11-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo‘ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo‘lsin.

11.1-ta’rif. *X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo‘yuvchi*

$$Ax = y \qquad (x \in X, \ \ y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo‘lgan barcha $x \in X$ lar to‘plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya’ni:

$$D(A) = \{ x \in X : Ax \quad \text{mavjud} \ \ \text{va} \quad Ax \in Y \}.$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo‘lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko‘pxillilik (8.6-ta’rifga qarang) bo‘lishi talab qilinadi, ya’ni agar $x, y \in D(A)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha\, x + \beta\, y \in D(A)$.

11.2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlar uchun*

$$A(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A\, x + \beta\, A\, y$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, A ga chiziqli operator deyiladi.

11.3-ta’rif. *Bizga $A : X \to Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo‘lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.*

11.3-ta’rifga teng kuchli quyidagi ta’riflarni keltiramiz.

11.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo‘lib, $\| x - x_0 \| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun*

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

11.5-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\| A x_n - A x_0 \| \to 0$ bo'lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Agar A operator ixtiyoriy $x \in D(A)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, A uzluksiz operator deyiladi.

11.6-ta'rif. *$Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning yadrosi deb ataladi va u $KerA$ bilan belgilanadi.*

11.7-ta'rif. *Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to'plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deb ataladi va u $\mathrm{Im} A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.*

Matematik simvollar yordamida operator yadrosi va qiymatlar sohasini quyidagicha yozish mumkin:

$$KerA = \{ x \in D(A) : Ax = \theta \},$$

$$R(A) := \mathrm{Im} A = \{ y \in Y : \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } \quad y = Ax \}.$$

Chiziqli operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko'pxillilik bo'ladi. Agar $D(A) = X$ bo'lib, A uzluksiz operator bo'lsa, u holda $KerA$ yopiq qism fazo bo'ladi, ya'ni $KerA = [KerA]$. A operator uzluksiz bo'lgan holda ham $\mathrm{Im} A \subset Y$ yopiq qism fazo bo'lmasligi mumkin.

Chiziqli operatorlarga misollar.

11.1-misol. X - ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo'lsin.

$$Ix = x, \quad x \in X$$

akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tengliklardan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I x + \beta I y, \quad \| I(x - x_0) \| = \| x - x_0 \|.$$

Qo'shimcha qilib aytishimiz mumkinki, uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o'rinli:

$$D(I) = X, \; R(I) = X, \quad KerI = \{\theta\}.$$

11.2. X va Y ixtiyoriy chiziqli normalangan fazolar bo‘lsin.

$$\Theta : X \to Y, \quad \Theta x = \theta$$

operator nol operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Nol operatorning chiziqliligi va uzluksizligi bevosita ta’rifdan kelib chiqadi. Uning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$D(\Theta) = X, \qquad R(\Theta) = \{\theta\}, \qquad Ker(\Theta) = X .$$

11.3. Aniqlanish sohasi $D(A) = C^{(1)}[a,b] \subset C[a,b]$ bo‘lgan va $C[a,b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad (Af)(x) = f'(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator differensial operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Uning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f, g \in D(A)$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lgan $\alpha f + \beta g$ elementga A operatorning ta’sirini qaraymiz:

$$(A(\alpha f + \beta g))(x) = (\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha (Af)(x) + \beta (Ag)(x).$$

Biz bu yerda yig‘indining hosilasi hosilalar yig‘indisiga tengligidan, hamda o‘zgarmas sonni hosila belgisi ostidan chiqarish munkinligidan foydalandik. Demak, A operator chiziqli ekan. Uni nol nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz. Ma’lumki, $A\theta = \theta$, bu yerda θ - $C[a,b]$ fazoning nol elementi, ya’ni $\theta(x) \equiv 0$. Endi nolga yaqinlashuvchi $f_n \in D(A)$ ketma-ketlikni tanlaymiz. Umumiylikni buzmagan holda $a = 0,\ b = 1$ deymiz.

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \| f_n \| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 .$$

Ikkinchi tomondan,

$$(Af_n)(x) = x^n, \quad \lim_{n\to\infty} \| Af_n - A\theta \| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le x\le 1} |x^n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ne 0 .$$

Demak, A operator nol nuqtada uzluksiz emas ekan. 11.2-teoremaga ko‘ra differensial operator aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega.

Uning qiymatlar sohasi va yadrosi uchun quyidagilar o‘rinli:

$$R(A) = C[a,b], \qquad KerA = \{const\}.$$

11.4. Endi $C[a, b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi B operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Bf)(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) dt \tag{11.1}$$

Bu operator integral operator deyiladi. Bu yerda $K(x, y)$ funksiya $[a,b]\times[a,b]$ - kvadratda aniqlangan, uzluksiz. $K(x, y)$ integral operatorning o‘zagi (yadrosi) deyiladi. B operatorni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, ixtiyoriy $f \in C[a,b]$ uchun $K(x,t) f(t)$ funksiya x va t ning uzluksiz funksiyasidir. Matematik analiz kursidan ma’lumki,

$$\int_a^b K(x,t) f(t) dt$$

integral parametr $x \in [a,b]$ ning uzluksiz funksiyasi bo‘ladi. Bulardan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)$ uchun $D(B) = C[a, b]$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Integral operatorning chiziqli ekanligi integrallash amalining chiziqlilik xossasidan kelib chiqadi, ya’ni ixtiyoriy $f, g \in C[a, b]$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun

$$(B(\alpha f + \beta g))(x) = \int_a^b K(x,t)(\alpha f(t) + \beta g(t)) dt =$$

$$= \alpha \int_a^b K(x,t) f(t) dt + \beta \int_a^b K(x,t) g(t) dt = \alpha (Bf)(x) + \beta (Bg)(x)$$

tengliklar o‘rinli. Endi integral operator B ning uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. $f_0 \in C[a, b]$ ixtiyoriy tayinlangan element va $\{f_n\} \subset C[a, b]$ unga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin. U holda

$$\| Bf_n - Bf_0 \| = \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^b K(x,t)(f_n(t) - f_0(t)) dt \right| \le$$

$$\le \max_{a \le x \le b} | f_n(t) - f_0(t) | \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^b K(x,t) dt \right| = C \cdot \| f_n - f_0 \|. \tag{11.2}$$

Bu yerda

$$C=\max_{a\le x\le b}\int_a^b |K(x,t)|dt.$$

C ning chekli ekanligi $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning chegaralangan ekanligidan kelib chiqadi. Agar (11.2) tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|Bf_n-Bf_0\|\le C\cdot\lim_{n\to\infty}\|f_n-f_0\|=0$$

ekanligini olamiz. Agar $\|Bf_n-Bf_0\|\ge 0$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$\lim_{n\to\infty}\|B\,f_n-B\,f_0\|=0.$$

Shunday qilib, B integral operator ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

B integral operatorning qiymatlar sohasi va yadrosi integral operatorning o'zagi - $K(x,y)$ funksiyaning berilishiga bog'liq. Masalan, $K(x,t)\equiv 1$ bo'lsa, B operatorning qiymatlar sohasi $\mathrm{Im}B$ o'zgarmas funksiyalardan iborat, ya'ni $\mathrm{Im}\,B=\{f\in C[a,b]:f(t)=const\}$, uning yadrosi $KerB$ o'zgarmasga ortogonal funksiyalardan iborat, ya'ni

$$KerB=\{f\in C[a,b]:\int_a^b f(t)dt=0\}.$$

11.8-ta'rif. *Bizga X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, barcha $x\in M$ uchun $\|x\|\le C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan deyiladi.*

11.9-ta'rif. *X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A)=X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.*

Chiziqli operatorning chegaralanganligini tekshirish uchun quyidagi ta'rif qulaydir.

11.10-ta'rif. *$A:X\to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in D(A)$ uchun*

$$\|Ax\|\le C\cdot\|x\| \tag{11.3}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

11.11-ta'rif. *(11.3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi, va u $\| A \|$ bilan belgilanadi, ya'ni*

$$\| A \| = \inf C .$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \|$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

11.1-teorema. *X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\| A \|$ uchun*

$$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \tag{11.4}$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} .$$

A chiziqli operator bo'lgani uchun

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| .$$

Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leq \alpha .$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\| Ax \| \leq \alpha \| x \|$. Bundan esa

$$\| A \| \leq \alpha . \tag{11.5}$$

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $x_\varepsilon \neq \theta$ element mavjudki,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\| Ax_\varepsilon \|}{\| x_\varepsilon \|} \leq \| A \|$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lgani uchun,

$$\alpha \leq \| A \| . \tag{11.6}$$

(11.5) va (11.6) lardan $\| A \| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi. Δ

11.1-tasdiq. *Chiziqli chegaralangan* A *operator uchun*

$$\sup_{\| x \| = 1} \| A x \| = \sup_{\| x \| \le 1} \| A x \|$$

tenglik o'rinli.

11.1-tasdiqni mustaqil isbotlang.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(X,Y)$ bilan belgilaymiz. Xususan, $X = Y$ bo'lsa $L(X,X) = L(X)$.

11.1-natija. *Ixtiyoriy* $A \in L(X,Y)$ *va* $x \in D(A)$, $\| x \| = 1$ *uchun*

$$\| A x \| \le \| A \| \tag{11.7}$$

tengsizlik o'rinli.

(11.7) tengsizlikning isboti (11.4) tengsizlikdan kelib chiqadi.

11.12-ta'rif. $A : X \to Y$ *va* $B : X \to Y$ *chiziqli operatorlarning yig'indisi deb,* $x \in D(A) \cap D(B)$ *elementga* $y = Ax + Bx \in Y$ *elementni mos qo'yuvchi* $C = A + B$ *operatorga aytiladi.*

Ravshanki, C chiziqli operator bo'ladi. Agar A, $B \in L(X,Y)$ bo'lsa, u holda C ham chegaralangan operator bo'ladi va

$$\| C \| = \| A + B \| \le \| A \| + \| B \| \tag{11.8}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\| C x \| = \| A x + B x \| \le \| A x \| + \| B x \| \le \| A \| \cdot \| x \| + \| B \| \cdot \| x \| \le \left(\| A \| + \| B \| \right) \| x \| .$$

Bu yerdan (11.8) tengsizlik kelib chiqadi.

11.13-ta'rif. A *chiziqli operatorning* α *songa ko'paytmasi* x *elementga* αAx *elementni mos qo'yuvchi operator sifatida aniqlanadi, ya'ni*

$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax .$$

11.14-ta'rif. $A : X \to Y$ *va* $B : Y \to Z$ *chiziqli operatorlar berilgan bo'lib* $R(A) \subset D(B)$ *bo'lsin.* B *va* A *operatorlarning ko'paytmasi deganda,* *har bir* $x \in D(A)$ *ga* Z *fazoning* $z = B(Ax)$ *elementini mos qo'yuvchi* $C = BA : X \to Z$ *operator tushuniladi.*

Agar A va B lar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda C ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi va

$$\| C \| \le \| B \| \cdot \| A \| \tag{11.9}$$

tengsizlik o'rinli. Haqiqatan ham,

$$\| C x \|_Z = \| B(A x) \|_Z \le \| B \| \cdot \| A x \|_Y \le \| B \| \cdot \| A \| \cdot \| x \|_X .$$

Bu yerdan (11.9) tengsizlik kelib chiqadi.

Operatorlarni qo'shish va ko'paytirish assotsiativdir. Qo'shish amali kommutativ, lekin ko'paytirish amali kommutativ emas.

Agar X va Y lar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, $L(X,Y)$ ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi, ya'ni $p : L(X,Y) \to R$,

$$p(A) = \sup_{\| x \| = 1} \| A x \|$$

funksional normaning 1-3 - shartlarini qanoatlantiradi.

11.2-teorema. X *normalangan fazoni* Y *normalangan fazoga akslantiruvchi* $A : X \to Y$ *chiziqli operator berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar teng kuchli:*

1) A *operator biror* x_0 *nuqtada uzluksiz;*

2) A *operator uzluksiz;*

3) A *operator chegaralangan.*

Isbot. 1) $\to$ 2). Chiziqli A operatorning biror x_0 nuqtada uzluksiz ekanligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekanligini keltirib chiqaramiz.

A operator x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun, x_0 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $A x_n^0 \to A x_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun, $x_n' \to x'$ ekanligidan $Ax_n' \to Ax'$ kelib chiqishini ko'rsatamiz. $y_n' = x_n' - x' + x_0 \to x_0$ deymiz. U holda

$$\lim_{n\to\infty} Ay_n' = \lim_{n\to\infty} A(x_n' - x' + x_0) = \lim_{n\to\infty} (A x_n' - A x' + A x_0) = A x_0 .$$

Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} A x'_n = A x'$$

ekanligini bildiradi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz.

2) $\to$ 3). A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, A chiziqli operator uzluksiz bo‘lsin, lekin chegaralangan bo‘lmasin, ya’ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo‘lib,

$$\| A x_c \| \geq C \| x_c \|$$

bo‘lsin. Agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki, $\| A x_n \| \geq n \| x_n \|$ tengsizlik bajariladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n \| x_n \|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $\xi_n \to \theta$, ya’ni

$$\| \xi_n - \theta \| = \left\| \frac{x_n}{n \| x_n \|} \right\| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| x_n \| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\| A\xi_n - A\theta \| = \left\| A\left(\frac{x_n}{n \| x_n \|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{n \| x_n \|} A x_n \right\| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| A x_n \| \geq 1$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatadi.

3) $\to$ 1). A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksizligini ko‘rsatamiz.

Ta’rifga ko‘ra, shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\| A x \|_Y \leq C \| x \|_X$$

tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ - x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin, u holda $A x_n \to A x$ ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\| A x_n - A x \| = \| A(x_n - x) \| \leq C \| x_n - x \| \to 0,$$

ya’ni $A x_n \to A x$. Δ

11.2-natija. *A chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

11.5-misol. Birlik va nol operatorlarning (11.1 va 11.2-misollar) chegaralangan ekanligini ko'rsatib, ularning normasini hisoblang.

Yechish. Birlik operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini hisoblaymiz. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\| I x \| = \| x \|$ tenglik o'rinli. Ta'rifga ko'ra, I chegaralangan va uning normasi 1 ga teng. Endi nol operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, uning normasini topamiz. Istalgan $x \in E$ uchun $\| \Theta x \| = \| \theta \| = 0$ tenglik o'rinli. Bundan $\| \Theta \| = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Nol operator $L(X, Y)$ chiziqli normalangan fazoning nol elementi bo'ladi.

11.6. 11.3-misolda keltirilgan $A : C[a,b] \to C[a,b]$ differensial operatorning chegaralanmagan ekanligini ko'rsating.

Yechish. Buning uchun A akslantirishda $D(A) = C^{(1)}[0, 1]$ fazodagi birlik shar $B[\theta,1]$ ning tasviri chegaralanmagan to'plam ekanligini ko'rsatish yetarli. Birlik shar $B[\theta,1]$ da yotuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$f_n(x) = x^n, \quad \| f_n \| = \max_{0 \le x \le 1} \left| x^n \right| = 1.$$

U holda

$$(A f_n)(x) = n \cdot x^{n-1}, \quad \| A f_n \| = \max_{0 \le x \le 1} \left| n \cdot x^n \right| = n.$$

Bundan

$$\lim_{n \to \infty} \| A f_n \| = \infty$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, differensial operator chegaralanmagan ekan.

11.7. 11.4-misolda keltirilgan $B : C[a,b] \to C[a,b]$ integral operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsating.

Yechish. 11.4-misolda B operatorning uzluksiz ekanligi ko'rsatilgan edi. 11.2-natijaga ko'ra, u chegaralangan bo'ladi.

11.8. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Bf)(x) = x\, f(x) \tag{11.10}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uzluksiz funksiyalarning ko‘paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B)=C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\| B f\| = \max_{-1\le x\le 1} | x f(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} | x | \cdot \max_{-1\le x\le 1} | f(x)| = 1\cdot \| f \|.$$

Bu tengsizlikdan B operatorning chegaralangan ekanligi va $\| B \| \le 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x)=1$ desak, u holda

$$(B f_0)(x) = x, \quad \| B f_0\| = 1, \quad \| B \| \ge \frac{\| B f_0\|}{\| f_0\|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\| B \| = 1$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosida ham (11.10) tenglik bilan aniqlangan B operator chiziqli chegaralangan bo‘lib, normasi 1 ga teng bo‘ladi.

11.9. Endi ℓ_2 fazoda ko‘paytirish operatorini, ya’ni

$$A:\ell_2 \to \ell_2, \quad (A x)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n\ge 1} | a_n| = a < \infty \qquad (11.11)$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko‘rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $A\,x \in \ell_2$ ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n x_n|^2 \le \sup_{n\ge 1} | a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} | x_n|^2 = a^2 \| x \|^2. \qquad (11.12)$$

Bu munosabatlardan $D(A)=\ell_2$ ekanligini olamiz. Endi uning chiziqli ekanligini ko‘rsatamiz. A operatorning aniqlanishiga ko‘ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha (A x)_n + \beta (A y)_n.$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (11.12) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (11.12) tengsizlikdan $\|A\| \le a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani ((5.8)ga qarang) olamiz. A

operatorning aniqlanishiga ko‘ra, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $A e_n = a_n e_n$ tenglik o‘rinli. Bundan va (11.7) dan

$$\| A \| \geq \| A e_n \| = \| a_n e_n \| = | a_n | \cdot \| e_n \| = | a_n |$$

munosabat kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy $n \in N$ da o‘rinli bo‘lgani uchun

$$\| A \| \geq \sup_{n \geq 1} | a_n | = a \tag{11.13}$$

ni olamiz. Demak, $\| A \| = a$ tenglik isbotlandi. Δ

13-§. Chiziqli uzluksiz operatorlar fazosi

Bu paragrafda biz chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar fazosi $L(X, Y)$ ning to‘laligi haqidagi teoremani isbotlaymiz. Operatorlar ketma-ketligining kuchsiz, kuchli (nuqtali) va tekis (norma bo‘yicha) yaqinlashish ta’riflarini beramiz. Ularni misollarda tahlil qilamiz.

13.1-ta’rif. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X, Y)$ *operatorlar ketma-ketligi uchun shunday* $A \in L(X, Y)$ *operator mavjud bo‘lib,* $\| A_n - A \| \to 0, \ n \to \infty$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga norma bo‘yicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{u} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.2-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in X$ *uchun* $\| A_n x - A x \| \to 0$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchli yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va* $A_n \xrightarrow{s} A$ *shaklda belgilanadi.*

13.3-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $f \in Y^*$ *va ixtiyoriy* $x \in X$ *uchun* $f(A_n x) \to f(A x)$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yoki kuchsiz ma’noda* ($A_n \xrightarrow{w} A$) *yaqinlashuvchi deyiladi.*

13.3-ta’rif Hilbert fazosida quyidagicha bo‘ladi.

13.4-ta’rif. *Agar ixtiyoriy* $x, y \in H$ *uchun* $(A_n x, y) \to (A x, y)$ *bo‘lsa,* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz yaqinlashuvchi deyiladi.*

13.1-misol. $A_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad A_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots)$

operatorlar ketma- ketligining kuchli va kuchsiz ma’noda nol operatorga yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. ℓ_2 Hilbert fazosi bo‘lganligi uchun $A_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma’noda nol operatorga yaqinlashishini 13.4-ta’rifdan foydalanib tekshiramiz. Ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell_2$ uchun

$$\left|(A_n x, y) - (\Theta x, y)\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{n+k}\right|^2 \le \|x\|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \qquad (13.1)$$

munosabat o‘rinli. $y \in \ell_2$ bo‘lganligi uchun

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty.$$

Shunday ekan yaqinlashuvchi qatorning qoldig‘i

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2$$

$n \to \infty$ da nolga intiladi. Bundan (13.1) ga ko‘ra, ixtiyoriy $x, y \in \ell_2$ larda $\left|(A_n x, y) - (\Theta x, y)\right|$ ning $n \to \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operator Θ ga kuchsiz ma’noda yaqinlashar ekan. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma’noda yaqinlashmaydi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - \Theta x\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\| \ne 0.$$

13.2. Quyida berilgan $P_n, Q_n \in L(\ell_2)$ operatorlar ketma-ketligining kuchli va tekis ma’noda birlik va nol operatorlarga yaqinlashishini teksiring.

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = (x_1, x_2, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

$$Q_n = I - P_n, \quad Q_n x = (0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots)$$

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun

$$\|Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n+k}|^2 \to 0,\ n \to \infty.$$

Chunki $x \in \ell_2$, ya’ni

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty.$$

Shunday ekan, oxirgi qatorning qoldig‘i

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n+k}|^2$$

$n\to\infty$ da nolga intiladi. Demak $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga kuchli ma’noda yaqinlashar ekan. Bundan $\{P_n = I - Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligining birlik operator I ga kuchli ma’noda yaqinlashishi kelib chiqadi. Endi $\{Q_n\}$ operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis ma’noda yaqinlashadimi yoki yo‘qmi, shuni tekshiramiz.

$$\|Q_n x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_{n+k}|^2 \le \|x\|^2 .$$

Bundan

$$\|Q_n\|\le 1 \tag{13.2}$$

ekanligini olamiz. Ikkinchi tomondan, $Q_n e_{n+1} = e_{n+1}$. Bundan

$$\|Q_n\| \ge \|Q_n e_{n+1}\| = 1 . \tag{13.3}$$

(13.2) va (13.3) dan ixtiyoriy $n\in N$ uchun $\|Q_n\| = 1$ ga kelamiz. Demak, Q_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis (norma bo‘yicha) yaqinlashmaydi. Bu yerdan $\{P_n\}$ operatorlar ketma-ketligi birlik operator I ga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

13.3. $L_2[-1/2, 1/2]$ Hilbert fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi va

$$(A_n f) = x^n f(x)$$

formula bilan aniqlanuvchi A_n operatorlar ketma-ketligining nol operatorga tekis yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Ixtiyoriy $f\in L_2[-1/2, 1/2]$ uchun

$$\|A_n f\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2}\left|x^n f(x)\right|^2 dt \le \max_{-1/2\le x\le 1/2}\left|x^{2n}\right| \int_{-1/2}^{1/2}|f(x)|^2 dt \le \frac{1}{2^{2n}}\cdot\|f\|^2 . \tag{13.4}$$

Bundan $\|A_n\|\le \frac{1}{2^n}$ tengsizlikni olamiz. Agar biz $0\le\|A_n\|$ ekanligini hisobga olib, $n\to\infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - \Theta \| = 0 .$$

Shunday ekan, A_n operatorlar ketma-ketligi nol operatorga tekis yaqinlashadi.

Yuqorida kuchsiz yaqinlasuvchi operatorlar ketma-ketligi kuchli ma’noda yaqinlashmasligiga (13.1-misol) va kuchli ma’noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligi norma bo‘yicha yaqinlashmasligiga (13.2-misol) misol keltirildi.

Quyida biz tekis yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchli ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘lishini va kuchli ma’noda yaqinlashuvchi operatorlar ketma-ketligining kuchsiz ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘lishini isbotlaymiz.

13.1-lemma. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi biror* $A \in L(X,Y)$ *operatorga tekis yaqinlashsa, u holda* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchli ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko‘ra $\| A_n - A \| \to 0,\ n \to \infty$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| A_n x - A x \| \le \| A_n - A \| \cdot \| x \| .$$

sonli tengsizlikka ega bo‘lamiz. Matematik analizdan ma’lumki, tengsizliklarda limitga o‘tish mumkin. Bunga ko‘ra,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \| A_n x - A x \| \le \lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| \cdot \| x \| = 0 .$$

Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga kuchli ma’noda ham yaqinlashar ekan.

Shunga o‘xshash quyidagi tasdiqni, bevosita ta’rifdan foydalanib isbotlash mumkin.

13.2-lemma. *Agar* $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ *operatorlar ketma-ketligi biror* $A \in L(X,Y)$ *operatorga kuchli ma’noda yaqinlashsa, u holda* $\{A_n\}$ *operatorlar ketma-ketligi* A *operatorga kuchsiz ma’noda ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.*

Isbot. Lemma shartiga ko‘ra, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n x - A x \| = 0 .$$

U holda ixtiyoriy $x \in X$ va $f \in Y^*$ uchun

$$0 \le |\, f(A_n x) - f(A\,x)\,| = \left| f\left(A_n x - A\,x\right)\right| \le \| \,A_n x - Ax\,\| \cdot \| \,f\,\|$$

sonli tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |\, f(A_n x) - f(A\,x)\,| \le \lim_{n\to\infty} \| \,A_n x - Ax\,\| \cdot \| \,f\,\| = 0$$

munosabatni olamiz. Demak, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi kuchsiz ma’noda A operatorga yaqinlashar ekan.

13.1-teorema. *Agar Y to‘la fazo bo‘lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo ham to‘la, ya’ni Banax fazosi bo‘ladi.*

Isbot. $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $n,m \to \infty$ da $\| \,A_n - A_m\,\| \to 0$. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\| \,A_n x - A_m\, x\,\| \le \| \,A_n - A_m\,\| \cdot \| \,x\,\| \to 0, \quad n,m \to \infty .$$

Shuning uchun ixtiyoriy $x \in X$ da $\{A_n x\} \subset Y$ ketma-ketlik fundamentaldir. Y to‘la fazo bo‘lgani uchun $\{A_n x\}$ ketma-ketlik biror $y \in Y$ elementga yaqinlashadi. Demak, har bir $x \in X$ ga $\{A_n x\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lgan yagona $y \in Y$ element mos qo‘yilyapti. Bu moslikni $A: X \to Y$ orqali belgilaymiz:

$$A\,x = \lim_{n\to\infty} A_n x = y\,.$$

Endi $A \in L(X,Y)$ ekanligini ko‘rsatamiz. Chiziqliligi:

$$A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \lim_{n\to\infty} A_n\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2\right) =$$
$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2\,.$$

Endi A ning chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Shartga ko‘ra,

$$\| \,A_n - A_m\,\| \to 0\,, \quad n,m \to \infty\,.$$

Demak, (11-§ ning 6-topshirig‘iga qarang)

$$\left|\, \| \,A_n\,\| - \|A_m\| \,\right| \le \| \,A_n - A_m\,\| \to 0, \quad n,m \to \infty\,.$$

Bundan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. Haqiqiy sonlar fazosi R to‘la bo‘lganligi uchun, $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir, yaqinlashuvchi ketma-ketlik esa chegaralangan bo‘ladi. Ya’ni shunday $K > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$\|A_n\| \le K$$

tengsizlik bajariladi. Norma ta'rifidan

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le K \cdot \|x\|.$$

Bundan esa

$$\|A x\| = \left\| \lim_{n \to \infty} A_n x \right\| = \lim_{n \to \infty} \|A_n x\| \le K \cdot \|x\|.$$

Bu yerda biz normaning uzluksizligidan foydalandik. Endi $\{A_n\}$ ketma-ketlikni chiziqli operatorlar fazosi $L(X, Y)$ da A ga yaqinlashishini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 son mavjudki, barcha $n > n_0$, $p \in N$ va $\|x\| \le 1$ lar uchun

$$\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Agar so'nggi tengsizlikda $p \to \infty$ da limitga o'tsak va normaning uzluksizligidan foydalansak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $\|x\| \le 1$ lar uchun

$$\|A x - A_n x\| \le \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shuning uchun ixtiyoriy $n > n_0$ da

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax - A_n x\| \le \varepsilon$$

Demak, $L(X, Y)$ fazodagi norma ma'nosida

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

Shunday qilib, $L(X, Y)$ fazo to'la fazo ekan. Δ

13.1-natija. X *chiziqli normalangan fazoga qo'shma bo'lgan* $X^* = L(X, C)$ *fazo Banax fazosidir.*

Isbot. Kompleks sonlar to'plami C to'la fazo, shuning uchun 13.1-teoremaga ko'ra, $L(X, C)$ Banax fazosi bo'ladi. Δ

13.4-misol. $L(C_2[a,b], C[a,b])$ fazoni to'lalikka tekshiring.

Yechish. $Y = C[a,b]$ to'la fazo bo'lganligi uchun 13.1-teoremaga ko'ra, $L(C_2[a,b], C[a,b])$ to'la fazo, ya'ni Banax fazosi bo'ladi. Δ

13.5. $L(C[a,b], C_2[a,b])$ fazo uchun 13.1-teorema sharti bajariladimi? U to‘lami?

Yechish. $Y=C_2[a,b]$ fazo to‘la bo‘lmagan (3.8 va 8.12-misollarga qarang) normalangan fazo bo‘lganligi uchun 13.1-teorema sharti bajarilmaydi. Shuning uchun biz $L(C[a,b], C_2[a,b])$ fazoni to‘la fazo deya olmaymiz. Aniqlik uchun $a=-1,\ b=1$ deymiz va $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1,1]$ fazoning to‘la emasligini ko‘rsatishda qo‘llanilgan (3.8-misol va 3.1-chizmaga qarang) uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,\,-1/n],\\ nx, & x\in(-1/n,1/n)\\ 1, & x\in[1/n,1]\end{cases} \tag{13.5}$$

ketma-ketligidan foydalanib, $A_n\in L(C[-1,1],C_2[-1,1])$, $n\in N$ operatorlar ketma-ketligini quyidagicha quramiz:

$$(A_nf)(x)=f_n(x)f(x). \tag{13.6}$$

A_n operatorning chiziqli va uzluksizligi oson tekshiriladi. $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining $L(C[-1,1],C_2[-1,1])$ fazoda fundamental ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|A_n-A_m\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|A_n-A_m\|=\sup_{\|f\|\le 1}\|A_nf-A_mf\|=\sup_{\|f\|\le 1}\sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|^2|f(x)|^2dx}\,. \tag{13.7}$$

(13.7) va

$$\|f\|=\max_{-1\le x\le 1}|f(x)|\le 1$$

ekanligidan foydalansak,

$$\|A_n-A_m\|\le\sqrt{\int_{-1}^{1}|f_n(x)-f_m(x)|^2\,dx}=\|f_n-f_m\|_{C_2[-1,1]} \tag{13.8}$$

tengsizlikni olamiz. $\{f_n\}$ ketma-ketlikning $C_2[-1,1]$ fazoda fundamentalligi 3.8-misolda isbotlangan. (13.8) dan hamda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining fundamentalligi kelib chiqadi. Lekin $\{A_n\}$

operatorlar ketma-ketligi $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ fazoda yaqinlashuvchi emas. Teskaridan faraz qilaylik, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ operatorga yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $f \in C[a,b]$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\| A_n f - Af \| = 0$ tenglik o‘rinli. Ikkinchi tomondan $f_0(x) \equiv 1$ uchun

$$(A_n f_0)(x) = f_n(x), \ \ n \in N$$

tenglik o‘rinli va $(Af_0)(x) = g_0(x)$ deylik. 3.8-misolda $\{f_n\}$ ketma-ketlikning birorta ham uzluksiz funksiyaga $C_2[-1,1]$ fazo normasida yaqinlasha olmasligi ko‘rsatilgan edi, jumladan $\{A_n f_0 = f_n\}$ ketma-ketlik $g_0 = Af_0$ funksiyaga ham yaqinlasha olmaydi. Bu qarama qarshilik $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligining yaqinlashuvchi emasligini bildiradi. Demak, $L(C[-1,1], C_2[-1,1])$ to‘la bo‘lmagan normalangan fazo ekan. Δ

Banax-Shteynxaus teoremasi yordamida ko‘rsatish mumkinki, agar X va Y lar Banax fazolari bo‘lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan ham to‘la bo‘ladi.

13.2-teorema. *(Banax-Shteynxaus yoki tekis chegaralanganlik prinsipi). Agar chiziqli uzluksiz operatorlarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi X Banax fazosining har bir nuqtasida chegaralangan (ya’ni har bir $x \in X$ uchun shunday $M_x > 0$ mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $n \in N$ uchun*

$$\| A_n x \| \le M_x \tag{13.9}$$

tengsizlik o‘rinli) bo‘lsa, u holda bu operatorlarning normalaridan tuzilgan $\{\|A_n\|\}$ sonli ketma-ketlik ham chegaralangan bo‘ladi.

Isbot. Avvalo (13.9) shart bajarilganda shunday

$$B[a_0, r_0] = \{x \in X : \| x - a_0 \| \le r_0\}$$

yopiq shar mavjud bo‘lib, bu sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lishini (ya’ni shunday $M_0 > 0$ son mavjud bo‘lib, ixtiyotiy $x \in B[a_0, r_0]$ va barcha $n \in N$ larda $\| A_n x \| \le M_0$ tengsizlik bajarilishini) ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, ya'ni $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik birorta ham yopiq sharda chegaralangan bo'lmasin. Ixtiyoriy $B[x_0,\varepsilon_0]$ shar olamiz. $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $B[x_0,\varepsilon_0/2]$ sharda chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_1 \in B[x_0,\varepsilon_0/2]$ element va n_1 nomer mavjudki, $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ bo'ladi. A_{n_1} operatorning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_1,\varepsilon_1] \subset B[x_0,\varepsilon_0/2]$ sharda ham bajariladi. $B[x_1,\varepsilon_1/2]$ sharda $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lgani uchun shunday $x_2 \in B[x_1,\varepsilon_1/2]$ element va n_2 nomer mavjudki, $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ shart bajariladi. A_{n_2} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_2,\varepsilon_2] \subset B[x_1,\varepsilon_1/2]$ sharda ham bajariladi va hokazo *k*-chi qadamda $B[x_{k-1},\varepsilon_{k-1}]$ sharning x_k nuqtasida $\|A_{n_k} x_k\| > k$ shart bajariladi. A_{n_k} ning uzluksizligidan bu tengsizlik $B[x_k,\varepsilon_k] \subset B[x_{k-1},\varepsilon_{k-1}/2]$ sharda ham bajariladi. Demak, ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi

$$B[x_0,\varepsilon_0] \supset B[x_1,\varepsilon_1] \supset \Lambda \supset B[x_k,\varepsilon_k] \supset \Lambda$$

yopiq sharlar ketma-ketligining barchasiga qarashli bo'lgan $\bar{x} \in B[x_k,\varepsilon_k]$ element mavjud va barcha $k \in N$ larda $\|A_{n_k} \bar{x}\| > k$ tengsizlik bajariladi. Bu esa (13.9) ga zid. Shunday qilib, $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladigan $B[a_0,r_0]$ yopiq shar mavjud. Ixtiyoriy $x \in B[\theta,1]$ uchun $x' = r_0 x + a_0$ nuqta $B[a_0,r_0]$ sharda yotadi. Shuning uchun, ixtiyoriy n da $\|A_n x'\| \le M_0$. Endi $x = r_0^{-1}(x' - a_0)$ tenglikdan foydalansak,

$$\|A_n x\| = \left\| A_n\left(\frac{1}{r_0}(x' - a_0)\right)\right\| = \frac{1}{r_0}\|A_n x' - A_n a_0\| \le$$

$$\le \frac{1}{r_0}\left(\|A_n x'\| + \|A_n a_0\|\right) \le \frac{1}{r_0}\left(M_0 + \|A_n a_0\|\right) \le \frac{1}{r_0}\left(M_0 + M_{a_0}\right) = M.$$

U holda

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\| \le 1}\|A_n x\| \le M . \ \Delta$$

13.3-teorema. *Agar* X *va* Y *lar Banax fazolari bo'lsa, u holda* $L(X,Y)$ *operatorlar fazosi kuchli yaqinlashishga nisbatan to'ladir.*

Isbot. Istalgan $x \in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, har bir $x \in X$ da $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ mavjud va biz $Ax = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = y$ tenglik bilan aniqlanuvchi A operatorga ega bo'lamiz. Bu operatorning chiziqliligi 13.1-teorema isbotida keltirilgan. Endi uning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Har bir $x \in X$ da $\{A_n x\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, u chegaralangandir. Banax-Shteynxaus teoremasiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in N$ da $\|A_n\| \le M$ o'rinli. Bundan

$$\| Ax \| = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\| = \lim_{n\to\infty} \| A_n x \| \le M \cdot \| x \|.$$

Demak, $\|A\| \le M$. Δ

13.6-misol. 13.2-misolda keltirilgan

$$P_n : \ell_2 \to \ell_2, \quad P_n x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots\right)$$

operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $P_n : \ell_2 \to \ell_2$ operatorlar ketma-ketligi Banax-Shteynxaus teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $X = \ell_2$ va $Y = \ell_2$ - lar Banax fazolari. P_n ning chegaralangan ekanligi oson tekshiriladi. Har bir $x \in \ell_2$ nuqtada $\{P_n x\}$ chegaralangan ekanligi

$$\| P_n x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2} = \| x \| = M_x$$

munosabatdan kelib chiqadi.

13.7. $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to'la fazo bo'ladimi?

Yechish., $X = Y = \ell_2$ lar to'la fazolar bo'lganligi uchun 13.3-teoremaga ko'ra $L(\ell_2)$ fazo kuchli yaqinlashishga nisbatan to'la fazo bo'ladi.

14-§. Teskari operatorlar

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ - uning aniqlanish sohasi, $\operatorname{Im} A$ esa uning qiymatlar sohasi bo'lsin.

14.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $y \in \operatorname{Im} A$ *uchun* $Ax = y$ *tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda* A *teskarilanuvchan operator deyiladi.*

Agar A teskarilanuvchan operator bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi bo'lgan yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni o'rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1} : Y \to X, \quad D\left(A^{-1}\right) = \operatorname{Im} A, \quad \operatorname{Im} A^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x, \;\; x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \;\; y \in D\left(A^{-1}\right) \tag{14.1}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni o'zini-o'ziga akslantiruvchi chiziqli operator bo'lsin. Agar $B \in L(X, X) = L(X)$ operator uchun $BA = I$ bo'lsa, u holda B operator A operatorga chap teskari operator deyiladi. Xuddi shunday, $AC = I$ tenglik bajarilsa, C operator A ga o'ng teskari operator deyiladi.

14.1-tasdiq. *Agar* A *operator uchun ham chap teskari, ham o'ng teskari operatorlar mavjud bo'lsa, u holda ular o'zaro teng.*

Isbot. A uchun B chap teskari, C o'ng teskari operatorlar bo'lsin, u holda

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \;\; \Delta \tag{14.2}$$

14.1-misol. $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots)$ operatorga chap teskari operatorni toping. A o'ngga siljitish operatori deyiladi.

Yechish. $B : \ell_2 \to \ell_2$ bilan chapga siljitish operatorini belgilaymiz:

$$Bx = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Endi BA operatorning $x \in \ell_2$ elementga ta'sirini qaraymiz.

$$BAx = B(Ax) = B(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = I\,x.$$

Demak, B operator A uchun chap teskari operator ekan.

14.2. 14.1-misolda keltirilgan $A : \ell_2 \to \ell_2$ operatorga o'ng teskari operator mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, A ga o‘ng teskari operator mavjud bo‘lsin. Uni $C:\ell_2 \to \ell_2$ orqali belgilaymiz. 14.1-tasdiqqa ko‘ra (14.1-misolga qarang) $B=C$ bo‘ladi, ya’ni

$$Cx = \left(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots\right).$$

Endi AC operatorning $x\in\ell_2$ elementga ta’sirini qaraymiz.

$$ACx = A(Cx) = A\left(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots\right) = \left(0, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\right) \neq Ix.$$

Demak, C operator A uchun o‘ng teskari operator emas ekan. Bundan A uchun o‘ng teskari operatorning mavjud emasligi kelib chiqadi.

14.2-tasdiq. *Agar A uchun bir vaqtda ham o‘ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo‘lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo‘ladi va $A^{-1}=B=C$ tenglik o‘rinli.*

14.2 tasdiqning isboti 14.1-tasdiq va (14.1) tenglikdan kelib chiqadi.

14.1-teorema. *A chiziqli operatorga teskari bo‘lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.*

Isbot. Shuni aytib o‘tish kerakki, $\operatorname{Im} A = D(A^{-1})$ chiziqli ko‘pxillilikdir. Shunday ekan ixtiyoriy α_1, α_2 sonlar va ixtiyoriy $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$ elementlar uchun

$$A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \tag{14.3}$$

tenglikning to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatish yetarli. $Ax_1 = y_1$ va $Ax_2 = y_2$ deymiz. A chiziqli bo‘lgani uchun

$$A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ . \tag{14.4}$$

Teskari operator ta’rifiga ko‘ra,

$$x_1 = A^{-1} y_1, \qquad\qquad x_2 = A^{-1} y_2 .$$

Bu tengliklarni mos ravishda α_1 va α_2 sonlarga ko‘paytirib qo‘shsak,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \ .$$

Ikkinchi tomondan, (14.4) dan va teskari operatorning ta’rifidan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}\left(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2\right)$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi ikki tenglikdan (14.3) tenglikni olamiz. Δ

14.2-teorema. *(Teskari operator haqida Banax teoremasi). A operator X Banax fazosini Y Banax fazosiga biyektiv akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. U holda A^{-1} operator mavjud va chegaralangan.*

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

14.1-lemma. *M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lsin. U holda ixtiyoriy nolmas $y \in X$ elementni*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$$

qatorga yoyish mumkin. Bu yerda $y_k \in M$, $\| y_k \| \le 3 \cdot 2^{-k} \cdot \| y \|$, $k \in N$.

Isbot. $y_1, y_2, \ldots$ elementlarni ketma-ket quramiz. M to'plam X Banax fazosining hamma yerida zich bo'lgani uchun, shunday $y_1 \in M$ mavjudki,

$$\| y - y_1 \| \le \frac{\| y \|}{2}$$

bo'ladi. $y_2 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 \| \le \frac{\| y \|}{4}$$

bo'lsin. Endi $y_3 \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 \| \le \frac{\| y \|}{8}$$

bajarilsin. Umuman $y_n \in M$ elementni shunday tanlaymizki,

$$\| y - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n \| \le \frac{\| y \|}{2^n}$$

bo'lsin. Bunday tanlash mumkin, chunki M to'plam X ning hamma yerida zich. $y_n \in M$ elementlarning tanlanishiga ko'ra

$$\lim_{n \to \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| = 0 ,$$

ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

qator yaqinlashadi va uning yig‘indisi y ga teng. Endi $y_n \in M$ elementlarning normalarini baholaymiz:

$$\| y_1 \| = \| y_1 - y + y \| \le \| y_1 - y \| + \| y \| \le \frac{\| y \|}{2} + \| y \| \le \frac{3\| y \|}{2},$$

$$\| y_2 \| = \| y_2 + y_1 - y + y - y_1 \| \le \| y_2 + y_1 - y \| + \| y - y_1 \| \le \frac{\| y \|}{4} + \frac{\| y \|}{2} \le \frac{3\| y \|}{2^2}$$

va nihoyat

$$\| y_n \| = \| y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y + y - y_1 - \ldots - y_{n-1} \| \le$$

$$\le \| y_n + y_{n-1} + \ldots + y_1 - y \| + \| y - y_1 - \ldots - y_{n-1} \| \le \frac{\| y \|}{2^n} + \frac{\| y \|}{2^{n-1}} \le \frac{3\| y \|}{2^n}. \ \Delta$$

14.2-teoremaning isboti. A biyektiv akslantirish bo‘lganligi uchun A^{-1} operator mavjud va $D(A^{-1}) = Y$. Endi Y fazoda

$$M_k = \left\{ y \in Y : \left\| A^{-1} y \right\| \le k \| y \| \right\}, \ k = 1, 2, \ldots,$$

to‘plamlarni qaraymiz. Y fazoning ixtiyoriy elementi M_k to‘plamlarning birortasida yotadi. Shuning uchun

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k .$$

Ber teoremasiga ko‘ra, M_k to‘plamlarning birortasi qandaydir $B \subset Y$ sharda zich bo‘ladi. Faraz qilaylik, M_n to‘plam B sharda zich bo‘lsin. B shar ichida sharsimon P qatlam olamiz, ya’ni

$$P = \{ z \in B : \beta < \| z - y_0 \| < \alpha, \ \ 0 < \beta < \alpha, \ \ y_0 \in M_n \}.$$

P qatlamni markazi nolda bo‘ladigan qilib parallel ko‘chiramiz va

$$P_0 = \{ z \in Y : \beta < \| z \| < \alpha \}.$$

sharsimon qatlamga ega bo‘lamiz. Birorta $n_0 \in N$ uchun M_{n_0} to‘plam P_0 da zich bo‘lishini ko‘rsatamiz. Agar $z \in P \cap M_n$ bo‘lsa, u holda $z - y_0 \in P_0$ bo‘ladi. Bundan tashqari

$$\left\| A^{-1}(z - y_0) \right\| \le \| A^{-1} z \| + \| (-1) A^{-1} y_0 \| = \| A^{-1} z \| + \| A^{-1} y_0 \| \le n \| z \| + n \| y_0 \| =$$

$$= n\left(\|z - y_0 + y_0\| + \|y_0\|\right) \le n\left(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|\right) = n\|z - y_0\|\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right) \le$$

$$\le n\|z - y_0\|\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right). \tag{14.5}$$

Ma'lumki, $n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)$ miqdor z ga bog'liq emas va biz

$$n_0 = 1 + \left[n\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right)\right]$$

deb olamiz. U holda (14.5) ga ko'ra, $z - y_0 \in M_{n_0}$ bo'ladi. M_n to'plamning P qatlamda zich ekanligidan M_{n_0} to'plamning P_0 qatlamda zich ekanligi kelib chiqadi. Endi Y dan ixtiyoriy nolmas y element olamiz. Shunday λ son mavjudki, $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$ tengsizlik o'rinli, ya'ni $\lambda y \in P_0$ bo'ladi. M_{n_0} to'plam P_0 qatlamda zich bo'lgani uchun λy ga yaqinlashuvchi $y_k \in M_{n_0}$ ketma-ketlik qurish mumkin. U holda $y_k/\lambda \to y$. Ravshanki, $y_k \in M_{n_0}$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \ne 0$ uchun $\frac{y_k}{\lambda} \in M_{n_0}$ bo'ladi. Shunday qilib, M_{n_0} to'plam $Y \setminus \{0\}$ da zich va demak, Y ning o'zida ham zich.

Endi ixtiyoriy nolmas $y \in Y$ elementni olamiz va 14.1-lemmaga ko'ra M_{n_0} to'plamning elementlari orqali qatorga yoyamiz:

$$y = y_1 + y_2 + \Lambda + y_n + \Lambda, \quad \|y_k\| \le 3 \cdot 2^{-k}\|y\|, \ k \in N.$$

X fazoda $x_k = A^{-1}y_k$ elementlardan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \Lambda + x_n + \Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-1}y_k. \tag{14.6}$$

Bu qator qandaydir $x \in X$ elementga yaqinlashadi, chunki

$$\|x_k\| = \left\|A^{-1}y_k\right\| \le n_0\|y_k\| \le 3n_0\frac{\|y\|}{2^k}$$

va

$$\| x \| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \le 3n_0 \| y \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3n_0 \| y \| .$$

(14.6) qatorning yaqinlashuvchiligidan va A ning uzluksizligidan

$$A x = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A x_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y .$$

Bu yerdan $x = A^{-1} y$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari

$$\| A^{-1} y \| = \| x \| \le 3n_0 \| y \| .$$

Bu yerdan

$$\| A^{-1} \| \le 3 \cdot n_0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shunday qilib, A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi isbotlandi. Δ

Berilgan operatorga teskari operatorning mavjudligini ko‘rsatish birmuncha osonroq, lekin teskari operatorni topish masalasi murakkab masaladir. Shuning uchun teskari operatorni topishni soddaroq holdan, ya’ni qaralayotgan fazo o‘lchami chekli bo‘lgan holdan boshlaymiz.

14.3. $A : R^3 \to R^3, \;\; Ax = (x_1, x_2 + x_1, x_3)$ operatorga teskari operator mavjudmi? Agar mavjud bo‘lsa, uni toping.

Yechish. Berilgan A operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A = R^3$ da $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi kerak. Endi $Ax = y$ tenglikdan x ni topamiz:

$$A x = y \Leftrightarrow (x_1, x_2 + x_1, x_3) = (y_1, y_2, y_3).$$

Bundan

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ya’ni

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3) = A^{-1} y .$$

Shunday qilib, A operatorga teskari operator mavjud bo‘lib u

$$A^{-1}: R^3 \to R^3, \quad A^{-1}x = (x_1, x_2 - x_1, x_3)$$

ko‘rinishga ega. 14.1-teoremaga ko‘ra u chiziqli operator bo‘ladi. Δ

14.4. 14.3 misolda qaralgan $A: R^3 \to R^3$ operator teskari operatorlar haqida Banax teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. $X = R^3$ va $Y = R^3$ lar Banax fazolari bo‘lganligi uchun A akslantirishning biyeksiya ekanligini ko‘rsatish yetarli. R^3 fazodan ixtiyoriy ikkita turli $x = (x_1, x_2, x_3)$ va $y = (y_1, y_2, y_3)$ elementlarni olamiz va $Ax \neq Ay$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilaylik, $Ax - Ay = 0$ bo‘lsin. So‘nggi tenglikdan $x = y$ ekanligiga kelamiz. Bu qarama-qarshilik A akslantirishning inyektiv ekanligini ko‘rsatadi. 14.3-misolda ixtiyoriy $y \in R^3$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan edi. Bu esa A akslantirishning syuryektiv ekanligini ko‘rsatadi. Demak, A biyektiv akslantirish ekan. Δ

14.1. Teskari operatorlar haqida ba’zi teoremalar

Biz bu bandda operator teskarilanuvchan bo‘lishining zaruriy va yetarli shartini keltiramiz. Shuningdek teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘lishining yetarli, zarur va yetarli shartlarini keltiramiz.

14.3-teorema. *$A: X \to Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo‘lishi uchun $Ax = \theta$ tenglama faqat $x = \theta$ yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* A teskarilanuvchan bo‘lsin. U holda $Ax = \theta$ tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi. A chiziqli bo‘lgani uchun bu yechim $x = \theta$ bo‘ladi.

Yetarliligi. $Ax = \theta$ tenglama faqat nol yechimga ega bo‘lsin, u holda ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi. Teskarisini faraz qilaylik, biror $y \in \operatorname{Im} A$ uchun yechim ikkita bo‘lsin, ya’ni $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. U holda $A(x_1 - x_2) = \theta$ bo‘ladi. Shartga ko‘ra, $x_1 - x_2 = \theta$. Bundan $x_1 = x_2$. Δ

14.4-teorema. *X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli A operator berilgan bo‘lsin.* $\operatorname{Im} A$ *da chegaralangan* A^{-1}

operator mavjud bo'lishi uchun, shunday $m>0$ *son mavjud bo'lib, ixtiyoriy* $x \in D(A)$ *lar uchun*

$$\| A x \| \geq m \| x \| \tag{14.9}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A^{-1} mavjud va chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\| A^{-1} y \| \leq \frac{1}{m} \| y \|, \quad \forall y \in D\left(A^{-1}\right).$$

U holda

$$\| A x \| = \| y \| \geq m \| A^{-1} y \| = m \| x \| .$$

Demak, (14.9) shart o'rinli.

Yetarliligi. (14.9) shartdan A operatorning o'zaro bir qiymatli ekanligi kelib chiqadi. Teskarisini faraz qilaylik, (14.9) shart bajarilsinu A o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lmasin. U holda shunday $x_1, x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$ elementlar mavjudki,

$$A x_1 = y, \qquad A x_2 = y .$$

Bundan $A(x_1 - x_2) = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. (14.9) tengsizlikka ko'ra,

$$0 \leq m \| x_1 - x_2 \| \leq \| A(x_1 - x_2) \| = 0 .$$

Bu yerdan $x_1 = x_2$ qarama-qarshilikka kelamiz. Demak, A - o'zaro bir qiymatli akslantirish ekan. Shuning uchun, teskari A^{-1} operator mavjud. Endi A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. (14.9) tengsizlikka ko'ra,

$$\| x \| \leq \frac{1}{m} \| A x \| .$$

Ixtiyoriy $y = Ax \in \operatorname{Im} A$ uchun

$$\| A^{-1} y \| \leq \frac{1}{m} \| y \| .$$

Bu yerdan A^{-1} operatorning chegaralangan ekanligi hamda

$$\| A^{-1} \| \leq \frac{1}{m}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Δ

Endi 14.3 va 14.4-teorema shartlarining bajarilishiga doir misollar qaraymiz.

14.5-misol. $C[0,1]$ fazoda x ga ko‘paytirish operatorini (11.8-misolga qarang), ya’ni

$$B: C[0;\,1] \to C[0;\,1], \quad (Bf)(x) = x\,f(x)$$

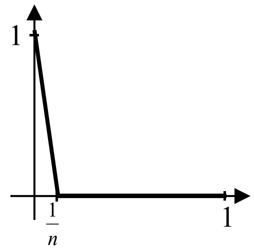
operatorni qaraymiz. Bu operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? B teskarilanuvchan operator bo‘ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya’ni $xf(x) = 0$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglama $C[0,1]$ fazoda faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 14.3-teorema shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B - teskarilanuvchan operator, ya’ni B ga teskari operator mavjud.

14.6. 14.5-misolda qaralgan x ga ko‘paytirish operatori $B: C[0,1] \to C[0,1]$, 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ma’lumki, B - chiziqli operator. B operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilmasligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $C[0,1]$ fazoda har bir elementining normasi 1 bo‘lgan

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{agar } x \in [0,\,1/n] \\ 0, & \text{agar } x \in (1/n,\,1] \end{cases}$$



14.1-chizma.

ketma-ketlikni qaraymiz. Endi $\|B\,g_n\|$ normani hisoblaymiz:

$$\|B\,g_n\| = \max_{0 \le x \le 1} |(B\,g_n)(x)| = \max_{0 \le x \le 1} |x\,g_n(x)| = \max_{0 \le x \le 1/n} \left|x - nx^2\right| = \frac{1}{4n}\|g_n\|.$$

Istalgan $m > 0$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, $\dfrac{1}{4n_0} < m$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\|B\,g_n\| = \frac{1}{4n}\|g_n\| < m\|g_n\|.$$

Demak, B operator uchun (14.9) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $m > 0$ son mavjud emas. 14.5-misolda ko‘rsatildiki, B ga teskari operator mavjud, lekin 14.4-

teoremaning sharti bajarilmaganligi uchun, B ga teskari operator chegaralanmagan bo‘ladi. Δ

14.7. Endi $L_2[-1,1]$ Hilbert fazosini o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi

$$A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], \quad (Af)(x) = (x^2+1)f(x)$$

operatorni qaraymiz. A operator 14.4-teorema shartlarini qanoatlantiradimi? A ga chegaralangan teskari operator mavjudmi?

Yechish. A operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi A operator uchun 14.4-teoremaning (14.9) sharti bajarilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun $\|Af\|$ normani quyidan baholaymiz.

$$\|Af\|^2 = \int_{-1}^{1} \left|(x^2+1)f(x)\right|^2 dx \geq \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2.$$

Biz bu yerda $\left|x^2+1\right| \geq 1$ tengsizlikdan hamda integralning monotonlik xossalaridan foydalandik. So‘nggi tengsizlikdan $\|Af\| \geq \|f\|$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda $m > 0$ son sifatida $(0,1]$ dagi ixtiyoriy sonni olish mumkin. 14.4-teorema tasdig‘idan foydalansak, A ga chegaralangan teskari operator mavjudligi hamda $\left\|A^{-1}\right\| \leq 1$ tengsizlik kelib chiqadi. Aslida $\left\|A^{-1}\right\| = 1$ tenglik o‘rinli. Δ

14.5-teorema. X *- Banax fazosi va* $A \in L(X)$. *Agar* $\|A\| \leq q < 1$ *bo‘lsa, u holda* $I - A$ *operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. $L(X)$ fazoda quyidagi formal qatorni qaraymiz:

$$I + A + A^2 + \Lambda + A^n + \Lambda \ . \qquad (14.10)$$

Ma’lumki, $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Xuddi shuningdek, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. U holda (14.10) qatorning

$$S_n = I + \sum_{k=1}^{n} A^k$$

qismiy yig‘indilari ketma-ketligi Koshi shartini qanoatlantiradi, ya’ni

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|A^{n+1} + A^{n+2} + \Lambda + A^{n+p}\right\| \leq q^{n+1} + q^{n+2} + \Lambda + q^{n+p} \to 0, \ n \to \infty.$$

(14.10) qatorning qismiy yig‘indilari ketma-ketligi S_n - fundamental ekan, $L(X) := L(X,X)$ to‘la bo‘lgani (13.1-teoremaga qarang) uchun

$$S_n \to S \in L(X).$$

Shunday qilib,

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = S .$$

Bundan tashqari

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I - A) = \lim_{n\to\infty}\left(I + A + A^2 + \Lambda + A^n - A - A^2 - \Lambda - A^{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(I - A^{n+1}\right) = I .$$

Xuddi shunday ko‘rsatish mumkinki, $(I - A)S = I$. Demak, S operator $I - A$ operator uchun teskari operator ekan. S operatorning normasi

$$\| S \| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left\| A^n \right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} .$$

Demak, $S = (I - A)^{-1}$ operator chegaralangan va uning normasi

$$\| S \| = \left\| (I - A)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1-q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Δ

14.1-natija. X *- Banax fazosi va* $A \in L(X)$ *bo‘lib,* $\|A\| \le q < 1$ *bo‘lsa, u holda* $I + A$ *operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.*

Natijaning isboti 14.5-teoremadan kelib chiqadi va

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \Lambda + (-1)^n A^n + \Lambda .$$

14.2-lemma. *Agar* $A, B \in L(X)$ *bo‘lib,* $A^{-1}, B^{-1} \in L(X)$ *bo‘lsa, u holda* AB *operatorga chegaralangan teskari operator mavjud va* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ *tenglik o‘rinli.*

Lemmaning isboti $ABB^{-1}A^{-1} = I,\ B^{-1}A^{-1}AB = I$ tengliklardan hamda 14.2-tasdiqdan kelib chiqadi.

14.6-teorema. $A \in L(X)$ *operatorga chegaralangan teskari operator mavjud bo‘lsin. Agar* $A' : X \to X$ *operatorning normasi*

$$\| A' \| < \frac{1}{\| A^{-1} \|}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $B = A - A'$ *operatorga chegaralangan teskari operator mavjud.*

Isbot. B operatorni quyidagicha yozib olamiz: $A - A' = A\left(I - A^{-1}A'\right)$. Endi $A^{-1}A'$ operatorning normasini baholaymiz:

$$\left\| A^{-1}A' \right\| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| A' \| < 1 .$$

14.5-teoremaga ko'ra, $I - A^{-1}A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud. U holda 14.2-lemmaga ko'ra, $A\left(I - A^{-1}A'\right)$ operator ham teskarilanuvchan bo'ladi, hamda

$$B^{-1} = \left(I - A^{-1}A'\right)^{-1} A^{-1}, \quad \left\|B^{-1}\right\| \leq \left\|\left(I - A^{-1}A'\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|A^{-1}\right\|$$

munosabatlar o'rinli. Δ

14.8-misol. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(I - \lambda A)f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy, \; f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 14.5-teoremani va uning 14.1-natijasini qo'llash mumkin?

Yechish. $A \in L(L_2[-\pi, \pi])$ ekanligini tekshiramiz. Shu maqsadda ixtiyoriy $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$ elementlarni va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ sonlarni olamiz va A operatorning $\alpha f + \beta g$ elementga ta'sirini qaraymiz:

$$\left(A(\alpha f + \beta g)\right)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \left(\alpha f + \beta g\right)(y)dy = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy +$$

$$+ \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, g(y)\, dy = \alpha\,(A f)(x) + \beta\,(A g)(x).$$

Biz bu yerda integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalandik. Endi A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\| A f \|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\| A f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y) dy \right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \, f(y) dy \right|^2 . \quad (14.11)$$

Endi Koshi-Bunyakovskiy - $|(f, g)| \leq \| f \| \cdot \| g \|$ tengsizligidan hamda

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

ayniyatlardan va $\cos 2x$ ning 1 ga ortogonalligidan foydalansak, (14.11) dan

$$\| A f \|^2 \leq \pi^2 \| f \|^2 \qquad (14.12)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (14.12) dan

$$\| A f \| \leq \pi \| f \| \Rightarrow \| A \| \leq \pi \qquad (14.13)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Ikkinchi tomondan $f_0(x) = \sin x$ desak, u holda

$$(A f_0)(x) = \pi \cos x \quad \text{va} \quad \| f_0 \| = \sqrt{\pi}, \quad \| A f_0 \| = \pi \| f_0 \|$$

bo‘ladi. Ma’lumki,

$$\| A \| \geq \frac{\| A f_0 \|}{\| f_0 \|} = \pi$$

va (14.13) dan foydalansak, $\| A \| = \pi$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \right)$ lar uchun $\| \lambda A \| < 1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, 14.5-teorema va uning natijasiga ko‘ra, barcha $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \right)$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.5-teorema shartlarining bajarilishi $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘lishini ta’minlaydi. Lekin $\lambda \notin \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \right)$ ekanligidan $I - \lambda A$ operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

Navbatdagi misolimiz bu fikrimizni tasdiqlaydi.

14.9. Parametr λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \right)$ qiymatlarida

$$(I - \lambda A) f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y \, f(y) dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 14.5-teoremani qo‘llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 14.8-misolda $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlar uchun $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjudligi ko‘rsatilgan edi. Bu misolga 14.5-teoremani qo‘llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operator kvadratini hisoblaymiz:

$$\left(A^2 f\right)(x) = A\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y\, f(y)dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y\, f(y)dy\right)dt. \quad (14.14)$$

(14.14) tenglikda t bo‘yicha integralni hisoblash mumkin. Agar biz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t\, dt = 0$$

tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I + \lambda A = (I - \lambda A)^{-1}$ ga ega bo‘lamiz. Haqiqatan ham,

$$(I - \lambda A)(I + \lambda A) = I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

va

$$(I + \lambda A)(I - \lambda A) = I - \lambda A + \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

tengliklar o‘rinli. Isbot jarayonidan ma’lum bo‘ldiki, barcha $\lambda \in R$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo‘ladi.

14.10. Parametr $\lambda \in R$ ning qanday qiymatlarida

$$(Bf)(x) = \left(1 + x^2\right)f(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x\, y\; f(y)dy, \quad f \in L_2[-1, 1] \qquad (14.15)$$

operatorga 14.6-teoremani qo‘llash mumkin?

Yechish. B operatorni $A - \lambda A'$ ko‘rinishda yozib olamiz. $A \in L(L_2[-1, 1])$ operator sifatida (14.7-misolga qarang)

$$(Af)(x) = \left(x^2 + 1\right)f(x), \quad f \in L_2[-1, 1]$$

ni, $A' \in L(L_2[-1, 1])$ operator sifatida esa

$$(A' f)(x) = \int_{-1}^{1} x\, y\; f(y)dy, \quad f \in L_2[-1, 1]$$

ni olamiz. 14.7-misolda A operatorning teskarisi mavjud va $\|A^{-1}\|=1$ ekanligi ko‘rsatilgan edi. 14.6-teoremani (14.15) tenglik bilan aniqlangan $B = A - \lambda A'$ operatorga qo‘llashimiz uchun

$$\|\lambda A'\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1 \tag{14.16}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan λ ning barcha qiymatlarini topishimiz kerak. Shu maqsadda A' operatorning normasini topamiz. Buning uchun $\|A' f\|$ norma kvadratini baholaymiz:

$$\|A' f\|^2 = \int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1} x\, y\, f(y)dy\right|^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx \cdot \left|\int_{-1}^{1} y\, f(y)dy\right|^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \|f\|^2. \tag{14.17}$$

Biz bu yerda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan hamda

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

tenglikdan foydalandik. (14.17) dan

$$\|A'\| \leq \frac{2}{3} \tag{14.18}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan $f_0(x) = x$ desak, u holda

$$(A' f_0)(x) = \frac{2}{3}\cdot x = \frac{2}{3}\cdot f_0(x) \quad \text{va} \quad \|A' f_0\| = \frac{2}{3}\cdot\|f_0\|, \qquad \|f_0\| = \frac{2}{3}$$

bo‘ladi. Ma’lumki,

$$\|A'\| \geq \frac{\|A' f_0\|}{\|f_0\|} = \frac{2}{3}. \tag{14.19}$$

(14.18) va (14.19) lardan $\|A'\| = \frac{2}{3}$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu yerdan barcha $\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ lar uchun (14.16) ning, ya’ni $\|\lambda A'\| < 1$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. 14.6-teoremaga ko‘ra, barcha $\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ larda B operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan. 14.8-misoldagidek, $\lambda \notin \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ekanligidan B

operatorga chegaralangan teskari operator mavjud emas degan xulosa kelib chiqmaydi. Δ

14.11. Quyidagi operatorning teskarilanuvchan emasligini ko‘rsating

$$A: C[0,1] \to C[0,1], \; (Af)(x) = f(0)x + f(1)x^2 . \qquad (14.20)$$

Yechish. Ma’lumki, chiziqli operator teskarilanuvchan bo‘lishi uchun $Af = 0$ tenglama faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega bo‘lishi zarur va yetarli. (14.20) formula bilan berilgan A operator uchun $f_0(x) = x(1-x)$ funksiyani olsak, $f_0(0) = f_0(1) = 0$ bo‘lgani uchun

$$(Af_0)(x) = f_0(0)x + f_0(1)x^2 \equiv 0 .$$

Demak, $Af = 0$ tenglama nolmas f_0 yechimga ega, 14.3-teoremaga ko‘ra, A operator teskarilanuvchan emas. Δ.