МАВЗУ. БИЛВОСИТА ВА ИККИ БОСҚИЧЛИ ЭНГ КИЧИК КВАДРАТЛАР УСУЛИ

1. Тенгламалар тизимидаги эндоген кўрсаткичларнинг сони.
2. Билвосита энг кичик квадратлар усулиниг босқичлари.
3. Икки босқичли энг кичик квадратлар усулини қўллаш шартлари ва тартиби

1. Тенгламалар тизимидаги эндоген кўрсаткичларнинг сони

Одатда иқтисодий кўрсаткичлар ўзаро боғланган бўлишади. Бундай кўрсаткичлар (ўзгарувчилар) ўртасидаги муносабатлар таркиби бир вақтли тенгламалар тизими ёрдамида кўрсатилиши мумкин. Мазкур тенгламаларда қуйидаги турдаги ўзгарувчилар мавжуд бўлади:

- **эндоген**, тизим ичида аниқланувчи, боғлиқли ***y*** ўзгарувчилар;

- **экзоген**, қиймати ташқаридан бериладиган, бошқариладиган, башоратланувчи, таъсир этувчи ***x*** ўзгарувчилар;

- **олдиндан белгиланган** ўзгарувчилар, хам жорий вақтдаги экзоген ўзгарувчиларни, хам лаг ўзгарувчилар (ўтган даврлар учун экзоген ва эндоген ўзгарувчилар)ни ўз ичига оладиган.

Ҳар бир тизимнинг тенгламасини керакли ва етарли идентификация шарти бажарилишига текшириб чиқамиз. **Биринчи тенгламада** учта эндоген ўзгарувчилар: y_1 ,y_2 ва y_3 (**H=3**) мавжуд. Унда экзоген ўзгарувчилар x_3 ва x_4 (**D=2**) қатнашмаяпти. Керакли идентификация шарти бажарилган **D+1=H**.

Керакли шартга текшириш учун x_3 ва x_4ўзгарувчилар коэффициентларидан иборат бўлган матрицасини тузамиз (3-жадвал). Жадвалнинг биринчи устунида экзоген ўзгарувчилар x_3 ва x_4 коэффициентлари тизимининг 2 ва 3 тенгламалиридан олинган деб кўрсатилган. Иккинчи тенгламада мазкур ўзгарувчилар мавжуд бўлиб, уларнинг коэффициентлари a_{23} ва a_{24} ларга мос равишда тенг. Учинчи тенгламада юқоридаги ўзгарувчилар қатнашмайди, яъни уларнинг коэффициентлари нолга тенг. Матрицасининг иккинчи сатри нолдан иборат бўлгани учун, матрицанинг детерминанти хам нолга тенг. Демак, етарли шарти бажарилмаган ва биринчи тенгламани идентификацияланадиган деб ҳисобласа бўлмайди.

1-жадвал

x_3 ва x_4 ўзгарувчилар коэффициентларидан тузилган матрица.

Тенгламалардан олинган ўзгарувчиларнинг коэффициентлари	Ўзгарувчилар	
	x_3	x_4
2	a_{23}	a_{24}
3	*0*	*0*

Иккинчи тенгламада иккита эндоген ўзгарувчилар:y_1 и y_2 (**H=2**) мавжуд. Бунда экзоген ўзгарувчи x_1 (**D=1**) қатнашмаяпти. Керакли идентификация шарти бажарилган **D+1=H**.

Керакли шартга текшириш учун иккинчи тенгламада мавжуд бўлмаган y_3*ва* x_1ўзгарувчилар коэффициентларидан иборат бўлган матрицасини тузамиз (2 - жадвал).

2 -жадвал

y_3 ва x_1 ўзгарувчилар коэффициентларидан тузилган матрица.

Тенгламалардан олинган ўзгарувчиларнинг коэффициентлари	Ўзгарувчилар	
	y_3	x_1
1	b_{13}	a_{11}
3	*-1*	a_{31}

Тенгламанинг чап томонида жойлашган учун учинчи тенгламада y_3 ўзгарувчининг коэффициенти -1 тенг.Ҳақиқатда, учинчи тенгламани қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин $0= b_{31}y_1 + b_{32}y_2 -1\ y_3 +a_{31}x_1 + a_{32}x_2$, бунда $b_{33} = -1$ тенглама аниқ шаклланмоқда.

Умумий ҳолда ТМШ ўзгарувчиларнинг коэффициентлар матрицаси кўринишида ифодаланиши мумкин. Бу ҳолатда иккинчи тенглама қуйидаги вектор билан белгиланиши мумкин $(b_{31}, b_{32}, -1, a_{31}, a_{32}, 0, 0)$, ҳамда бутун бир вақтли тенгламалар тизими қуйидаги матрица билан ифодаланади:

$$\begin{pmatrix} -1 & b_{12} & b_{13} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & 1 & -1 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (18.3)$$

2-жадвалда келтирилган матрицанинг детерминанти нолга тенг эмас ва даражаси 2га тенг. Демак, етарли шарти бажарилган ва иккинчи тенглама идентификацияланадиган.

Учинчи тенгламада учта эндоген ўзгарувчилар: y_1 ,y_2 ва y_3 (**H=3**) мавжуд. Бунда экзоген ўзгарувчилар x_3 ва x_4 (**D=2**) қатнашмайди. Керакли идентификация шарти бажарилган **D+1=H**.

Керакли шартга текшириш учун учинчи тенгламада мавжуд бўлмаган x_3 *ва* x_4 ўзгарувчилар коэффициентларидан иборат бўлган матрицасини тузамиз (3-жадвал). Жадвалга биноан матрицанинг детерминанти нолга тенг (биринчи сатри нолдан иборат). Демак, етарли шарти бажарилмаган ва учинчи тенгламани идентификацияланадиган деб ҳисобласа бўлмайди.

3-жадвал

x_3 ва x_4 ўзгарувчилар коэффициентларидан тузилган матрица.

Тенгламалардан олинган ўзгарувчиларнинг коэффициентлари	Ўзгарувчилар	
	x_3	x_4
1	*0*	*0*
2	a_{23}	a_{24}

Эконометрик моделларда айрим ҳолларда (масалан, $y_3=y_1+y_2+x_1$ кўринишида) ўзгарувчиларнинг коэффициентларини баҳолашни талаб қилинмайди ва тенгламани идентификациялашга текшириш керак эмас, лекин бутун тизимни идентификацияга текширишда мазкур тенгламалар қатнашади. Айрим ҳолатларда моделда қатнашадиган озод ва қолдиқ ҳадлар (a_{01}, a_{02}, a_{03} ,…ε_1, ε_2, ε_3,…) идентификациялаш муаммосига таъсир этмайди.

2. Билвосита энг кичик квадратлар усулиниг босқичлари

Таркибий моделни коэффициентларини баҳолашда бир қатор усуллар қўлланилади.

Аниқ идентификацияланадиган таркибий моделда қўлланадиган **билвосита энг кичик квадратлар усулини (БЭКК)** кўриб чиқамиз. Мазкур усулини иккита эндоген ва иккита экзоген кўрсаткичлардан иборат бўлган қуйидаги идентификацияланадиган модел мисолида кўриб чиқамиз:

$y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + \varepsilon_1$ (17.5)

$y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2$

Моделни тузиш учун 1-жадвалда келтирилган маълумотлар билан фойдаланамиз.

1 –жадвал. Ҳақиқий маълумотлар

N	$У_1$	y_2	x_1	x_2
1	33,0	37,1	3	11
2	45,9	49,3	7	16
3	42,2	41,6	7	9
4	51,4	45,9	10	9
5	49,0	37,4	10	1
6	49,3	52,3	8	16
Сумма	270,8	263,6	45	62
Ўртача қиймат	45,133	43,930	7,500	10,333

Таркибий моделни келтирилган шаклига тубдан ўзгартирамиз:

$y_1 = d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + u_1$

$y_2 = d_{21} x_1 + d_{22} x_2 + u_2$

u_1ва u_1 – тасодифий ҳатолар.

Ҳар бир келтирилган шаклдаги тенгламаси учун *d* коэффициентларини ҳисоблашда ЭКК усули қўлланилиши мумкин.

Ҳисоблашни осонлаштириш учун ўртача даражадан $\boldsymbol{y}=y-y_{cp}$ ва $\boldsymbol{x}=x-x_{cp}$ (y_{cp} *ва* x_{cp} –ўртачалар) четланишлар билан фойдаланса бўлади. Тубдан ўзгартирилган 1-жадвалдаги маълумотлар 2-жадвалга тортилган. Бу ерда d_{ik} коэффициентларни аниқлаш учун керакли оралиқ ҳисоботлар келтирилган. Биринчи келтирилган тенгламанинг d_{ik} коэффициентларини аниқлаш учун қуйидаги нормал тенгламалар тизими билан фойдаланиш мумкин:

$\Sigma\, \boldsymbol{y_1 x_1} = d_{11}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1^2} + d_{12}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1 x_2}$

$\Sigma\, \boldsymbol{y_1 x_2} = d_{11}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_1 x_2} + d_{12}\, \Sigma\, \boldsymbol{x_2^2}$

2–жадвалда ҳисобланган қийматларни юқоридаги тенгламага суммани ўрнига қўйиб чиқиб, қуйидагини оламиз:

$83{,}102 = 33{,}5 d_{11} - 29{,}001 d_{12}$

$-20{,}667 = -29{,}001 d_{11} + 155{,}334 d_{12}$

Юқоридаги тенгламаларнинг ечилиши натижасида $\mathbf{d_{11} = 2{,}822}$ **и** $\mathbf{d_{12} = 0{,}394}$ тенг.

2 -жадвал

Келтирилган модел шаклини тузиш учун ўзгартирилган маълумотлар

n	y_1	y_2	x_1	x_2	y_1*x_1	x_1^2	x_1*x_2	y_1*x_2	y_2*x_1	y_2*x_2	x_2^2
1	-12,133	-6,784	-4,500	0,667	54,599	20,250	-3,002	-8,093	30,528	-4,525	0,445
2	0,767	5,329	-0,500	5,667	-0,383	0,250	-2,834	4,347	-2,664	30,198	32,115
3	-2,933	-2,308	-0,500	-1,333	1,467	0,250	0,667	3,910	1,154	3,077	1,777
4	6,267	1,969	2,500	-1,333	15,668	6,250	-3,333	-8,354	4,922	-2,625	1,777
5	3,867	-6,541	2,500	-9,333	9,667	6,250	-23,333	-36,091	-16,353	61,048	87,105
6	4,167	8,337	0,500	5,667	2,084	0,250	2,834	23,614	4,168	47,244	32,115
Сумма	0,002	0,001	0,000	0,002	83,102	33,500	-29,001	-20,667	21,755	134,417	155,334

Келтирилган шаклнинг биринчи тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$y_1 = \mathbf{2{,}822}\, x_1 + \mathbf{0{,}394} x_2 + u_1$

Иккинчи келтирилган тенгламанинг d_{2k} коэффициентларини аниқлаш учун қуйидаги нормал тенгламалар тизими билан фойдаланишимиз мумкин:

$\Sigma\, y_2 x_1 = d_{21}\, \Sigma\, x_1^2 + d_{22}\, \Sigma\, x_1 x_2$

$\Sigma\, y_2 x_2 = d_{21}\, \Sigma\, x_1 x_2 + d_{22}\, \Sigma\, x_2^2$

2–жадвалда ҳисобланган қийматларни юқоридаги тенгламага суммани ўрнига қўйиб чиқиб, қуйидагини оламиз:

$21{,}755 = 33{,}5 d_{21} - 29{,}001 d_{22}$

$134{,}417 = -29{,}001 d_{21} + 155{,}334 d_{22}$

Юқоридаги тенгламаларнинг ечилиши қуйидаги қийматларни беради

$d_{21} = 1{,}668$ и $d_{22} = 1{,}177$.

Келтирилган шаклнинг иккинчи тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$y_2 = \mathbf{1{,}668}\, x_1 + \mathbf{1{,}177} x_2 + u_2$

Келтирилган шаклдан таркибли шаклга ўтиш учун келтирилган модел шаклнинг иккинчи тенгламасидан x_2 ни топамиз:

$x_2 = (y_2 - 1{,}668\, x_1) / 1{,}177$

Бу ифодани келтирилган моделнинг биринчи тенгламасига қўйиб чиқиб, таркибли тенгламани топамиз:

$y_1 = \mathbf{2{,}822}\, x_1 + \mathbf{0{,}394}\, (y_2 - \mathbf{1{,}668} x_1) / 1{,}177 =$

$= \mathbf{2{,}822}\, x_1 + \mathbf{0{,}335}\, y_2 - \mathbf{0{,}558}\, x_1 = \mathbf{0{,}335}\, y_2 + \mathbf{2{,}264} x_1$

Шундай қилиб **$b_{12} = 0{,}335$; $a_{11} = 2{,}264$.**

Келтирилган модел шаклнинг биринчи тенгламасидан x_1ни топамиз:

$x_1 = (y_1 - \mathbf{0{,}394} x_2) / \mathbf{2{,}822}$

Бу ифодани келтирилган моделнинг иккинчи тенгламасига қўйиб чиқиб, таркибли тенгламани топамиз:

$y_2 = \mathbf{1{,}177}\, x_2 + \mathbf{1{,}668}\, (y_1 - \mathbf{0{,}394} x_2) / \mathbf{2{,}822} =$

$= \mathbf{1{,}177}\, x_2 + \mathbf{0{,}591} y_1 - \mathbf{0{,}233} x_2 = \mathbf{0{,}591}\, y_1 + \mathbf{0{,}944} x_2$

Шундай қилиб **$b_{21} = 0{,}591$; $a_{22} = 0{,}944$.**

Таркибли шаклнинг озод ҳадларини қуйидаги тенгламалардан топамиз:

$A_{01} = y_{1,cp} - b_{12}\, y_{2,cp} - a_{11}\, x_{1,cp} = 45,133 - 0,335 * 43,93 - 2,264 * 7,5 = \mathbf{13,436}$
$A_{02} = y_{2,cp} - b_{21}\, y_{1,cp} - a_{22}\, x_{2,cp} = 43,93 - 0,591 * 45,133 - 0,944 * 10,333 = \mathbf{7,502}$
Сўнгги таркибли моделнинг кўриниши оламиз:
$y_1 = a_{01} + b_{12}\, y_2 + a_{11}\, x_1 + \varepsilon_1 = \mathbf{13,436 + 0,335}\ y_2 + \mathbf{2,264}\, x_1 + \varepsilon_1$
$y_2 = a_{02} + b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2 = \mathbf{7,502 + 0,591}\ y_1 + \mathbf{0,944} x_2 + \varepsilon_2$

3. Икки босқичли энг кичик квадратлар усулини қўллаш шартлари ва тартиби

Bir paytli tenglamalar tizimining ko’rinishiga qarab tuzilmaviy model koeffitsientlari turli usullar bilan baholanishi mumkin.
Ularga:

- eng kichik kvadratlar egri usuli;
- eng kichik kvadratlarning ikki qadamli usuli;
- eng kichik kvadratlarning uch qadamli va boshqa usullar kiradi.

Eng kichik kvadratlar egri usulini ko’rib chiqamiz. Bu usul bir necha bosqichda amalga oshiriladi.

1. Tuzilmaviy model keltirilgan shakldagi modelga aylantiriladi;
2. Keltirilgan shakldagi modelning har bir tenglamasiga oddiy EKKUni qo’llanib keltirilgan koeffitsientlari (δ_{ij}) baholanadi;
3. Keltirilgan shakldagi model koeffitsientlari tuzilmaviy shakldagi model koeffitsientlariga o’tkaziladi.

Eng kichik kvadratlar egri usuli (EKKEU)ni ikkita endogen va ikkita ekzogen o’zgaruvchili quyidagi ekonometrik modelga qo’llanishini qo’rib chiqamiz:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Ushbu modelni tuzish uchun 5ta hudud bo’yicha quyidagi ma’lumotlar berilgan bo’lsin:

XUDUD	U₁	U₁	X₁	X₂
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6
O’rtachasi	***4***	***6,2***	***2,4***	***3,4***

Modelning keltirilgan shakli:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + u_1 \\ y_2 = \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + u_2 \end{cases},$$

bu erda, u_1 va u_2 - modelning keltirilgan shakli tasodifiy xatoligi.

Modelni keltirilgan shaklining har bir tenglamasiga oddiy EKKU qo’llab (δ_{ij}) koeffitsientlarni aniqlaymiz.

Hisoblashlarni soddalashtirish uchun o’zgaruvchilarning o’rtacha darajalaridan chetlanishlaridan foydalanish mumkin, ya’ni $y = y - \bar{y}$ va $x = x - \bar{x}$. U holda modelning keltirilgan shaklidagi birinchi tenglamasi uchun normal tenglamalar tizimi quyidagicha bo’ladi:

$$\begin{cases} \sum y_1 x_1 = \delta_{11} \sum x_1^2 + \delta_{12} \sum x_1 x_2 \\ \sum y_1 x_2 = \delta_{11} \sum x_1 x_2 + \delta_{12} \sum x_2^2. \end{cases}$$

Yuqoridagi misol ma’lumotlarida o’rtacha darajadan chetlanishlardan foydalanib quyidagi tenglamalar tizimini yozish mumkin.

$$\begin{cases} 6 = 5,2 \cdot \delta_{11} + 4,2 \cdot \delta_{12} \\ 10 = 4,2 \delta_{11} + 17,2 \delta_{12}. \end{cases}$$

Olingan tenglamalar tizimini echib modelning keltirilgan shaklining birinchi tenglamani olamiz.

$y_1 = 0,82x_1 + 0,373x_2 + u_1$.

Xuddi shunday tartibda modelning keltirilgan shaklining ikkinchi tenglamasiga EKKUni qo'llab quyidagi normal tenglamalar tizimini olamiz.

$$\begin{cases} \sum y_2 \cdot x_1 = \delta_{21} \sum x_1^2 + \delta_{22} \sum x_1 \cdot x_2, \\ \sum y_2 \cdot x_2 = \delta_{21} \sum x_1 x_2 + \delta_{22} \sum x_2^2. \end{cases}$$

Yuqoridagi misol ma'lumotlari asosida quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} -0,4 = 5,2 \cdot \delta_{21} + 4,2 \cdot \delta_{22} \\ -0,4 = 4,2 \cdot \delta_{21} + 17,2 \cdot \delta_{22}. \end{cases}$$

Bundan modelning keltirilgan shakldagi ikkinchi tenglamasini olamiz:

$y_2 = -0,072 \cdot x_1 - 0,00557 \cdot x_2 + u_2$.

Shunday qilib modelning keltirilgan shakli

$$\begin{cases} y_1 = 0,852 \cdot x_1 + 0,373 \cdot x_2 + u_1 \\ y_2 = -0,072 \cdot x_1 - 0,00557 \cdot x_2 + u_2 \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar va topshiriqlar

1. Nima uchun iqtisodiyotda tenglamalar sistemasini qo'llash zaruriyati vujudga keladi?
2. Qanday tenglamalar "standart tenglamalar" deb ataladi?
3. Miliy iqtisodiyot modeli qanday funktsiyalardan tashkil topgan tenglamalarni o'z ichiga oladi?
4. Bog'liq bo'lmagan tenglamalar sistemasini yozib ko'ring-chi.
5. Rekursiv tenglamalar sistemasi ko'rinishidagi modelni qanday tuzish mumkin?
6. O'zaro bog'liq bo'lgan tenglamalar sistemasini yozib ko'ring-chi va u qanday nomlanadi?
7. Endogen va ekzogen o'zgaruvchilar qanday xususiyatlarga ega?
8. Modelning standart shakli qanday xususiyatlarga ega?