2§. Metrik fazolarda kompakt to‘plamlar

Matematik analiz faniga qat’iy asos solishda va uning rivojida Bolsano-Veyershtrass teoremasi va Geyne-Borel lemmalari fundamental ahamiyatga ega. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra sonlar o‘qidagi istalgan chegaralangan cheksiz to‘plam kamida bitta limitik nuqtaga ega. Geyne-Borel lemmasiga ko‘ra sonlar o‘qidagi $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.

Sonlar o‘qidagi chegaralangan cheksiz to‘plamlar va kesmalarning bu xossalarini metrik fazolarda umumlashtirish maqsadida biz kompaktlik tushunchasiga kelamiz.

Kompakt to‘plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. Kompakt to‘plamlar kompakt operatorlarni ta’riflashda va ularni tekshirishda qo‘llaniladi.

Bizga X metrik fazo berilgan bo‘lsin. M va A_α to‘plamlar X ning qism to‘plamlari bo‘lsin. $\{A_{\alpha'}\}$ to‘plamlar sistemasi $\{A_\alpha\}$ to‘plamlar sistemasining qismi bo‘lsin.

3.4-ta’rif. *Agar* $M \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ *bo‘lsa,* $\{A_\alpha\}$ *to‘plamlar sistemasi* M *to‘plamning qoplamasi deyiladi. Agar* $\{A_{\alpha'}\} \subset \{A_\alpha\}$ *qism sistema uchun* $M \subset \bigcup\limits_{\alpha'} A_{\alpha'}$ *bo‘lsa, u holda* $\{A_{\alpha'}\}$ *sistema* M *ning qism qoplamasi deyiladi. Xususiy holda,* $X = \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ *bo‘lsa, u holda* $\{A_\alpha\}$ *to‘plamlar sistemasi* X *fazoning qoplamasi deyiladi.*

3.5-ta’rif. *Agar* $K \subset X$ *to‘plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo‘lsa, u holda* K *kompakt to‘plam deyiladi. Agar* X *fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo‘lsa, u holda* X *kompakt metrik fazo deyiladi.*

Quyida ko‘rsatamizki, sonlar o‘qida $[a,b]$ kesma kompakt to‘plam bo‘lishi bilan bir qatorda R^n va C^n fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to‘plam kompakt to‘plam bo‘ladi. Aksincha, sonlar o‘qi, R^n va C^n fazolar kompakt bo‘lmagan metrik fazolarga misol bo‘ladi.

Endi 3.5-ta’rifga ekvivalent bo‘lgan quyidagi ta’rifni keltiramiz.

3.6-ta’rif. *Agar* K *to‘plamdan olingan ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *ketma-ketlikdan* K *da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa,* K *ga kompakt to‘plam deyiladi.*

3.7-ta’rif. *Agar* M *to‘plamning yopig‘i* $[M]$ *kompakt to‘plam bo‘lsa, yoki ixtiyoriy* $\{x_n\} \subset M$ *ketma-ketlikdan* X *da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo‘lsa,* M *ga nisbiy kompakt to‘plam deyiladi.*

Endi biz R^n yoki C^n fazolardagi to‘plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz. Quyida θ bilan $(0,0,...,0) \in R^n$ nuqta belgilangan.

3.4-teorema. $R_p^n,\ p \geq 1$ $\left(C_p^n,\ p \geq 1\right)$ *metrik fazodagi* K *to‘plam kompakt bo‘lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo‘lishi yetarli va zarurdir.*

Isbot. *Yetarliligi***.** Chegaralangan va yopiq $K \subset R_p^n$ to‘plam berilgan bo‘lsin. K chegaralangan to‘plam bo‘lganligi uchun u biror $B[\theta, r]$ sharda saqlanadi, ya’ni

$$\rho(x,\theta) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq r, \quad \forall x \in K. \tag{3.12}$$

Endi K to‘plamdan ixtiyoriy $x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)$ ketma-ketlik olamiz. $\{x^{(p)}\}$ ketma-ketlik hadlari ham (3.12) tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan esa $\left\{x_1^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$, $\left\{x_2^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}, \ldots, \left\{x_n^{(p)}\right\}_{p=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra $\left\{x_1^{(p)}\right\}$ ketma-ketlikdan biror $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_1^{(p_{k_1})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Chegaralangan $\left\{x_2^{(p_{k_1})}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra biror $x_2^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_2^{(p_{k_2})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda ham $\left\{x_1^{(p_{k_2})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi bo‘ladi. Xuddi shu yo‘l bilan n -chi qadamda chegaralangan $\left\{x_n^{(p_{k_{n-1}})}\right\}$ ketma-ketlikdan Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra biror $x_n^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\left\{x_n^{(p_{k_n})}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Natijada hosil bo‘lgan $\left\{x^{(p_{k_n})} = \left(x_1^{(p_{k_n})}, x_2^{(p_{k_n})}, \ldots, x_n^{(p_{k_n})}\right)\right\}$ ketma-ketlik

$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ elementga yaqinlashadi. K yopiq to‘plam bo‘lganligi uchun $x^{(0)} \in K$ bo‘ladi. 3.6-ta’rifga ko‘ra K kompakt to‘plam bo‘ladi.

*Zaruriyligi***.** Bizga R^n metrik fazodagi K kompakt to‘plam berilgan bo‘lsin. R^n fazoning $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq qoplamasini olamiz. Tabiiyki, $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq sharlar sistemasi K to‘plamni ham qoplaydi. K kompakt to‘plam bo‘lganligi uchun shunday chekli $\{B(\theta, n_i)\}_{i=1}^{l}$ qism sistema mavjudki, u ham K to‘plamni qoplaydi. Agar biz $n_1, n_2, \ldots, n_l$ sonlarning eng kattasini n_0 bilan belgilasak, $B(\theta, n_0)$ ochiq shar K ni saqlaydi. Bu esa K to‘plamning chegaralangan ekanligini bildiradi.

Endi K ning yopiqligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, ya’ni K yopiq bo‘lmasin. U holda $R^n \setminus K$ to‘plamda K ning hech bo‘lmaganda bitta limitik nuqtasi mavjud. Uni x^0 bilan belgilaymiz. Limitik nuqta ta’rifiga ko‘ra x^0 ga yaqinlashuvchi $\{x_k\}$, $x_k \in K$ ketma-ketlik mavjud. K kompakt to‘plam bo‘lganligi uchun $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi $\left\{x_{k_l}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. $\{x_k\}$ ketma-ketlik $x^0 \in R^n \setminus K$ elementga yaqinlashganligi uchun uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi, jumladan $\left\{x_{k_l}\right\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^0 ga yaqinlashadi. Bundan $x^0 \in K$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik K ning yopiq to‘plam ekanligini isbotlaydi. Δ

3.1-natija. $R_p^n,\ p \ge 1$ $\left(C_p^n,\ p \ge 1\right)$ *metrik fazodagi* K *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun, uning chegaralangan bo‘lishi yetarli va zarurdir*.

Metrik fazolarda nisbiy kompaktlik tushunchasi to‘la chegaralanganlik tushunchasi bilan ustma-ust tushadi. Shu maqsadda to‘la chegaralangan to‘plam tushunchasini beramiz. Bizga (X, ρ) metrik fazodan olingan A, M to‘plamlar va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo‘lsin.

3.8-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in M$ *uchun shunday* $a \in A$ *mavjud bo‘lib,* $\rho(x, a) \le \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* A *to‘plam* M *to‘plam uchun* ε *to‘r deyiladi.*

A to‘plam M ning qismi bo‘lishi shart emas, umuman $A \cap M = \varnothing$ bo‘lishi ham mumkin.

3.9-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun* M *to‘plamning chekli* ε *to‘ri mavjud bo‘lsa,* M *ga to‘la chegaralangan to‘plam deyiladi.*

Har qanday to‘la chegaralangan to‘plam chegaralangan bo‘ladi, lekin teskarisi o‘rinli emas.

3.5-teorema. (X,ρ) *to‘la metrik fazodagi* M *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun, uning to‘la chegaralangan bo‘lishi yetarli va zarurdir* [1].

Asosiy funksional fazolardan biri $C[a,b]$ fazodir. Bu fazodagi to‘plamning kompaktlik kriteriysini keltiramiz. Paragraf so‘ngida ℓ_p, $p \geq 1$ fazodagi to‘plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz.

$F \subset C[a,b]$ funksiyalar oilasi berilgan bo‘lsin.

3.10-ta’rif. *Agar shunday* $C > 0$ *mavjud bo‘lib, ixtiyoriy* $\phi \in F$ *va barcha* $x \in [a,b]$ *lar uchun* $|\phi(x)| \leq C$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* F *funksiyalar oilasi tekis chegaralangan deyiladi.*

3.11-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *son mavjud bo‘lib,* $|x_1 - x_2| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *hamda barcha* $\phi \in F$ *lar uchun*

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, F *funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz deyiladi.*

3.6-teorema. *(Arsela teoremasi).* $M \subset C[a,b]$ *to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lishi yetarli va zarurdir.*

Isbot. *Zaruriyligi.* $M \subset C[a,b]$ - ixtiyoriy nisbiy kompakt to‘plam bo‘lsin. $C[a,b]$ to‘la metrik fazo bo‘lgani uchun 3.5-teoremaga ko‘ra, ixtiyoriy ε da M ning chekli $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ elementdan iborat $\varepsilon/3$ - to‘ri mavjud. Har bir φ_i funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi uchun u chegaralangandir, ya’ni

$$\max_{x\in[a,b]} |\varphi_i(x)| \leq K_i, \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

$K = \max\limits_{1\leq i\leq k} K_i + \varepsilon/3$ belgilash kiritamiz. $\varepsilon/3$ - to‘r ta’rifiga ko‘ra, har bir $\varphi \in M$ uchun birorta φ_i da

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, har bir $x \in [a,b]$ uchun

$$|\varphi(x)| \le |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \le K_i + \frac{\varepsilon}{3} \le K.$$

Shunday qilib, M to‘plam funksiyalar oilasi sifatida tekis chegaralangan ekan. Kantor teoremasiga ko‘ra har bir φ_i funksiya $[a,b]$ kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_i > 0$ mavjud bo‘lib, $|x_1 - x_2| < \delta_i$ bo‘lganda

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Aytaylik, $\delta = \min\limits_{1 \le i \le k} \delta_i$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varphi \in M$ uchun φ_i funksiyani shunday tanlaymizki, $\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon/3$ bo‘lsin. U holda $|x_1 - x_2| < \delta$ shart bajarilganda

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

o‘rinli. Bundan M ning tekis darajada uzluksizligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Funksiyalarning $M \subset C[a,b]$ oilasi tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lsin. Agar biz, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M ning chekli ε to‘ri mavjud ekanligini ko‘rsatsak, 3.5-teoremaga ko‘ra M ning nisbiy kompakt to‘plam ekanligi kelib chiqadi. Hamma $\varphi \in M$ va barcha $x \in [a,b]$ uchun $|\varphi(x)| \le K$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ni shunday tanlaymizki, barcha $\varphi \in M$ lar uchun $|x_1 - x_2| < \delta$ bo‘lganda $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ shart bajarilsin. Koordinatalar sistemasining OX o‘qidagi $[a,b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\delta > 0$ dan kichik oraliqlarga bo‘lamiz va bu nuqtalar orqali OY o‘qiga parallel (vertikal) to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Keyin OY o‘qidagi $[-K, K]$ kesmani

$$-K = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\varepsilon/5$ dan kichik oraliqlarga bo‘lamiz va bu bo‘linish nuqtalari orqali OX o‘qiga parallel (gorizontal) to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Shunday qilib, $[a,b] \times [-K, K]$ to‘g‘ri to‘rtburchak gorizontal tomoni δ dan kichik va vertikal tomoni $\varepsilon/5$ dan kichik yacheykalarga ajraladi. Har bir $\varphi \in M$ funksiyaga uchlari (x_k, y_l)

nuqtalarda bo‘lgan va har bir x_k nuqtada $\varphi(x_k)$ dan $\varepsilon/5$ dan kichik chetlangan ψ siniq chiziqni mos qo‘yamiz (bunday siniq chiziq mavjud).

Bu $\psi(x)$ siniq chiziqning tanlanishiga ko‘ra

$$|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|<\frac{\varepsilon}{5},\quad |\varphi(x_{k+1})-\psi(x_{k+1})|<\frac{\varepsilon}{5},\quad |\varphi(x_k)-\varphi(x_{k+1})|<\frac{\varepsilon}{5}$$

bo‘lgani uchun

$$|\psi(x_k)-\psi(x_{k+1})|<\frac{3\varepsilon}{5}.$$

tengsizlik bajariladi. Tuzilishiga ko‘ra ψ funksiya $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada chiziqli bo‘lganligi sababli, barcha $x\in[x_k, x_{k+1}]$ lar uchun

$$|\psi(x_k)-\psi(x)|<\frac{3\varepsilon}{5}.$$

Endi x - $[a,b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi va x_k esa x ga chapdan eng yaqin bo‘linish nuqtasi bo‘lsin. U holda

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\le|\varphi(x)-\varphi(x_k)|+|\varphi(x_k)-\psi(x_k)|+|\psi(x_k)-\psi(x)|\le\varepsilon.$$

Shunday ekan, yuqorida ko‘rsatilgan usulda qurilgan barcha ψ siniq chiziqlar to‘plami chekli va u M to‘plam uchun ε - to‘r bo‘ladi. 3.5-teoremaga ko‘ra M nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Δ

3.11-misol. $C[a,b]$ fazoda

$$F=\left\{\ y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\,dt,\ \ x\in B[0,1]\right\} \tag{3.13}$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0,1]$ to‘plam - $C[a,b]$ fazodagi markazi nol ($x(t)\equiv 0$) nuqtada radiusi 1 ga teng bo‘lgan yopiq shar. $K(s,t)$ - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Arsela teoremasiga ko‘ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko‘rsatish yetarli. $K(s,t)$ funksiya - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda uzluksiz bo‘lganligi uchun u chegaralangan, ya’ni shunday $C>0$ son mavjudki, barcha $s,t\in[a,b]$ lar uchun $|K(s,t)|\le C$ tengsizlik o‘rinli. $x\in B[0,1]$ shartdan $\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|\le 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz:

$$| y(s)| = \left| \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \right| \le \int_a^b |K(s,t)| \cdot | x(t)|\,dt \le C \cdot 1 \cdot (b-a).$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz:

$$| y(s_1) - y(s_2)| = \left| \int_a^b K(s_1,t)x(t)\,dt - \int_a^b K(s_2,t)x(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \int_a^b |K(s_1,t) - K(s_2,t)| \cdot | x(t)|\,dt \le \varepsilon \cdot 1 \cdot (b-a).$$

So‘nggi munosabat $|s_1 - s_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1, s_2 \in [a,b]$ va barcha $x \in B[0,1]$ lar uchun o‘rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Arsela teoremasiga ko‘ra (3.13) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Δ

Endi tekis chegaralangan, lekin tekis darajada uzluksiz bo‘lmagan Φ funksiyalar oilasiga misol keltiramiz.

3.12. $C[0,1]$ fazoda

$$\Phi = \left\{ x_\alpha(t) = \frac{2\alpha t}{1+\alpha^2 t^2}, \quad \alpha \in (0,\infty) \right\} \tag{3.14}$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Arsela teoremasiga ko‘ra (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini tekshirishimiz kerak. $(1-\alpha\, t)^2 = 1 - 2\alpha\, t + \alpha^2 t^2 \ge 0$ tengsizlikdan $| x_\alpha(t)| \le 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta’riflaymiz.

Agar biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $x_\alpha \in \Phi$ va shunday $t_1,\ t_2 \in [0,1]$ lar mavjud bo‘lib $|t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$| x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| \ge \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas deyiladi. Endi $\varepsilon = 1/2$ va $\delta > 0$ - ixtiyoriy son bo‘lsin. Agar $\alpha > \frac{1}{\delta}$ va $t_1 = \frac{1}{\alpha}$, $t_2 = 0$ bo‘lsa, u holda $|t_1 - t_2| = \frac{1}{\alpha} < \delta$ bo‘ladi, ammo

$$|x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| = \frac{2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}}{1 + \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}} = 1 > \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to‘plam emas ekan. Δ

Arsela teoremasining umumlashmasi quyidagicha. C_{MN} bilan M to‘plamni N to‘plamga akslantiruvchi barcha uzluksiz akslantirishlar to‘plamini belgilaymiz. Bu yerda M va N lar kompakt to‘plamlar.

3.7-teorema. *(Arsela teoremasining umumlashmasi). $D \subset C_{MN}$ to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun D ning tekis darajada uzluksiz bo‘lishi yetarli va zarur.*

Endi ℓ_p, $p \geq 1$ fazoda to‘plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

3.8-teorema. *$K \subset \ell_p$ to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning chegaralangan va $\varepsilon > 0$ son qanday bo‘lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $n \geq n_0$ va ixtiyoriy $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in K$ uchun*

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$$

shartning bajarilishi yetarli va zarur.

Isbot. *Zaruriyligi***.** Bizga nisbiy kompakt $K \subset \ell_p$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda u to‘la chegaralangan bo‘lgani uchun, chegaralangan ham bo‘ladi. Endi ikkinchi shartning bajarilishini ko‘rsatamiz.

Biror $\eta > 0$ sonni olamiz va K uchun chekli η - to‘r $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ni quramiz. Har bir $x \in K$ uchun η - to‘rga tegishli x_i elementni shunday tanlaymizki, $\rho_p(x, x_i) < \eta$ bo‘lsin. Har bir $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \ell_p$ element uchun

$S_n x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$ va $R_n x = (0, 0, \ldots, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$ belgilashlarni kiritamiz. U holda x va $\theta = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ elementlar uchun

$$\rho_p(R_n x, \theta) = \rho_p(x, S_n x) \le \rho_p(x, x_i) + \rho_p(x_i, S_n x) \le \rho_p(x, x_i) + \rho_p(S_n x_i, S_n x) +$$
$$+ \rho_p(R_n x_i, \theta) \le 2\rho_p(x, x_i) + \rho_p(R_n x_i, \theta) < 2\eta + \rho_p(R_n x_i, \theta).$$

Aniqlanishiga ko‘ra, har bir belgilangan x element uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho_p(R_n x, \theta) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 .$$

Shuning uchun, shunday n_0 nomer mavjudki, $n \ge n_0$ bo‘lganda barcha $i = 1, 2, \ldots, k$ lar uchun $\rho_p(R_n x_i, \theta) < \eta$ bo‘ladi. Shunday ekan, $n \ge n_0$ bo‘lganda

$$\rho_p(R_n x, \theta) < 3\eta .$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\eta = \varepsilon / 3$ desak,

$$\rho_p(R_n x, \theta) = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$$

bo‘ladi.

Yetarliligi. Chegaralangan $K \subset \ell_p$ to‘plam uchun $\varepsilon > 0$ son qanday bo‘lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $n \ge n_0$ va $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \in K$ larda

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p$$

tengsizlik bajarilsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun K to‘plamning chekli ε - to‘ri mavjudligini ko‘rsatamiz. Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun n_0 nomerni shunday tanlaymizki, barcha $x \in K$ larda

$$\rho_p(R_{n_0} x, \theta) = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon / 2$$

tengsizlik bajarilsin. $K_{n_0} = \{ S_{n_0} x : x \in K \}$ to‘plamni qaraymiz. Har bir $x \in K$ da $\rho_p(R_{n_0} x, \theta) \le \rho_p(x, \theta)$ o‘rinli va K chegaralangan to‘plam bo‘lganligi sababli K_{n_0} ham chegaralangan to‘plamdir.

Har bir $S_{n_0}x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_0},0,0,\ldots)\in K_{n_0}$ nuqtaga $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_0})\in R_p^{n_0}$ nuqtani mos qo‘yish bilan K_{n_0} to‘plamni

$$E_{n_0}=\left\{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_0}):(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n_0},0,0,\ldots)\in K_{n_0}\right\}\subset R_p^{n_0}$$

to‘plamga izometrik mos qo‘yamiz. K_{n_0} chegaralangan to‘plam bo‘lganligi sababli E_{n_0} to‘plam $R_p^{n_0}$ da chegaralangan bo‘ladi. U holda 3.1-natijaga ko‘ra E_{n_0} nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Demak, unga izomorf bo‘lgan K_{n_0} to‘plam ham nisbiy kompaktdir. Shunday ekan, K_{n_0} to‘plam uchun chekli $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ elementli $\varepsilon/2$ - to‘r mavjud. Bu to‘plam K uchun ε - to‘r bo‘ladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x\in K$ uchun $S_{n_0}x\in K_{n_0}$ va shunday $x_i\in\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ element mavjud bo‘lib, $\rho_p(S_{n_0}x,x_i)<\varepsilon/2$ bo‘ladi. U holda

$$\rho_p(x,x_i)=\rho_p(x,S_{n_0}x)+\rho_p(S_{n_0}x,x_i)=\rho_p(R_{n_0}x,\theta)+\rho_p(S_{n_0}x,x_i)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Demak, 3.5-teoremaga ko‘ra K nisbiy kompakt to‘plam bo‘ladi. Δ

2.1. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema

Ma’lumki, analizda ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma keng qo‘llaniladi. Metrik fazolar nazariyasida esa «ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema» deb ataluvchi quyidagi teorema shunga o‘xshash muhim ahamiyatga ega.

3.1-teorema. *X metrik fazo to‘la bo‘lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo‘sh bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isbot. *Zaruriyligi*. X to‘la metrik fazo bo‘lsin va $B_1,B_2,B_3,\ldots$ - ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi bo‘lib, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intilsin. B_n sharning markazi x_n nuqtada va radiusi r_n bo‘lsin. Barcha $m>n$ lar uchun $\rho(x_n,x_m)<r_n$ va $n\to\infty$ da $r_n\to 0$ bo‘lgani uchun, sharlarning markazlari ketma-ketligi $\{x_n\}$ fundamentaldir. X to‘la metrik fazo bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}x_n$$

mavjud. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

bo'lsin. Har bir n da barcha $m > n$ lar uchun $x_m \in B_n$. Shunday ekan, har bir n da x nuqta B_n shar uchun urinish nuqtasi bo'ladi. Barcha n larda B_n yopiq bo'lgani uchun $x \in B_n$. U holda

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing.$$

*Yetarliligi***.** X da ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda bu ketma-ketlik uchun shunday n_1 nomer topiladiki, barcha $n > n_1$ larda $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi x_{n_1} nuqtada va radiusi 1 ga teng B_1 yopiq sharni olamiz. Keyin $n_2 > n_1$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_2$ larda $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ tengsizlik bajarilsin. Markazi x_{n_2} nuqtada va radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng B_2 yopiq sharni olamiz. Tanlanishiga ko'ra, $B_2 \subset B_1$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Endi $n_3 > n_2$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_3$ larda $\rho(x_n, x_{n_3}) < \frac{1}{2^3}$ tengsizlik bajarilsin. Agar shu usulda $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ nuqtalar tanlangan bo'lsa, u holda $x_{n_{k+1}}$ nuqtani shunday tanlaymizki, $n_{k+1} > n_k$ va barcha $n > n_{k+1}$ larda $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ bo'lsin. Yuqoridagidek markazi $x_{n_{k+1}}$ va radiusi $\frac{1}{2^k}$ ga teng bo'lgan yopiq sharni B_{k+1} orqali belgilaymiz. Sharlarni bunday qurish jarayonini davom ettira borib, ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligini hosil qilamiz va ularning radiuslari ketma-ketligi $\left\{ r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$ $k \to \infty$ da nolga intiladi. Teorema shartiga ko'ra,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing \quad \text{va} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

bo‘lsin. Bu sharlar ketma-ketligi umumiy nuqtaga ega va bu nuqtani x deb belgilaymiz. B_k sharlar ketma-ketligining qurilishiga ko‘ra x nuqta $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘ladi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikning $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi x nuqtaga yaqinlashgani uchun, $\{x_n\}$ ham x nuqtaga yaqinlashadi. Shunday qilib, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Δ

3.2-teorema. *(Ber teoremasi). To‘la metrik fazoni hech yerda zich bo‘lmagan sanoqli sondagi to‘plamlar yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin emas*.

Isbot. Faraz qilaylik,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

bo‘lsin, bu yerda M_n larning har biri hech yerda zich bo‘lmagan to‘plamlar. Radiusi 1 ga teng biror B_0 yopiq sharni olamiz. Farazimizga ko‘ra M_1 to‘plam B_0 da zichmas. Shuning uchun radiusi $\frac{1}{2}$ dan kichik shunday yopiq $B_1 \subset B_0$ shar mavjudki, $B_1 \bigcap M_1 = \varnothing$. Hech yerda zichmas M_2 to‘plam B_1 sharda ham zichmas, shunday ekan, radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik shunday $B_2 \subset B_1$ yopiq shar mavjudki, $B_2 \bigcap M_2 = \varnothing$ va hokazo. Jarayonni shu usulda cheksiz davom ettirib, yopiq sharlarning shunday ichma-ich joylashgan $\{B_n\}$ ketma-ketligini hosil qilamizki, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intiladi. 3.1-teoremaga ko‘ra $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq \varnothing$. Faraz qilaylik, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ bo‘lsin. B_n sharlarning tuzilishiga ko‘ra ixtiyoriy n da $x \notin M_n$, shunday ekan, $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, ya’ni $X \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Bu farazimizga zid. Δ

2.2. Metrik fazolarni to‘ldirish

Agar R metrik fazo to‘la bo‘lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to‘la metrik fazo ichiga joylashtirishimiz mumkin.

3.3-ta'rif. *Agar:* 1) *R metrik fazo R^* to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa;* 2) *R to'plam R^* ning hamma yerida zich, ya'ni $[R]=R^*$ bo'lsa, u holda R^* metrik fazo R metrik fazoning to'ldirmasi deyiladi.*

3.3-teorema. *Har bir R metrik fazo to'ldirmaga ega va bu to'ldirma fazo R ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvchi izometriya aniqligida yagonadir.*

Isbot. Dastlab to'ldirma fazoning yagonaligini isbotlaymiz. R^* va R^{**} lar R ning ikkita to'ldirma fazolari bo'lib, ρ_1 va ρ_2 mos ravishda ulardagi masofalar bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, har bir $x^* \in R^*$ uchun shunday $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^*$ bo'ladi. U holda

$$\lim_{m \geq n \to \infty} \rho(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_1(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \to \infty} \rho_2(x_n, x_m) = 0$$

munosabatga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik R, R^* va R^{**} fazolarda fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Shuning uchun, yagona $x^{**} \in R^{**}$ mavjud bo'lib, $\{x_n\} \to x^{**}$. Bu x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Chunki, agar $\{x_n\} \to x^*$ va $\{y_n\} \to x^*$ bo'lsa,

$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{agar } n = 2k-1, \\ y_k, & \text{agar } n = 2k \end{cases}$$

ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi. Tuzilishiga ko'ra, $\{z_n\}$ - fundamental va uning $\{x_k\}$ qismiy ketma-ketligi x^{**} nuqtaga yaqinlashadi. U holda $\{z_n\}$ ning o'zi ham x^{**} ga yaqinlashadi va shunday ekan, $\{y_n\}$ qismiy ketma-ketlik ham x^{**} ga yaqinlashadi. Ko'rsatilgan yo'l har bir $x^* \in R^*$ uchun yagona x^{**} ni mos qo'yadi. R^* va R^{**} o'rtasida $\varphi(x^*) = x^{**}$ moslikni o'rnatamiz. Agar $x \in R$ bo'lsa, $x \in R^*$ va $x \in R^{**}$ bo'ladi, hamda $x_n = x$ statsionar ketma-ketlik x elementga R^* va R^{**} fazolarda yaqinlashadi.

Shuning uchun, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\varphi(x) = x$. Bu usulda aniqlangan φ moslik R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Endi φ ning izometriya ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$\{x_n\} \to x^*,\ x^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{x_n\} \to x^{**},\ x^{**} \in R^{**}$$

va

$$\{y_n\} \to y^*,\ y^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{y_n\} \to y^{**},\ y^{**} \in R^{**}$$

bo‘lsin. U holda metrikaning uzluksizlik xossasiga ko‘ra

$$\rho_1\left(x^*, \mathrm{y}^*\right) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_\mathrm{n}, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

va

$$\rho_2\left(x^{**}, \mathrm{y}^{**}\right) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_\mathrm{n}, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

Bundan

$$\rho_1\left(x^*, \mathrm{y}^*\right) = \rho_2\left(x^{**}, \mathrm{y}^{**}\right).$$

Demak, R^* ni R^{**} ga o‘zaro bir qiymatli akslantiruvchi φ moslik mavjud bo‘lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) barcha $x \in R$ lar uchun $\varphi(x) = x$;

2) agar $x^* \leftrightarrow x^{**}$, $y^* \leftrightarrow y^{**}$ bo‘lsa, u holda $\rho_1\left(x^*, \mathrm{y}^*\right) = \rho_2\left(x^{**}, \mathrm{y}^{**}\right)$.

To‘ldirma fazoning yagonaligi isbotlandi.

Endi to‘ldirma fazoning mavjudligini isbotlaymiz. R ixtiyoriy metrik fazo bo‘lsin. R dan olingan $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ fundamental ketma-ketliklar $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ shartni qanoatlantirsa, ular ekvivalent deb ataladi va $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ ko‘rinishda yoziladi. Tekshirish qiyin emaski, fundamental ketma-ketliklar o‘rtasida kiritilgan bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivdir.

Bundan kelib chiqadiki, R ning elementlaridan tuzilgan barcha fundamental ketma-ketliklar to‘plami har biri o‘zaro ekvivalent ketma-ketliklardan tashkil bo‘lgan va kesishmaydigan sinflarga ajraladi. Endi R^* fazoni aniqlaymiz. R^* ning elementlari sifatida yuqorida aniqlangan o‘zaro ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan iborat sinflarni qabul qilamiz va unda masofani quyidagicha aniqlaymiz. x^* va y^* shunday sinflardan ikkitasi bo‘lsin. Bu sinflarning har biridan ixtiyoriy ravishda bittadan vakil tanlaymiz, ya’ni $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ fundamental ketma-ketliklarni olamiz. x^* va y^* orasidagi masofani

$$\rho^*\left(x^*, \mathrm{y}^*\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3.10}$$

usulda aniqlaymiz. Masofani bu usulda aniqlash nuqsonlardan xoli ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni (3.10) limit mavjud, hamda $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ vakillarning tanlanishiga bog‘liq emas.

Ushbu

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \qquad (3.11)$$

tengsizlik ko‘rsatadiki, agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar fundamental ketma-ketliklar bo‘lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n va m lar mavjudki,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $c_n = \rho(x_n, y_n)$ sonli ketma-ketlik Koshi kriteriysini qanoatlantiradi va shunday ekan, $\{c_n\}$ chekli limitga ega.

Bu limit $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ larning tanlanishiga bog‘liq emas. Haqiqatan ham,

$$\{x_n\} \in x^*,\ \{x'_n\} \in x^* \quad \text{va} \quad \{y_n\} \in y^*,\ \{y'_n\} \in y^*$$

bo‘lsin. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ va $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$$

bo‘ladi. U holda

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

tengsizlikdan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi R^* da (3.10) formula bilan aniqlangan ρ^* akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, 1- va 2- aksiomalar bajariladi. Endi uchburchak aksiomasining bajarilishini tekshiramiz. Berilgan R fazoda uchburchak aksiomasi bajarilgani uchun ixtiyoriy, $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ va $\{z_n\} \in z^*$ fundamental ketma-ketliklar uchun, barcha n larda

$$\rho(x_n, z_n) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)\le\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,z_n)$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni

$$\rho^*(x^*,z^*)\le\rho^*(x^*,y^*)+\rho^*(y^*,z^*).$$

R metrik fazoni R^* ning qism fazosi sifatida qarash mumkinligini ko'rsatamiz.

Har bir $x\in R$ ga $\{x_n=x\}$ statsionar ketma-ketlik va unga ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan sinfni mos qo'yamiz. Bu sinf x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}\subset R$ ketma-ketliklardan iborat. Tuzilishiga ko'ra bu sinf bo'sh emas. Shu bilan birgalikda, agar $x,y\in R$ uchun

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n \quad \text{va} \quad y=\lim_{n\to\infty}y_n$$

bo'lsa, u holda

$$\rho^*(x,y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Chunki, (3.11) ko'ra

$$|\rho(x,y)-\rho(x_n,y_n)|\le\rho(x,x_n)+\rho(y,y_n).$$

Shunday ekan, har bir $x\in R$ ga unga yaqinlashuvchi fundamental ketma-ketliklar sinfi x^* ni mos qo'yish bilan R ni R^* ning ichiga izometrik akslantiramiz. Bundan keyin R va uning R^* dagi aksini farq qilmay R ni R^* ning qism fazosi deb qarash mumkin. Navbat R metrik fazoning R^* ning hamma yerida zich ekanligini ko'rsatishga keldi. Ixtiyoriy $x^*\in R^*$ element va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olamiz. x^* sinfdan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olamiz.

Endi N nomerni shunday tanlaymizki, $n>N$ va $m>N$ bo'lganda $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ bo'lsin. U holda $n>N$ da

$$\rho^*(x_n,x^*)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\le\varepsilon\,.$$

ya'ni x^* ning ixtiyoriy ε - atrofi R ning nuqtasini saqlaydi. Shunday qilib, R ning R^* dagi yopig'i R^* ga teng.

Endi R^* ning to'laligini isbotlash qoldi. Dastlab shuni ta'kidlash lozimki, R^* ning tuzilishiga ko'ra R dan olingan ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik shu ketma-ketlikni saqlovchi $x^*\in R^*$ elementga yaqinlashadi. R fazo R^* da zich bo'lgani uchun R^* dan olingan nuqtalarning ixtiyoriy $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ fundamental ketma-ketligi uchun R da shunday $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ fundamental ketma-ketlik topiladiki,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*\left(x_n, x_n^*\right) = 0.$$

Buning uchun har bir n da $x_n \in R$ nuqtani $\rho^*\left(x_n, x_n^*\right) < 1/n$ shart bo‘yicha tanlash yetarli. Tanlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik R da fundamental va R^* ning aniqlanishiga ko‘ra, biror $x^* \in R^*$ ga yaqinlashadi. U holda

$$\rho^*\left(x^*, x_n^*\right) \le \rho^*\left(x^*, x_n\right) + \rho^*\left(x_n, x_n^*\right)$$

tengsizlikka ko‘ra,

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*\left(x^*, x_n^*\right) = 0,$$

ya’ni $\{x_n^*\}$ ketma-ketlik x^* ga yaqinlashadi. Δ

3.10-misol. X deb ratsional sonlar to‘plamini belgilasak, u to‘la bo‘lmagan metrik fazo bo‘ladi. Uning to‘ldirmasi X^* - haqiqiy sonlardan iborat metrik fazo bo‘ladi. $C_2[a,b]$ to‘la bo‘lmagan metrik fazo bo‘ladi. Uning to‘ldirmasi $L_2[a,b]$ fazodir (8-§ ning 8.18-misoliga qarang).