6-§. Chiziqli funksionallar

Bu paragraf chiziqli funksionallar, ularning ayrim xossalariga bag'ishlangan.

6.1-ta'rif. *L chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksiya funksional deb ataladi. Agar barcha $x, y \in L$ lar uchun*

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

6.2-ta'rif. *Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun*

$$f(\alpha x)=\alpha f(x),$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ sonlar uchun

$$f(\alpha x)=\overline{\alpha} f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\overline{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son.

6.3-ta'rif. *Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (yoki antichiziqli) funksional deyiladi.*

Chiziqli funksionallarga misollar keltiramiz.

6.1-misol. $R^n \equiv \{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in R\}$ - n o'lchamli vektor fazo va $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ belgilangan element bo'lsin. U holda

$$f: R^n \to R,\ f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

moslik R^n da chiziqli funksional bo'ladi.

$$u(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{z}_k$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $u: C^n \to C$ akslantirish qo'shma chiziqli funksionalni aniqlaydi.

6.2. Quyidagi I va $I^*: C[a,b] \to C$ funksionallar

$$I(x)=\int_a^b x(t)\,dt, \quad I^*(x)=\int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

$C[a,b]$ fazodagi chiziqli va qo‘shma chiziqli funksionallarga misol bo‘ladi.

6.3. $y_0 \in C[a,b]$ berilgan element bo‘lsin. Har bir $x \in C[a,b]$ funksiyaga

$$F(x)=\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt$$

sonni mos qo‘yamiz. Bu funksionalning chiziqliligi integrallash amalining asosiy xossalaridan kelib chiqadi.

$$F^*(x)=\int_a^b \overline{x(t)}\,y_0(t)\,dt$$

funksional $C[a,b]$ fazoda qo‘shma chiziqli funksional bo‘ladi.

6.4. ℓ_2 fazoda chiziqli funksionalga misol keltiramiz. k - belgilangan natural son bo‘lsin. ℓ_2 dagi har bir $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots)$ uchun

$$f_k(x)=x_k$$

deymiz. Bu funksionalning chiziqliligi ko‘rinib turibdi.

6.1. Chiziqli funksionalning geometrik ma’nosi

Bizga L chiziqli fazoda aniqlangan, nolmas f chiziqli funksional berilgan bo‘lsin. Bu f funksional uchun $f(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in L$ nuqtalar to‘plami uning yadrosi deyiladi va $Ker\, f=\{x\in L:\ f(x)=0\}$ ko‘rinishda belgilanadi. $Ker\, f$ to‘plam L ning qism fazosi bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar $x,y\in Ker\, f$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy a,b sonlar uchun

$$f(ax+by)=a\,f(x)+b\,f(y)=0$$

tenglik o‘rinli.

$Ker\, f$ qism fazoning koo‘lchami birga teng. Haqiqatan ham, $Ker\, f$ ga qarashli bo‘lmagan, ya’ni $f(x_0)\neq 0$ bo‘ladigan qandaydir x_0 elementni olamiz. Bunday element mavjud, chunki $f(x)\neq 0$ (aynan nolga teng emas). Umumiylikni chegaralamasdan hisoblashimiz mumkinki, $f(x_0)=1$ (aks holda biz $x_0/f(x_0)$ ni olgan bo‘lar edik, chunki $f(x_0/f(x_0))=1$). Ixtiyoriy x element uchun $y=x-x_0\cdot f(x)$ desak, u holda

$$f(y)=f(x-x_0\cdot f(x))=0,$$

ya’ni $y\in Ker\,f$. Qaralayotgan x element $x=a\,x_0+y,\quad y\in Ker\,f$ ko‘rinishda tasvirlanadi va bu tasvir yagonadir. Haqiqatan ham,

$$x=a\,x_0+y,\ \ y\in Ker\,f \quad \text{va} \quad x=a'\,x_0+y',\ \ y'\in Ker\,f$$

bo‘lsin. U holda

$$(a-a')\,x_0 = y'-y$$

tenglik o‘rinli. Agar $a=a'$ bo‘lsa, $y=y'$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Agar $a-a'\neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$x_0=\frac{y'-y}{a-a'}\in Ker\,f$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $x_0\notin Ker\,f$ shartga zid. Bu qarama-qarshilik tasdiqni isbotlaydi.

Bu yerdan kelib chiqadiki, ikkita x_1 va x_2 elementlar $Ker\,f$ qism fazo bo‘yicha bitta qo‘shni sinfda yotishi uchun $f(x_1)=f(x_2)$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Haqiqatan ham,

$$x_1=f(x_1)x_0+y_1,\ y_1\in Ker\,f,\ \ x_2=f(x_2)x_0+y_2,\ y_2\in Ker\,f$$

tenglikdan

$$x_1-x_2=(f(x_1)-f(x_2))x_0+(y_1-y_2)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu yerdan ko‘rinib turibdiki, $x_1-x_2\in Ker\,f$ bo‘lishi uchun $f(x_1)-f(x_2)=0$ bo‘lishi zarur va yetarli.

$Ker\,f$ qism fazo bo‘yicha har qanday ξ sinf o‘zining ixtiyoriy vakili bilan bir qiymatli aniqlanadi. Bunday vakil sifatida $a\,x_0$ ko‘rinishdagi elementni olish mumkin. Bu yerdan ko‘rinadiki, $L/Ker\,f$ qism fazoning o‘lchami birga teng ekan, ya’ni $Ker\,f$ ning koo‘lchami birga teng.

Chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\, f$ o‘zida nolga aylanadigan funksionalni o‘zgarmas ko‘paytuvchi aniqligida bir qiymatli aniqlaydi.

Haqiqatan ham, f va g funksionallar yadrolari teng bo‘lsin, ya’ni $Ker\, f = Ker\, g$. U holda f uchun $x_0 \in L$ elementni shunday tanlaymizki, $f(x_0) = 1$ bo‘lsin. Ko‘rsatamizki, $g(x_0) \neq 0$. Ixtiyoriy $x \in L$ uchun

$$x = f(x)x_0 + y,\ y \in Ker\, f \quad \text{va} \quad g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0)$$

tengliklarga egamiz. Agar $g(x_0) = 0$ bo‘lsa, $g(x) \equiv 0$ bo‘lar edi. $g(x) = g(x_0)f(x)$ tenglikdan f va g funksionallarning proporsional ekanligi kelib chiqadi.

Koo‘lchami birga teng bo‘lgan ixtiyoriy L' qism fazo berilgan bo‘lsin. U holda shunday f chiziqli funksional mavjudki, $Ker\, f = L'$ bo‘ladi. Buning uchun L' qism fazoda yotmaydigan ixtiyoriy $x_0 \in L$ elementni olamiz va ixtiyoriy $x \in L$ elementni $x = a\, x_0 + y,\ \ y \in L'$ ko‘rinishda yozamiz. Bunday yoyilma yagona. $f(x) = a$ tenglik yordamida aniqlanuvchi chiziqli funksionalning yadrosi $Ker\, f = L'$ bo‘ladi.

L chiziqli fazoda koo‘lchami birga teng bo‘lgan qandaydir L' qism fazo berilgan bo‘lsin. U holda L fazoning L' qism fazo bo‘yicha har qanday qo‘shni sinfi L' qism fazoga parallel bo‘lgan gipertekislik deyiladi (xususan, L' qism fazoning o‘zi θ elementni saqlovchi, ya’ni «koordinata boshidan o‘tuvchi» gipertekislik hisoblanadi). Boshqacha aytganda, L' qism fazoga parallel bo‘lgan M' gipertekislik - bu L' qism fazoni qandaydir $x_0 \in L$ vektorga parallel ko‘chirishdan paydo bo‘ladigan to‘plam, ya’ni

$$M' = L' + x_0 = \{\, y : y = x + x_0,\ x \in L' \}.$$

Ko‘rinib turibdiki, agar $x_0 \in L'$ bo‘lsa, $M' = L'$ bo‘ladi, agarda $x_0 \notin L'$ bo‘lsa, u holda $M' \neq L'$.

Agar f - L chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo‘lsa, $M_f = \{x \in L :\ f(x) = 1\}$ to‘plam $Ker\, f$ qism fazoga parallel gipertekislik bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $f(x_0)=1$ bo‘ladigan x_0 elementni tanlab, ixtiyoriy elementni $x=\alpha x_0+y,\ \ y\in Ker f$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Ikkinchi tomondan, agar M' - koo‘lchami birga teng bo‘lgan L' qism fazoga parallel va koordinata boshidan o‘tmaydigan gipertekislik bo‘lsa, u holda shunday yagona f chiziqli funksional mavjudki,

$$M'=\{x: f(x)=1\}$$

bo‘ladi. Haqiqatan ham, $M'=L'+x_0,\ x_0\in L$ bo‘lsin. U holda har qanday $x\in L$ element yagona ravishda $x=a\,x_0+y,\ \ y\in L'$ ko‘rinishda tasvirlanadi. $f(x)=a$ tenglik yordamida aniqlanadigan chiziqli funksional izlanayotgan funksional bo‘ladi. Uning yagonaligi quyidagidan kelib chiqadi:

Agar $x\in M'$ da $g(x)=1$ bo‘lsa, u holda $y\in L'$ da $g(y)=0$ bo‘ladi. Bundan

$$g(a\,x_0+y)=a=f(a\,x_0+y)$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, L chiziqli fazoda aniqlangan noldan farqli barcha chiziqli funksionallar bilan koordinata boshidan o‘tmaydigan L dagi barcha gipertekisliklar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatildi.

7-§. Qavariq to‘plamlar va qavariq funksionallar

L - haqiqiy chiziqli fazo, x va y uning ikki nuqtasi bo‘lsin. U holda

$$\alpha x+\beta y,\qquad \alpha,\beta\in[0,1],\ \ \alpha+\beta=1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha elementlar to‘plami x va y nuqtalarni tutashtiruvchi kesma deyiladi va u $[x,y]$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$[x,y]=\{\alpha x+\beta y:\quad \alpha,\beta\in[0,1],\ \ \alpha+\beta=1\}.$$

7.1-ta’rif. *Agar $M\subset L$ to‘plam o‘zining ixtiyoriy $x,y\in M$ nuqtalarini tutashtiruvchi $[x,y]$ kesmani ham o‘zida saqlasa, M ga qavariq to‘plam deyiladi.*

7.2-ta'rif. *Agar biror* $x \in E$ *nuqta va ixtiyoriy* $y \in L$ *uchun shunday* $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ *son mavjud bo'lib, barcha* t, $|t| < \varepsilon$ *larda* $x + ty \in E$ *munosabat bajarilsa,* $x \in E$ *nuqta* $E \subset L$ *to'plamning yadrosiga qarashli deyiladi.* $E \subset L$ *to'plamning yadrosi -* $J(E)$ *bilan belgilanadi, ya'ni*

$$J(E) = \left\{ x \in E : \forall\, y \in L,\ \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0,\ \ \forall t \in R,\ |t| < \varepsilon,\ x + ty \in E \right\}.$$

7.3-ta'rif. *Yadrosi bo'sh bo'lmagan qavariq to'plam qavariq jism deyiladi.*

7.1-misol. R^3 fazoda kub, shar, tetrayedr, tekislikda to'g'ri to'rtburchak, doira, uchburchak qavariq jism bo'ladi. ℓ_2 fazodagi

$$B[0,1] = \left\{ x \in \ell_2 :\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \le 1 \right\}$$

birlik shar qavariq jism bo'ladi.

7.2. R^2 da to'g'ri chiziq (kesma) qavariq to'plam bo'ladi, lekin qavariq jism bo'lmaydi. Chunki, uning yadrosi bo'sh to'plam (mustaqil isbotlang).

Agar M qavariq to'plam bo'lsa, u holda uning yadrosi $J(M)$ ham qavariq to'plamdir. Haqiqatan ham,

$$x, y \in J(M) \quad \text{va} \quad z = \alpha x + \beta y,\ \ \alpha, \beta \ge 0,\ \ \alpha + \beta = 1$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy $a \in L$ uchun shunday $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ sonlar mavjudki, $|t_1| < \varepsilon_1,\ |t_2| < \varepsilon_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha t_1, t_2 larda $x + t_1 a$ va $y + t_2 a$ elementlar M to'plamda yotadi. Bundan kelib chiqadiki, barcha $|t| < \varepsilon$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ larda

$$\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = \alpha x + \beta y + \alpha t a + \beta t a = z + ta \in M, \text{ ya'ni } z \in J(M).$$

7.1-teorema. *Istalgan sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plamdir.*

Isbot. Faraz qilaylik,

$$M = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}$$

bo'lib, barcha M_α lar qavariq to'plamlar bo'lsin, x va y lar M ning ikki ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda x va y nuqtalarni tutashtiruvchi $[x, y]$ kesma M_α larning har biriga qarashli va demak, M ga ham qarashli. Shunday qilib, M haqiqatan ham qavariq to‘plam ekan. Δ

Shuni eslatib o‘tamizki, qavariq jismlarning kesishmasi yana qavariq jism bo‘lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin.

7.3. Tekislikdagi $P=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\}$ va $Q=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ \ 1\le y\le 2\}$ qavariq jismlarning kesishmasi

$$P\cap Q=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ y=1\}$$

kesmadan iborat bo‘lib, u qavariq jism emas (7.2-misolga qarang).

Qavariq to‘plam tushunchasi qavariq funksional tushunchasi bilan uzviy bog‘liq.

7.4-ta’rif. *Agar* L *haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan manfiymas* p *funksional*

1) $p(x+y)\le p(x)+p(y),\ \ \forall x,y\in L,$

2) $p(a\,x)=a\,p(x),\ \ \forall a\ge 0$ *va* $\forall\, x\in L$

shartlarni qanoatlantirsa, p *ga qavariq funksional deyiladi.*

Biz bu yerda $p(x)$ miqdorni chekli deb faraz qilmaymiz, ya’ni ayrim $x\in L$ lar uchun $p(x)=\infty$ ham bo‘lishi mumkin. Agar barcha $x\in L$ lar uchun $p(x)$ chekli bo‘lsa, p chekli funksional deyiladi.

7.4-misol. $p{:}C[a,b]\to R$ va

$$p(x)=\int_a^b |\,x(t)\,|\,dt$$

akslantirishning chekli qavariq funksional ekanligini isbotlang.

Isbot. Integralning monotonlik xossasidan, ixtiyoriy $x\in C[a,b]$ uchun $p(x)\ge 0$ ekanligi kelib chiqadi. Endi bizga $C[a,b]$ fazoning ixtiyoriy x va y elementlari berilgan bo‘lsin. U holda

$$p(x+y)=\int_a^b |\,x(t)+y(t)\,|\,dt\le\int_a^b |\,x(t)\,|\,dt+\int_a^b |\,y(t)\,|\,dt=p(x)+p(y)$$

tengsizlik o‘rinli. Xuddi shunday ixtiyoriy x va $\alpha\ge 0$ uchun

$$p(\alpha x)=\int_a^b |\alpha x(t)|dt=\alpha\int_a^b |x(t)|dt=\alpha p(x)$$

tenglik o‘rinli. Demak, p qavariq funksional ekan. Uning chekli qavariq funksional ekanligi $p(x)\le (b-a)\max|x(t)|<\infty$ tengsizlikdan kelib chiqadi. Δ

7.5. $q:C[0,1]\to R$ va

$$q(x)=V_0^1[x]$$

akslantirish chekli bo‘lmagan qavariq funksional bo‘lishini isbotlang.

Isbot. q funksionalning manfiymasligi va qavariq funksional ta’rifidagi 1-2 shartlarning bajarilishi funksiya to‘la o‘zgarishi xossalaridan kelib chiqadi. Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanidan ma’lumki, $C[0,1]$ fazoning $x_0(t)=t\sin(1/t)$ elementi uchun $V_0^1[x_0]=+\infty$ tenglik o‘rinli. Demak, q chekli bo‘lmagan qavariq funksional ekan. Δ

Endi qavariq to‘plamlar bilan qavariq funksionallar orasidagi bog‘lanishni qaraymiz.

7.2-teorema. *Agar $p:L\to R_+$ qavariq funksional va $k>0$ bo‘lsa, u holda*

$$E=\{x\in L:p(x)\le k\}$$

qavariq to‘plam bo‘ladi. Agar p funksional chekli bo‘lsa, u holda E to‘plam yadrosi nol elementni saqlaydigan,

$$J(E)=\{x\in L:p(x)<k\}$$

yadroli qavariq jism bo‘ladi.

Isbot. Agar $x,y\in E$ va $\alpha+\beta=1,\ \alpha,\beta\ge 0$ bo‘lsa, u holda

$$p(\alpha x+\beta y)\le p(\alpha x)+p(\beta y)=\alpha p(x)+\beta p(y)<k\alpha+k\beta=k,$$

ya’ni E - qavariq to‘plam. Endi p chekli funksional, $p(x)<k$, $t>0$ va $y\in L$ bo‘lsin. U holda

$$p(x\pm t y)\le p(x)+t\,p(\pm y)$$

Agar $p(-y)=p(y)=0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy t uchun $x\pm t y\in E$ bo‘ladi. Agar $p(-y)$, $p(y)$ sonlardan hech bo‘lmaganda birortasi noldan farqli bo‘lsa, u holda

$$t < \frac{k - p(x)}{\max(p(y), p(-y))}$$

shartda $x \pm t\,y \in E$ bo‘ladi. Qavariq funksionalning θ nuqtadagi qiymati nolga teng bo‘lgani uchun $\theta \in J(E)$. Δ

Endi $k = 1$ holni qaraymiz. U holda har qanday chekli p qavariq funksional L da $\theta \in J(E)$ bo‘ladigan yagona $E = \{ x \in L : p(x) \le 1 \}$ qavariq jismni aniqlaydi. Aksincha, E - yadrosi nol elementni saqlaydigan qavariq jism bo‘lsin. U holda har bir $x \in L$ ga

$$p_E(x) = \inf\left\{ r > 0 :\ \frac{x}{r} \in E \right\}$$

sonni mos qo‘yuvchi akslantirish qavariq funksional bo‘ladi (mustaqil isbotlang). Bu funksional E qavariq jism uchun *Minkovskiy funksionali* deyiladi.

7.5-ta’rif. L *- haqiqiy chiziqli fazo va* L_0 *- uning biror qism fazosi bo‘lsin.* L_0 *qism fazoda* f_0 *chiziqli funksional va* L *fazoda* f *chiziqli funksional berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy* $x \in L_0$ *uchun* $f(x) = f_0(x)$ *tenglik bajarilsa,* f *chiziqli funksional* f_0 *funksionalning* L *fazoga davomi deyiladi.*

Funksionalning davomi bir qiymatli emas. Funksionalning ixtiyoriy davomi maqsadga muvofiq emas. Odatda funksionalni qandaydir shartni saqlab qolgan holda davom ettirish talab qilinadi.

7.3-teorema. *(Xan-Banax). Aytaylik,* p *-* L *haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional va* L_0 *-* L *ning qism fazosi bo‘lsin. Agar* L_0 *da aniqlangan* f_0 *chiziqli funksional*

$$f_0(x) \le p(x), \quad x \in L_0 \tag{7.1}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f_0 *ni* L *da aniqlangan va* L *da* (7.1) *shartni qanoatlantiruvchi* f *chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin.*

Isbot. $L_0 \ne L$ bo‘lgan holda f_0 chiziqli funksionalni L_0 dan kengroq bo‘lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirish mumkinligini ko‘rsatamiz. L_0 ga qarashli bo‘lmagan ixtiyoriy $z \in L$ elementni olamiz. $L^{(1)}$ bilan

L_0 va z elementlardan tashkil topgan qism fazoni belgilaymiz. $L^{(1)}$ quyidagicha ko‘rinishdagi elementlardan tashkil topgan

$$\{tz + x,\ \ t \in R,\ \ x \in L_0\} = L^{(1)}$$

Agar f_1 funksional f_0 ning $L^{(1)}$ qism fazogacha chiziqli davomi bo‘lsa, u holda

$$f_1(tz + x) = f_1(tz) + f_1(x) = t\, f_1(z) + f_0(x),$$

yoki $f_1(z) = c$ deb olsak,

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Endi c ni shunday tanlaymizki, f_1 funksional (7.1) shartni qanoatlantirsin, ya’ni

$$f_1(tz + x) = tc + f_0(x) \le p(tz + x) \tag{7.2}$$

tengsizlik bajarilsin. Agar $t > 0$ bo‘lsa, (7.2) shart quyidagi shartga teng kuchli:

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \le p\left(z + \frac{x}{t}\right) \quad \text{yoki} \quad c \le p\left(z + \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

$t < 0$ bo‘lsa,

$$c + f_0\left(\frac{x}{t}\right) \ge -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) \quad \text{yoki} \quad c \ge -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Bu ikkala shartni qanoatlantiruvchi c son har doim mavjudligini ko‘rsatamiz. L_0 qism fazodan olingan ixtiyoriy y' va y'' elementlar uchun

$$-f_0(y'') + p(y''+z) \ge -f_0(y') - p(-y'-z) \tag{7.3}$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham, bu tengsizlik quyidagi tengsizlikdan bevosita kelib chiqadi:

$$f_0(y'') - f_0(y') = f_0(y''-y') \le p(y''-y') =$$
$$= p((y''+z) + (-y'-z)) \le p(y''+z) + p(-y'-z).$$

Endi

$$c'' = \inf_{y''}\left(-f_0(y'') + p(y''+z)\right), \quad c' = \sup_{y'}\left(-f_0(y') - p(-y'-z)\right)$$

deb olamiz. (7.3) tengsizlik ixtiyoriy y' va y'' lar uchun o‘rinli bo‘lganidan $c'' \geq c'$ ekanligi kelib chiqadi. Agar c sonini $c'' \geq c \geq c'$ qo‘sh tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlasak, u holda

$$f_1(t\,z + x) = t\,c + f_0(x)$$

formula bilan aniqlangan f_1 funksional chiziqli va (7.1) shartni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, biz f_0 funksionalni L_0 qism fazodan undan kengroq bo‘lgan $L^{(1)}$ qism fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda chiziqli davom ettirdik.

Agar L chiziqli fazoda sanoqlita $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementlar sistemasi mavjud bo‘lib, bu sistemani saqlovchi $L(\{x_k\})$ minimal qism fazo L ning o‘ziga teng bo‘lsa, u holda f_0 funksionalni

$$L^{(1)} = \{L_0,\ x_1\},\ \ L^{(2)} = \{L^{(1)},\ x_2\}, \ldots$$

kengayib boruvchi qism fazolarda yuqoridagidek aniqlab, f_0 funksionalni L fazogacha (7.1) shartni saqlagan holda davom ettirish mumkin.

Agar chiziqli qobig‘i L ga teng bo‘ladigan sanoqli sistema mavjud bo‘lmasa, u holda teoremaning isboti Sorn lemmasi yordamida nihoyasiga etkaziladi ([1] ga qarang). Δ

7.6. $L = C[-1,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosi va uning qism fazosi $L_0 = \{\ x \in C[-1,1]\colon\ x(t) \equiv 0,\ t \in [-1,0]\,\}$ ni qaraymiz. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt, \quad x \in L_0.$$

$L = C[-1,1]$ chiziqli fazoda f va p funksionallarni esa quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,y_0(t)\,dt + \int_{0}^{1} x(t)\,dt, \quad p(x) = 2\max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad x \in L$$

Quyidagicha savollar qo‘yamiz.

1) f_0 funksional (7.1) tengsizlikni qanoatlantiradimi?

2) f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo‘ladimi?

3) $y_0 \in C[-1,0]$ qanday tanlanganda f funksional Xan-Banax teoremasining shartlarini qanoatlantiradi?

Yechish. f_0 funksional (7.1) tengsizlikni qanoatlantiradi. Haqiqatan ham,

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt \le \int_{-1}^{1} \max_{-1\le t\le 1} |x(t)|dt = 2\max_{-1\le t\le 1} |x(t)| = p(x), \ \ x \in L_0 .$$

Agar $x \in L_0$, bo‘lsa u holda

$$\int_{-1}^{0} x(t)\,y_0(t)\,dt = 0$$

bo‘ladi. Shuning uchun, barcha $y_0 \in C[-1,0]$ larda $f(x) = f_0(x),\ x \in L_0$ tenglik o‘rinli. Demak, barcha y_0 lar uchun f funksional f_0 funksionalning L fazogacha davomi bo‘ladi. Nihoyat,

$$f(x) \le \max_{-1\le t\le 0} |x(t)| \int_{-1}^{0} |y_0(t)|\,dt + \int_{0}^{1} \max_{0\le t\le 1} |x(t)|\,dt \le 2\max_{-1\le t\le 1} |x(t)| = p(x), \ \ x \in L$$

tengsizlik,

$$\int_{-1}^{0} |y_0(t)|\,dt = c \le 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $y_0 \in C[-1,0]$ larda o‘rinli. Demak, $c \in [0,1]$ bo‘lsa, Xan-Banax teoremasining shartlari bajariladi. Shunday qilib f_0 funksionalni (7.1) shartni saqlagan holda cheksiz ko‘p usul bilan L fazogacha davom ettirish mumkin ekan.

Endi Xan-Banax teoremasining kompleks variantini isbot qilamiz.

7.6-ta’rif. *L - kompleks chiziqli fazo va unda aniqlangan manfiymas p funksional berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy $\alpha \in C$ uchun*

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad va \quad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$$

shartlar bajarilsa, u holda p - qavariq funksional deyiladi.

7.4-teorema. *(Xan-Banax). p - L kompleks chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional, f_0 esa L_0 qism fazoda aniqlangan va bu qism fazoda*

$$|f_0(x)| \le p(x), \quad x \in L_0$$

shartni qanoatlantiruvchi chiziqli funksional bo'lsin. U holda butun L da aniqlangan va

$$f(x) = f_0(x), \ \ \forall x \in L_0, \ \ |f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in L$$

shartlarni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksional mavjud.

Isbot. L va L_0 fazolarni haqiqiy chiziqli fazo sifatida qarab, mos ravishda L_R va L_{0R} bilan belgilaymiz. Tushunarliki, p funksional L_R da aniqlangan qavariq funksional bo'ladi, $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ esa

$$|f_{0R}(x)| \le p(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni, bundan esa $f_{0R}(x) \le p(x)$ shartni qanoatlantiruvchi L_{0R} dagi haqiqiy chiziqli funksional bo'ladi. 7.3-teoremaga ko'ra, L_R da aniqlangan va

$$f_R(x) \le p(x), \quad x \in L_R(= L),$$

$$f_R(x) = f_{0R}(x), \quad x \in L_{0R}(= L_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi f_R chiziqli funksional mavjud. Tushunarliki,

$$-f_R(x) = f_R(-x) \le p(-x) = p(x).$$

Demak,

$$|f_R(x)| \le p(x), \ \ x \in L_R(= L) \tag{7.4}$$

Endi f funksionalni L da quyidagicha aniqlaymiz

$$f(x) = f_R(x) - i\, f_R(ix).$$

Murakkab bo'lmagan hisoblashlar yordamida ko'rsatish mumkinki, f - L kompleks chiziqli fazoda aniqlangan chiziqli funksional bo'ladi hamda

$$f(x) = f_0(x), \ \ \forall x \in L_0, \qquad \operatorname{Re} f(x) = f_R(x), \quad \forall x \in L.$$

Ixtiyoriy $x \in L$ uchun $|f(x)| \le p(x)$ ekanligini ko'rsatsak, teorema isbot bo'ladi. Teskaridan faraz qilamiz. Biror $x_0 \in L$ uchun $|f(x_0)| > p(x_0)$ bo'lsin. $f(x_0)$ kompleks sonni $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$ ko'rinishda yozamiz va $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ deb olamiz. U holda

$$f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}\left[e^{-i\varphi} f(x_0)\right] = \rho > p(x_0) = p(y_0).$$

Bu esa (7.4) shartga zid. Δ