилли бўлади

7. Корреляцион боғланиш омиллар сони бўйича:

- a) *Жуфт, қўп омилли бўлади
- b) Тўғри чизиқли, эгри чизиқли бўлади
- c) Кучсиз, ўртача, зич бўлади
- d) Тўғри, тескари бўлади

8. Корреляцион таҳлил ўрганади:

- a) *Ўзгарувчи миқдорлар орасидаги ўзаро муносабатни
- b) Доимий миқдорлар орасидаги ўзаро муносабатни
- c) Ўзгарувчи миқдорларнинг реал жараёнга мос келишини
- d) Ўзгармас миқдорларнинг реал жараёнга мос келишини

8. Корреляция коэффиценти қуйидаги оралиқда ўзгаради:

- a) * $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- b) $0 < r_{xy} < 1$
- c) $-1 < r_{xy} < 0$
- d) $-\infty < r_{xy} < \infty$

9. Омиллар ўртасида тескари боғланиш мавжуд – агар:

- a) * $-1 < r < 0$ - bo'lsa
- b) $0 < r < 1$ - bo'lsa
- c) $r = 1,2$ - bo'lsa
- d) $r = 1$ - bo'lsa

10. Омиллар ўртасида тўғри боғланиш мавжуд – агар:

- a) * $0 < r < 1$ - bo'lsa
- b) $r = 1,2$ - bo'lsa
- c) $r = -0,2$ - bo'lsa
- d) $r = 1$ - bo'lsa

Savol va toshiriqlar

1. Кўп омилли регрессия тенгламасининг аҳамиятлилиги қандай баҳоланади?
2. Кўп омилли корреляция коэффиценти нималарни тавсифлайди ва у қандай аниқланилади?
3. Кўп омилли корреляция индекси жуфт омилли корреляция индексига нисбатан қандай муносабатда бўлиши керак ва у жуфт корреляция коэффиценти орқали қандай аниқланилади?
4. Корреляция коэффиценти тўплами деганда нимани тушунаси?
5. Корреляциянинг хусусий коэффиценти деганда нимани тушунаси ва у қандай мақсадларда қўлланилади?

Қуйидаги маълумотлар асосида Фирма учун даромад модели у ни тузинг ва узгарувчилар орасида боғланишни топинг қуйидаги кўринишга эга бўлса:

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \ln x_2 + b_3 \cdot \ln x_3 + b_4 \cdot \ln x_4 + \varepsilon,$$

бу ерда: x_1 -реклама учун харажатлар;

x_2 -фирма капитали;

x_3 -регион бўйича сотилган маълум бир гуруҳ товарларни фирманинг умумий маҳсулотларидаги улуши;

x_4 -фирманинг аввалги йилга нисбатан сотилган маҳсулотлари ҳажмининг кўпайиш фоизи.

1-Variant

| Y | X ₁ | X ₂ | X ₃ |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| 123 | 3.2 | 5 | 1.2 |
| 145 | 3.3 | 6 | 3.5 |
| 156 | 2.9 | 8 | 9.1 |
| 548 | 3.5 | 12 | 0.6 |

2.Variant

| Y | X ₁ | X ₂ | X ₃ |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| 256 | 5.3 | 5.2 | 5.2 |
| 589 | 7.2 | 4.3 | 4.0 |
| 478 | 4.1 | 6.1 | 4.2 |
| 324 | 8.2 | 4.2 | 4.6 |

3.Variant

| Y | X ₁ | X ₂ | X ₃ |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| 241 | 7.2 | 4.0 | 5.7 |
| 741 | 9.2 | 8.2 | 1.9 |
| 813 | 0.2 | 4.6 | 4.6 |
| 951 | 4.3 | 4.7 | 4.4 |

4.Variant

| Y | X ₁ | X ₂ | X ₃ |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| 523 | 4.2 | 5.0 | 5.7 |
| 112 | 6.2 | 2.2 | 4.9 |
| 423 | 4.2 | 3.6 | 3.6 |
| 447 | 2.3 | 6.7 | 5.4 |