

T.A.SARIMSOQOV

**FUNKSIONAL
ANALIZ
KURSI**

Toshkent 1986

BIRINCHI NASHRIGA SUZ BOSHI

Funksional analiz hozirgi zamon matematikasining muhim sohalaridan biridir. U matematikaning bir necha sohalari (jumladan, matematik analiz, funksiyalar nazariyasi, integral va differensial tenglamalar nazariyasi, variatsion hisob) chegarasida, ularning tushunchalari va metodlarini umumlashtirilishi natijasida XX asr boshlarida yangi va mustaqil soha sifatida vujudga keldi.

So'nggi, taxminan, yarim asr mobaynida funksional analiz g'oyat chuqur va keng rivoj topdi. Bu rivojlanish ayni vaqtida ham davom etmoqda. Hozirgi kunda funksional analiz matematikaning ko'p tarmoqli sohalaridan biriga aylanib, matematika va fizikaning turli bo'limlarida keng tatbiq qilinmoqda.

Funksional analizning muhim xislatlaridan biri murakkab funksional fazolarni (nuqtalari funksiyalardan iborat fazolarni) metrika, norma va skalyar ku'aytma yordamida soddaroq, yaxshi o'rganilgan fazolarga, masalan, to'g'ri chiziqqa qo'lay tarzda aks ettirib olib, o'rganishdan iboratdir. Bu g'oya asrimizning boshlarida amalga oshirilib, kelgusida keng rivoj topdi. Bu g'oyaga biz ham mazkur kitobda yetarli darajada e'tibor berdik. Funksional analizda, odatda, funksional fazolar bir necha o'zaro uzviy bog'langan turli matematik strukturalar (masalan, algebraik amallar, metrika, norma, skalyar ko'paytma, qisman tartib) kiritilgan holda quriladi. Funksional fazolarning bu tarzda qurilishi funksional analizda turli metodlarni, ayniqsa, analitik va to'ologik metodlarni qo'llanish imkonini beradi.

Funksional analizning asosiy mazmuni funksional fazolarni va ularda aniqlangan operatorlarni o'rganishdir.

Bunga ko'ra biz kitobni kuyidagi ikki qismga bo'lishni lozim topdik:

I qism. Asosiy fazolar.

II qism. Operatorlar nazariyasi.

Birinchi qismni funksional analizning asosiy poydevori, ikkinchi qismni esa bu poydevorga kurilgan inshoot deb qarash mumkin.

Mazkur kitob universitetlar va pedagogika institutlarining matematika, fizika-matematika, mexanika-matematika va amaliy matematika fakultetlariga mo'ljallangan bo'lib, bunda biz mavjud programmalarni nazarda tutgan holda funksional analizning eng asosiy va muhim boblarini yoritish bilan chegaralandik.

Kitobda maxsus kurslarga mo'ljallangan paragraflar ham o'z o'rnini topdi.

Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasiga oid mahlumotlar bu kitobda keltirilmadi. Bunday ma'lumotlar avtorning 1968 yilda nashr etilgan „Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi“ kitobida keltirilgan bo'lib, bu kitobni tekstda qisqacha [HUFN] bilan belgiladik.

Kitobni yozishda biz rus tilidagi darsliklar, qo'llanmalar va monografiyalardan foydalandik, ularning ro'yxati kitobning oxirida keltirilgan.

Kitobda teoremalardan foydalanish tartibi quyidagicha: mazkur paragrafdagi teoremlarning faqat nomeri ko'rsatiladi; boshqa paragrafdagi teoremalardan foydalanilganda paragrafning nomeri ham ko'rsatiladi (masalan, 9.1-§, 4- teorema).

Kitobning qo'lyozmasini tayyorlashda ToshDU funksional analiz kafedrasining xodimlari, ayniqsa, prof. J.Hojiev, dots. Sh.A.Ayupov va R.N.G'anixo'jaev o'rtoqlar yaqindan yordam berdilar. Ularning hammalariga samimiy tashakkur bildiraman.

Avtor

IKKINCHI NASHRIGA SUZ BOSHI

Mazkur kitobning birinchi nashri 1980 yilda chiqqan edi. Bu orada kitob tarqalib, uning qayta chop etilishiga ehtiyoj vujudga keldi. Shuni nazarda tutib, kitobga deyarli o'zgartishlar kiritmay, birgina „Variatsion hisob elementlari" bobini qo'shdik, chunki matematikaning bu sohasi muhimligidan tashqari, ko'p sohalarda tatbiqiy ahamiyatga egadir. Shuni ham aytish kerakki, variatsion hisob universitetlarda ko'p yillar mobaynida alohida kurs sifatida o'qiladi. Bundan tashqari birinchi nashrda yo'l qo'yilgan ba'zi kamchiliklar tuzatildi.

Darslikning birinchi nashrida avtorning "Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi» kitobidagi ma'lumotlarga tayanilgan edi. Bu kitobning yangi tuzatilgan va qayta ishlangan nashri 1982 yilda chiqdi. Shuning uchun mazkur darslikda kitobning yangi nashridagi ma'lumotlarga murojaat qilindi.

Kitobni nashrga tayyorlashda dots.R.G'anixo'jaev faol qatnashdi. Unga uz minnatdorchiligidagi bildiraman.

Avtor

I QISM. ASOSIY FAZOLAR

I BOB. VEKTOR FAZOLAR

1.1-§. n o'lchamli vektor fazo

Geometriya, mexanika va fizikada shunday ob'ektlar uchraydiki, ular bir yoki bir necha haqiqiy sonning tartiblangan sistemasi bilan aniqlanadi. Masalan, tekislikdagi har qanday nuqta o'zining ikki koordinatasi bilan, har qanday vektor o'zining ikki komponentasi bilan aniqlanadi. Tekislikdagi vektoring eng sodda umumlashtirilishi n o'lchamli vektor tushunchasidir.

Ta'rif. Tartib bilan yozilgan n ta haqiqiy son sistemasi, ya'ni

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

n o'lchamli vektor deyiladi. Bunda a_1, a_2, \dots, a_n sonlar vektoring koordinatalari deyiladi.

n o'lchamli $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorlarning mos koordinatalari teng, ya'ni $a_1=b_1, a_2=b_2, \dots, a_n=b_n$ bo'lsa, bu vektorlar teng deb hisoblanadi. Bundan yana bir bor ko'rinish turibdiki, vektor bu n ta haqiqiy son to'plami bo'libgina qolmay, balki elementlari tartiblangan sistema hamdir. Ya'ni berilgan vektorlarning koordinatalarini boshqa tartibda yozsak, umumiyl holda biz boshqa vektorni hosil qilamiz. Masalan, uch o'lchamli fazoda $a=(1, 2, 3)$ va $b=(2, 1, 3)$ vektorlar bir-biriga teng emas.

Misollar. 1. Tekislikdagi vektorlar ikki o'lchamli vektorga, real fizik fazodagi vektorlar (kuch, tezlik kabilalar) uch o'lchamli vektorga misol bo'ladi.

2. Bir o'zgaruvchili $(n-1)$ -darajali $f(x)=a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ ko'phadni n o'lchamli $a=(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ vektor sifatida qarash mumkin.

Endi biz n o'lchamli vektorlar ustida amallar kiritamiz. Ikki

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ va } b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

vektoring yig'indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n).$$

Sonlarni qo'shish amali kommutativ va assotsiativ bo'lgani uchun vektorlarning yig'indisi ham shu xossalarga ega, ya'ni

1) $a+b = b+a$ (kommutativlik xossasi);

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (assotsiativlik xossasi).

Hamma koordinatalari noldan iborat vektor *nol vektor* deyiladi va $\theta=(0, 0, \dots, 0)$ orqali yoziladi. Nol vektor vektorlar orasida sonlar to'plamidagi nol rolini o'ynaydi.

Darhaqiqat, ixtiyoriy $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor uchun

$$a+\theta = (a_1+0, a_2+0, \dots, a_n+0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a.$$

Ushbu

$$-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

vektor a vektorga *qarama-qarshi vektor* deyiladi.

Ravshanki, $a + (-a) = \theta$. Demak, kiritilgan qo'shish amaliga nisbatan n o'lchamli vektorlar kommutativ gruppa hosil qiladi.

Vektorlar ustida yana bir amal kiritamiz. a vektoring λ haqiqiy songa ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Haqiqiy sonlarni ko'paytirish amalining xossalardan kiritilgan amalning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$3) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b;$$

$$4) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$5) (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a);$$

$$6) 0 \cdot a = \theta;$$

$$7) 1 \cdot a = a.$$

Bu yerda a, b, θ — vektorlar, $\lambda, \mu, 0, 1$ - haqiqiy sonlar.

Berilgan n natural son uchun hamma n o'lchamli vektorlar to'plami (kiritilgan amallar bilan birgalikda) n o'lchamli vektor fazo deyiladi va R^n bilan belgilanadi. Xususan, $n=2$ va $n=3$ bo'lganda yuqorida kiritilgan qo'shish amali vektorlarning "parallelogramm" qoidasi bo'yicha geometrik qo'shish bilan ustma-ust tushadi. a vektoring λ songa ko'paytirish amali esa quyidagi ma'noga ega. Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, bu amal vektoring uzunligini λ marta orttiradi. Agar $\lambda < 0$ bo'lsa, bu amal vektoring uzunligini $|\lambda|$ marta orttirib, yo'nalishini teskarisiga almashtiradi.

Agar $n=1$ bo'lsa, vektor bir koordinata bilan aniqlanadi va bunda vektorlar ustida amallar haqiqiy sonlar ustidagi qo'shish va ko'paytirish amallari bilan mos tushadi. Shuning uchun R^1 fazoni aynan haqiqiy sonlar fazosi deb hisoblaymiz.

Agar biz n o'lchamli vektoring ta'ifida a_1, a_2, \dots, a_n sonlarni haqiqiy emas, balki kompleks sonlar deb olsak, n o'lchamli kompleks fazo tushunchasiga kelamiz. Bu fazo C^n bilan belgilanadi.

1.2-§. Vektor fazoning ta'rifi va misollar

Endi vektor va vektor fazo tushunchasini yanada umumlashtiramiz.

Bu yerdan boshlab $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$ harflari bilan haqiqiy yoki kompleks sonlarni, K orqali esa R yoki C sonlar maydonini belgilaymiz.

Ta'rif. Biror V to'plamning ixtiyoriy ikki x va y elementi uchun yig'indi amali berilgan bo'lib, unga nisbatan V kommutativ gruppa hosil qilsin, ya'ni ushbu to'rtta shart bajarilsin:

$$1^\circ. x+y = y+x;$$

$$2^\circ. x + (y+z) = (x+y)+z;$$

3°. V ning barcha x elementlari uchun $x+\theta=x$ shartni qanoatlantiruvchi va nol deb ataluvchi θ element mavjud bo'lsin.

4°. V dagi har qanday x element uchun $x+(-x)=\theta$ shartni qanoatlantiruvchi $-x \in V$ element mavjud bo'lsin. Bu elementni x elementga *qarama-qarshi element* deymiz.

Bundan tashqari, har qanday $\alpha \in K$ son va $x \in V$ element uchun ularning ko‘paytmasi deb ataladigan $\alpha x \in V$ element aniqlanib, quyidagi aksiomalar bajarilsin:

- 5°. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;$
- 6°. $1 \cdot x = x;$
- 7°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$
- 8°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$

Agar V dagi bu ikkala amal uchun 1°-8° shartlar bajarilsa, V to‘plam K maydon ustida vektor fazo deyiladi. Shuni aytib o‘tish kerakki, har bir kompleks vektor fazoni haqiqiy vektor fazo sifatida ham qarash mumkin (chunki $R \subset C$ bo‘lgani uchun ixtiyoriy x ning haqiqiy songa ko‘paytmasi ham aniqlangan).

Misollar.

1. C kompleks sonlar to‘plamida qo‘shish va haqiqiy songa ko‘paytirish amallarini qarasak, bu to‘plam haqiqiy vektor fazo bo‘ladi.

2. n o‘lchamli vektor fazolar (haqiqiy yoki kompleks), 1.1-§ da ko‘rsatilganidek, vektor fazo bo‘ladi. Xususan, darajasi $n-1$ dan katta bo‘limgan bir argumentli ko‘phadlar to‘plami $P^{n-1}(x)$ ham vektor fazo hosil qiladi.

3. Darajasi $n-1$ ga teng bo‘lgan ko‘phadlar to‘plami vektor fazo hosil qilmaydi. Chunki bunday ikki ko‘phad yig‘indisining darajasi $n-1$ dan kichik bo‘lishi mumkin. Masalan,

$$f_1(x) = 1 + x^{n-1}, \quad f_2(x) = 1 + x^{n-2} - x^{n-1}$$

$n-1$ darajali ko‘phadlar, lekin ular yig‘indisining darajasi $n-2$ ga teng.

4. n satrli va m ustunli matritsa nm o‘lchamli vektor sifatida qaralishi mumkin; buning uchun matritsaning elementlarini satrma-satr o‘qib chiqish kifoya. Bunday matritsalar to‘plami mos elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan vektor fazo hosil qiladi.

4. R to‘g‘ri chiziqdagi musbat sonlar haqiqiy vektor fazo hosil qilmaydi, chunki α musbat son uchun qarama-qarshi $-\alpha$ element bu to‘plamga kirmaydi.

Elementlari funksiyalar yoki sonli ketma-ketliklar bo‘lgan vektor fazolar funksional fazolar deyiladi. Shunday fazolarga ham misollar keltiramiz.

6. **l_2 haqiqiy fazo.** Uning elementlari ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \tag{1}$$

shartni qanoatlantiruvchi sonlarning $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklaridir. Bu fazoda amallar quyidagicha kiritiladi:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

(1) shartni qanoatlantiruvchi ikki ketma-ketlikning yig‘indisi ham shu shartni qanoatlantirishi quyidagi sodda tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$(a_1 + a_2)^2 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2.$$

Shunga o‘xshash l_2 kompleks fazoni kiritish mumkin.

7. **m fazo.** Uning elementlari chegaralangan sonli ketma-ketliklardir. Bu fazoda qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari 6-misoldagidek kiritiladi.

8. **s fazo.** Ixtiyoriy haqiqiy sonli ketma-ketliklar to‘plami 6, 7- misollardagi amallar bilan olinsa, u s vektor fazo hosil qiladi.

9. **$C[a, b]$ vektor fazo.** $[a, b]$ oraliqda aniqlangan uzlusiz haqiqiy (yoki kompleks) funksiyalar to‘plami funksiyalarni odatdagi qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan $C[a, b]$ vektor fazo hosil qiladi. Bu funksional fazo matematik analizda katta ahamiyatga ega.

1.3-§. Chiziqli bog‘lanish. O‘lcham

Ta’rif. V vektor fazoda x, y, \dots, ω elementlar berilgan bo‘lsin. Agar shunday $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ sonlar topilsaki, ularning kamida biri noldan farqli bo‘lib, ushbu

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma \omega = 0 \quad (1)$$

munosabat bajarilsa, x, y, \dots, ω elementlar chiziqli bog‘liq deyiladi. Aks holda bu elementlar chiziqli erkli deyiladi, ya’ni x, y, \dots, ω elementlar uchun (1) munosabat faqat $\alpha = \beta = \dots = \lambda = 0$ sonlar uchungina bajarilsa, x, y, \dots, ω elementlar chiziqli erkli bo‘ladi.

Masalan, $C[a, b]$ fazoda quyidagi

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = 2t^2 + 4t.$$

funksiyalar chiziqli bog‘liq, chunki

$$2 \cdot x(t) + 2 \cdot y(t) - 1 \cdot z(t) = 0.$$

Aksincha, shu fazoda ixtiyoriy n uchun ushbu

$$x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t, \quad x_2(t) = t^2, \dots, \quad x_n(t) = t^n$$

funksiyalar chiziqli erkli. Haqiqatan,

$$\alpha_0 x_0(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0, \text{ ya’ni } \alpha_0 + \dots + \alpha_n t^n = 0$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sonlar mavjud deb faraz qilaylik. Demak, $[a, b]$ dagi ixtiyoriy t son bu ko‘phadning ildizi. Algebraning asosiy teoremasiga binoan n -darajali ko‘phadning ildizlari soni n tadan ko‘p emas. Shuning uchun $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ ko‘phadning hamma koeffitsientlari nolga teng, ya’ni $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Demak, ta’rifga asosan $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ funksiyalar chiziqli erkli.

V vektor fazoda elementlarining soni cheksiz bo‘lgan sistemaning har qanday chekli sondagi elementlari chiziqli erkli bo‘lsa, u holda berilgan sistema chizikli erkli deyiladi.

Masalan, $C[a, b]$ fazoda

$$x_0 = 1, x_1 = t, x_2 = t^2, \dots, x_n = t^n, \dots$$

cheksiz sistema chiziqli erkli. Bu ham, yuqoridagiga o‘xshash, algebraning asosiy teoremasidan kelib chiqadi.

Ta’rif. Agar V vektor fazoda n ta chiziqli erkli element topilib, har qanday $n+1$ ta element chiziqli bog‘liq bo‘lsa, V fazo n o‘lchamli vektor fazo deyiladi.

Elementlarining soni ixtiyoriy bo‘lgan chiziqli erkli sistema mavjud bo‘lsa, vektor fazo cheksiz o‘lchamli, aks holda chekli o‘lchamli deyiladi. Masalan, 1.2-§ dagi 1-, 2-, 4-misollardagi fazolar chekli o‘lchamli, 6-9-misollardagi funksional fazolar esa cheksiz o‘lchamli. Xususan, 9-misoldagi $C[a,b]$ fazoning cheksiz o‘lchamliligi $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ cheksiz sistemaning chiziqli erkli ekanligidan kelib chiqadi.

Ta’rif. n o‘lchamli vektor fazoda n ta elementdan iborat bo‘lgan har qanday chiziqli erkli sistema *bazis* deyiladi.

Funksional analizda o‘rganiladigan vektor fazolar asosan funksional fazolar bo‘lib, ular odatda cheksiz o‘lchamlidir.

Ixtiyoriy vektor fazoda ham bazis tushunchasini kiritish mumkin.

V vektor fazoda $\Gamma = \{x_\alpha\}$ chiziqli erkli sistema berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in V$ element uchun shunday $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_n} \in \Gamma$ vektorlar va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topilsaki, x ushbu

$$x = \lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n}$$

ko‘rinishda yozilsa, Γ to‘plam V vektor fazoning *Xamel bazisi* deyiladi. Ixtiyoriy vektor fazo Xamel bazisiga ega ekanligini ko‘rsatish mumkin.

1.4-§. Vektor qism fazo. Qavariq to‘plamlar

Ta’rif. V vektor fazoning L qism to‘plamining o‘zi ham V da aniqlangan vektorlarni qo‘shish va vektorni songa ko‘paytirish amallariga nisbatan vektor fazo bo‘lsa, L fazo V vektor fazoning vektor *qism fazosi* (ba’zan esa *chiziqli ko‘pxillik*) deyiladi.

Endi V ning A va B qism to‘plamlari hamda K maydon uchun

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$K \cdot A = \{\mu a : \mu \in K, a \in A\}.$$

belgilashlarni kiritamiz.

$A + B$ to‘plam A va B to‘plamlarning vektor yig‘indisi deyiladi. Bunday belgilar yordamida V dagi L to‘plamning vektor qism fazo bo‘lish shartlari quyidagicha yoziladi:

$$\text{a) } L + L \subset L, \quad \text{b) } KL \subset L.$$

Darhaqiqat, bu shartga ko‘ra L to‘plam nol vektorga ega bo‘ladi, chunki agar a vektor L ga tegishli bo‘lsa, u holda L ga $0 \cdot a = \theta$ vektor ham tegishli bo‘ladi. So‘ngra L o‘zining ixtiyoriy a vektori bilan birga yana b) shartga: ko‘ra unga qarama-qarshi bo‘lgan $-a = (-1) \cdot a$ vektorga ham ega bo‘ladi. So‘ng a) va b) shartlarga ko‘ra har qanday ikki vektoring yig‘indisi ham, har qanday

vektorning ixtiyoriy songa ko‘paytmasi ham L ga tegishli bo‘ladi.

Eng kichik vektor qism fazo nol elementdan iborat bo‘lgan $\{\theta\}$ fazodir.

Bevosita ko‘rish mumkinki, ixtiyoriy vektor qism fazolar sistemasining kesishmasi (ko‘paytmasi) ham vektor qism fazodir.

V vektor fazoda ixtiyoriy bo‘sh bo‘lмаган S то‘плам берилган bo‘lsin. S то‘пламни о‘з ichiga олган eng kichik vektor qism fazo S то‘пламдан *hosil qilingan vektor qism fazo* deyiladi. Bunday vektor qism fazo S то‘пламни о‘з ichiga oluvchi hamma vektor qism fazolarning kesishmasiga tengdir. S dan hosil qilingan L vektor qism fazo aynan quyidagi ko‘rinishdagi elementlardan iboratdir:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

bu yerda $\alpha_i \in K$, $a_i \in S$, $1 \leq i \leq n$ n —ixtiyoriy (x ga bog‘liq) natural son. Ba’zan, S то‘пламдан vujudga keltirilgan L vektor qism S ning *chiziqli qobig‘i* deyiladi, yoki S то‘плам L ni *vujudga keltiruvchi sistema* deyiladi va $L=[S]$ ko‘rinishda belgilanadi.

Misollar. 1. V vektor fazo, x uning noldan farqli elementi bo‘lsin. $\{\lambda x, \lambda \in K\}$ elemenlar то‘плами bir o‘lchamli fazo hosil qiladi. Bu fazo V ning vektor qism fazosidir. Agar V ning o‘lchami birdan katta bo‘lsa, $\{\lambda x, \lambda \in K\} \neq V$

2. $C[a,b]$ vektor fazoda hamma ko‘phadlar то‘плами $P[a,b]$ ni olaylik. Ravshanki, $P[a,b]$ то‘плам $C[a,b]$ da vektor qism fazo hosil qiladi. $C[a,b]$ kabi $P[a,b]$ ham cheksiz o‘lchamdir. O‘z navbatida, $C[a,b]$ fazoni $[a,b]$ oraliqda aniqlangan barcha (uzluksiz va uziluvchi) funksiyalar vektor fazosining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

3. 1.2-§ dagi l_2, m, s vektor fazolarga qaytsak (6-8-misollar), bu yerda l_2 fazo m fazoning vektor qism fazosi, m esa o‘z navbatida s ning qism fazosidir.

Ta’rif. V vektor fazoda ixtiyoriy A то‘плам берилган bo‘lsin. Agar $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ , μ sonlar uchun ushbu

$$\lambda A + \mu A \subset A \tag{1}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, A *qavariq to‘plam* deyiladi. Agar $|\lambda| \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ uchun $\lambda A \subset A$ munosabat bajarilsa, A *muvozanatdagi to‘plam* deyiladi. Qavariq va muvozanatdagi to‘plam *absolyut qavariq to‘plam* deyiladi.

Ravshanki, agar A qavariq to‘plam bo‘lsa, ixtiyoriy $x \in V$ va $\lambda \in K$ uchun $x + \lambda A$ ham qavariq to‘plamdir. Absolyut qavariq A , B то‘plamlar uchun $A+B$ va λA то‘plamlar ham absolyut qavariqdir.

1- lemma. A absolyut qavariq to‘plam bo‘lsin. U holda K dan olingan ixtiyoriy λ, μ ($|\lambda| \leq |\lambda_1|$), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ sonlar uchun ushbu munosabatlar o‘rnlidir:

$$1) \lambda A \subset \mu A,$$

$$2) \sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i A) = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right) A.$$

Istobi. 1) agar $\mu = 0$ bo'lsa, u holda $\lambda A = \mu A = \{\theta\}$. Agar $\mu \neq 0$ va $x \in A$ bo'lsa, A ning muvozanatdaligidan $\lambda \cdot \mu^{-1} \cdot x \in A$, ya'ni $\lambda \tilde{o} \in \mu \tilde{A}$, demak, $\lambda A \subset \mu A$, munosabat kelib chiqadi.

2) $n = 2$ bo'lgan hol uchun, ya'ni ushbu

$$\lambda A + \mu A = (|\lambda| + |\mu|)A$$

munosabatni isbotlaymiz. $\lambda = \mu = 0$ bo'lsa, hammasi ravshan. λ yoki μ noldan farqli bo'lsa, u holda

$$\frac{\lambda}{|\lambda| + |\mu|} A + \frac{\mu}{|\lambda| + |\mu|} A \subset A,$$

ya'ni $\lambda A + \mu A \subset (|\lambda| + |\mu|)A$ munosabat o'rinli. Ammo

$$(|\lambda| + |\mu|)A \subset |\lambda|A + |\mu|A \subset \lambda A + \mu A.$$

Demak,

$$\lambda A + \mu A = (|\lambda| + |\mu|)A.$$

Umumiyl hol induksiya yordamida isbotlanadi.

2-lemma. Ixtiyoriy qavariq (absolyut qavariq) to'plamlar sistemasining kesishmasi ham qavariqdir (absolyut qavariqdir).

Istobi. Γ ixtiyoriy to'plam, $\{A_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ qavariq to'plamlar sistemasi bo'lsin. $A = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$ to'plamning ixtiyoriy a_1, a_2 elementlarini olamiz. Ixtiyoriy α uchun $a_1, a_2 \in A_\alpha$, demak, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ sonlar uchun $\lambda a_1 + \mu a_2 \in A_\alpha$; α ixtiyoriy bo'lgani uchun $\lambda a_1 + \mu a_2 \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = A$, ya'ni $\lambda A + \mu A \subset A$.

Absolyut qavariq to'plamlar olingan holda ham isbot shunga o'xshash bo'ladi.

A to'plamni o'z ichiga olgan barcha qavariq (absolyut qavariq) to'plamlar kesishmasi ham qavariq (absolyut qavariq) to'plam bo'lib, u A ning *qavariq* (*absolyut qavariq*) *qobig'i* deyiladi. Qavariq (absolyut qavariq) qobiq $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

ko'rino'dagi elementlardan iborat, bu yerda $x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ($\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$,

n -ixtiyoriy son).

Agar ixtiyoriy $x \in V$ element uchun shunday $\lambda > 0$ son mavjud bo'lsaki, $x \in \mu A$ munosabat ixtiyoriy $\mu (|\mu| \geq \lambda)$ son uchun o'rinli bo'lsa, A to'plam *yutuvchi* deyiladi. Ravshanki, ixtiyoriy yutuvchi to'plamlar chekli sistemaning kesishmasi ham yutuvchidir.

1.5-§. Faktor fazolar va fazolarning ko'paytmasi

V vektor fazo, V' uning vektor qism fazosi bo'lsin. Agar $x, y \in V$ elementlar uchun $x - y$ element V' ga tegishli bo'lsa, x va y ni *ekvivalent* deymiz va buni $x \sim y$ ko'rinishda yozamiz, bu munosabat (ya'ni ekvivalentlik) quyidagi xossalarga ega:

- a) refleksivlik xossasi: har qanday a element o'z-o'ziga ekvivalent;
- b) simmetriklik xossasi: agar $a \sim b$ bo'lsa, u holda $b \sim a$;
- c) tranzitivlik xossasi: $a \sim b, b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$.

Shuning uchun bu munosabat V to'plamni sinflarga bo'ladi ([HO'FN], 1 bob). Bunday sinflar to'plamini V ning V' bo'yicha faktor fazosi deb ataladi va V/V' ko'rinishda yoziladi. Har qanday faktor fazoda qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha kiritiladi.

ξ va η sinflar V/V' ning elementlari bo'lgan ikki sinf bo'lsin. Har bir sinfdan bittadan x va y vakil tanlab olinib, ξ va η sinflar yig'indisi deb $x + y$ elementni o'z ichiga olgan sinfni aytamiz. ξ sinfning α songa ko'paytmasi deb, αx elementni o'z ichiga olgan sinfga aytamiz. Ravshanki, bu amallar natijasi ξ va η sinflardagi vakillarga bog'liq emas. Masalan, $x' \in \xi, y' \in \eta$ boshqa bir vakillar bo'lsa, u holda

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in V',$$

ya'ni $x + y$ va $x' + y'$ elementlar bir sinfga tegishli. Shunday qilib, biz V/V' faktor fazoning elementlari ustida amallar kiritdik. Bu amallar vektor fazodagi amallar shartlarini qanoatlantirishi osonlikcha tekshiriladi. Shunday qilib, har qanday faktor fazo vektor fazodir.

Ta'rif. V/V' faktor fazoning o'lchami V' fazoning koo'lchami (yo'shimcha o'lchami) deyiladi va **codim** V' orqali belgilanadi.

Misollar. 1. $V=R^2$ da, ya'ni tekislikda V' deb $y=0$ to'g'ri chiziqnini (ya'ni x o'qini) olamiz. Agar $a=(a_1, a_2), b=(b_1, b_2)$ elementlarni olsak, $a - b \in V'$ bo'lishi uchun $a_2 = b_2$ shart zarur va kifoyadir. Demak, $a=(a_1, a_2)$ vektor V/V' fazoning qaysi sinfiga tegishli bo'lishi faqat a_2 ga bog'liq. Ya'ni $y=y_0$ to'g'ri chiziqning hamma elementlari bir sinfga tegishlidir va, aksincha, har bir sinf R^2 tekislikda biror $y=y_0$ to'g'ri chiziqnini aniqlaydi. Shuning uchun V/V' fazoning elementlarini Ox o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar deb qarash mumkin. Bevosita ko'rrib turibdiki, **codim** $V'=1$.

2. $V=C[a, b]$ fazoni ko'raylik. Qiymatlari a va b nuqtalarda nolga teng bo'lgan uzlusiz funksiyalar to'plami V' bu fazoda vektor qism fazodir. Endi shu vektor qism fazoga nisbatan ekvivalentlik munosabatini kiritamiz. Bunda f va g funksiyalar ekvivalent bo'lishi uchun $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$ bo'lishi zarur va kifoyadir. Demak, ekvivalentlik sinflari, ya'ni V/V' fazoning elementlarini a va b nuqtalardagi qiymatlari bilan aniqlanadi. Shuning uchun V/V' fazoning elementlarini R^2 fazoning elementlari sifatida qarash mumkin. Xususan, **codim** $V'=2$.

Biror V vektor fazoda V_1, V_2 qism fazolarni olamiz. Agar ixtiyoriy $x \in V$

vektorni yagona ravishda

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in V_1, \quad x_2 \in V_2$$

ko‘rinishda yoyish mumkin bo‘lsa, u holda V fazo V_1 va V_2 qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi deyiladi va $V = V_1 \oplus V_2$ ko‘rinishida belgilanadi.

Masalan, $V = R^2$ vektor fazo o‘zining

$$V_1 = \{(0, \beta), \beta \in R\} \text{ va } V_2 = \{(\alpha, 0); \alpha \in R\}$$

qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisidir.

Endi vektor fazolarning to‘g‘ri ko‘paytmasi tushunchasini kiritamiz. Buning uchun vektor fazolar sistemasi $\{V_i\}_{i \in I}$ ni olamiz, bu yerda I – ixtiyoriy quvvatli to‘plam. Bu fazolarning Dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi ([HO‘FN], 1 bob) bo‘lgan $V = \prod_{i \in I} V_i$ to‘plamda vektor fazolarga xos bo‘lgan operatsiyalar kiritamiz.

Agar $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ V ning ikki elementi bo‘lsa, u holda qo‘shish amali ushbu

$$x + y = (x_i + y_i)_{i \in I}$$

ko‘rinishda $\lambda \in K$ songa ko‘paytirish amali esa

$$\lambda x = (\lambda x_i)_{i \in I}$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Har bir V_i vektor fazo bo‘lganidan foydalanib, kiritilgan amallar V to‘plamni vektor fazoga aylantirishi osonlikcha isbotlanadi. Hosil bo‘lgan V vektor fazo V_i fazolarning to‘g‘ri ko‘paytmasi deyiladi va $\prod_{i \in I} V_i$ yoki

$\times_{i \in I} V_i$ ko‘rinishlarda yoziladi. Xususan, hamma $V_i = F$ bo‘lsa (F - tayinlangan vektor fazo), u holda hosil bo‘lgan to‘g‘ri ko‘paytma F^I bilan belgilanadi.

Agar I to‘plam chekli bo‘lib, n ta elementdan iborat bo‘lsa, F^I o‘rniga F^n yoziladi.

Masalan, R^n fazoni R^I vektor fazolarning to‘g‘ri ko‘paytmasi sifatida qarash mumkin. 1.2-§ dagi s fazoni (8-misol) R^N sifatida qarash mumkin (bunda N — natural sonlar to‘plami).

1.6-§. Chiziqli aks ettirishlar

E vektor fazoni F vektor fazoga biror $u: E \rightarrow F$ aks ettirishi berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar har qanday $x, y \in E$ va $\alpha, \beta \in K$ uchun

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u chiziqli aks ettirish yoki chiziqli operator deyiladi. Xususan, F fazo sifatida K maydon olinsa, bunday aks ettirish chiziqli forma yoki chiziqli funksional deyiladi.

Ravshanki, har qanday u chiziqli operator E ning biror E_0 qism fazosini F ning qism fazosiga aks ettiradi, ya’ni $u(E_0)$ to‘plam F ning qism fazosidir. Agar F_0 to‘plam F ning qism fazosi bo‘lsa, u holda F_0 ning asli bo‘lgan $u^{-1}(F_0)$ to‘plam

E ning vektor qism fazosi bo‘ladi. Darhaqiqat, agar $x, y \in u^{-1}(F_0)$ ya’ni $u(x), u(y) \in F_0$ bo‘lsa, u holda F_0 vektor qism fazo bo‘lgani uchun $u(x) + u(y) \in F_0$. Ammo $u(x) + u(y) = u(x + y) \in F_0$, ya’ni $x + y \in u^{-1}(F_0)$.

Shunga o‘xshash $\lambda x \in u^{-1}(F_0)$ ham isbotlanadi. Xususan, agar $F_0 = \{\theta\}$ bo‘lsa, $u^{-1}(\theta)$ qism fazo chiziqli aks ettirishning yadrosi deyiladi va **keru** bilan belgilanadi.

Turli vektorlarni turli vektorlarga akslantiruvchi ya’ni $x \neq y$ uchun $u(x) \neq u(y)$ bo‘lgan aks ettirish *monomorfizm* deyiladi.

1-teorema. $u: E \rightarrow F$ chiziqli aks ettirish monomorfizm bo‘lishi uchun **keru** = { θ } bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. Zarurligi. Agar $x \in \text{keru}$ bo‘lsa, u holda $u(x) = \theta = u(\theta)$. Ikkinchini tomondan, u monomorfizm bo‘lgani uchun $x = \theta$, ya’ni **keru** = { θ }.

Kifo yaligi. **keru** = { θ } bo‘lsin. Agar $u(x) = u(y)$ munosabat bajarilsa, ya’ni $u(x - y) = 0$ bo‘lsa, u holda $x - y \in \text{keru}$. Demak, $x - y = \theta$, ya’ni $x = y$.

Agar $u: E \rightarrow F$ chiziqli aks ettirish uchun $i(E) = F$ bo‘lsa, bu aks ettirish *epimorfizm* deyiladi. u chiziqli operator bir vaqtda monomorfizm hamda epimorfizm bo‘lsa, u holda *izomorfizm* yoki *chiziqli izomorfizm* deyiladi. Bu holda E va F fazolar *izomorf fazolar* deyiladi va bu munosabat $E \cong F$ ko‘rinishda yoziladi.

Misollar.

1. R^n ($n > 1$) fazoning $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementiga u aks ettirish x_1 sonni mos qo‘ysa, ya’ni $u(x) = x_1$ bo‘lsa, u holda $u: R^n \rightarrow R^1$ chiziqli operatordir (aniqrog‘i, chiziqli funksional). Ravshanki, u -epimorfizm. Ammo u monomorfizm emas. Darhaqiqat, bu operator uchun **keru** = $\{x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_i \in R, i = 2, \dots, n\} \neq \{\theta\}$. Demak, 1-teoremaga asosan u monomorfizm emas.

2. Ixtiyoriy V vektor fazoning V_0 qism fazosini olib, $u: V_0 \rightarrow V$ aks ettirishni $u(x) = x$ kabi aniqlasak, ravshanki, chiziqli operator hosil bo‘ladi. Uning yadrosi θ elementdan iborat, ya’ni u -monomorfizm. Lekin $V_0 \neq V$ holda u epimorfizm emas.

3. $E = R^n, F = P^{n-1}(x)$ darajasi $n-1$ dan katta bo‘lmagan ko‘phadlar fazosi) bo‘lsa, $u: E \rightarrow F$ operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$u((a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}.$$

u chiziqli operatordir.

Darhaqiqat, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ixtiyoriy vektorlar bo‘lsa, u holda

$$\begin{aligned} u(a+b) &= u(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)x + \dots + (a_n + b_n)x^{n-1} = \\ &= (a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}) + (b_1 + b_2 x + \dots + b_n x^{n-1}) = u(a) + u(b) \end{aligned}$$

Shunga o‘xhash

$$u(\lambda a) = \lambda u(a).$$

Bu yerda u epimorfizmdir. Haqiqatan, $P^{n-1}(x)$ fazoda ixtiyoriy

$$f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$$

ko‘phadni olsak, u ushbu $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ vektorning tasviri, ya’ni $u(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(x)$ ga teng bo‘ladi.

Shu bilan birga u monomorfizmdir, chunki $u(a) = u((a_1, a_2, \dots, a_n)) = \theta$, ya’ni $a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$ aynan nolga teng ko‘phad bo‘lsa, algebraning asosiy teoremasiga binoan uning hamma koeffitsientlari nolga teng: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Demak, $\ker u = \theta$. Shunday qilib, u izomorfizmdir.

Har qanday ikki chiziqli u va v operator uchun ularning yig‘indisi deb ataladigan $u + v$ operator va u operatorni λ songa ko‘paytmasi deb ataluvchi operator quyidagicha aniqlanadi:

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x), \quad (\lambda u)(x) = \lambda u(x).$$

Shunday qilib, E ni F ga aks ettiruvchi operatorlar to‘plami bu amallarga nisbatan vektor fazo hosil qiladi. Bu vektor fazo $Z(E, F)$ bilan belgilanadi. Agar $F = K$ bo‘lsa, $Z(E, K)$ fazo E^* ko‘rinishda yoziladi va uni E ga *algebraik qo‘shma fazo* deyiladi.

Endi u chiziqli aks ettirishni butun E fazoda emas, balki uning L vektor qism fazosida aniqlangan deb faraz qilaylik. Unda L to‘plam u chiziqli aks ettirishning aniqlanish sohasi deyiladi va **domu** bilan belgilanadi. u chiziqli aks ettirishning $u(L)$ qiymatlari sohasini **Imu** bilan belgilaymiz va u chiziqli aks ettirishning *tasviri* yoki *aksi* deymiz.

Endi biz u aks ettirishning grafigi tushunchasini kiritamiz. $E \times F$ ko‘paytmaning $(x, u(x))$ (bu yerda x element **domu** to‘plamda o‘zgaradi) ko‘rinishdagi nuqtalar to‘plamini u ning *grafigi* deymiz va **gru** bilan belgilaymiz. Ravshanki, agar u chiziqli aks ettirish bo‘lsa, u holda **gru** to‘plam $E \times F$ vektor fazoning vektor qism fazosi bo‘ladi.

$E \times F$ ko‘paytmada G to‘plam berilgan bo‘lsin. O‘z-o‘zidan bunday savol tug‘iladi: qanday shartlar bajarilsa, G to‘plam E ning biror qism fazosida aniqlangan va qiymatlari F da bo‘lgan biror u aks ettirishning grafigi bo‘ladi? Ravshanki, agar G biror u aks ettirishning grafigi bo‘lsa, u holda quyidagi shart bajariladi: har qanday $x \in E$ element uchun ko‘pi bilan bitta $y \in F$ element mavjudki, $(x, y) \in G$

Aksincha, $G \subset E \times F$ to‘plam uchun yuqorida yozilgan shart bajarilsa, u holda G biror u aks ettirishning grafigi bo‘ladi. Bu aks ettirishning aniqlanish sohasi bo‘lgan **domu** to‘plam shunday $x \in E$ elementlardan iboratki, x uchun kamida bitta (demak, shartga binoan faqat bitta) $y \in F$ element mavjudki, $(x, y) \in G$. Bu holda $y = u(x)$ bo‘ladi.

Agar G ga qo‘shimcha shart qo‘yib, G to‘plamni $E \times F$ ning vektor qism fazosi desak, u holda hosil bo‘lgan u aks ettirish chiziqli bo‘ladi. Bu

mulohazalardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

2-teorema. $E \times F$ vektor fazoda berilgan G to‘plam E da aniqlangan, qiymatlari F ga tegishli *biror u chiziqli aks ettirishning grafigi bo‘lishi uchun quyidagi ikki shart zarur va kifoyadir:*

(1) G to‘plam $E \times F$ vektor fazoning qism fazosi;

(2) agar (θ, u) element G to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda $y = \theta$.

Endi bichiziqli aks ettirish va bichiziqli forma tushunchalariga o‘tamiz.

E, F, G vektor fazolar bo‘lib, $u : E \times F \rightarrow G$ biror aks ettirish bo‘lsin. Agar ixtiyoriy tayin $e \in E$ element va $\lambda, \mu \in K$, $f_1, f_2 \in F$ uchun

$$u(e, \lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda u(e, f_1) + \mu u(e, f_2)$$

hamda o‘zgarmas f uchun va $\lambda, \mu \in K$, $e_1, e_2 \in E$ uchun

$$u(\lambda e_1 + \mu e_2, f) = \lambda u(e_1, f) + \mu u(e_2, f)$$

munosabatlar bajarilsa, u holda *u bichiziqli aks ettirish* deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, $u(e, f)$ aks ettirish bir o‘zgaruvchini tayinlab olganda, ikkinchi o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli aks ettirish bo‘ladi.

Shunday qilib, $u : E \times F \rightarrow G$ bichiziqli aks ettirish bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $e_0 \in E$ uchun

$$u(e_0, \cdot) : F \rightarrow G$$

va ixtiyoriy $f_0 \in F$ uchun

$$u(\cdot, f_0) : E \rightarrow G$$

chiziqli aks ettirishlar bo‘ladi. Xususiy $G = K$ holda

$$u : E \times F \rightarrow K$$

bichiziqli aks ettirish *bichiziqli forma* yoki *bichiziqli funksional* deyiladi.

Misollar. 1. $V = C[a, b]$ bo‘lsin. $u : V \times V \rightarrow V$ aks ettirishni quyidagicha aniqlaymiz

$$u(f, g) = fg, \quad f, g \in C[a, b].$$

u bichiziqli aks ettirish, chunki

$$u(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = (\lambda f_1 + \mu f_2)g = \lambda f_1 g + \mu f_2 g = \lambda u(f_1, g) + \mu u(f_2, g).$$

Shunga o‘xshash

$$u(f, \lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda u(f, g_1) + \mu u(f, g_2).$$

2. $V = R^n$ bo‘lsin va $u : V \times V \rightarrow R^1$ aks ettirish quyidagicha aniqlansin:

$$u(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

bu yerda $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

u bichiziqli ekanligi osonlikcha isbotlanadi (tekshirib ko‘ring).

Mashq uchun misollar

1. Q ratsional sonlar maydoni bo‘lsin. Ixtiyoriy r ratsional sonning α haqiqiy songa ko‘paytmasi odatdagidek bo‘lsin. R fazo Q maydon ustida vektor fazo bo‘ladimi?

2. Ixtiyoriy kompleks vektor fazo haqiqiy vektor fazo sifatida qaralishi mumkinligini isbotlang.

3. C kompleks sonlar maydonini haqiqiy vektor fazo sifatida olamiz. Bu fazoda 1 va i elementlar chiziqli erkli ekanligini ko'rsating. Bu fazoning o'lchamini toping.

4. n o'lchamli kompleks vektor fazoni haqiqiy vektor fazo sifatida qaralsa, uning o'lchami nimaga teng bo'ladi?

5. $C[a,b]$ vektor fazoning o'lchami cheksiz ekanligini isbotlang.

6. R^n vektor fazoda ushbu

$$V = \{x = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 = a_2\}$$

to'plam vektor qism fazo ekanligini isbotlang, uning o'lchamini toping.

7. $C[a,b]$ fazoda 1, x , x^2 , \dots , x^n , \dots funksiyalar to'plamini olamiz. Bu to'plamning chiziqli qobig'ini toping.

8. l_2 fazoda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementlar sistemasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots \right)$$

Bu to'plamning chiziqli qobig'ini toping. U l_2 ga tengmi?

9. Ushbu $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ , μ sonlar uchun

$$\lambda A + \mu A \subset A$$

munosabatning bajarilishi A to'plamning absolyut qavariq bo'lishi uchun zarur va kifoyadir. Isbotlang.

10. Quyidagi teoremani isbotlang: V vektor fazoda absolyut qavariq bo'lgan A to'plam yutuvchi bo'lishi uchun, ushbu

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$$

munosabat zarur va kifoyadir.

11. R^n fazoda birinchi koordinatalari nolga teng bo'lgan vektorlardan iborat V_0 qism fazoni olamiz. R^n / V_0 faktor fazoni aniqlang.

12. Mos ravishda n va m o'lchamli bo'lgan R^n va R^m fazolarni olamiz.

$$T = (a_{ij}), i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$$

n satrli, m ustunli matritsa bo'lsin. R^n fazoning $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementiga $Tx = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m$ vektorni quyidagicha mos qo'yamiz:

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad j = \overline{1, m}$$

T ning chiziqli operator ekanligini isbotlang. Aksincha, ixtiyoriy $T : R^n \rightarrow R^m$ chiziqli operator shunday ko'rinishda, ya'ni matritsa yordamida yozilishini ko'rsating.

13. V vektor fazoda ixtiyoriy V_0 vektor qism fazoni

olib, quyidagi izomorfizmni isbotlang:

$$V/V_0 \times V_0 \cong V$$

14. $u: E \rightarrow F$ chiziqli operator bo'lsa,
 $E/\ker u \cong \text{Im } u$

izomorfizmni isbotlang.

15. V vektor fazo o'zining V_1 va V_2 qism fazolari-
ning to'g'ri yig'indisi bo'lsin, ya'ni $V = V_1 \oplus V_2$. Quyidagi
izomorfizmni isbotlang:

$$V_1 \cong V/V_2.$$

II BOB. METRIK FAZOLAR

2.1-§. Metrik fazolar

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o‘tish tushunchasidir. Bu amalni to‘g‘ri chiziq nuqtalaridan iborat to‘plamda joriy etishda biz ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan doimo foydalanib kelgan edik. Ammo limitga o‘tish masalasi kengroq qaraladigan bo‘lsa, asosiy mazmun olingan to‘plam elementlarining tabiiy tuzilishida emas, balki uning ikki elementi orasida masofa tushunchasini krita bilishdadir. Bu mulohaza fransuz matematigi M. Fresheni 1906 yilda metrik fazo tushunchasiga olib keldi.

Ta’rif. Agar biror X to‘plamning o‘zini o‘ziga to‘g‘ri (Dekart) ko‘paytmasi $X \times X$ ni $R_+ = [0, \infty]$ to‘plamga aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya berilgan bo‘lib, u quyidagi shartlarni (metrika aksiomalarini) qanoatlantirsa, X to‘plam *metrik fazo* deyiladi:

1°. $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ munosabat faqat $x = y$ bo‘lgandagina bajariladi;

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi);

3°. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (uchburchak aksiomasi).

$\rho(x, y)$ funksiya *metrika* deyiladi. Odatda, ρ metrikali X metrik fazo (X, ρ) bilan belgilanadi.

Misollar. 1. X ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. Ushbu

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq y \text{ bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = y \text{ bo‘lsa,} \end{cases}$$

funksiya metrik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.

Hayotdan bunday metrikaga misol keltiramiz. X to‘plam sifatida biror tramvay marshrutining bekatlari to‘plamini olamiz. $\rho(x, y)$ orqali x bekatdan y bekatgacha borish uchun to‘lanadigan haqni belgilaymiz. U holda

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1000 so'm, & \text{agar } x \neq y \text{ bo‘lsa,} \\ 0 so'm, & x = y \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

2. n o‘lchamli \mathbb{R}^n vektor fazoda ikki $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektor orasidagi masofa ushbu

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ko‘rinishda kiritilsa, u holda \mathbb{R}^n metrik fazoni tashkil etadi. 1° va 2° aksiomalarning bajarilishi o‘z-o‘zidan ravshan. Biz bu masofa uchun uchburchak aksiomasini isbotlaymiz. Bu aksiomadagi tengsizlik

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

elementlar uchun quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}. \quad (1)$$

Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$x_i - z_i = a_i, \quad z_i - y_i = b_i, \quad \text{bundan } x_i - y_i = a_i + b_i$$

U holda (1) tengsizlik quyidagi tengsizlikka keltiriladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (2)$$

Ushbu

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

ayniyatdan quyidagi Koshi - Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Bu tengsizlikdan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Bundan esa kerak bo'lgan (2) tengsizlik, demak, (1) tengsizlik kelib chiqadi.

3. l_2 haqiqiy fazo. l_2 fazoning elementlari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat. Bu fazoda masofa quyidagicha kiritiladi:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Metrikaning birinchi va ikkinchi aksiomalarining o'rnliligi ravshan, uchburchak aksiomasining bajarilishini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, ixtiyoriy n natural son va $\{a_i\} \in l_2, \{b_i\} \in l_2$ uchun

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}$$

tengsizlik o'rnlidir [2-misoldagi (2) tengsizlik]. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi hadlarning har biri $n \rightarrow \infty$ da limitga ega, chunki $\{a_i\} \in l_2$ va $\{b_i\} \in l_2$. Demak, chap tomonidagi ifoda kamaymaydigan va chegaralangan bo'lgani uchun limitga ega va

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Endi l_2 fazodan uchta

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), z = (z_1, z_2, \dots, z_n, \dots)$$

nuqtalarni olamiz va 2-misoldagi kabi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$a_k = x_k - z_k, \quad b_k = z_k - y_k;$$

ravshanki,

$$x_k - y_k = a_k + b_k.$$

Yuqoridagi (3) tengsizlikdan foydalanib, quyidagi tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

4. m fazo. Bu fazo hamma chegaralangan haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat edi. Agar uning ikkita $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, nuqtasi uchun masofa

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$$

tenglik bilan aniqlansa, m fazo metrik fazoga aylanadi. Darhaqiqat, uchburchak aksiomasi quyidagicha tekshiriladi.

$$|a_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i| \leq \sup_i |a_i - b_i| + \sup_i |b_i - c_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

bu yerda $z = (c_1, c_2, \dots)$. Bundan

$$\sup_i |a_i - c_i| = \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Qolgan aksiomalarning o'rnliligi ravshan.

5. X to'plam hamma yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklardan iborat bo'lsin, ya'ni

$$X = \left\{ x : x = (a_1, a_2, \dots); \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}.$$

Ravshanki, $X \subset m$, ya'ni X ning har bir elementi m uchun ham element. Demak, X da m dagi masofa kiritilsa, u ham metrik fazoni hosil etadi. Bu fazo c bilan belgilanadi.

6. s fazo. X elementlari haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat to'plam bo'lsin, ya'ni

$$X = \left\{ x : x = (a_1, a_2, \dots) \right\}.$$

Bu to'plamda ikki $x = (a_1, a_2, \dots)$ va $u = (b_1, b_2, \dots)$ nuqta orasidagi masofani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \sum \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \quad (4)$$

Uchburchak aksiomasi ushbu

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad (5)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi, shuning uchun (5) ni isbot etamiz. a va b ning ishoralari bir xil deb faraz qilaylik, masalan, $a>0, b>0$ bo‘lsin, u holda

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Endi a bilan b ning ishoralari turlicha, $|a| \geq |b|$ bo‘lsin. U holda $|a+b| \leq |a|$.

Endi $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \neq -1$) funksiyani qarasak, u o‘suvchi bo‘ladi, chunki

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Demak,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Yana bir $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementni olsak, (5) ga muvofiq,

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - c_k|}{1+|a_k - c_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k + b_k - c_k|}{1+|a_k - b_k + b_k - c_k|} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1+|a_k - b_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|b_k - c_k|}{1+|b_k - c_k|} = \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

ya’ni uchburchak aksiomasi isbotlandi.

7. $C[a,b]$ fazo. $[a,b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz haqiqiy funksiyalar to‘plami $C[a,b]$ da metrikani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Metrika aksiomalarining bajarilishini ko‘rsatish qiyin emas. Masalan, uchburchak aksiomasini isbotlaylik. Ixtiyoriy $t \in [a, b]$ nuqta va $x(t), y(t), z(t)$ funksiyalar uchun ushbu munosabat bajariladi:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Bundan

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

8. X to‘plam $[a, b]$ segmentda aniqlangan hamma o‘lchovli funksiyalardan iborat bo‘lsin. Agar ikki funksiya farq qiladigan nuqtalardan iborat to‘plamning o‘lchovi nolga teng bo‘lsa, bu funksiyalar teng hisoblanadi.

Ikki $x(t)$ va $y(t)$ funksiya orasidagi masofani ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt \quad (6)$$

Bu hol uchun ham uchburchak aksiomasining bajarilishi 6-misoldagi kabi isbotlanadi; qolgan ikki aksiomaning o‘rinliligi ravshan. Bu fazo $S[a, b]$ orqali belgilanadi.

Shuni ham aytish kerakki, berilgan to‘plamda metrikani turlicha kiritish mumkin.

Masalan, (X, ρ) metrik fazo bo‘lsin. X to‘plamda quyidagi funksiyalar ham metrikani aniqlaydi:

a) $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\};$

b) $\rho_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \rho(x, y) > 0 \text{ bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar } \rho(x, y) = 0 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$

c) $\rho_3(x, y) = f(\rho(x, y)),$ bu yerda

$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ - uzluksiz qavariq va $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ shartni qanoatlanuvchi ixtiyoriy funksiya;

d) $\rho_4(x, y) = \rho(\phi(x), \phi(y)),$ bu yerda $\phi : X \rightarrow X$ -biektiv akslantirish.

2.2-§. Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi

Ta’rif. (X, ρ) metrik fazoda biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ bo‘lsa, bu ketma-ketlik X fazoning x elementiga yaqinlashuvchi deyiladi va $x_n \rightarrow x$ yoki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ orqali belgilanadi.

Bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

1-teorema. *Har bir yaqanlashuvsh ketma-ketlik birgina limitga ega.*

Isboti. Darhaqiqat, $x_n \rightarrow x$ va $x_n \rightarrow y$ bo‘lsin. U holda uchburchak aksiomasiga muvofiq,

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$$

Ammo bu tengsizlikning o‘ng tomoni $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, demak, $\rho(x, y) = 0$, ya’ni $x = y$.

2-teorema. $\rho(x, y)$ masofa x va y elementlarning uzluksiz funksiysi, ya’ni agar $x_n \rightarrow x$ va $y_n \rightarrow y$ bo‘lsa, u holda

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$$

Isboti. Ixtiyoriy to‘rtta $x, y, z, u \in X$ nuqta uchun

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (1)$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham, uchburchak aksiomasidan foydalanib,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y) \quad (2)$$

tengsizliklarni yozishimiz mumkin. Bundan

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u).$$

Bu tengsizlikda x, y bilan mos ravishda z, u ning o‘rnlari almashtirilsa,

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, u) \quad (3)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi. (1) dan z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirilsa, teoremaning shartiga ko‘ra

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0$$

Bundan

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y).$$

Quyidagi da’vo o‘z-o‘zidan ravshan.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketligi ham shu nuqtaga yaqinlashadi.

4-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, va $x_0 \in X$ aniq bir nuqta bo‘lsa, u holda $\{\rho(x_n, x_0)\}$ sonlar to‘plami chegaralangan bo‘ladi.

Isboti. $\{\rho(x_n, x)\}$ yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik bo‘lganligi uchun u chegaralangan bo‘ladi; uning yuqori chegarasini M bilan belgilasak, u holda uchburchak aksiomasiga ko‘ra

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) \leq M + \rho(x, x_0) = M_1.$$

Endi ba’zi metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasining ma’nosini ko‘rib chiqamiz.

1. 1-misoldagi fazodan olingan biror ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun biror nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning hamma elementlari bir-biriga teng bo‘lishi kerak.

2. R^n fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun x_n vektor koordinatalarining mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va kifoya.

Darhaqiqat, agar R^n da

$$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^n (a_i^{(k)} - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

bo‘lsa, u holda $a_{(i)}^k \rightarrow a_i$ va aksincha.

3. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a, b]$ fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_n(t) \rightarrow x(t) \in C[a, b]$ bo‘lsin, ya’ni

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Bundan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $t \in [a, b]$ bo‘lganda

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

Demak, $t \in [a, b]$ ning hamma qiymatlari uchun $n > n_0$ bo‘lganda

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

Bu esa $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ ga tekis yaqinlashishining xuddi o‘zi. Ravshanki, aksincha, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ segmentda $x(t)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Demak, $C[a, b]$ fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish ma’lum tekis yaqinlashish tushunchasi bilan ustma-ust tushadi.

4. $L_p[a, b]$ fazoda ([HO‘FN], VIII bob) yaqinlashishni p -darajali o‘rtalma’noda yaqinlashish deyiladi, ya’ni

$$\rho(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \quad p > 1$$

$p=2$ bo‘lganda kvadratik o‘rtalma’noda yaqinlashish deb gapiriladi.

5. $\{x_k\}$ ketma-ketlik m fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_k \rightarrow x \in m$ ($k \rightarrow \infty$) bo‘lsin, ya’ni $\rho(x_k, x) = \sup |a_i^{(k)} - a_i| \rightarrow 0$ bu yerda

$$x_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)} \dots), \quad x = (a_1, a_2, \dots, \dots).$$

Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $k > n_0$ bo‘lganda $\rho(x_k, x) = \sup |a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$. Bundan, i ning hamma qiymatlari uchun $k > n_0$ bo‘lganda $|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$. Aksincha, $k > n_0$ bo‘lganda i ning hamma qiymatlari uchun

$$|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon$$

bo‘lsa, u holda ravshanki, $k \rightarrow \infty$ da $\rho(x_k, x) \rightarrow 0$. Demak, m fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish koordinatalar bo‘yicha tekis yaqinlashishni beradi.

6. s fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish koordinatalar bo‘yicha yaqinlashishni beradi (umuman aytganda, tekis emas!) Darhaqiqat, $x_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots)$, $x = (a_1, a_2, \dots)$ va $x_k \rightarrow x (k \rightarrow \infty)$ bo‘lsin.

U holda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon, \quad k > n_0(\varepsilon).$$

Bundan har qanday i uchun ham $k > n_0(\varepsilon)$ bo‘lganda

$$\frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i^{(k)} - a_i|}{1 + |a_i^{(k)} - a_i|} < \varepsilon.$$

Lekin bu tengsizlikning chap tomonida i ni tayinlab qo‘yib, k bo‘yicha limitga o‘tilsa, quyidagi munosabat hosil bo‘ladi:

$$\left| a_i^{(k)} - a_i \right| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Aksincha, i ning har bir qiymati uchun $k \rightarrow \infty$ da $\left| a_i^{(k)} - a_i \right| \rightarrow 0$ bo'lsin.

$\varepsilon > 0$ ni ixtiyoriy qilib olib, k natural sonni shunday tanlab olamizki, $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\left| a_i^{(n)} - a_i \right|}{1 + \left| a_i^{(n)} - a_i \right|} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\left| a_i^{(n)} - a_i \right|}{1 + \left| a_i^{(n)} - a_i \right|} + \\ &+ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\left| a_i^{(n)} - a_i \right|}{1 + \left| a_i^{(n)} - a_i \right|} < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\left| a_i^{(n)} - a_i \right|}{1 + \left| a_i^{(n)} - a_i \right|} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

O'ng tomondagi yig'indida hadlarning soni chekli bo'lganligi uchun k ni tayinlab qo'yib, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ni shu qadar katta qilib olamizki, $n > n_0$ bo'lganda

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\left| a_i^{(n)} - a_i \right|}{1 + \left| a_i^{(n)} - a_i \right|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Natijada $n > n_0$ bo'lganda

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon$$

2.3-§. Metrik fazolarda uzluksiz aks ettirishlar va funksionallar

Matematik analizda funksiyalarning uzluksizligidan keng foydalaniladi. Endi biz uzluksizlik tushunchasini ixtiyoriy metrik fazolarning aks ettirishlari uchun kiritamiz.

Ta'rif. X, Y metrik fazolar bo'lib, X ning D qism to'plamini Y ga aks ettiruvchi T operator berilgan bo'lsin.

Agar D to'plamdagи x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\} \subset D$ ketma-ketlik uchun ushbu

$$Tx_n \rightarrow Tx_0$$

munosabat bajarilsa, u holda T operator x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Agar T o'zining aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda T *uzluksiz operator* deyiladi.

Biz T aks ettirishning uzluksizlik ta'rifini ketma-ketliklar tilida berdik. Bu ta'rifni „ $\varepsilon - \delta$ ” tilida ham berish mumkin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lsaki, $\rho_1(x, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x uchun

$$\rho_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

munosabat bajarilsa, T operator x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi.

Bu ikki ta'rif teng kuchli ekanligi matematik analizda funksiyalar uchun isbotlanishiga o'xshash ko'rsatiladi.

Ta'rif. Xususiy $Y = R^1$ bo'lgan holda uzluksiz operator uzluksiz funksional

deyiladi.

Misollar. 1 Uzluksiz aks ettirishning muhim xususiy holi bo‘lgan izometriya tushunchasini kiritamiz.

$(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ metrik fazolar bo‘lib, X ni Y ning ustiga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli φ aks ettirish berilgan bo‘lsin. Agar ushbu

$$\rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = \rho_1(x_1, x_2)$$

munosabat X fazoning ixtiyoriy x_1, x_2 elementlari uchun bajarilsa, φ izometriya deyiladi.

Bevosita ko‘rinib turibdiki, agar φ izometriya bo‘lsa, u holda φ ham, φ^{-1} ham uzluksiz bo‘ladi.

2. X fazoda ρ_1 va ρ_2 metrikalar berilgan bo‘lsin. Agar shunday α, β musbat sonlar topilsaki, ushbu

$$\alpha\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \beta\rho_1(x, y)$$

munosabat hamma $x, y \in X$ elementlar uchun o‘rinli bo‘lsa, ρ_1 va ρ_2 *ekvivalent metrikalar* deyiladi.

Endi ρ_1, ρ_2 ekvivalent metrikalar bo‘lsin. (X, ρ_1) metrik fazoni (X, ρ_2) metrik fazoga quyidagicha aks ettiramiz:

$$Tx = x.$$

Ravshanki, T o‘zaro bir qiymatli aks ettirish. Ekvivalentlik ta’rifiga asosan

$$\rho_2(Tx, Ty) \leq \beta\rho_1(x, y)$$

demak, T -uzluksiz aks ettirish. Ushbu

$$\alpha\rho_1(T_x^{-1}, T_y^{-1}) \leq \rho_2(x, y)$$

tengsizlikdan T^{-1} aks ettirishning uzluksizligi kelib chiqadi.

Agar ρ_1 va ρ_2 metrikalar har xil bo‘lsa, T aks ettirish izometriya bo‘lmaydi.

3. Agar X 2.1-§ ning 1-misolidagi metrik fazo bo‘lsa, u holda X ni ixtiyoriy Y metrik fazoga aks ettiruvchi ixtiyoriy T operator uzluksiz bo‘ladi. Bu xossa shu metrik fazodagi yaqinlashish ma’nosidan bevosita kelib chiqadi.

4. l_2 fazoni R^1 fazoga quyidagicha aks ettiramiz:

$$x = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ elementga } f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \text{ sonni mos qo‘yamiz. Bu aks ettirish}$$

(funksional) l_2 fazoning metrikasiga nisbatan uzluksiz.

Darhaqiqat, agar $x = (a_1, a_2, \dots)$, $y = (b_1, b_2, \dots)$ bo‘lsa, u holda 2.1-§ dagi (2) tengsizlikka ko‘ra

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} = \rho(x, y).$$

Bu munosabatdan f ning uzluksizligi ko‘rinib turibdi. Ammo l_2 fazoda s fazoning metrikasini ko‘rsak, f uzluksiz bo‘lmaydi. Haqiqatan, s fazodagi metrika bo‘yicha yaqinlashish ma’nosiga asosan (2.2-§), ushbu

$$x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 1}_0, 0, \dots \right)$$

ketma-ketlik nolga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Ammo $f(x_n)=1$ nolga yaqinlashmaydi, demak, shu metrikada f uzluklidir.

2.4- §. Metrik fazoda ochiq va yopiq to‘plamlar

Endi (X, ρ) metrik fazoda ba’zi bir geometrik tushunchalar kiritamiz. Biror $x_0 \in X$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

to‘plam X fazodagi *ochiq shar* va

$$\bar{S}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$$

to‘plam *yopiq shar* deyiladi. x_0 nuqta sharning *markazi*, r son sharning *radiusi* deyiladi. Ushbu $\{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$ to‘plam markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo‘lgan *sfera* deyiladi. $S(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning *atrofi* (aniqrog‘i, ε - atrofi) deyiladi.

(X, ρ) metrik fazodagi M to‘plam biror shar ichida joylashgan bo‘lsa, bu to‘plam *chegaralangan* deyiladi.

Ta’rif. (X, ρ) metrik fazoda biror M to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar $x_0 \in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning kamida bitta elementi mavjud bo‘lsa, ya’ni har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$S(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$$

o‘rinli bo‘lsa, x_0 nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi. Bu tushunchaga yaqin bo‘lgan limit nuqta tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif. Agar $x_0 \in X$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to‘plamning x_0 dan farqli elementi mavjud bo‘lsa, x_0 nuqta M ning *limit nuqtasi* deyiladi.

Ta’riflardan bevosita ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy limit nuqta urinish nuqtasi ham bo‘ladi. Ammo urinish nuqtasi limit nuqta bo‘lishi shart emas. Masalan, haqiqiy sonlar (R, ρ) , $\rho(a, b) = |a - b|$ metrik fazosida $(0, 1)$ oraliq va „2“ nuqtadan hosil bo‘lgan to‘plam uchun „2“ nuqta urinish nuqtasi, ammo limit nuqta emas. Shu to‘plam uchun $[0, 1]$ segmentning har bir nuqtasi limit nuqtadir.

M to‘plamning urinish nuqtalari to‘plami \bar{M} bilan belgilanadi va M ning yopilmasi deyiladi.

1-teorema. Ixtiyoriy M, M_1 va M_2 to‘plamlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinlidir:

- 1) $M \subset \bar{M}$,
- 2) $\overline{\overline{M}} = \bar{M}$
- 3) agar $M_1 \subset M_2$ bo‘lsa, u holda $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$
- 4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$

Izboti. Birinchi xossa ravshan. Ikkinci xossalari isbotlaymiz. Birinchi

xossaga asosan $\bar{M} \subset \overline{\bar{M}}$. Shuning uchun $\overline{\bar{M}} \subset \bar{M}$ munosabatni isbotlash yetarlidir. $x \in \overline{\bar{M}}$ bo'lsin. U holda bu nuqtaning ixtiyoriy ε -atrofida \bar{M} ga tegishln x_1 nuqta topiladi; so'ng x_1 nuqtaning $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1) > 0$ bo'lgan ε_1 -atrofini olamiz. Agar $z \in S(x_1, \varepsilon_1)$ bo'lsa, ya'ni $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$ bajarilsa, u holda

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, x_1) + \rho(x_1, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon$$

ya'ni

$$z \in S(x, \varepsilon)$$

Shunday qilib, $S(x_1, \varepsilon_1) \subset S(x, \varepsilon)$. Ammo $x_1 \in \bar{M}$ demak x_1 ning ε_1 -atrofida M ga tegishli x_2 nuqta mavjud. Shuning uchun $x_2 \in S(x_1, \varepsilon_1) \subset S(x, \varepsilon)$. Lekin $S(x, \varepsilon)$ shar x nuqtaning ixtiyoriy ε -atrofi bo'lgani uchun $x \in \overline{M}$. Uchinchi xossa o'z-o'zidan ravshan.

To'rtinchchi xossani isbotlaymiz $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ bo'lsin, u holda x nuqtaning ixtiyoriy $S(x, \varepsilon)$ atrofida $M_1 \cup M_2$ ga tegishli x_1 element mavjud. Agar $x \in M_1$ va $x \in M_2$ bo'lsa, u holda x ning shunday $S(x, \varepsilon_1)$ va $S(x, \varepsilon_2)$ atroflari mavjudki, bu atroflar mos ravishda M_1 va M_2 to'plamlar bilan kesishmaydi, ya'ni $S(x, \varepsilon_1) \cap M_2 = \emptyset$ va $S(x, \varepsilon_2) \cap M_1 = \emptyset$. Endi ε sonni $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ qilib olsak, u holda x nuqtaning $S(x, \varepsilon)$ atrofi $M_1 \cup M_2$ to'plam bilan kesishmaydigan bo'lib, ziddiyat hosil bo'ladi. Demak, bundan kelib chiqadiki, x nuqta $\overline{M_1}$ yoki $\overline{M_2}$ to'plamlardan kamida bittasiga tegishli, ya'ni

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

Teskari munosabatning o'rinnligi $M \subset M_1 \cup M_2$ va $M \subset M_2 \cup M_1$ munosabatlardan hamda uchinchi xossadan kelib chiqadi.

Ta'rif. (X, ρ) metrik fazoda M to'plam o'z yopilmasiga teng (ya'ni $M = \overline{M}$) bo'lsa, u holda M yopiq to'plam deyiladi.

1-teoremadagi uchinchi xossaga binoan M to'plamning yopilmasi M ni o'z ichiga oluvchi eng kichik yopiq to'plamdir.

Misollar.

1. $(R, \rho), \rho(a, b) = |a - b|$ to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $[a, b]$ segment yopiq to'plamdir.
2. (X, ρ) metrik fazoda ixtiyoriy $\bar{S}(x_0, r)$ yopiq shar yopiq to'plamdir. Xususan, $C[a, b]$ metrik fazoda $|f(t)| \leq K (t \in [a, b])$ tongsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami yopiqdir.
3. $C[a, b]$ fazoda $|f(t)| < K (t \in [a, b])$ tongsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami (ochiq shar) yopiq emas. Uning yopilmasi $\{f \in C[a, b] : |f(t)| \leq K, t \in [a, b]\}$ to'plamdir.
4. Ixtiyoriy (X, ρ) metrik fazoda X va \emptyset to'plamlar yopiqdir.
5. Metrik fazoda har qanday chekli to'plam yopiqdir.

2-teorema. a) soni chekli yopiq to'plamlarning yig'indisi yana yopiqdir;

b) soni ixtiyoriy bo‘lgan yopiq to‘plamlarning ko‘paytmasi yopiqdir.

Ishboti. a) bu xossani ikki yopiq to‘plam uchun isbot qilinishi kifoya. F_1, F_2 yopiq to‘plamlar bo‘lsin, ya’ni

$$\bar{F}_1 = F_1, \bar{F}_2 = F_2$$

u holda 1-teoremadagi 4) xossaga binoan

$$\overline{F_1 \cup F_2} = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 = F_1 \cup F_2$$

Ta’rifga asosan $F_1 \cup F_2$ yopiqdir.

b) $\{F_\alpha\}_\alpha \in A$ yopiq to‘plamlar sistemasi va x ular ko‘paytmasining, ya’ni

$F = \bigcap_\alpha F_\alpha$ to‘plamning urinish nuqtasi bo‘lsin. U holda x ning ixtiyoriy ε -atrofida

F ning kamida bitta, masalan, x_1 elementi mavjud va, demak, α ning hamma qiymatlari uchun $x_1 \in F_\alpha$. Demak, ixtiyoriy α uchun $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$ ya’ni $x \in \bigcap F_\alpha = F$. Demak, F yopiq to‘plam.

Ta’rif. Agar x nuqtaning M to‘plamda butunlay joylashgan atrofi mavjud bo‘lsa, x nuqta M to‘plamning ichki nuqtasi deyiladi. Agar M to‘plamning hamma nuqtalari ichki bo‘lsa, u *ochiq to‘plam* deyiladi. Bo‘sh to‘plam ham ochiq deb hisoblanadi.

Misollar.

6. R to‘g‘ri chiziqda (a, b) interval ochiq to‘plamdir, haqiqatan $x \in (a, b)$ bo‘lsa, u holda $\varepsilon = \min(x-a, b-x)$ uchun $S(x, \varepsilon) \subset (a, b)$.

7. (X, ρ) metrik fazoda ixtiyoriy $S(x, r)$ ochiq shar ochiq to‘plamdir. Haqiqatan, agar $y \in S(x, r)$ bo‘lsa, u holda $\varepsilon = r - \rho(x, y)$ uchun $S(y, \varepsilon) \subset S(x, r)$ Xususan, 3-misoldagi $\{f \in C[a, b] : |f(t)| < K, t \in [a, b]\}$ to‘plam $C[a, b]$ metrik fazoda ochiq to‘plamdir.

3-teorema. $G(\subset X)$ to‘plamning ochiq bo‘lishi uchun uning to‘ldiruvchisi $F = X \setminus G$ to‘plamning yopiq bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Ishboti. a) zarurligi. G ochiq bo‘lsin, u holda har bir $x \in G$ nuqta butunlay G da joylashgan atrofga ega. Demak, bu atrof F bilan kesishmaydi. Bundan, ravshanki, F ning birorta ham urinish nuqtasi G ga kirmaydi, ya’ni F yopiq to‘plam.

b) kifoyaligi. $F = X \setminus G$ yopiq bo‘lsin, u holda G dan olingan ixtiyoriy nuqta F bilan kesishmaydigan, demak G da butunlay joylashgan atrofga ega, ya’ni G - ochiq to‘plam.

Natija. Ø bo‘sh to‘plam va X fazo ham ochiq, ham yopiq to‘plamlardir.

Shuni ham aytib o‘tish kerakki, metrik fazoda ochiq ham bo‘limgan, yopiq ham bo‘limgan to‘plamlar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, (R^1, ρ) $\rho(x, y) = |x - y|$ haqiqiy sonlar metrik fazosida $A = [a, b]$ to‘plamni olamiz. Ravshanki, A yopiq to‘plam emas, chunki $\bar{A} = [a, b] \neq A$. A to‘plam ochiq ham emas. Darhaqiqat, a nuqtaning hech qanday ε -atrofi $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ A to‘plamda butunlay joylasha olmaydi. Demak, A to‘plam ochiq ham emas, yopiq ham emas.

4-teorema. Soni ixtiyoriy bo‘lgan ochiq to‘plamlarning yig‘indisi va soni chekli bo‘lgan ochiq to‘plamlarning ko‘paytmasi ochiq to‘plamlar bo‘ladi.

Teoremaning isboti quyidagi

$$\bigcap_{\alpha} (X \setminus G_{\alpha}) = X \setminus \left(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \right), \bigcup_{i=1}^n (X \setminus G_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n G_i \right)$$

tengliklarni nazarda tutsak, 2-va 3-teoremalardan osonlikcha kelib chiqadi.

2.5-§. Separabel metrik fazolar

Ta’rif. (X, ρ) metrik fazoda M, N to‘plamlar uchun $\bar{M} \supset N$ bo‘lsa, M to‘plam N to‘plamda *zich* deyiladi. Xususan, M to‘plam X da *zich* bo‘lsa, u holda M to‘plam *hamma yerda* *zich* to‘plam deyiladi.

Ta’rif. Agar M to‘plam hech bir sharda *zich* bo‘lmasa, u holda M to‘plam hech qayerda *zich* emas deyiladi. Ya’ni, agar ixtiyoriy S sharning ichida M to‘plam bilan kesishmaydigan S_1 shar topilsa, M to‘plam hech qayerda *zich* emas.

Ta’rif. Agar (X, ρ) metrik fazoning *hamma yerida* *zich* bo‘lgan sanoqli yoki chekli to‘plam mavjud bo‘lsa, u holda X *separabel fazo* deyiladi.

Separabellik xossasi nuqtai nazaridan 2.1-§ dagi misollarimizga qaytamiz.

Masalan, 2-misoldagi R^n separabel fazodir. Darhaqiaqat, R^n fazoda koordinatalari ratsional sonlardan iborat bo‘lgan nuqtalar to‘plami sanoqli bo‘lib, R^n ning *hamma yerida* *zich*.

$C[a,b]$ fazo ham separabeldir. Darhaqiqat koeffitsientlari ratsional sonlardan iborat *hamma* ko‘phadlar to‘plami P_r sanoqli bo‘lib, u *hamma* ko‘phadlar to‘plami P da *zich*, P esa matematik analizdagi ma’lum Veyershtrass teoremasiga asosan $C[a,b]$ ning *hamma yerida* *zich* bo‘ladi. Demak, $\bar{P}_r = C[a,b]$

m fazo separabel emas. Bu fazoda quyidagi to‘plamni olamiz:

$$Q = \{x : x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)\}, a_i = 0 \text{ yoki } 1.$$

Ravshanki, Q kontinuum quvvatga ega ([HO‘FN], I bob).

Agar Q dan ikkita turli x va y element olinsa, ular orasidagi masofa

$$\rho(x, y) = \sup |a_i - b_i| = 1$$

Bundan foydalanib, m separabel emasligini isbot etamiz. Buning uchun teskarisini, ya’ni m ning *hamma yerida* *zich* bo‘lgan sanoqli A to‘plam mavjud

deb faraz qilamiz. A ning har bir elementi atrofida radiusi $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ga teng sharni

olamiz. U holda bu sharlarning yig‘indisida m fazoning *hamma* elementlari joylashgan bo‘ladi. Ammo sharlarning soni ko‘pi bilan sanoqli bo‘lgani uchun ularning hech bo‘lmasganda bittasining ichida Q ning kamida ikkita turli x, y elementi joylashgan bo‘ladi. Shu ikki x va y element kirgan sharning markazi x_0 nuqtada bo‘lsin. Bundan ushbu

$$1 = \rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ziddiyat kelib chiqadi. Bu ziddiyat esa qilgan farazimiz natijasida hosil bo'ldi. Demak, m separabel fazo emas.

1-teorema. (X, ρ) separabel metrik fazoning ixtiyoriy X_0 qism to'plami ham ρ metrikaga nisbatan separabel metrik fazodir.

Ishboti. Ushbu

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

sanoqli to'plam X fazoning hamma yerida zich bo'lsin. Ushbu belgilashni kiritamiz;

$$a_n = \inf_{x \in X_0} \rho(\xi_n, x), \quad n=1,2,3,\dots$$

Ixtiyoriy n, m natural sonlar uchun inf ning xossalariiga asosan shunday $x_{n,m} \in X_0$ nuqta topiladiki, $\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}$ bo'ladi. Biror $\varepsilon > 0$ sonni olaylik va m son $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$ shartni qanoatlantirsin. (1) to'plam X ning hamma yerida zich bo'lgani sababli ixtiyoriy $x_0 \in X_0$ uchun shunday n topiladiki,

$$\rho(\xi_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demak,

$$\rho(\xi_n, x_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} \leq \rho(\xi_n, x_0) + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

U holda

$$\rho(x_0, x_{n,m}) \leq \rho(x_0, \xi_n) + \rho(\xi_n, x_{n,m}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in X_0$ nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida $x_{n,m} \in X_0$ ko'rinishdagi nuqta mavjud, ya'ni $\{x_{n,m}\}_{n,m}$ to'plam X_0 fazoning hamma yerida zich va ravshanki, sanoqli to'plam. Demak, X_0 separabel metrik fazodir.

2.6- §. To'la metrik fazolar

Matematik analizning umumiy kursidan ma'lumki, sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va kifoya. Bu xossa matematik analizda katta ahamiyatga ega bo'lib, haqiqiy sonlar to'plamining "to'laligini" ko'rsatadi.

Endi haqiqiy sonlar to'plamining bu xossasi har qanday metrik fazo uchun ham o'rinlimi degan savol qo'yish mumkin. Masalani aniqroq ifoda qilish uchun quyidagi ta'rifni kiritamiz.

Ta'rif. Agar (X, ρ) metrik fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirsa, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_ε natural son mavjud bo'lib, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik n va m sonlarning n_ε dan katta bo'lgan hamma qiymatlari uchun bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Agar X fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa,

u fazo to‘la deyiladi.

Ravshanki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental. Yuqoridagi savolni endi quyidagicha ifoda qilish mumkin: har qanday metrik fazo to‘lami? Bu savolga beriladigan javob har doim ijobiy emas.

Misollar.

1. Hamma ratsional sonlardan iborat X to‘plamda masofa $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ formula bilan aniqlansin. Ravshanki, X metrik fazo; ammo bu fazo to‘la emas, chunki, masalan,

$\left\{ r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ratsional sonlar ketma-ketligi fundamental bo‘lib, shu X fazoda yaqinlashuvchi emas, ya’ni u hech qanday ratsional songa yaqinlashmaydi.

2. $[a, b]$ segmentda aniqlangan hamma uzluksiz haqiqiy funksiyalardan iborat to‘plamni olib, unda masofani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

Bu metrik fazoni $C^2[a, b]$ bilan belgilaymiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib, bu masofa uchun uchburchak aksiomasining o‘rinliligini ko‘rsatish qiyin emas. Metrikaning qolgan ikki aksiomasi o‘z-o‘zidan ravshan. Demak, bu metrik fazo. Bu fazo to‘la emas, chunki, bu metrikada uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi yana uzluksiz funksiyaga yaqinlashishi shart emas. Aniq misol keltiramiz. Masalan,

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

ketma-ketlik $C^2[0, 2]$ fazoda fundametal. Haqiqatan, ixtiyoriy n, m natural sonlar uchun

$$\begin{aligned} \rho^2(\varphi_n, \varphi_m) &= \int_0^2 [\varphi_n(t) - \varphi_m(t)]^2 dt = \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt = \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{m+n+1} + \frac{1}{2m+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ammo bu ketma-ketlik hech qanday uzluksiz funksiyaga yaqinlashmaydi. Buni isbotlash uchun quyidagi uzlukli funksiyani ko‘ramiz:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Ixtiyoriy $\varphi \in C^2[0, 2]$ funksiya uchun ravshanki,

$$\rho(f, \varphi) = \left[\int_0^2 (f(t) - \varphi(t))^2 dt \right]^{1/2} > 0.$$

Demak,

$$0 < \rho(f, \varphi) \leq \rho(f, \varphi_n) + \rho(\varphi_n, \varphi).$$

Shu bilan birga

$$\rho(f, \varphi_n) = \left[\int_0^2 [f(t) - \varphi_n(t)]^2 dt \right]^{1/2} = \left[\int_0^1 t^{2n} dt \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \rightarrow 0.$$

Shuning uchun $\rho(\varphi_n, \varphi)$ hech qanday $\varphi \in C^2[0,2]$ uchun nolga intilmaydi.

2. 1- § da misol sifatida keltirilgan hamma metrik fazolar to‘la. Ularning ba’zilarining to‘laligini quyida ko‘rsatamiz.

3. $C[a,b]$ fazoning to‘laligi. Bu fazoda $\{x_n(t)\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$. 2.2-§ da $C[a,b]$ fazodagi yaqinlashish funksiyalarning tekis yaqinlashishiga ekvivalent ekanligini ko‘rsatgan edik.

Har bir berilgan ixtiyoriy $t \in [a,b]$ nuqtada ushbu sonli $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirgani uchun bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Uning limitini $x_0(t)$ bilan belgilaymiz. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $x_0(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun $x_0(t)$ funksiya uzlusiz bo‘ladi. Natijada

$$\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, x_0(t) \in C[a,b]$$

va, demak, $C[a,b]$ fazo to‘la.

4. l_2 fazoning to‘laligi. Bu fazodan olingan $\{x_n\}$

$$\left(x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)} \dots), \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(n)})^2 < \infty \right)$$

ketma-ketlik fundamental bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 natural son mavjudki, ular uchun

$$\rho^2(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad n, m > n_0 \quad (1)$$

Bundan, har qanday k uchun

$$(a_k^{(n)} - a_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \quad n, m > n_0$$

ya’ni har bir k uchun $\{a_k^{(n)}\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi. Bu ketma-ketlikning limitini a_k bilan belgilab, $x = (a_1, a_2, \dots)$ elementni hosil qilamiz. Agar

$$\sum_{i=1}^p a_i^2 < +\infty \text{ va}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

munosabatlarning o‘rinnligi ko‘rsatilsa, l_2 fazoning to‘laligi isbot etilgan bo‘ladi.

(1) tengsizlikni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 = \sum_{i=1}^p (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} (a_i^{(n)} - a_i^{(m)})^2 < \varepsilon$$

bu yerda p - ixtiyoriy natural son. Bundan ixtiyoriy p uchun:

$$\sum_{i=1}^p \left(a_i^{(n)} - a_i^{(m)} \right)^2 < \varepsilon$$

yoki p bilan m ni tayinlab qo‘yib, n bo‘yicha limitga o‘tilsa, ushbu

$$\sum_{i=1}^p \left(a_i - a_i^{(m)} \right)^2 \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy p uchun o‘rinli; shuning uchun bunda p bo‘yicha limitga o‘tish mumkin, u holda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i - a_i^{(m)} \right)^2 \leq \varepsilon. \quad (2)$$

$$\text{Bundan va } \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(m)} \right)^2 < \infty \text{ hamda } a_i^2 \leq 2 \left(a_i^{(m)} \right)^2 + 2 \left(a_i - a_i^{(m)} \right)^2, (i = 1, 2, \dots)$$

munosabatdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

Demak, $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in l_2$ So‘ngra $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo‘lganligi uchun (2) dan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, x) = 0.$$

5. m fazoning to‘laligi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo‘lsin. $x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) \in m$ bo‘lganligi tufayli shunday $\{M_n\}$ ketma-ketlik mavjudki, uning uchun $|a_i^{(n)}| < M_n (i = 1, 2, \dots)$ o‘rinli va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 natural son mavjudki,

$$\rho(x_n, x_p) < \varepsilon, \quad n, p > n_0$$

yoki

$$\sup |a_i^{(n)} - a_i^{(p)}| < \varepsilon; \quad n, p > n_0$$

Bundan

$$|a_i^{(n)} - a_i^{(p)}| < \varepsilon, \quad n, p > n_0 \quad (3)$$

munosabatning i ga nisbatan tekis bajarilishi kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy i uchun $\{a_i^{(n)}\}$ ketma-ketlik n bo‘yicha yaqinlashuvchi bo‘ladi; uning limitini a_i bilan belgilab, $x = (a_1, a_2, \dots)$ elementni hosil qilamiz.

Endi ushbu $x \in m$ va $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ munosabatlarni isbotlaymiz. (3) da n ga nisbatan limitga o‘tilsa, hamma i lar uchun o‘rinli bo‘lgan

$$|a_i^{(n)} - a_i| \leq \varepsilon, \quad n > n_0 \quad (4)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan

$$|a_i| \leq |a_i^{(n+1)} - a_i| + |a_i^{(n+1)}| < \varepsilon + M_{n_0+1}$$

tengsizlikni hamma i lar uchun hosil qilish mumkin, ya'ni $x = (a_1, a_2, \dots) \in m$ munosabat kelib chiqadi. (4) dan

$$\sup_i |a_i^{(n)} - a_i| \leq \varepsilon, \quad n > n_0$$

yoki $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon, n \geq n_0$ ixtiyoriy bo'lganigi uchun bundan
 $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ yoki $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$

munosabat kelib chiqadi. Demak, m - to'la fazo.

Endi metrik fazolarning to'laligiga oid ba'zi xossalarni keltiramiz.

1-teorema. (X, ρ) to'la metrik fazoda $\{\bar{S} = \bar{S}_n(a_n, \varepsilon_n)\}$ yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, bular uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\bar{S}_{n+1} \subset \bar{S}_n (n = 1, 2, \dots) \text{ va } n \rightarrow \infty \text{ da } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

U holda bu sharlarning umumiy qismi birgina nuqtadan iborat bo'ladi.

Izboti. \bar{S}_i sharlarning markazlaridan iborat bo'lgan quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (5)$$

Teorema shartiga ko'ra $a_{n+p} \in \bar{S}_n (p = 1, 2, \dots)$ Shuning uchun

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \leq \varepsilon_n \text{ yoki } \rho(a_{n+p}, a_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Demak, (5) ketma-ketlik fundamental. X to'la fazo bo'lganligi uchun bu ketma-ketlik biror $a \in X$ elementga yaqinlashuvchi bo'ladi.

So'ngra, ixtiyoriy S_m yopiq sharni olamiz (m - tayin natural son). U holda $a \in \bar{S}_m$, chunki $\{a_m, a_{m+1}, \dots\}$ nuqtalar ketma-ketligi (5) ning qism ketma-ketligi bo'lgani uchun a ga yaqinlashuvchi, bu ketma-ketlikning har bir elementi \bar{S}_m ga kiradi va S_m yopiq bo'lganligi uchun

$$a \in \bar{S}_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Demak, $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{S}_m$.

Endi $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{S}_m$ ga a nuqtadan boshqa yana biror b element ham tegishli bo'lsin

deb faraz qilamiz. U holda, bir tomonidan, har qanday n uchun

$$0 < \rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leq 2\varepsilon_n$$

munosabat o'rinni, ikkinchi tomonidan, $n \rightarrow \infty$ da $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bo'lgani uchun $\rho(a, b) = 0$, ya'ni $a = b$.

2-teorema. Agar (X, ρ) metrik fazoda 1-teoremaning shartlarini qanoatlantiradigan har qanday yopiq sharlar ketma-ketligi bo'sh bo'lmagan umumiy qismga ega bo'lsa, u holda X fazo to'la bo'ladi.

Izboti. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olib, n_k natural sonni shunday tanlab olamizki, ixtiyoriy k natural son uchun quyidagi tengsizlik o'rinni bo'lsin:

$\rho(x_{n_{k+p}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ ushbu $\bar{S}_k = \bar{S}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ yopiq sharlarni ko'ramiz. Agar $x \in \bar{S}_{k+1}$ bo'lsa, u holda

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

ya'ni $x \in \bar{S}_k$. Demak, $\bar{S}_{k+1} \subset \bar{S}_k$. Teorema shartiga ko'ra bu yopiq sharlar ularning hammasiga tegishli x_0 elementga ega. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_0 ga yaqinlashishi ko'rsatilsa, tasdig'imiz isbot etilgan bo'ladi. $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik x_0 ga yaqinlashadi, chunki

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0.$$

u holda butun $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham x_0 ga yaqinlashadi, chunki ushbu

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$$

tengsizlikning o'ng tomoni n va n_k yetarlicha katta bo'lganda istalgancha kichik qilinishi mumkin.

To'la metrik fazolar nazariyasida quyidagi teorema katta ahamiyatga ega.

3-teorema. (Ber teoremasi). (X, ρ) to'la metrik fazoni hadlarining soni sanoqli va hech qayerda zikh bo'lmanan to'plamlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi.

I sboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ va M_n lar hech qayerda zikh bo'lmanan to'plamlar bo'lsin. S_0 radiusi 1 ga teng bo'lgan ixtiyoriy yopiq shar bo'lsin. M_1 hech qayerda zikh emas, xususan S_0 da ham zikh bo'lmanani uchun radiusi $\frac{1}{2}$ dan kichik S_1 yopiq shar topiladiki, $S_1 \subset S_0$ va $S_1 \cap M_1 = \emptyset$. M_2 to'plam S_1 sharda zikh bo'lmanani uchun S_1 ning ichida shunday S_2 shar topiladiki uning radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik va $S_2 \cap M_2 = \emptyset$ va hokazo.

Shu tarzda davom etib, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{S_n\}$ yopiq sharlar sistemasini hosil qilamiz:

- 1) $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$
- 1) $S_n \cap M_n = \emptyset$
- 2) S_n ning radiusi $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

1-teoremaga binoan $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ ga tegishli $x \in X$ nuqta mavjuddir. S_n larning 2) xossasiga ko'ra $x \in M_n, n = 1, 2, \dots$, ya'ni $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = X$. Bu ziddiyatdan

$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ kelib chiqadi.

2.7-§. To‘ldiruvchi fazo haqidagi teorema

Bu paragrafda funksional analizdagi muhim teoremlardan biri bo‘lgan to‘ldiruvchi fazo haqidagi teoremani isbotlaymiz.

Ta’rif. Agar X metrik fazo uchun shunday X^* metrik fazo mavjud bo‘lsaki, X fazo X^* ning hamma yerida zinchil, X^* fazo to‘la bo‘lsa, u holda X^* metrik faza X fazoning to‘ldiruvchisi deyiladi.

Teorema. Ixtiyoriy X metrik fazo to‘ldiruvchiga ega. To‘ldiruvchi fazo X ning elementlarini o‘z o‘rnida qoldiruvchi izometriya aniqligi bilan yagonadir, ya’ni har qanday ikki to‘ldiruvchi fazoning birini ikkinchisiga aks ettiruvchi va X fazoning har bir nuqtasini o‘z o‘rnida qoldiruvchi izometriya doim mavjuddir.

Isboti. Dastavval, agar to‘ldiruvchi fazo mavjud bo‘lsa, uning yagonaligini isbotlaymiz. (X^*, ρ_1) va (X^{**}, ρ_2) fazolar (X, ρ) fazoning to‘ldiruvchilari bo‘lsin deb faraz qilaylik. Bizning maqsadimiz uchun quyidagi xossalarga ega bo‘lgan $\varphi: X^* \rightarrow X^{**}$ aks ettirishning mavjudligini ko‘rsatish kifoya:

- 1) φ - izometriya;
- 2) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\varphi(x) = x$.

Bunday φ izometriyani quyidagicha aniqlaymiz. $x^* \in X^*$ ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. To‘ldiruvchi fazoning ta’rifiiga asosan x^* ga yaqinlashuvchi va X ning elementlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Bu ketma-ketlik X^{**} fazoga ham tegishlidir. X^{**} to‘la bo‘lganligi uchun $\{x_n\}$ biror $x^{**} \in X^{**}$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘ladi. O‘z-o‘zidan ravshanki, x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tanlashga bog‘liq emas, ya’ni agar $\{x'_n\}$ ketma-ketlik x^* ga yaqinlashuvchi boshqa bir ketma-ketlik bo‘lsa, u holda X^{**} fazoda $\{x'_n\}$ ham x^{**} ga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Aks ettirishni $\varphi(x^*) = x^{**}$ ko‘rinishda aniqlaymiz. Ravshanki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\varphi(x) = x$. Endi faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar X fazodagi fundamental ketma-ketliklar bo‘lib, ular X^* fazoda mos ravishda x^* va y^* nuqtalarga, X^{**} fazoda esa x^{**} va y^{**} nuqtalarga yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

ya’ni

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Shunday qilib, φ biz izlagan izometriya bo‘ladi.

Endi to‘ldiruvchining mavjudligini isbot qilamiz. X metrik fazoda $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ bajarilsa, biz ularni ekvivalent deymiz va $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$ ko‘rinishda belgilaymiz.

O‘z-o‘zidan ravshanki, bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivdir, ya’ni ekvivalentlik munosabatidir. Demak, X fazodagi fundamental ketma-ketliklar to‘plami o‘zaro ekvivalent bo‘lgan ketma-ketliklar sinflariga ajraladi. Endi biz (X^*, ρ) fazoni aniqlaymiz. X^* ning elementlari deb o‘zaro ekvivalent bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinflariga aytamiz. Agar $x^*, y^* \in X^*$ ikki sinf bo‘lsa, biz ularning har biridan mos ravishda bittadan $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklarni olamiz va X^* fazoda metrikani

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \quad (1)$$

ko‘rinishda aniqlash mumkin ekanligini isbotlaymiz, ya’ni (1) ning o‘ng tomonidagi limit mavjud va $\{x_n\} \in X^*$, $\{y_n\} \in Y^*$ vakillarga bog‘liq emasligini ko‘rsatamiz. 2.2-§ dagi (1) tengsizlikka asosan

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \quad (2)$$

Endi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning fundamental ekanligini hisobga olsak, yetarli darajada katta bo‘lgan n, m natural sonlar uchun

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

munosabat kelib chiqadi. Ya’ni $s_n = \rho(x_n, y_n)$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun Koshi sharti bajariladi, va demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ mavjud. Bu limit x^* va y^* ning vakillariga bog‘liq emas. Darhaqiqat, x^* sinfdan $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ vakillarni, y^* sinfdan $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$ vakillarni olib, ular uchun (2) tengsizlikka o‘xshash ushbu

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

tengsizlikni yozishimiz mumkin. So‘ng $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Demak, $\rho(x^*, y^*)$ son mavjud va x^*, y^* sinflarning vakillariga bog‘liq emas. Endi biz $\rho(x^*, y^*)$ uchun metrika aksiomalarini tekshirib chiqamiz.

- 1) aksioma $\rho(x^*, y^*)$ ning ta’rifidan kelib chiqadi;
- 2) aksioma o‘z-o‘zidan ravshan.

Uchburchak aksiomasini isbotlaymiz. X fazoda bu aksioma o‘rinli ekanligidan foydalanib,

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$$

tengsizlikni yozamiz. So‘ngra n bo‘yicha limitga o‘tsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, y_n)$$

ya’ni

$$\rho(x^*, y^*) \leq \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Endi X ni X^* ning qism fazosi deb hisoblash mumkinligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x \in X$ elementga shu elementga yaqinlashuvchi bo‘lgan fundamental ketma-ketliklar sinfini mos qo‘yamiz. Bu sinf bo‘sh emas, chunki u statsionar bo‘lgan (ya’ni hamma x_n elementlari x ga teng bo‘lgan) ketma-ketlikni o‘z ichiga

oladi. Agar $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ bo'lsa, u holda

$$\rho(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

Shu tarzda har bir $x \in X$ elementga yuqorida aytilgan sinfni mos qo'ysak, X ni X^* ga izometrik aks ettirish hosil bo'ladi. Shuning uchun X ni uning X^* dagi tasviri bilan aynan bir deb hisoblaymiz.

X ni X^* ning hamma yerida zinch ekanligini isbotlaymiz. $x^* \in X^*$ ixtiyoriy element va $\varepsilon > 0$ bo'lsin. x^* sinfga tegishli bo'lgan biror $\{x_n\} \in x^*$ fundamental ketma-ketlikni olamiz. N natural son shunday bo'lsinki, ushbu

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy $m, n > N$, sonlar uchun bajarilsin. U holda m bo'yicha limitga o'tsak, $\rho(x_n, x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ tengsizlik ixtiyoriy $n > N$ uchun bajariladi.

Demak, x^* nuqtaning ixtiyoriy atrofida X ning elementi mavjud, ya'ni X ning yopilmasi X^* ga teng.

Nihoyat, X^* ning to'la ekanligini isbotlaymiz. Avval shuni aytish kerakki, X^* ning ta'rifiga ko'ra X ning elementlaridan hosil bo'lgan ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ fundamental ketma-ketlik X^* ni biror x^* elementiga yaqinlashadi, aniqrog'i, shu ketma-ketlikni o'z ichiga oluvchi sinf bilan aniqlangan x^* elementga yaqinlashadi. X fazo X^* fazoda zinch bo'lgani tufayli X^* elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots$$

fundamental ketma-ketlik uchun unga ekvivalent bo'lgan va X ning elementlaridan tuzilgan

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik mavjud. Buni ko'rsatish uchun x_n sifatida X ning ushbu

$$\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan ixtiyoriy elementini olish mumkin. Hosil bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik X da fundamental, va demak, biror x^* elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Lekin bu holda $\{x_n^*\}$ ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi.

Misollar. 1. Ratsional sonlar fazosi $\rho(x, y) = |x - y|$ metrikada to'la emas. Matematik analizdan ma'lumki, bu fazoning to'ldiruvchisi haqiqiy sonlar fazosidir.

2. 2.6- § da ko'rsatilganidek, $C^2[0, 2]$ fazo to'la emas. Bu fazoning to'ldiruvchisi $L^2[0, 2]$ fazodir. Haqiqattan, Fisher teoremasiga asosan ($[HO'FN]$, VIII bob) $L^2[0, 2]$ fazo to'la. $C^2[0, 2]$ fazoning $L^2[0, 2]$ fezoda zinchligi Luzin teoremasidan ($[HO'FN]$, VI bob) osonlikcha kelib chiqadi.

2.8-§. Metrik fazoda kompakt to'plamlar

To'g'ri chiziqning ajoyib xossalardan biri shuki, undagi chegaralangan har qanday cheksiz to'plam kamida bitta limit nuqtaga ega. Bu fakt Bolsano -

Veyershtrass teoremasida o‘z ifodasini topgan. Lekin ixtiyoriy metrik fazoda bunday sodda natija, umuman aytganda, o‘rinli emas. Shuning uchun quyidagi savolning qo‘yilishi tabiiy. Metrik fazoda qanday to‘plamlar sinfi uchun Bolsano - Veyershtrass teoremasining mazmuni saqlanadi? Mana shu savol munosabati bilan quyidagi muhim ta’rifni kiritamiz.

Ta’rif. X metrik fazodagi M to‘plamning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlikdan biror $x(\in X)$ elementga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkin bo‘lsa, M to‘plam X da nisbiy kompakt deyiladi; yopiq nisbiy kompakt to‘plam kompakt deyiladi.

Bolsano - Veyershtrass teoremasiga asosan to‘g‘ri chiziqda har qanday chegaralangan (yopiq va chegaralangan) to‘plam nisbiy kompaktdir (kompaktdir).

Ravshanki, nisbiy kompakt to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plami yana nisbiy kompakt to‘plamdir.

1-teorema. Nisbiy kompakt to‘plam chegaralangan bo‘ladi.

Izboti. $A(\subset X)$ nisbiy kompakt to‘plam bo‘lib, chegaralangan bo‘lmisin deb faraz qilamiz. A dan ixtiyoriy x_1 nuqtani olib, radiusi $r_1=1$ ga teng $S(x_1, r_1)$ sharni ko‘ramiz. A chegaralanmaganligi uchun u bu sharda to‘lasicha joylashgan bo‘lmaydi. A to‘plamning $S(x_1, r_1)$ sharga kirmagan biror x_2 elementni olamiz. U holda $\rho(x_1, x_2) \geq r_1$. So‘ng radiusi $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ ga teng $S(x_1, r_2)$ sharni qurib, A to‘plamning bu sharga kirmagan biror x_3 elementini olamiz; bunday element mavjud, chunki A chegaralanmagan to‘plam va $\rho(x_1, x_3) \geq r_2$. So‘ngra radiusi $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ ga teng $S(x_1, r_3)$ sharni quramiz. Bu jarayonni, A to‘plam chegaralanmaganligi uchun cheksiz davom ettirishimiz mumkin. Natijada $\{x_n\} (x_n \in A)$ ketma-ketlik va o‘sib boruvchi $\{r_n\}$ sonli ketma-ketlik hosil bo‘lib, ushbu

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$$

tengsizliklar bajariladi.

Endi ixtiyoriy $n > m \geq 2$ natural sonlar uchun

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} \geq r_m; \quad \rho(x_1, x_m) + 1 = r_m$$

munosabatlar o‘rinli. Bulardan quyidagi

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

tengsizliklarga asosan ushbu

$$r_n \leq r_m + \rho(x_m, x_n) \text{ demak, } \rho(x_m, x_n) \geq 1$$

munosabat kelib chiqadi.

So‘nggi munosabat ko‘rsatadiki, na $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o‘zi va na uning biror qismi fundamental bo‘la olmaydi, demak, yaqinlashuvchi ham bo‘lishi mumkin emas. Bu esa ziddiyatga olib keladi, chunki $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari A nisbiy kompakt to‘plamdan olingan.

Bu teoremaning teskarisi, umuman aytganda, o‘rinli emas, ya’ni to‘plam chegaralangan bo‘lsa, u nisbiy kompakt bo‘lishi shart emas. Bunga l_2 fazodan aniq

misol keltiramiz. l_2 fazodan ushbu

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \dots$$

elementlardan iborat chegaralangan to‘plamni tuzamiz. Bu elementlarning ixtiyoriy ikkitasi orasidagi masofa $\rho(\hat{a}_m, \hat{a}_n) = \sqrt{2}$ ($m \neq n$) ga teng. Shuning uchun bu ketma-ketlik va uning hech qanday qismi yaqinlashuvchi bo‘lmaydi, demak, tuzilgan to‘plam nisbiy kompakt emas.

Metrik fazoda nisbiy kompaktlik tushunchasiga yaqin bo‘lgan tushunchani kiritamiz.

Ta’rif. A, B lar (X, ρ) metrik fazodan olingan to‘plamlar va $\varepsilon > 0$ biror son bo‘lsin. Agar A dan olingan ixtiyoriy x element uchun B da ushbu $\rho(x, y) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradigan y element mavjud bo‘lsa, B to‘plam A to‘plamga nisbatan ε -to‘rga ega. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun A to‘plam chekli ε -to‘rga ega bo‘lsa, u holda A to‘la chegaralangan deyiladi.

Misollar. 1. Tekislikda koordinatalari butun sonlardan iborat to‘plam 1-to‘rni tashkil etadi.

2. R^n fazoda har qanday chegaralangan A to‘plam chekli ε -to‘rga ega, ya’ni A to‘la chegaralangan.

3. l_2 fazoda A to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in A, \text{ bu yerda } |a_1| \leq 1, |a_2| \leq \frac{1}{2}, \dots, |a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Bu to‘plam ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun chekli ε -to‘rga ega. Daraqiqat, berilgan $\varepsilon > 0$ uchun n natural sonni shunday tanlab olamizki; $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4}$ bo‘lsin.

A dan olingan har bir $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ nuqtaga shu to‘plamning o‘zidan olingan

$$x^* = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \quad (1)$$

nuqtani mos qo‘yamiz. U holda

$$\rho(x, x^*) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) ko‘rinishdagi nuqtalardan iborat B to‘plam R^n fazoda chegaralangan; demak, B to‘plam ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun chekli $\frac{\varepsilon}{2}$ -to‘rga ega, natijada A to‘plam chekli ε -to‘rga ega bo‘lib, to‘la chegaralangan bo‘ladi.

4. Yuqoridagi $\{\hat{a}_n\}$ ketma-ketlikdan iborat to‘plam chegaralangan bo‘lib, to‘la chegaralangan emas. Chunki $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$, bo‘lganda chekli ε -to‘rni qurib bo‘lmaydi.

Kompaktlik, to‘lalik va to‘la chegaralanganlik tushunchalari orasida qanday bog‘lanish borligini quyidagi teoremadan ko‘rish mumkin.

2-teorema. X to‘la metrik fazoda joylashgan A to‘plamning nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoya.

Isboti. Zarurligi. Nisbiy kompakt A to‘plamni to‘la chegaralanmagan, ya’ni biror $\varepsilon > 0$ uchun A da chekli ε -to‘r yo‘q deb faraz qilaylik. U holda A dan olingan ixtiyoriy x_1 nuqta uchun shunday x_2 nuqta mavjudki, $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. So‘ng shunday x_3 nuqta mavjudki, $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ bo‘ladi va hokazo. Bu protsessni davom ettirib, quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiradigan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tuzamiz: $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, $m \neq n$

Ravshanki, bunday ketma-ketlikdan hech qanday yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Bu esa A ning nisbiy kompaktligiga zid.

Kifoyaligi. Endi X to‘la fazo bo‘lib, A unda to‘la chegaralangan to‘plam bo‘lsin. A ning nisbiy kompaktligini ko‘rsatamiz. A ning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Har bir $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) uchun A da mos ravishda chekli ε_k - to‘rni quramiz:

$$a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_{p_k}^{(k)}.$$

Markazlari ε_1 – to‘rni tashkil etuvchi nuqtalarda joylashgan va radiuslari 1 ga teng sharlarni quramiz. Soni chekli bu sharlar A to‘plamni to‘lasicha qoplaydi. Ulardan kamida bittasi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz $\{x'_n\}$ qism ketma-ketligini

o‘z ichiga oladi, uni masalan, S_1 bilan belgilaylik. So‘ng markazlari $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ to‘mi

tashkil etuvchi nuqtalarda joylashgan va radiuslari $\frac{1}{2}$ teng sharlarni quramiz. Bu

sharlarning soni chekli bo‘lganligi uchun ularning kamida bittasi $\{x'_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz $\{x'_n\}$ qism ketma-ketligini o‘z ichiga oladi, uni masalan, S_2 bilan belgilaylik, va hokazo. Bu jarayonni davom ettiramiz. Endi quyidagi

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$$

$$x''_1, x''_2, \dots, x''_n, \dots$$

ketma-ketliklarning diagonalida joylashgan elementlardan ushbu ketma-ketlikni tuzamiz:

$$x'_1, x''_2, \dots, x_n^{(n)}, \dots \quad (2)$$

Bu ketma-ketlik fundamental bo‘ladi, chunki uning $x_n^{(n)}$ elementdan boshlab keyingi hamma elementlari S_n sharda (uning radiusi $\frac{1}{n}$ ga teng) joylashgan bo‘ladi. X metrik fazo to‘la bo‘lganligi uchun (2) ketma-ketlik limitga ega. Ya’ni A to‘plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikni hosil qildik, demak, A nisbiy kompakt to‘plam.

Natija. X to‘la metrik fazodagi A to‘plam kompakt bo‘lishi uchun uning yopiq va to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoya.

2-teoremada zarur va kifoya shart berilgan bo‘lsada, undan aniq metrik fazolarda foydalanish oson emas. Maxsus metrik fazolarda joylashgan to‘plamlarning nisbiy kompaktligini (kompaktligini) aniqlash uchun odatda

maxsus kompaktlik belgilari izlanadi.

Biz bu masala bilan s va $C[a,b]$ fazolarda shug'ullanamiz.

3-teorema (s fazoda kompaktlik belgisi). A to'plam s fazodan olingan bo'lib, A_i to'plam A ning i -nomerli ($i = 1, 2, \dots$) koordinatalaridan tuzilgan to'plam bo'lsin. A ning nisbiy kompakt bo'lishi uchun A_i to'plamlar chegaralangan bo'lishi zarur va kifoya. A_i to'plamning yuqori chegarasi i ga bog'liq bo'lishi ham mumkin.

Ishboti. Zarurligi. 2.2-§ dagi 6-misoldan ma'lumki, s fazoda yaqinlashish koordinatalar bo'yicha yaqinlashishdir. Demak, A nisbiy kompakt bo'lganligi uchun A_i lar ham nisbiy kompakt va, demak, chegaralangan bo'ladi, chunki A_i to'g'ri chiziqda joylashgan to'plam.

Kifoyaligi. A shunday to'plam bo'lsinki, uning uchun yuqorida tuzilgan A_i -to'plamlarning har biri chegaralangan bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olib p natural sonni shunday tanlab olamizki, uning uchun $\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} < \varepsilon$ bo'lsin. So'ng har

bir $x = (a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots) \in s$ elementga $y = (a_1, a_2, \dots, a_p, 0, \dots) \in s$ elementni mos qo'yamiz. Bu ko'rinishda tuzilgan y elementlardan iborat to'plamni B_p bilan belgilaymiz. Ravshanki,

$$\rho(x, y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k|}{1 + |a_k|} < \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

ya'ni B_p to'plam A ga nisbatan ε -to'mi tashkil etar ekan. Ammo B_p esa, tuzilishiga ko'ra, R^p fazoda to'lasicha joylashgan chegaralangan to'plam. Demak, B_p chekli ε -to'rga ega, natijada A to'plam ham chekli 2ε -to'rga ega, ya'ni A to'la chegaralangan. 2-teoremaning kifoyalik shartiga va s ning to'laligiga muvofiq A nisbiy kompakt to'plam.

Endi $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompaktlik belgisini beramiz. Bu belgini ifoda qilish uchun quyidagi ikki tushunchani keltiramiz.

$[a,b]$ segmentda aniqlangan biror $\{\gamma(t)\} = \Phi$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar t ning hamma qiymatlari va Φ sistemaning hamma elementlari uchun

$$|\gamma(t)| \leq K \quad (t \in [a,b], \gamma \in \Phi)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan K son mavjud bo'lsa, $\Phi = \{\gamma(t)\}$ funksiyalar sistemasi tekis chegaralangan deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki,

$$|t_1 - t_2| < \delta$$

tengsizlik bajarilganda Φ sistemaga tegishli ixtiyoriy $\gamma(t)$ funksiya uchun

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \varepsilon$$

bo'lsa, Φ sistema *tekis darajada uzluksiz* deyiladi.

4-teorema (Arsela teoremasi). $[a,b]$ segmentda aniqlangan uzluksiz

funksiyalardan iborat Φ to‘plam $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompakt bo‘lishi uchun bu funksiyalar sistemasining tekis chegaralangan hamda tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va kifoya.

Ishboti. Zarurligi. Aytaylik Φ to‘plam $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompakt bo‘lsin. U holda 2- teoremaga muvofiq, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun Φ da chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ -to‘rni tashkil etuvchi

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p \quad (3)$$

funksiyalar mavjud bo‘ladi. Bu funksiyalarning har biri $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lganligi sababli chegaralangandir, ya’ni

$$|\phi_i| \leq K_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ -to‘rning ta’rifiga ko‘ra Φ dan olingan har qanday ϕ element uchun (3) dagi soni chekli funksiyalar orasida shunday ϕ_i - funksiya topiladiki, uning uchun

$$\rho(\phi, \phi_i) = \max_{a \leq t \leq b} |\phi(t) - \phi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik o‘rinli. Natijada

$$|\phi| \leq |\phi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K, \quad K = \max_{1 \leq i \leq p} K_i + \frac{\varepsilon}{3},$$

ya’ni Φ sistema tekis chegaralangan. So‘ngra (3) ketma-ketlikdagi chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ -to‘rni tashkil etuvchi funksiyalarning har biri uzluksiz va ularning soni chekli, demak, ular $[a,b]$ da tekis uzluksiz; demak, berilgan $\frac{\varepsilon}{3}$ uchun shunday δ_i son mavjudki, buning uchun quyidagilarni yozishimiz mumkin: agar $|t_1 - t_2| < \delta_i$ bo‘lsa, $|\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agar $|t_1 - t_2| < \delta$ bo‘lsa ($\delta = \min_{1 \leq i \leq p} \delta_i$),

u holda ixtiyoriy $\phi \in \hat{O}$ uchun ϕ_i ning (3) funksiyalar orasida $\rho(\phi, \phi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlikni qanoatlantiradiganini olib, ushbu munosabatni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} |\phi(t_1) - \phi(t_2)| &= |\phi(t_1) - \phi_i(t_1) + \phi_i(t_1) - \phi_i(t_2) + \phi_i(t_2) - \phi(t_2)| \leq \\ &\leq |\phi(t_1) - \phi_i(t_1)| + |\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)| + |\phi_i(t_2) - \phi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Shuning bilan Φ sistemaning tekis darajada uzluksizligi ham ko‘rsatildi, ya’ni teoremaning zarurlik qismi isbot etildi.

Kifoyaligi. Aytaylik Φ sistema tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun unga nisbatan $C[a,b]$ da chekli ε -to‘r

mavjud bo'lsa, bu sistemaning $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompaktligi ko'rsatilgan bo'ladi.

K va δ quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradigan sonlar bo'lsin: $|\phi| \leq K$ (hamma $\varphi \in \Phi$ uchun); agar $|t_1 - t_2| < \delta$ bo'lsa, $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ (hamma $\varphi \in \Phi$ uchun).

Endi $[a,b]$ segmentni

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

nuqtalar bilan har birining uzunligi δ dan kichik bo'lgan n ta qismga bo'lib, bu nuqtalarning har biridan vertikal to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Ordinatalar o'qida $[-K, K]$ segmentni

$$y_0 = -K < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$$

nuqtalar bilan har birining uzunligi $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik m ta qismga bo'lib, bu nuqtalarning har birida gorizontal to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada ushbu $[a \leq t \leq b, -K \leq y \leq K]$ to'g'ri to'rtburchak qismlarga bo'linib, bu qismlarning gorizontal tomonlari δ va vertikal tomonlari $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik bo'ladi, ya'ni to'g'ri to'rtburchakda to'r tuzildi. Endi har bir $\phi(\in \hat{O})$ funksiyaga uchlari (t_k, y_t) $\left(|y_t - \phi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5} \right)$ nuqtada joylashgan $\psi(t)$ siniq funksiyani mos qo'yamiz (agar funksiyaning grafigi tutashgan kesmalardan iborat bo'lsa, bu funksiyani siniq deymiz). Tuzilgan to'rining uchlarda tuzilishiga ko'ra

$$|\psi(t_k) - \phi(t_k)| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va

$$|\phi(t_{k+1}) - \psi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\phi(t_k) - \phi(t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

tengsizliklardan

$$|\psi(t_k) - \psi(t_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$[t_k, t_{k+1}]$ segmentda $\psi(t)$ chiziqli funksiya bo'lganligi uchun

$$|\psi(t_k) - \psi(t)| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

tengsizlik t ning $[t_k, t_{k+1}]$ segmentdagi hamma qiymatlari uchun bajariladi.

Endi $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy t nuqtasini olib chapdan unga eng yaqin turgan t_k nuqtani olamiz (bu bo'lish nuqtasi).

U holda

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t) - \phi(t_k)| + |\phi(t_k) - \psi(t_k)| + |\psi(t_k) - \psi(t)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinnlidir. Demak, soni chekli $\psi(t)$ siniq funksiyalar Φ sistemaga nisbatan chekli ε -to'rni tashkil etadi ya'ni Φ sistema to'la chegaralangan sistemadir.

Endi metrik fazodagi funksionallarning kompaktlik bilan bog'liq bo'lgan xossalari keltiramiz.

Quyidagi teorema matematik analizzdan ma'lum bo'lgan Veyershtrass teoremasining umumlashtirilishidir.

5-teorema. X metrik fazoda f uzluksiz funksional bo'lsin. Ixtiyoriy $D \subset X$ kompakt to'plamda f chegaralangan va o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi.

Isboti. F funksional D to'plamda quyidan chegaralanganligini va o'zining eng kichik qiymatini qabul qilishini isbotlash bilan chegaralanamiz.

Agar f quyidan chegaralanmagan deb faraz qilsak u holda ixtiyoriy n natural son uchun $f(x_n) < -n$ shartni qanoatlantiradigan $x_n \in D$ nuqta topiladi. Demak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$. Hosil bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan D kompakt bo'lgani tufayli biron $x_0 \in D$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_i}\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkin. f uzluksiz bo'lgani uchun $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(x_0)$. Shu bilan birga $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = -\infty$. Bu esa $f(x_0)$ chekli son ekanligiga zid. Demak, $f(x)$ funksional D to'plamda quyidan chegaralangan.

Endi m bilan ushbu $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subset R$ to'plamning aniq quyi chegarasini belgilaymiz va $f(x_0) = m$ shartni qanoatlantiruvchi $x_0 \in D$ nuqta mavjudligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy n natural son uchun $m + \frac{1}{n}$ son $f(D)$ to'plamning quyi chegarasi bo'lmaydi, ya'ni $f(x_{n_i}) < m + \frac{1}{n}$ shartni qanoatlantiruvchi $x_n \in D$ nuqta mavjud. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $x_{n_i} \rightarrow x_0 \in D$ qism ketma-ketlik ajratib olishimiz mumkin.

Endi ushbu $m \leq f(x_i) < m + \frac{1}{n_i}$ tengsizlikdan limitga o'tsak,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = m$$

tenglik hosil bo'ladi. f uzluksiz bo'lgani sababli

$$f(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = m$$

Ko'rinib turibdiki, bu teoremaning isboti matematik analizzagi Veyershtrass teoremasining isbotiga o'xshaydi. Uzluksiz funksiyalarning ba'zi boshqa xossalari ham shunga o'xshash osonlikcha metrik fazolardagi funksionallar uchun isbotlanadi. Misol uchun Kantor teoremasini keltiramiz.

Ta'rif. (X, ρ) metrik fazoda f funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy

$\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\rho(x', x'') < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x', x'' \in X$ uchun ushbu

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksional *tekis uzluksiz* deyiladi.

6-teorema (Kantor teoremasi). X metrik fazodagi f funksional $D \subset X$ kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda f shu to‘plamda tekis uzluksizdir.

Bu teoremaning ham isboti sonli funksiyalar uchun keltirilgan isbotdan farq qilmaydi.

2.9-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tatbiqlari

To‘la metrik fazolarda berilgan turli tenglamalarning yechimlari mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib aks ettirish prinsipi muhim va foydali metod sifatida ishlatalishi mumkin. Hozir mana shu prinsip bilan o‘quvchini qisqacha tanishtiramiz.

T aks ettirish X metrik fazoni o‘zini-o‘ziga aks ettirish bo‘lsin. Agar X fazodan olingan ixtiyoriy x va y elementlar uchun

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot \rho(x, y) \quad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $\alpha (0 < \alpha < 1)$ son mavjud bo‘lsa, u holda T ni *qisqartirib aks ettirish* deyiladi. (1) ga muvofiq, agar $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ bo‘lsa, u holda $Tx_n \rightarrow Tx_0$, ya’ni T aks ettirish uzluksiz bo‘ladi.

Teorema. (qisqartirib aks ettirish prinsipi). X to‘la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisqartirib aks ettirish birgina qo‘zg‘almas nuqtaga ega, ya’ni $Tx=x$ tenglamaning birgina yechimi mavjuddir.

Isboti. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olib, ushbu $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, x_3 = Tx_2 = T^3x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \dots$ ketma-ketlikni tuzamiz va bu ketma-ketlikning fundamentalligini ko‘rsatamiz. Darhaqiqat, (1) va uchburchak aksiomasiga muvofiq har qanday m va n ($m > n$) natural sonlar uchun

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(T^n x_0, T^m x_0) = \rho(T^n x_0, T^n x_{m-n}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n \{ \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \} \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \{ 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1} \} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1) \end{aligned}$$

n yetarli katta bo‘lganda bu tengsizlikniig o‘ng tomoni istalgancha kichik qilinishi mumkin, chunki $\alpha < 1$. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamentaldir. X fazo to‘la bo‘lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi, ya’ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

T uzluksiz aks ettirish bo‘lganligi uchun

$$Tx = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = x.$$

Demak, x -qo‘zg‘almas nuqta.

Endi qo‘zg‘almas nuqtaning yagonaligini isbot qilamiz.

Darhaqiqat, $Tx=x$ va $Ty=y$, ya’ni $qo‘zg‘almas$ nuqta ikkita bo‘lsin. U holda,
 $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$ ($\alpha < 1$),

bundan

$\rho(x, y)=0$ yoki $x=y$ kelib chiqadi.

Bir necha misol keltiramiz.

1. $x=\phi(x)$ tenglamadagi ϕ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan bo‘lib, ushbu Lipshits sharti

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| < \alpha |x_2 - x_1| \quad (0 < \alpha < 1)$$

ni qanoatlantirsin va $[a, b]$ segmentni o‘zini-o‘ziga aks ettirsin, u holda

$$x_0, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), \dots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti ϕ aks ettirishning yagona qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘ladi.

2. Quyidagi tenglamani tekshiramiz:

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Bu tenglamani n o‘lchamli vektor fazodagi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor yordamida ifoda qilsak, uni $x = Tx$ ko‘rinishda ham yozish mumkin. Qisqartirib aks ettirish prinsipini bu tenglamaga tatbiq qilish uchun tegishli shartlarni aniqlashimiz kerak, ya’ni qanday shartlar bajarilganda bu aks ettirish (1) tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu shartlarni aniqlash esa berilgan fazoda metrikaning kiritilishiga bog‘liqdir. Masalan,

$$a) \rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|, \quad x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Bu holda ixtiyoriy ikkita

$$x' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n), \quad x'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_n)$$

nuqta uchun

$$\begin{aligned} \rho(Tx', Tx'') &= \rho(y'_1, y''_2) = \max_i |\beta'_i - \beta''_i| = \max_i \left| \sum_k a_{ik} \cdot (\alpha'_k - \alpha''_k) \right| \leq \max_i \sum_k |a_{ik}| \cdot |\alpha'_k - \alpha''_k| \leq \\ &\leq \max_i \sum_k |a_{ik}| \cdot \max_k |\alpha'_k - \alpha''_k| = \rho(x', x'') \cdot \max_i \sum_k |a_{ik}|. \end{aligned}$$

Bundan (1) shart bajarilishi uchun

$$\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lishi yetarli. Demak, (3) munosabat bu xususiy hol uchun qisqartirib aks ettirish shartini beradi.

$$b) \rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|.$$

Bu holda

$$\rho(Tx', Tx'') = \rho(y', y'') = \sum_{i=1}^n |\beta'_i - \beta''_i| = \sum_i \left| \sum_k a_{ik} (\alpha'_k - \alpha''_k) \right| \leq$$

$$\leq \sum_i \sum_k |a_{ik}| \cdot |\alpha'_k - \alpha''_k| \leq \rho(x', x'') \cdot \max_k \sum_i |a_{ik}|$$

Demak, qisqartirib aks ettirish shartini quyidagicha olish mumkin:

$$\sum_i |a_{ik}| \leq \alpha < 1, k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

c) $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 \right)^{1/2}$. Bu holda Koshi-Bunyakovskiy

tengsizligiga binoan

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} (\alpha'_k - \alpha''_k) \right)^2 \leq \sum_i \sum_k a_{ik}^2 \rho^2(x', x'').$$

Bu holda qisqartirib aks ettirish sharti quyidagicha bo‘ladi:

$$\sum_{i,k} a_{ik}^2 \leq \alpha < 1 \quad (5)$$

Yuqorida ko‘rilgan uch hol uchun topilgan qisqartirib aks ettirish shartlarining hammasi kifoyaviy shartlardir. (3), (4) va (5) shartlarning birortasi bajarilganda, (2) tenglamaning birgina yechimga egaligi kelib chiqadi.

3. Oxirgi misol sifatida ushbu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (6)$$

$y(x_0) = y_0$ (7) (boshlang‘ich shart) differensial tenglamani ko‘rib chiqamiz. Tenglamaning o‘ng tomonidagi $f(x, y)$ funksiya, tekislikdagi (x_0, y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan biror G sohada aniqlangan, uzlusiz va

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

Lipshits shartini qanoatlantiradi, deb faraz qilamiz (K - o‘zgarmas son).

Endi (6) tenglamani biror $[x_0 - c, x_0 + c]$ segmentda (7) boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan birgina $y = \psi(x)$ yechimga egaligini isbot etamiz (bu esa Pikarning ma’lum teoremasidir).

Avvalo (6) tenglama (7) shart bajarilganda quyidagi sodda integral tenglama shaklida yozilishi mumkin:

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt. \quad (8)$$

$f(x, y)$ funksiya G sohada uzlusiz bo‘lganligi uchun (x_0, y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan biror $G' \subset G$ sohada chegaralangan bo‘ladi, ya’ni $|f(x, y)| \leq d$. Endi c sonni shunday tanlab olamizki, uning uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

- a) agar $|x_0 - x| \leq c$, $|y - y_0| \leq c \cdot d$ bo‘lsa, u holda $(x, y) \in G'$;
- b) $K \cdot c < 1$.

$[x_0 - c, x_0 + c]$ segmentda aniqlangan va $|\psi(x) - y_0| \leq c \cdot d$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $\{\psi\}$ uzlusiz funksiyalar sistemasini Φ bilan belgilaymiz va bu sistemada metrikani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = \max_{x_0 - c \leq x \leq x_0 + c} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

Φ metrik fazo to‘la, chunki u $C[x_0 - c, x_0 + c]$ to‘la fazoning yopiq qismidir. Ushbu

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt \quad (9)$$

aks ettirishda $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$ bo‘lsin. U holda bu aks ettirish Φ fazoni o‘zini-o‘ziga qisqartirnb aks ettiradi. Darhaqiqat, $\phi \in \Phi$ va $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$ bo‘lsin. U holda

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \phi(t)) dt \right| \leq c \cdot d. \text{ munosabat o‘rinli va, demak, (9) aks}\$$

ettirish Φ fazoni o‘zini o‘ziga aks ettiradi. Endi

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_2(t))| dt \leq Kc \max_{x_0 - c \leq t \leq x_0 + c} |\phi_1(t) - \phi_2(t)| = Kc \rho(\phi_1, \phi_2).$$

Bundan $Kc < 1$ bo‘lganligi uchun (9) aks ettirishning qisqartiruvchi aks ettirish ekanligi kelib chiqadi. Demak, shu paragrafdagi teoremagaga ko‘ra (8) tenglama Φ fazoda boshlang‘ich (7) shartni qanoatlantiradigan birgina yechimga ega.

Mashq uchun masalalar

1. R haqiqiy sonlar to‘plamida

$\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ funksiyani kiritamiz. (R, ρ) metrik fazo bo‘ladimi?

2. R^n vektor fazoda quyidagicha uch xil metrika kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2};$$

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|;$$

$$\rho_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Shu uch metrika bir-biriga ekvivalent ekanligini isbotlang.

3. Qanday α va β uchun ushbu

$$p(x, y) = |x^\alpha - y^\alpha|^\beta$$

funksiya to‘g‘ri chiziqda metrikani beradi?

4. X, Y, Z metrik fazolar bo‘lib, T_1, T_2 mos ravishda X ni Y ga, Y ni Z ga aks ettiruvchi uzlusiz operatorlar bo‘lsa, u holda X ni Z ga aks ettiruvchi ushbu $z \rightarrow T_2(T_1 x)$

operator ham uzlusiz bo‘lishini isbotlang.

5. 2.1- § dagi R^n metrik fazoni o‘zini o‘ziga aks ettiruvchi ixtiyoriy chiziqli operator uzlusiz ekanligini isbotlang.

6. Haqiqiy sonlar to‘plami R da metrikani $\rho(x, y) = |x - y|$ ko‘rinishda olamiz.

Bu metrik fazoda ratsional sonlar to‘plami ochiq ham emas, yopiq ham emasligini isbotlang. Bu fazoda natural sonlar to‘plami N yopiqmi?

7. Shunday (X, ρ) metrik fazoga misol keltiringki, bu fazoda ikki shar $S(x_1, r_1)$

va $S(x_2, r_2)$ topilib, $r_1 > r_2$ va $S(x_1, r_1) \subset S(x_2, r_2)$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsin.

8. l_2 metrik fazo separabel ekanligini isbotlang.

9. (X, ρ) metrik fazoda zinch bo‘lgan separabel qism fazo mavjud bo‘lsa, u holda X fazo ham separabel ekanligini isbotlang.

10. R haqiqiy sonlar to‘plamida shunday ρ metrika kirititingki, (R, ρ) separabel metrik fazo bo‘lmashin.

11. Ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik chegaralangan ekanligini isbotlang.

12. Haqiqiy sonlar to‘plamida chegaralangan, ammo fundamental bo‘lмаган ketma-ketlikka misol keltiring.

13. Shunday (X, ρ) to‘la metrik fazoga misol keltiringki, bu fazoda $\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \dots \supset \bar{S}_n \supset \dots$ yopiq sharlar ketma-ketligi mavjud bo‘lsin va ularning umumiyligi qismi bo‘sh bo‘lsin, ya’ni $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n = \emptyset$.

14. s fazo to‘laligini isbotlang.

15. X fazoda ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar bo‘lsin. (X, ρ_1) fazo to‘la bo‘lishi uchun (X, ρ_2) fazo to‘la bo‘lishi zarur va kifoyadir. Isbotlang.

16. X metrik fazo bo‘lib, X^* uning to‘ldiruvchisi bo‘lsin. X^* metrik fazo separabel bo‘lishi uchun X metrik fazo separabel bo‘lishi zarur va kifoyadir. Isbotlang.

17. Barcha bir o‘zgaruvchili ko‘phadlar to‘plami P ni olib, ixtiyoriy ikkita

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

ko‘phad uchun quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$\rho(f, g) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i|^2},$$

bu yerda $i > n$ bo‘lsa $a_i = 0$, $i > m$ bo‘lsa, $b_i = 0$. $\rho(f, g)$ funksiya P da metrika ekanligini isbotlang va bu metrikaga nisbatan P ning to‘ldiruvchisini toping.

Shu masalani

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leq i \leq \infty} |a_i - b_i|$$

funksiya uchun ham yeching.

18. Kompakt metrik fazo to‘la va separabel ekanligini isbotlang.

19. m metrik fazoda chegaralangan, lekin kompakt bo‘lмаган to‘plamga misol keltiring.

20. $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ ($x \neq y$) shartni qanoatlantiruvchi shunday A aks ettirishga misol keltiringki, ushbu $Ax=x$ tenglama yechimga ega bo‘lmasin.

21. X to‘la metrik fazo, $T:X \rightarrow X$ uzluksiz aks ettirishning biror darajasi T^m qisqartiruvchi bo‘lsin, yani

$$T^m x = T(T \dots (Tx) \dots)$$

$$\rho(T^m x, T^m y) \leq \alpha \rho(x, y), 0 \leq \alpha < 1.$$

U holda T yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega bo‘lishini isbotlang.

22. f akslantirish $[0,1]$ segmentni $[0,1]$ segmentga o‘zaro bir qiyamatli uzluksiz akslantirish bo‘lsin. U holda bu akslantirishning hech bo‘limganda bitta qo‘zg‘almas nuqtasi mavjudligini ko‘rsating.

III BOB. TOPOLOGIK FAZOLAR

3.1-§. Topologik fazolarning ta’rifi va misollar

Metrik fazolarning asosiy tushunchalari (limit nuqta, to‘plamning yopilmasi va hokazo) atrof hamda ochiq to‘plam tushunchalari yordamida kiritilgan edi. Bunda atrof va ochiq to‘plamlar ko‘rilayotgan fazoda berilgan metrika bilan aniqlangan edi. Umuman, berilgan to‘plamda ochiq to‘plamlar sistemasini aksiomalar yordamida bevosita kiritish mumkin.

Ta’rif. T to‘plamdagи topologiya deb, X ning qism to‘plamlaridan iborat va quyidagi aksiomalarni qanoatlantiruvchi τ sistemaga aytildi:

$$1^\circ. X \in \tau, \emptyset \in \tau;$$

$$2^\circ. \text{Agar } \{G_\alpha\} \subset \tau \text{ bo‘lsa, u holda } \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau,$$

bu yerda indekslar to‘plami I ixtiyoriy;

$$3^\circ. G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau \text{ va } n \text{ ixtiyoriy natural son bo‘lsa, u holda } \bigcap_{k=1}^n G_k \in \tau.$$

(X, τ) juftlik *topologik fazo* deb ataladi. X ning τ sistemaga tegishli bo‘lgan qism to‘plamlari *ochiq to‘plamlar* deb ataladi. Shunday qilib, topologik fazoni berish - bu biror X to‘plamni olib, unda τ topologiyani kiritish, ya’ni X ning ochiq to‘plam deyiladigan qism to‘plamarini aniqlash, demakdir. Topologik fazoning elementlari uning *nuqtalari* deb ham ataladi.

Bitta X to‘plamda turli xil topologiyalar kiritish mumkin bo‘lib, bunda turli topologik fazolar hosil bo‘ladi.

τ_1 va τ_2 sistemalar X dagi ikkita topologiya bo‘lsin. Agar $\tau_1 \subset \tau_2$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, τ_2 topologiya τ_1 topologiyaga nisbatan *kuchliroq topologiya* deyiladi va $\tau_1 \leq \tau_2$ ko‘rishda yoziladi. Bu holda τ_1 topologiyani τ_2 topologiyaga nisbatan *kuchsizroq (sustroq)* ham deyiladi.

Misollar.

1. Har qanday metrik fazodagi ochiq to‘plamlar sistemasi topologiyaning 1° , 2° va 3° aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, ixtiyoriy metrik fazo tabiiy ravishda topologik fazo hamdir.

2. X ixtiyoriy to‘plam va τ uning barcha qism to‘plamlari sistemasi bo‘lsin, deb faraz qilaylik. Unda (X, τ) topologik fazodir. X dagi bunday topologiya *diskret topologiya* deyiladi.

3. X to‘plamda faqat \emptyset bilan X dan iborat sistema ham topologiya hosil qiladi (*antidiskret topologiya*).

Yuqorida keltirilgan 2-misoldagi topologiya X to‘plamdagи barcha topologiyalarning eng kuchlisidir, 3-misoldagi topologiya esa bular orasida eng kuchsizidir.

4. Ikki elementdan iborat $X = \{a, b\}$ to‘plamda hammasi bo‘lib to‘rtta topologiya mavjud. Ular quyidagilardir:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\{a,b\}, \emptyset\}, \tau_2 = \{\{a,b\}, \{a\}, \emptyset\} \\ \tau_3 &= \{\{a,b\}, \{b\}, \emptyset\}, \tau_4 = (\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset).\end{aligned}$$

3.2- §. Atroflar. Yopiq to‘plamlar

Ta’rif. Agar topologik fazoda biror A va U to‘plamlar uchun $A \subset G \subset U$ munosabatni qanoatlantiruvchi G ochiq to‘plam mavjud bo‘lsa, U to‘plam A to‘plamning atrofi deyiladi. Xususan, $A = \{x_0\}$ bo‘lsa, u holda U to‘plam x_0 nuqtaning atrofi deyiladi.

1-teorema. *Topologik fazoda A to‘plam ochiq bo‘lishi uchun u o‘zining har bir nuqtasining atrofi bo‘lishi zarur va kifoya.*

Isboti. Ravshanki, agar A ochiq to‘plam bo‘lsa, u o‘zining har bir nuqtasining atrofidir.

Aksincha, agar ixtiyoriy $x \in A$ uchun shunday U_x ochiq to‘plam mavjud bo‘lib, $x \in U_x \subset A$ munosabat bajarilsa, u holda $A = \bigcup_{x \in A} U_x$. Demak, A to‘plam ochiq to‘plamlarning yig‘indisi sifatida topologiyaning 2° aksiomasiga asosan ochiqdir.

Topologik fazodagi x nuqtaning barcha atroflari sistemasini $V(x)$ bilan belgilaymiz.

Algebraik sistemalarda (masalan, gruppa, halqa, vektor fazolarda) odatda topologiya nuqtalarning atroflari sistemasi orqali kiritiladi. Bunday kiritilishning qonuniyligini quyidagi teoremadan kelib chiqadi.

2-teorema. $V(x)$ sistema quyidagi xossalarga ega:

- 1) *Ixtiyoriy $U \in B(x)$ uchun $x \in U$*
- 2) *agar $U \subset V$ va $U \in B(x)$ bo‘lsa, u holda $V \in B(x)$*
- 3) *agar $U, V \in B(x)$ bo‘lsa $U \cap V \in B(x)$;*
- 4) *har bir $V \in B(x)$ uchun shunday $W \in B(x)$ mavjudki, barcha $y \in W$ lar uchun $V \in B(y)$ munosabat o‘rinli.*

Aksincha, agar X to‘plamning har bir x elementiga X ning qism to‘plamlaridan iborat va 1)-4) shartlarni qanoatlantiruvchi $V(x)$ sistema mos ko‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda shunday yagona topologiya mavjudki, bu topologiyada har bir x elementning barcha atroflari sistemasi $V(x)$ dan iboratdir.

Isboti. Agar $V(x)$ sistema x nuqtaning barcha atroflari sistemasi bo‘lsa, u holda 1)-3) xossalalar osongina ko‘rsatiladi. 4) xossani isbotlaymiz. $V \in B(x)$ to‘plam uchun ushbu $x \in W \subset V$ munosabatni qanoatlantiruvchi W ochiq qism to‘plam mavjuddir. W ochiq to‘plam bo‘lgani uchun u o‘zidagi har bir nuqtaning atrofidir. Demak, barcha $y \in W$ uchun $W \in B(y)$. Bundan esa 2) xossa ko‘ra ixtiyoriy $y \in W$ uchun ushbu $V \in B(y)$ munosabat o‘rinli, ya’ni 4) xossa isbotlandi.

Aksincha, $V(x)$ sistema 1)-4) shartlarni qanoatlantirsin. X da τ topologiyani

quyidagicha kiritamiz: agar ixtiyoriy $x \in A$ uchun $A \in B(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, A to‘plamni ochiq deymiz va bo‘sh to‘plamni ham ochiq deb hisoblaymiz. Demak.

$$(A \in \tau) \Leftrightarrow (\forall x \in A, A \in B(x) \text{ yoki } A = \emptyset)$$

Ravshanki, $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$. Agar $G_\alpha \in \tau$ ($\alpha \in I$) bo‘lsa, $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ ham τ ga tegishli bo‘ladi.

Ixtiyoriy $G_1, G_2 \in \tau$ to‘plamlarni olamiz. Agar $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ bo‘lsa, ravshanki $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Endi $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ holni ko‘ramiz. Ixtiyoriy $x \in G_1 \cap G_2$ elementni olamiz. τ ning ta’rifiga asosan $G_1 \in B(x)$, $G_2 \in B(x)$, demak, 3) ga asosan $G_1 \cap G_2 \in B(x)$. Agar $G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau$ bo‘lsa, matematik induksiya metodini qo‘llab, $\bigcap_{k=1}^n G_k \in \tau$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, τ sistema X dagi topologiyadir.

Endi har bir $x \in X$ uchun $V(x)$ sistema x elementning τ topologiyadagi barcha atroflari sistemasiidan iborat ekanligini ko‘rsatamiz.

U to‘plam x elementning τ topologiyadagi biror atrofi bo‘lsin. U holda shunday A ochiq to‘plam mavjudki $x \in A \subset U$. Ravshanki, $A \in B(x)$ va, demak, 2) ga asosan $U \in B(x)$. Endi har bir $V \in B(x)$ to‘plam x nuqtaning τ topologiyadagi atrofi ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun $x \in U \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi va τ topoloiyada ochiq bo‘lgan U to‘plam mavjudligini ko‘rsatish kerak. U ni quyidagicha kiritamiz:

$$U = \{y \in X : V \in B(y)\}.$$

Ravshanki, $x \in U$. Endi $U \subset V$ va $U \in \tau$ ekanligini ko‘rsatamiz. 1) shartdan har bir $y \in U$ element V ga tegishli ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $U \subset V$.

Ixtiyoriy $y \in U$ olamiz. 4) shartga asosan shunday $W \in B(y)$ mavjudki, $V \in B(z)$ munosabat barcha $z \in W$ lar uchun o‘rinlidir. $V \in B(z)$ munosabat esa z ning U ga tegishli ekanligini ko‘rsatadi, demak, $W \subset U$. 2) shartga binoan $U \in B(y)$, ya’ni $U \in \tau$ va shuning uchun V to‘plam x nuqtaning τ topologiyadagi atrofidir.

Shunday qilib, kiritilgan τ topologiya uchun $V(x)$ sistema x nuqtaning barcha atroflari sistemasiidir.

Endi biror τ_1 , topologiya uchun ham $V(x)$ sistema x nuqtaning τ_1 topologiyadagi atroflari sistemasi bo‘lsin. 1- teoremagaga asosan

$$(A \in \tau) \Leftrightarrow (\forall x \in A : A \in B(x) \text{ yoki } A \neq \emptyset)$$

$$(A \in \tau_1) \Leftrightarrow (\forall x \in A : A \in B(x) \text{ yoki } A = \emptyset).$$

demak, $\tau = \tau_1$

Ta’rif. X topologik fazoning har ikkita turli x va y nuqtalarining o‘zaro

kesishmaydigan mos ravishda U_x va U_y atroflari mavjud bo'lsa, bunday topologik fazo *Xausdorf fazosi deyiladi*; uning topologiyasi esa ajratishning T_2 aksiomasini *qanoatlantiruvchi topologiya deyiladi*.

Masalan, ixtiyoriy (X, ρ) metrik fazo Xausdorf fazosidir. Bunda U_x, U_y atroflar sifatida mos ravishda $S(x, r), S(y, r) \left(r = \frac{1}{3} p(x, y) \right)$ sharlarni olish mumkin.

Xausdorf fazosi bo'lmagan fazoga misol sifatida elementlari ikkitadan ko'p bo'lgan antdiskret topologiyali fazoni olish mumkin.

2-teoremadan ko'rindiki, X to'plamda topologiyani uning har bir nuqtasi atroflari sistemasi $V(x)$ ni berish orqali kiritish mumkin.

Ta'rif. x nuqtaning $V(x)$ atroflari sistemasidan biror $W(x)$ qismini olamiz. Agar x nuqtaning har bir $V \in B(x)$ atrofi uchun $U \subset V$ munosabatni qanoatlantiruvchi $U \in W(x)$ to'plam mavjud bo'lsa, u holda $W(x)$ shu nuqta atroflari sistemasining *bazisi* deyiladi.

Misol. Metrik fazoda barcha $S(x, r), r > 0$, sharlar to'plami x nuqtaning atroflari sistemasini uchun bazis tashkil etadi, xususan, to'g'ri chiziqdagi barcha $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ intervallar sistemasini x nuqtaning atroflari sistemasini uchun bazisdir.

Ta'rif. (X, τ) topologik fazo bo'lsin. Agar $M \subset X$ to'plam uchun $X \setminus M$ ochiq to'plam bo'lsa (ya'ni $X \setminus M \in \tau$), M yopiq to'plam deyiladi.

Topologiya ta'rifidan yopiq to'plamlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

- 1) \emptyset, X -yopiq to'plamlar;
 - 2) soni ixtiyoriy F_α yopiq to'plamlar kesishmasi $\bigcap F_\alpha$ yopiq to'plamdir;
 - 3) soni chekli yopiq to'plamlar yig'indisi ham yopiqdir.
- Bu xossalarni quyidagi duallik prinsiplarining natijasidir:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} F_\alpha = \bigcup_{\alpha} (X \setminus F_\alpha);$$

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} F_\alpha = \bigcap_{\alpha} (X \setminus F_\alpha)$$

Ixtiyoriy M to'plam berilgan bo'lib, biror $x \in X$ nuqtaning har bir U atrofi M to'plam bilan bo'sh bo'lmagan umumiy qismga ega bo'lsa, u holda x nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi.

Ta'rif. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to'plam \bar{M} bilan belgilanadi va M ning *yopilmasi* deyiladi.

Misollar. 1. Metrik fazolar uchun to'plamning yopilmasi tushunchasi 2.4-§ da kiritilgan yopilma tushunchasi bilan mos tushadi.

2. 3.1-§, 3-misoldagi topologik fazoda bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy to'plamning yopilmasi X ga teng.

Ta'rif. A to'plamdagini barcha ochiq qism to'plamlar yig'indisi A ning ichi deyiladi va **IntA** bilan belgilanadi.

Ravshanki, **IntA** to‘plam A ning ochiq qism to‘plamlari orasida eng kattasidir.

Misollar. 1. Diskret topologik fazoda ixtiyoriy to‘plamning ichi shu to‘plamning o‘ziga teng.

2. Antidiskret topologik fazoda X dan farqli har bir to‘plamning ichi bo‘sh to‘plam.

3. (X, ρ) metrik fazoda A to‘plamning ichi A ning ichki nuqtalar to‘plamidir (2.4- §).

To‘plam yopilmasining xossalari o‘rganishdan avval quyidagi muhim munosabatni isbotlaymiz:

$$X \setminus \bar{M} = \text{Int}(X \setminus M) \quad (1)$$

Darhaqiqat, agar $x \in X \setminus \bar{M}$ bo‘lsa, u holda x nuqta M ning urinish nuqtasi emas, ya’ni uning M bilan kesishmaydigan, va demak, $X \setminus M$ to‘plamda joylashgan U_x atrofi mavjud. Demak, $x \in \text{Int}(X \setminus M)$, ya’ni

$$X \setminus \bar{M} \subset \text{Int}(X \setminus M).$$

Endi $x \in \text{Int}(X \setminus M)$ bo‘lsin. $\text{Int}(X \setminus M)$ to‘plam ochiq bo‘lgani sababli, u x nuqtaning M bilan kesishmaydigan atrofidir, ya’ni $x \in \bar{M}$.

Demak, $x \in X \setminus \bar{M}$, ya’ni

$$X \setminus \bar{M} \supset \text{Int}(X \setminus M).$$

(1) munosabat isbotlandi.

Isbotlangan munosabatga asosan

$$\bar{M} = X \setminus \text{Int}(X \setminus M).$$

Demak, \bar{M} yopiq to‘plamdir. Endi F to‘plam M ni o‘z ichiga olgan ixtiyoriy yopiq to‘plam bo‘lsin. U holda $X \setminus F$ ochiq to‘plam va $X \setminus F \subset X \setminus M$. Shuning uchun $X \setminus F \subset \text{Int}(X \setminus M)$, bundan $F \supset X \setminus \text{Int}(X \setminus M) = \bar{M}$. Shunday qilib, \bar{M} to‘plam M ni o‘z ichiga olgan yopiq to‘plamlar orasida eng kichigidir. Metrik fazolardagidek (2.4-§, 1-teorema), to‘plamning yopilmasi quyidagi xossalarga ega:

- 1) $M \subset \bar{M}$;
- 2) agar $M_1 \subset M_2$ bo‘lsa, $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$
- 3) $\overline{\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$
- 4) $\overline{\overline{\bar{M}}} = \bar{M}$, bu yerda $\overline{\overline{\bar{M}}}$ to‘plam \bar{M} ning yopilmasi.

Ta’rif. Agar $\bar{M} = X$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, M to‘plam X ning *hamma yerida zich* deyiladi.

Masalan, R^I to‘g‘ri chiziqda barcha ratsional sonlar to‘plami uning hamma yerida zich, shuningdek, R^n fazoda hamma koordinatalari ratsional sonlar bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami uning hamma yerida zichdir.

Agar (X, τ) topologik fazoning hamma yerida zich sanoqli qism to‘plam mavjud bo‘lsa, bu topologik fazo *separabel topologik fazo* deyiladi.

Misollar. 1.2.5-§ da keltirilgan separabel metrik fazolar separabel topologik fazolarga misol bo‘ladi.

2. Antidiskret topologik fazo doim separabel fazodir.

(X, τ) fazoning biror Y qismini olib, ushbu $\tau_Y = \{G \cap Y : G \in \tau\}$ sistemasini tuzamiz. Ravshanki, (Y, τ_Y) topologik fazodir. Bu topologik fazo (X, τ) topologik fazoning *qism fazosi* deyiladi. Bu holda τ_Y topologiyani τ topologiyaning Y qism to‘plamga ko‘chirilgani deyiladi.

Quyidagi tasdiqlar osongina isbotlanadi:

- 1) $W \subset Y$ to‘plam $y \in Y$ nuqtaning τ_Y topologiyadagi atrofi bo‘lishi uchun y nuqtaning τ topologiyada $W = Y \cap U$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjud bo‘lishi zarur va kifoyadir;
- 2) (Y, τ_Y) fazodagi har bir yopiq to‘plam X dagi biror yopiq to‘plamning Y bilan kesishmasidan iborat;
- 3) Y dagi M to‘plamning τ_Y topologiyadagi yopilmasi M ning τ topologiyadagi yopilmasi bilan Y ning kesishmasidan iborat.

3. 3- §. Topologik fazolarni uzluksiz aks ettirish

Ta’rif. (X, τ) , (Y, t) topologik fazolar, $f : X \rightarrow Y$ aks ettirish va $x_0 \in X$ bo‘lsin. Agar $f(x_0) = y_0$ nuqtaning har bir U atrofi uchun x_0 ning $f(V) \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi V atrofi mavjud bo‘lsa, f aks ettirish x_0 nuqtada *uzluksiz* deyiladi. Agar f aks ettirish X ning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u X da uzluksiz yoki, qisqacha, *uzluksiz* deyiladi. Xususan, X topologik fazoni to‘g‘ri chiziqqa uzluksiz aks ettirish X fazodagi *uzluksiz funksiya* deyiladi.

Biror topologik fazoni ikkinchi bir topologik fazoga aks ettirishning uzluksizdigini ochiq to‘plamlar yordamida ham ta’riflash mumkin.

1- teorema. (X, τ) topologik fazoni (Y, t) topologik fazoga aks ettirish uzluksiz bo‘lishi uchun Y fazodagi har bir ochiq to‘plamning X dagi asli ochiq bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. $f : X \rightarrow Y$ uzluksiz aks ettirish va $G \subset Y$ biror ochiq to‘plam bo‘lsin. $f^{-1}(G)$ to‘plamning X da ochiqligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x_0 \in f^{-1}(G)$ elementni olamiz. U holda $f(x_0) \in G$ va G to‘plam ochiq bo‘lgani uchun u o‘zining $f(x_0)$ nuqtasining atrofi hamdir. Shuning uchun f aks ettirishning uzluksizligidan x_0 ning $f(U) \subset G$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjudligi kelib chiqadi. Bundan $U \subset f^{-1}(G)$ ekanligi va demak, $f^{-1}(G)$ ning ochiq to‘plamligi kelib chiqadi.

Endi f aks ettirish uchun Y dagi har bir ochiq to‘plamning asli X da ochiq bo‘lsa, u holda f ning uzluksizligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqtani olib, $f(x_0)$ ning biror G atrofini olaylik. Umumiyatlikni buzmagan holda G ni ochiq to‘plam deb faraz qilishimiz mumkin. Agar $f^{-1}(G)$ to‘plamni U bilan belgilasak, u holda $x_0 \in U$ va U ochiq to‘plam, demak, u x_0 ning atrofi va $f(U) \subset G$.

To‘plam to‘ldiruvchisining asli shu to‘plam aslining to‘ldiruvchisiga teng

bo‘lgani uchun 1-teoremadan quyidagi teorema bevosita kelib chiqadi.

2-teorema. (X, τ) topologik fazoni (Y, τ) topologik fazoga aks ettirish uzluksiz bo‘lishi uchun Y dagi har bir yopiq to‘plamning X dagi asli yopiq bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Matematik analizdan ma’lum bo‘lgan uzluksiz funksiyalarning superpozitsiyalari uzluksiz bo‘lishi haqidagi teorema topologik fazolarni uzluksiz aks ettirishlari uchun quyidagicha umumlashtiriladi.

3-teorema. X, Y, Z topologik fazolar va $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ uzluksiz aks ettirishlar bo‘lsin. U holda $(g \circ f) : X \rightarrow Z$ aks ettirish ham uzluksizdir (bu yerda $(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

Teoremaning isboti 2-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Ta’rif. X topologik fazoni Y topologik fazoga f aks ettirish quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa, u *gomeomorf aks ettirish* yoki *gomeomorfizm* deyiladi:

- 1) f o‘zaro bir qiymatli aks ettirish va $f(X) = Y$.
- 2) f va f^{-1} -uzluksiz aks ettirishlar.

Bu holda X va Y fazolar o‘zaro gomeomorf topologik fazolar deyiladi.

Misol. R va $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ topologik fazolar gomeomorf fazolar, bunda $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$ gomeomorfizmni quyidagicha aniqlash mumkin: $f(x) = \operatorname{tg} x$

3.4- §. Kompaktlik

(X, τ) topologik fazo bo‘lsin. Agar A to‘plam va biror $\{G_\alpha\} \alpha \in I$ to‘plamlar sistemasi uchun $A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ munosabat bajarilsa, $\{G_\alpha\} \alpha \in I$ sistema A uchun *qoplama* deyiladi. Agar bu sistemaning biror qismi ham A uchun qoplama bo‘lsa, u *qism qoplama* deyiladi.

Agar $\{G_\alpha\} \alpha \in I$ qoplama kiruvchi har bir G_α to‘plam ochiq bo‘lsa, bu qoplama A uchun *ochiq qoplama* deyiladi.

Ta’rif. Agar A to‘plamning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin bo‘lsa, A kompakt to‘plam deyiladi.

$\{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ qism to‘plamlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar bu sistemaning ixtiyoriy chekli qism sistemasining kesishmasi bo‘sh bo‘lmasa, bunday sistema *markazlangan sistema* deyiladi.

1-teorema. (X, τ) topologik fazo kompakt bo‘lishi uchun undagi yopiq to‘plamlardan iborat har qanday markazlangan sistemaning kesishmasi bo‘sh bo‘lmasligi zarur va kifoyadir.

Isboti. Agar $\{G_\alpha\} \alpha \in I$ ochiq to‘plamlardan iborat sistema bo‘lsa, u holda $\{F_\alpha = X \setminus G_\alpha\} \alpha \in I$ sistema yopiq to‘plamlardan iborat. Teoremaning isboti quyidagi duallik prinsipidan bevosita kelib chiqadi: ixtiyoriy $I_0 \subset I$ uchun

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I_0} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I_0} F_\alpha$$

2-teorema. Kompakt fazoning yopiq qism to‘plami kompakt to‘plamdir.

Izboti. F to‘plam X kompakt fazoning yopiq qism to‘plami va $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ sistema F ning yopiq qism to‘plamlaridan iborat ixtiyoriy markazlangan sistema bo‘lsin. U holda har bir $F_\alpha, \alpha \in I$ to‘plam X da ham yopiq bo‘ladi va demak, $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ sistema X dagi uning yopiq to‘plam-laridan iborat markazlangan sistemadir. Bundan $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. 1-teoremadan F ning kompakt ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema. Xausdorf fazosining kompakt qism to‘plami yopiqdir.

Izboti. X Xausdorf fazosi, K esa uning kompakt qism to‘plami bo‘lsin. Ixtiyoriy $y \in K$ nuqtani olamiz; unda har bir $x \in K$ nuqta uchun x va y larning mos ravishda shunday ochiq bo‘lgan V_x va $U_y^{(x)}$ atroflari mavjudki, $V_x \cap U_y^{(x)} = \emptyset$. $\{V_x : x \in K\}$ sistema K uchun ochiq qoplama, demak, uning chekli

$$V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}$$

qism qoplamasini mavjud. Endi $U = U_y^{(x_1)} \cap U_y^{(x_2)} \cap \dots \cap U_y^{(x_n)}$ va $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}$ ochiq to‘plamlarni olsak, u holda U_y to‘plam y nuqtaning ochiq atrofi bo‘lib, $U_y \cap V = \emptyset$; bundan $U_y \cap K = \emptyset$ ekanligi, ya’ni $y \in \bar{K}$ munosabat kelib chiqadi. Shunday qilib, $\bar{K} \subset K$ munosabat isbotlandi. To‘plam yopilmasining xossalari ko‘ra $\bar{K} = K$ tenglik kelib chiqadi.

Kompakt fazolarning uzlusiz aks ettirishlari qator muhim xossalarga ega.

4-teorema. Kompakt fazoning uzlusiz aks ettirishdagi tasviri kompakt fazodir.

Izboti. X kompakt fazo, f esa X ni biror Y fazoga uzlusiz aks ettirish bo‘lsin. $f(X)$ fazoning ixtiyoriy $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ ochiq qoplamasini olamiz, ya’ni

$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha \subset f(X)$. So‘nggi munosabatdan $X = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\Gamma}} f^{-1}(G_\alpha)$ tenglik kelib chiqadi.

Bundan va f ning uzlusizligidan $\{f^{-1}(G_\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$ sistema X ning ochiq qoplamasini ekanlish kelib chiqadi va, demak, undan chekli qism qoplamanini ajratib olish mumkin, ya’ni ushbu $\bigcup_{k=1}^m f^{-1}(G_{\alpha_k}) = X$ tenglikni yozishimiz mumkin.

Bundan $f(X) = \bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k}$ tenglik kelib chiqadi, ya’ni $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_m}$ sistema $f(X)$ ni qoplaydi, demak, $f(X)$ kompaktdir.

5-teorema. X kompakt fazoni Y Xausdorf fazosiga o‘zaro bir qiymatli va uzlusiz aks ettirish gomeomorfizm bo‘ladi.

Izboti. Teoremani isbotlash uchun f^{-1} ning uzlusizligini ko‘rsatish kifoya.

F to‘plam X ning yopiq qism to‘plami bo‘lsin. 2- teoremaga ko‘ra F kompaktdir. Endi 4-teoremani qo‘llab, $f(F)$ ning kompakt ekanligini ko‘ramiz, va, nihoyat, 3-teoremaga ko‘ra $f(F)$ yopiqdir. Demak, ixtiyoriy $F \subset X$ yopiq to‘plam uchun $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ yopiqdir. 3.3-§ dagi 2-teoremaga asosan f^1 uzluksiz.

6-teorema. X kompakt fazoda f uzluksiz funsiya berilgan bo‘lsin. U holda f fuksiya X fazoda chegaralangan bo‘lib, o‘zining aniq yuqori va quyi chegaralariga ega.

Istboti. X kompakt fazoda aniqlangan f uzluksiz funsiya X ni Xausdorf fazosi bo‘lmish R ga uzluksiz aks ettirish demakdir. 4- teoremaga ko‘ra $f(X)$ kompakt. Bundan $f(X)$ ning R da chegaralangan va yopiq to‘plam ekanligi kelib chiqadi, va demak, f fuksiya X da o‘zining aniq yuqori chegarasiga va aniq quyi chegarasiga erishadi.

3.5-§. Fazolarning topologik ko‘paytmalari

X va Y topologik fazolar bo‘lib, $X \times Y$ esa ularning to‘g‘ri ko‘paytmasi bo‘lsin, ya’ni

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Ixtiyoriy $(x, y) \in X \times Y$ ni olib, $V(x)$ va $V(y)$ orqali mos ravishda x va y larning barcha atroflari sistemasini belgilaymiz.

Endi $X \times Y$ to‘plamdagи (x, y) nuqtaning $V(x, y)$ atroflari sistemasini quyidagicha kiritamiz. Agar $A \subset X \times Y$ to‘plam biror $U_x \times U_y$ ($U_x \in B(x), U_y \in B(y)$) to‘plamni o‘z ichiga olsa, A ni $V(x, y)$ ning elementi deb hisoblaymiz. Hosil bo‘lgan $V(x, y)$ sistema 3.2-§, 2- teoremadagi 1)-4) xossalarga ega. Bunda 1)-2) xossalar ravshan. 3) - 4) xossalar esa $V(x)$, $V(y)$ sistemalarning mos xossalardan kelib chiqadi.

Demak, 3.2- § dagi 2-teoremaga ko‘ra $X \times Y$ to‘plamda shunday yagona τ topologiya mavjudki, bu topologiyada $V(x, y)$ sistema (x, y) nuqtaning atroflarini tashkil qiladi.

$(X \times Y, \tau)$ topologik fazoni X va Y topologik fazolarning topologik ko‘paytmasi deyiladi. τ topologiya esa X va Y dagi topologiyalarning ko‘paytmasi deyiladi.

Topologik ko‘paytma tushunchasini soni cheksiz topologik fazolar uchun ham aniqlash mumkin. $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ topologik fazolar sistemasi bo‘lsin. $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ orqali $X_\alpha (\alpha \in A)$ fazolarning to‘g‘ri ko‘paytmasini belgilaymiz, ya’ni $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ barcha shunday $x = \{x_\alpha\}$ sistemalar to‘plamiki, x ning x_α koordinatasi X_α fazoga tegishlidir. Biror $x^0 = \{x_\alpha^0\} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ elementni olamiz. A to‘plamdan ixtiyoriy soni chekli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ indekslarni va x^0 elementning $x_{\alpha_1}^0, x_{\alpha_2}^0, \dots, x_{\alpha_n}^0$

koordinatalarini olamiz. $U_{x_{\alpha_1}}^0, \dots, U_{x_{\alpha_n}}^0$ to‘plamlar mos ravishda $x_{\alpha_1}^0, x_{\alpha_2}^0, \dots, x_{\alpha_n}^0$, nuqtalarning atroflari bo‘lsin; quyidagi to‘plamni aniqlaqlaymiz:

$$U_{x^0} = \left\{ \{x_\alpha\} : x_{\alpha_k} \in U_{x_{\alpha_k}^0}, k = \overline{1, n} \right\}$$

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ to‘plamdagagi (1) ko‘rinishga ega bo‘lgan qism to‘plamlar sistemasini $F(x^0)$ bilan belgilaymiz. Endi $V(x^0)$ sistemani quyidagicha aniqlaymiz. Agar W to‘plam va biror $U_{x^0} \in F(x^0)$ uchun $W \supset U_{x^0}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $W \in B(x^0)$ deb hisoblaymiz. $V(x^0)$ sistema 3.2-§, 2-teoremadagi 1)-4) xossalarga ega. Haqiqatan, 1), 2) xossalalar ravshan. 3) xossani isbotlaymiz. Agar $U, V \in B(x^0)$ bo‘lsa, u holda

$$\begin{aligned} U \supset U_{x^0} &= \left\{ \{x_\alpha\} : x_{\alpha_k} \in U_{x_k^0}, k = \overline{1, n} \right\} \\ V \supset V_{x^0} &= \left\{ \{x_\alpha\} : x_{\beta_i} \in V_{x_{\beta_i}^0}, i = \overline{1, m} \right\} \end{aligned}$$

Demak,

$$U \cap V \supset U_{x^0} \cap V_{x^0} = \left\{ \{x_\alpha\} : x_{\alpha_k} \in U_{x_k^0}, x_{\beta_i} \in V_{x_{\beta_i}^0}, k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m} \right\}$$

Ravshanki, $U_{x^0} \cap V_{x^0} \in F(x^0)$ demak, $U \cap V \in B(x^0)$, 3) xossa ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

3.2-§, 2-teoremaga ko‘ra $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ to‘plamda shunday yagona τ topologiya mavjudki, unda ixtiyoriy $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ nuqtaning barcha atroflari sistemasi vazifasini $V(x)$ bajaradi. $F(x)$ esa $V(x)$ uchun bazis bo‘ladi.

Ta’rif. $\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau \right)$ topologik fazo $X_\alpha, \alpha \in A$ topologik fazolarning topologik yoki *Tixonov ko‘paytmasi* deyiladi, τ topologiya esa *Tixonov topologiyasi* deyiladi.

1-teorema. Agar har bir $\alpha \in A$ uchun X_α Xausdorf fazosi bo‘lsa, u holda ularning topologik ko‘paytmasi ham Xausdorf fazosidir.

Isboti. Agar $x, y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ va $x \neq y$ bo‘lsa, u holda shunday $\alpha_0 \in A$ mavjudki, $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$ bo‘ladi.

X_{α_0} Xausdorf fazosi bo‘lgani uchun x_{α_0} va y_{α_0} , nuqtalarning mos ravishda shunday $U_{x_{\alpha_0}}$ va $V_{y_{\alpha_0}}$ atroflari mavjudki, ular uchun $U_{x_{\alpha_0}} \cap V_{y_{\alpha_0}} = \emptyset$.

Ushbu

$$U_x = \left\{ \{z_\alpha\} : z_{\alpha_0} \in U_{x_{\alpha_0}} \right\}, V_y = \left\{ \{z_\alpha\} : z_{\alpha_0} \in V_{y_{\alpha_0}} \right\}$$

to‘plamlar mos ravishda x va y nuqtalarning Tixonov topologiyasidagi atroflari bo‘lib, $U_x \cap V_y = \emptyset$ shartnn qanoatlantiradi. Demak, $\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau \right)$ -Xausdorf fazosi

Endi umumiy topologiyadagi eng muhim teoremlardan biri bo‘lgan A. N. Tixonov teoremasini isbotsiz keltiramiz.

2-teorema (A.N.Tixonov teoremasi). Agar har bir $\alpha \in A$ uchun X_α kompakt topologik fazo bo‘lsa, $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ham kompakt fazodir.

Mashq uchun masalalar

1. Uch elementdan iborat bo‘lgan X to‘plamdagи hamma topologiyalarni toping.
2. Chekli to‘plamdagи T_2 topologiya diskret bo‘lishini isbotlang.

$N=(1, 2, 3, \dots)$ to‘plamdachi?

3. (X, τ) topologik fazo, $\{x_n\}$ esa X dagi ketma-ketlik bo‘lsin. $a \in X$ ning ixtiyoriy U atrofi uchun $n > N$ bo‘lganda $x_n \in U$ bo‘ladigan N sonlar topilsa, a nuqta $\{x_n\}$ ning *limiti* deyiladi.

Xausdorf fazosida ketma-ketlikning limiti bittadan ortiq bo‘lmasligini ko‘rsating. Fazo Xausdorf aksiomasini qanoatlantirmasachi?

4. Agar (Y, t) topologik fazo bo‘lib, f aks ettirish X to‘plamni Y fazoga akslantirsa, u holda

$$f^{-1}(t) = \{f^{-1}(G) : G \in t\}$$

sistema X da topologiya bo‘lishini ko‘rsating. Bu topologiya t topologiyaning X dagi “asli” deb ham yuritiladi.

5. (X, τ) topologik fazo, $Y \subset X$, $i : Y \rightarrow X$ esa $i(y)=y$ bo‘lgan akslantirish deylik. $i^{-1}(\tau)$ topologiya τ ning Y ga ko‘chirilgani ekanligini isbotlang.

6. (X, τ) topologik fazoni (Y, t) topologik fazoga f aks ettirish uzluksiz bo‘lishi uchun $f^{-1}(t)$ topologiya τ topologiyadan kuchsizroq bo‘lishi zarur va kifoyaligini ko‘rsating.

7. (X, τ) va (Y, t) topologik fazolarning topologiyalari metrikalar bilan aniqlangan bo‘lsin. Berilgan $f : X \rightarrow Y$ aks ettirishning uzluksizlik ta’rifi 2-bobda keltirilgan metrik fazolardagi uzluksizlik ta’rifi bilan teng kuchli ekanligini isbotlang.

8. R da shunday τ_1, τ_2, τ_3 T_2 - topologiyalar kirititingki, natijada hosil bo‘lgan topologik fazolar gomeomorf bo‘lmasin.

9. R dagi tabiiy topologiyani $X=[0,1] \cup [2,3]$ va $Y=[0,2]$ qism to‘plamlarga ko‘chiraylik. X ni Y ga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli, uzluksiz, lekin gomeomorfizm bo‘lmagan akslantirish quring.

10. Rⁿ fazoda biror qism to‘plam kompakt bo‘lishi uchun u chegaralangan hamda yopiq bo‘lishi zarur va kifoya ekanligini isbotlang.

11. Metrik fazolar uchun 2-bobda kiritilgan kompaktlik tushunchasi shu bobdagi kompaktlik tushunchasi bilan ustma-ust tushishini ko‘rsating.

12. $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ -topologik fazolar, $\pi_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ akslantirish $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ ($i = 1, 2$) kabi aniqlansin (proeksiyalar), $X_1 \times X_2$ dagi Tixonov topologiyasi π_1 va π_2 uzlucksiz bo'lgan eng kuchsiz topologiya bo'lishini ko'rsating.

13. Agar topologik fazoda har bir nuqtaning atroflari sistemasining sanoqli bazisi mavjud bo'lsa, topologik fazo sanoqlilikning bиринчи aksiomasini qanoatlanshiruvchi fazo deyiladi. $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ topologik fazolar sistemasi bo'lib, har bir X_α fazo R fazoga gomeomorf bo'lsin. U holda $\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ topologik fazoni

R^Δ bilan belgilaymiz. R^Δ topologik fazo sanoqlilikning bиринчи aksiomasini qanoatlantirishi uchun Δ to'plam sanoqli bo'lishi zarur va kifoyaligini isbotlang.

IV BOB. NORMALANGAN FAZOLAR

4.1- §. Normalangan fazo ta'rifi va uning ba'zi xossalari

Ta'rif. V vektor fazo bo'lib, p funksional V ni to'g'ri chiziqqa aks ettirsin. p funksional ushbu shartlarni qanoatlantirsa, u *norma* deyiladi:

- 1) $p(x) \geq 0$; faqat $x = \theta$ uchun $p(x) = 0$;
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
- 3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, λ - son.

Norma kiritilgan vektor fazo normalangan fazo deyiladi, x elementning $p(x)$ normasi odatda $\|x\|$ bilan belgilanadi. Agar $\rho(x, y)$ bilan $\|x - y\|$ sonni belgilasak, $\rho(x, y)$ metrika ekanligi bevosita ko'rinish turibdi. Demak, har qanday normalangan fazo metrik fazodir.

Misollar.

1. λ haqiqiy son uchun $\|\lambda\| = |\lambda|$ deb olsak, u holda R , ya'ni to'g'ri chiziq normalangan fazo bo'ladi.

2. n o'lchamli R^n haqiqiy fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ element uchun Yevklid normasini quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}. \quad (1)$$

Bunda normaning 1) va 3) shartlari bajarilishi ravshan, 2) shart esa 2.1-§ dagi (2) tengsizlikdan kelib chiqadi.

Shu R^n fazoning o'zida quyidagi normalarni ham kiritish mumkin:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|. \quad (2)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|. \quad (3)$$

n o'lchamli C^n kompleks fazoda ham (1), (2), (3) kabi normalarni ko'rish mumkin.

3. $C[a, b]$ fazoda normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Ravshanki, bu norma uchun ham 1) va 3) shartlar bevosita bajariladi. 2) shartning bajarilishini ko'rsatamiz. Har qanday $t \in [a, b]$ nuqta va f, g funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinnlidir:

$$\begin{aligned} & \|(f + g)(t)\| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \\ & \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |g(t)| = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

t ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\|f + g\| = \max_{a \leq t \leq b} |(f + g)(t)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

4. m vektor fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ elementning normasi deb ushbu

$$\|x\| = \sup_{1 \leq n < \infty} |x_n|$$

songa aytamiz. Normaning aksiomalari bevosita tekshiriladi.

Normalangan V fazoning V_0 vektor qism fazosi yopiq bo'lsa, u holda V_0 ni normalangan V fazoning *qism fazosi* deyiladi.

Uchinchi misoldagi $C[a,b]$ fazoda $P(x)$ ko'phadlar to'plami yopiq bo'lmanan vektor qism fazodir, demak, normalangan fazo ma'nosida $P(x)$ fazo $C[a,b]$ ning qism fazosi emas.

Normalangan V fazoda A to'plamning chiziqli qobig'i bo'lgan $L[A]$ vektor qism fazoni olamiz. $L[A]$ ning yopilmasi A to'plamning *chiziqli yopilmasi* deyiladi va $\overline{L[A]}$ bilan belgilanadi. Agar $\{x_\alpha\}$ sistemaning chiziqli yopilmasi V fazoga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ to'la sistema deyiladi.

Yuqorida aytib o'tganimizdek, normalangan fazolar metrik fazolarning xususiy holidir. Demak, bunday fazolarning to'la yoki to'la emasligi haqida gap yuritish mumkin. Norma yordamida fazoning to'laligi quyidagicha ifodalanadi:

Ushbu $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik uchun shunday $x_0 \in E$ element mavjudki, $x_n \rightarrow x_0$ munosabat bajariladi.

To'la normalangan fazo *Banax fazosi* yoki *B-fazo* deyiladi va normalangan fazolar ichida muhim rol o'ynaydi. Yuqoridagi R , R^n , $C[a,b]$, m fazolarning to'laligi II bobda ko'rsatilgan edi, demak, ular Banax fazolaridir. Yana misollar ko'ramiz.

5) $C^2[a,b]$ fazoda (2.6-§) normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Norma aksiomalari bevosita tekshiriladi. (Faqat uchburchak aksiomasini keyinchalik umumiy holda isbotlaymiz (Koshi—Bunyakovskiy tengsizligi). 2.6-§ da bu fazoning to'la emasligi ko'rsatilgan.

6) l_2 fazoda normani

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}, \quad x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

ko'rinishda kirtsak, l_2 fazo *B* fazoga misol bo'ladi.

V normalangan fazo bo'lib, \hat{V} fazo V ni o'z ichiga oluvchi *B* fazo bo'lsin. Agar V fazo \hat{V} ning hamma yerida zich bo'lsa, u holda \hat{V} fazo V ning to'ldiruvchisi deyiladi.

1-teorema. *Ixtiyoriy normalangan fazo yagona to'ldiruvchiga ega.*

Isboti. Metrik fazolarning to'ldiruvchi fazosi haqidagi teoremaga asosan V ning to'ldiruvchisi bo'lgan \hat{V} metrik fazo mavjud. Biz shu metrik fazoga V dagi algebraik amallarni davom ettirishimiz kerak. \hat{V} ning x, y elementlariga

yaqinlashuvchi bo‘lgan va V fazoning elementlaridan iborat $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarni olamiz va $z_n = x_n + y_n$ elementlarni tuzamiz, $n=1,2,\dots$ Ushbu

$$\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|_{n,m \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

munosabatdan $\{z_n\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligi ko‘rinib turibdi.

Demak, $\{z_n\}$ ketma-ketlik \hat{V} fazodagi biror z elementga yaqinlashuvchidir, ya’ni $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Bu z elementni x va y elementlarning yig‘indisi deymiz, ya’ni $z = x + y$.

Aniqlangan z element $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarga bog‘liq emas. Darhaqiqat, agar $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ mos ravishda x va y elementlarga yaqinlashuvchi boshqa ketma-ketliklar bo‘lsa, u holda $z'_n = x'_n + y'_n$ uchun

$$\|z_n - z'_n\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n$.

Shunga o‘xhash \hat{V} metrik fazoda songa ko‘paytirish amalini kiritish mumkin. Bevosita ko‘rinib turibdiki, V fazoda kiritilgan algebraik amallar V fazoda ko‘rilsa, undagi berilgan amallar bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, \hat{V} vektor fazoga aylantirildi. Endi $x \in \hat{V}$ element uchun normani ushbu

$$\|x\| = p(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \\ (x_n \rightarrow x, x_n \in V)$$

ko‘rinishda aniqlasak, \hat{V} normalangan fazo bo‘ladi. V fazo \hat{V} ning vektor qism fazosini hosil qiladi.

Kiritilgan norma \hat{V} fazoda metrikani hosil qilgani uchun \hat{V} fazo B -fazodir va V ning hamma yerida zichdir, ya’ni \hat{V} fazo normalangan V fazoning to‘ldiruvchisi. To‘ldiruvchi \hat{V} metrik fazoning yagonaligi 2.7- § da isbotlangan. Demak, \hat{V} fazodagi algebraik amallarning yagonaligini isbotlasak bas. Bu esa amallarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Darhaqiqat, yig‘indi $z = x +_1 y$ va $z = x +_2 y$ ko‘rinishlarda aniqlangan bo‘lsin. U holda $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ($x_n, y_n \in V$) munosabatdan $x_n + y_n \rightarrow x +_1 y$ va $x_n + y_n \rightarrow x +_2 y$. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo‘lgani uchun $x +_1 y = x +_2 y$.

Shunga o‘xhash, songa ko‘paytirish amalining yagonaligi ko‘rsatiladi.

Banax fazosiga muhim bir misol ko‘ramiz. X kompakt topologik fazo bo‘lib, $C(X)$ fazo X da aniqlangan uzluksiz kompleks funksiyalar fazosi bo‘lsin. Ravshanki, $C(X)$ vektor fazodir. Bu fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Bu sonning chekli ekanligi 3.4-§ dagi 6-teoremadan kelib chiqadi. Normaning xossalari esa bevosita tekshiriladi.

2-teorema. $C(X)$ fazo kiritilgan normada Banax fazosidir.

Izboti. Aytaylik, $\{f_n(x)\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N natural son topiladiki ixtiyoriy $m, n \geq N$ uchun ushbu

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (4)$$

tengsizlik hamma x nuqtalarda bajariladi. $x \in X$ nuqta tayinlansa, $\{f_n(x)\}$ sonli ketma-ketlik fundamentaldir, demak, $\{f_n(x)\}$ biror $f(x)$ songa yaqinlashadi. Yuqoridagi (4) tengsizlikda m bo'yicha limitga o'tsak,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ ya'ni } \|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

munosabat hosil bo'ladi. Demak, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi. $f(x)$ ning uzluksizligini isbotlash kifoya. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday m son topiladiki, $\|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik o'rinni bo'ladi. m sonni tayinlab olsak, $f_m(x)$ funksiya ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi, x_0 nuqtaning shunday U_{x_0} atrofi topiladiki, ixtiyoriy $x \in U_{x_0}$ nuqtada $|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik o'rinni bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $x \in U_{x_0}$ nuqtada quyidagi munosabat o'rinni bo'ladi:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq \|f - f_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ya'ni $f(x)$ uzluksiz funksiya.

Endi $C(X)$ fazodagi to'plamlarning nisbiy kompaktlik belgisini beramiz.

3-teorema (Askoli teoremasi). $\Phi \subset C(X)$ funksiyalar to'plami uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

a) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\} < \infty$;

b) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun har bir $x \in X$ nuqtaning shunday V atrofi topiladiki, ushbu $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

tengsizlik istalgan $y \in V$ va $f \in \Phi$ uchun bajariladi, ya'ni Φ tekis darajada uzluksiz.

U holda Φ to'plam $C(X)$ Banax fazosida nisbiy kompakt to'plam bo'ladi.

Izboti. $C(X)$ to'la bo'lganligi uchun 2.8- § dagi 2-teoremaga asosan Φ ning to'la chegaralanganligini ko'rsatish kifoya.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olamiz. X fazo kompakt bo'lgani uchun shunday $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ nuqtalar mavjudki, ularning b) xossaladagi V_1, V_2, \dots, V_n atroflarining yig'indisi X ga teng, ya'ni $X = \bigcup_{i=1}^n V_i$ va

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (f \in \Phi, x \in V_i, 1 \leq i \leq n). \quad (5)$$

Bu tengsizlikdan va a) shartdan Φ to'plamning tekis chegaralanganligi, ya'ni

$$\sup \{ |f(x)| : x \in X, f \in \Phi \} = M < \infty \quad (6)$$

kelib chiqadi.

D to‘plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$D = \{ \lambda \in C : |\lambda| \leq M \}.$$

Har bir $f \in \Phi$ funksiyaga $p(f) \in D^n \subset C^n$ nuqtani mos qo‘yamiz, bu yerda

$$p(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

D^n to‘plam C^n fazoda chegaralangan, demak, u to‘la chegaralangan. Ya’ni shunday $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Phi$ funksiyalar topiladiki, har bir $p(f)$ biror $p(f_k)$ nuqtadan ε dan kichik masofada joylashgan. Demak, ixtiyoriy $f \in \Phi$ uchun shunday k topiladiki ($1 \leq k \leq m$),

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

X fazoning har bir x nuqtasi biror V_i ichida joylashgan, demak, shu i uchun

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ va } |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

Bulardan

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| < 3\varepsilon.$$

Demak, ixtiyoriy ε uchun chekli 3ε -to‘r mavjud, ya’ni Φ to‘la chegaralangan.

Mazkur paragrafni chekli o‘lchamli normalangan fazolarni o‘rganish bilan yakunlaymiz.

Ta’rif. Aytaylik V_1, V_2 normalangan fazolar orasida $u: V_1 \rightarrow V_2$ chiziqli izomorfizm mavjud bo‘lsin. Agar fazolardagi normalarga nisbatan u va u^{-1} uzluksiz bo‘lsa, U holda u normalangan fazolarning izomorfizmi deyiladi, V_1 va V_2 fazolar esa *izomorf normalangan fazolar* deyiladi.

4-teorema. Ixtiyoriy haqiqiy (kompleks) n o‘lchamli normalangan fazo Evklid normali R^n (C^n) fazoga izomorfdir.

Isboti. Teoremani haqiqiy fazolar uchun isbotlaymiz (kompleks holda isboti shunga o‘xshash). V normalangan fazo n o‘lchamli bo‘lib, x_1, x_2, \dots, x_n undagi bazis bo‘lsin. Bu fazoning ixtiyoriy x elementi ushbu

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

ko‘rinishga ega; $\xi_i \in R$, $i = 1, 2, \dots, n$. Bunday x elementga R^n fazodagi

$$u(x) = \bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

elementni mos qo‘yamiz. Natijada hosil bo‘lgan $u: V \rightarrow R^n$ moslik chiziqli izomorfizm ekanligi ravshan. Demak u va u^{-1} uzluksiz ekanligini isbotlash kerak. Ixtiyoriy $x \in V$ uchun

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|x_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2} = \beta \|u(x)\|,$$

bu yerda $\beta = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$. Xususan, ixtiyoriy $x, y \in V$ uchun

$$\|x - y\| \leq \beta \|u(x) - u(y)\|,$$

ya'ni

$$\|u^{-1}(\bar{x}) - u^{-1}(\bar{y})\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Demak, $u^{-1}: R^n \rightarrow V$ uzluksiz aks ettirish. Endi R^n fazodagi

$$S = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1 \right\}$$

birlik sferada ushbu

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|x\| = \|\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n\|$$

funksiyani ko'ramiz. S sferada $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ sonlarning hammasi bir vaqtida nolga teng bo'lmagani va $\{x_i\}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani sababli ixtiyoriy $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in S$ uchun

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0.$$

Ushbu

$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - f(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)| = \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq \beta \|\bar{x} - \bar{y}\|$ tengsizlikdan f uzluksiz funksiya ekanligi ko'rinish turibdi.

S kompakt bo'lgani uchun 2-8-§, 5-teoremaga asosan bu funksiya S to'plamda o'zining minimumiga erishadi. Ravshanki, $\alpha = \min f(\bar{x}) > 0$.

Demak, $x \in S$ uchun

$$f(\bar{x}) = \|x\| \geq \alpha,$$

ya'ni ixtiyoriy $\bar{x} \in R^n$ uchun

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}} \right\| \geq \|\bar{x}\| \alpha,$$

ya'ni

$$\|u(x)\| = \|\bar{x}\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|.$$

Bundan ko'rinish turibdiki,

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x - y\|,$$

ya'ni u uzluksizdir.*

1- natija. Barcha haqiqiy (kompleks) n o'lchamli normalangan fazolar o'zaro izomorfdir.

2- natija. Ixtiyoriy chekli o'lchamli normalangan fazo to'ladir.

Isboti. Teoremada biz aslida ixtiyoriy chekli o'lchamli normalangan fazonyng normasi $R^n (C^n)$ dagi normaga ekvivalent ekanligini ko'rsatdik. Bundan va $R^n (C^n)$ fazoning to'laligidan ixtiyoriy chekli o'lchamli fazoning to'laligi kelib chiqadi.

3-natija. Normalangan fazoning har bir chekli o'lchamli vektor qism fazosi yopiqdir.

Izboti. V normalangan fazoning chekli o‘lchamli V_1 qism fazosida yaqinlashuvchi $x_n \rightarrow x \in V$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo‘lgani sababli $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham V_1 fazoda fundamental. 2-natijaga asosan V_1 to‘la, demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik biron $x_0 \in V_1$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘ladi. Limitning yagonaligidan $x = x_0 \in V_1$ ya’ni V yopiq.

4.2-§ Evklid fazolari

Endi biz normalangan fazoning xususiy holi bo‘lgan va funksional analizda keng qo‘llaniladigan Evklid fazosini o‘rganamiz.

Haqiqiy E vektor fazoning $\{x, y\}$ juft elementlarida aniqlangan, (x, y) ko‘rinishda belgilanuvchi va quyidagi to‘rt shartni (aksiomalarini) qanoatlantiruvchi haqiqiy funksiya *skalyar ko‘paytma* deyiladi:

- 1) $(x, y) = (y, x);$
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$
- 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \lambda \in R;$
- 4) $(x, x) \geq 0; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$

Skalyar ko‘paytma kiritilgan vektor fazo *Evklid fazosi* deyiladi. Skalyar ko‘paytma yordami bilan Evklid fazosida norma quyidagicha kiritiladi:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

bu yerda arifmetik ildiz nazarda tutiladi. Normaning birinchi sharti skalyar ko‘paytmaning to‘rtinchisi aksiomasidan bevosita kelib chiqadi. Normaning uchinchi sharti skalyar ko‘paytmaning uchinchi aksiomasining natijasidir. Haqiqatan,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \|x\|.$$

Normaning ikkinchi shartini isbotlash uchun biz oldin quyidagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlaymiz:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1)$$

Buning uchun ixtiyoriy λ son olib, quyidagi ifodani tuzamiz:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x, y) \lambda + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Ushbu $\phi(\lambda) = \|\lambda x + y\|^2 \geq 0$ munosabaga ko‘ra $\phi(\lambda)$ kvadrat uchhadning diskriminanti $(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ musbat emas, ya’ni

$$(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Bu tengsizlikdan kerak bo‘lgan (1) tengsizlik kelib chiqadi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \phi(1) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Ya'ni normaning ikkinchi aksiomasi

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

isbotlandi.

Skalyar ko'paytma yordami bilan Evklid fazosida ikki element orasidagi burchak tushunchasini quyidagicha kiritish mumkin:

$$\cos \psi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning absolyut qiymati Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga binoan birdan katta emas, ya'ni har qanday noldan farqli x va y uchun ψ aniqlangan. Agar $(x, y)=0$ bo'lsa, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Bu holda x va y *ortogonal vektorlar* deb ataladi.

Agar x element A to'plamning har bir elementiga ortogonal bo'lsa, x element A to'plamga *ortogonal* deyiladi va $x \perp A$ bilan belgilanadi.

A_1 to'plamning har bir elementi A_2 to'plamning ixtiyoriy elementiga ortogonal bo'lsa, A_1 va A_2 to'plamlar *ortogonal* deyiladi va $A_1 \perp A_2$ bilan belgilanadi.

Evklid fazosining ayrim xossalari keltiramiz.

1. Agar $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ norma ma'nosida yaqinlashsa, u holda $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ (skalyar ko'paytmaning uzluksizligi).

Izboti. Koshi — Bunyakovskiy tengsizligiga asosan

$$\begin{aligned}|(x, y) - (x_n, y_n)| &\leq |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leq \\ &\leq \|x\| \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \|y_n\|.\end{aligned}$$

Yaqinlashuvchi $\{y_n\}$ ketma-ketlikning normasi chegaralangan bo'lgani uchun oxirgi ifoda nolga intiladi.

2. Evklid fazosining ixtiyoriy x, y elementlari uchun

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

tenglik o'rinnlidir (parallelogramm formulasi).

Haqiqatan,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - \\ &- (y, x) + (y, y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

3. a) $x \perp y_1$ va $x \perp y_2$ munosabatlardan $x \perp (\lambda y_1 + \mu y_2)$ munosabat kelib chiqadi (λ, μ — haqiqiy sonlar).

b) $x \perp y_n$ ($n=1, 2, \dots$) bo'lib, y_n ketma-ketlik y elementga yaqinlashsa, u holda $x \perp y$.

Darhaqiqat, $x \perp y_n$ bo‘lgani uchun $(x, y_n) = 0$, $y_n \rightarrow y$ dan 1-xossaga asosan $(x, y_n) \rightarrow (x, y)$ demak, $(x, y) = 0$, ya’ni $x \perp y$.

c) $x \perp A$ bo‘lsa, u holda $x \perp \overline{L[A]}$.

d) A to‘plamning har bir elementiga ortogonal bo‘lgan barcha elementlar to‘plamini A^\perp bilan belgilaymiz. 3 a) xossaga asosan A^\perp to‘plam E ning vektor qism fazosidir. 3 b) ga asosan A^\perp yopiqdir. Demak, A^\perp to‘plam normalangan E fazoning qism fazosidir. Noldan farqli bo‘lgan vektorlarning $\{x_\alpha\}$ sistemasi ushbu

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

shartni qanoatlantirsa, bu sistema *ortogonal sistema* deyiladi.

Har qanday ortogonal sistema chiziqli erklidir.

Haqiqatan, agar

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \dots + a_n x_{\alpha_n} = 0$$

bo‘lsa, u holda har qanday $x_{\alpha_i} (i = \overline{1, n})$ uchun ushbu munosabat $(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \dots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i})$ va $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ bo‘lgani uchun $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ tenglik kelib chiqadi.

To‘la ortogonal sistema (4.1-§) *ortogonal bazis* deyiladi. Agar shu sistemada har bir elementning normasi birga teng bo‘lsa, bu sistema *ortonormalangan bazis* yoki qisqacha *ortonormal bazis* deyiladi.

Misollar. 1. n o‘lchamli R^n fazoda

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

elementlarning skalyar ko‘paytmasini ushbu

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ko‘rinishda olsak, R^n Evklid fazosiga aylanadi.

Bu fazoda quyidagi elementlar ortonormal bazis hosil qiladi:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

2. l_2 fazoning elementlari ushbu

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklardir.

Bu fazoda skalyar ko‘paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

O‘ng tomondagi ifodaning chekliligi ushbu

$$2x_i y_i \leq x_i^2 + y_i^2$$

elementar tengsizlikdan kelib chiqadi.

Skalyar ko‘paytmaning xossalari osonlikcha tekshiriladi. Bu Evklid fazosida quyidagi vektorlar ortonormal bazis tashkil etadi:

$$e_1 = (1, 0, 0 \dots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0 \dots),$$

$$e_3 = (0, 0, 1 \dots).$$

.....

Ravshanki, bu sistema ortonormal. Biz uning to‘la ekanligini isbotlaymiz. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$ ixtiyoriy element va

$$x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

bo‘lsin. Bu holda $x^{(n)}$ ushbu e_1, e_2, \dots, e_n vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidir va

$$\|x - x^{(n)}\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Ya’ni $\{e_n\}$ sistemaning chiziqli yopilmasi l_2 ga tengdir.

Yuqoridagi misollarda biz ortogonal bazislardan mavjudligini ko‘rsatib o‘tdik. Quyidagi ikki teorema Evklid fazosida ortogonal bazisning mavjudligiga doirdir.

1-teorema. (ortogonallashtirish teoremasi). *E Evklid fazosida*

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \quad (2)$$

chiziqli erkli sistema berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots \quad (3)$$

sistema mavjud:

- 1) (3) sistema ortonormal,
- 2) har bir ϕ_n element f_1, f_2, \dots, f_n elementlarning chiziqli kombinatsiyasidir, ya’ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \dots + a_{nn}f_n;$$

- 3) har bir f_n element $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidir, ya’ni

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \dots + b_{nn}\phi_n \quad \text{âkä } b_{nn} \neq 0.$$

(3) sistemaning har bir elementi 1)—3) shartlar bilan bir qiymatli aniqlanadi (± 1 koeffitsientini hisobga olmaganda).

Isboti. ϕ_1 elementni ushbu $\phi_1 = a_{11}f_1$ ko‘rinishda olamiz. Bu ko‘rinishdagi a_{11} koeffitsient quyidagi munosabatlardan topiladi:

$$(\phi_1, \phi_1) = \|\phi_1\|^2 = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1.$$

Bundan

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}, \quad \phi_1 = \frac{\pm f_1}{\sqrt{f_1, f_1}}.$$

Shunday qilib, ϕ_1 elementning ishorasi hisobga olinmasa, u bir qiymatli aniqlanadi.

Endi $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$ elementlar topildi deb faraz qilaylik. U holda f_n elementni ushbu

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + \dots + b_{nn-1}\phi_{n-1} + h_n$$

ko‘rinishda olamiz; bu yerda $k < n$ bo‘lganda

$$(h_n, \phi_k) = 0.$$

Haqiqatan, b_{nk} koeffitsentlar va demak, h_n element ham quyidagi shartlardan bir qiymatli aniqlanadi:

$$\begin{aligned} (h_n, \phi_k) &= (f_n - b_{n1}\phi_1 - \dots - b_{nn-1}\phi_{n-1}, \phi_k) = \\ &= (f_n, \phi_k) - b_{nk}(\phi_k, \phi_k) = 0 \end{aligned}$$

Ravshanki, $(h_n, h_n) > 0$ (aks holda (2) sistema chiziqli bog‘liq bo‘lar edi). Endi ϕ_n elementni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\phi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$$

Natijada h_n va ϕ_n ham induksiya yordami bilan f_1, f_2, \dots, f_n orqali ifodalanadi, ya’ni

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n,$$

bu yerda $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$. Bundan tashqari,

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_n) &= 1, (\phi_n, \phi_k) = 0 \quad (k < n) \text{ va} \\ f_n &= b_{n1}\phi_1 + \dots + b_{nn}\phi_n, \left(b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0 \right). \end{aligned}$$

(2) sistemadan (3) sistemaga o‘tish amali *ortogonallashtirish protsessi* deyiladi. *Ta’rif.* E Evklid fazosi metrik fazo sifatida separabel bo‘lsa, E *separabel Evklid fazosi* deyiladi.

2-teorema. *Har qanday cheksiz o‘lchamli separabel Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.*

Istobi.

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$$

sanoqli, hamma yerda zich to‘plam bo‘lsin, deb faraz qilaylik. Bu sistemadan to‘la chiziqli erkli $\{f_n\}$ sistemani tanlab olamiz. Buning uchun, agar $\{\psi_n\}$ sistemadagi ψ_k element $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-1}$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lsa, uni bu sistemadan chiqarib tashlaymiz. Har bir k uchun shunday operatsiyani bajarsak, qolgan elementlar chiziqli erkli bo‘lib, sistema to‘laligicha qoladi. Endi shu to‘la chiziqli erkli sistemaga ortogonallashtirish protsessini qo‘llasak, ortonormal bazis hosil bo‘ladi.*

E Evklid fazosida

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \tag{3}$$

ortonormal sistema bo‘lsin. E fazoning ixtiyoriy f elementiga quyidagi sonli ketma-ketlikni mos qo‘yamiz:

$$c_k = (f, \psi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Bu sonlarni f elementning $\{\psi_k\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari yoki *Furye koeffitsientlari* deymiz. Ushbu

$$\sum_k c_k \psi_k \quad (4)$$

qatorni f elementning Furye qatori deymiz.

Endi biz shu (4) qatorning yaqinlashishi haqidagi masalani o‘rganamiz. Buning uchun $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k$ yig‘indining α_i , koeffitsientlari qanday bo‘lganda $\|f - S_n\|$ masofa minimal bo‘lishini tekshiramiz. (3) sistema ortonormal ekanligini hisobga olsak, ushbu

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= (f - S_n, f - S_n) = \left(f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k \right) = \\ &= (f, f) - 2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j \right) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2 \end{aligned}$$

tengliklar kelib chiqadi. Ravshanki, bu ifoda o‘zining minimal qiymatiga oxirgi yig‘indi nolga teng bo‘lgandagina ega bo‘ladi. Demak, ushbu

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

tenglik bajarilsa, quyidagi

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \quad (5)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, S_n yig‘indilar orasida f elementga norma ma’nosida eng yaqini bu Furye qatorining xususiy yig‘indisidir. $\|f - S_n\| \geq 0$ bo‘lgani uchun (5) formuladan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (6)$$

Bu yerda n ixtiyoriy bo‘lgani va $\|f\|$ son n ga bog‘liq bo‘lmagani uchun $\sum_{k=1}^\infty c_k^2$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Yuqoridagi tengsizlikda limitga o‘tsak, quyidagi Bessel tengsizligi kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 \leq \|f\|^2 \quad (7)$$

Ta’rif. Agar har qanday $f \in E$ element uchun quyidagi Parseval tengligi

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 = \|f\|^2 \quad (8)$$

bajarilsa, (3) sistema *yopiq sistema* deyiladi.

Agar (3) sistema yopiq bo‘lsa, u holda (5) ayniyatdan ko‘rinib turibdiki, har qanday f element Furye qatorining xususiy yig‘indilari f ga yaqinlashadi, ya’ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \psi_k \right\| = 0.$$

3-teorema. *Separabel Evklid fazosida har qanday to‘la ortonormal sistema yopiqdir, va aksincha, har bir yopiq ortonormal sistema to‘ladir.*

Izboti. Separabel E Evklid fazosida $\{\phi_n\}$ yopiq sistema berilgan bo'lsin. Har qanday $f \in E$ uchun uning Furye qatorining xususiy yig'indilari f ga yaqinlashadi, ya'ni $\{\phi_n\}$ sistemaning elementlarining chiziqli kombinatsiyalari E da zichdir, demak, $\{\phi_n\}$ - to'la sistema.

Aksincha, $\{\phi_n\}$ to'la sistema bo'lsin, demak, ixtiyoriy elementga ushbu $\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$ chiziqli kombinatsiyalar yordamida istalgan darajada yaqinlashish mumkin. Endi ushbu

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k \right\|$$

tengsizlikdan $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ qatorning f ga yaqinlashishi, ya'ni (8) Parseval tengligi kelib chiqadi.

4.3- §. Gilbert fazolari

E Evklid fazosini normalangan fazo siratida qarasak E to'la bo'lishi yoki bo'lmasligi mumkin. Agar E to'la bo'lmasa, uning to'ldiruvchisi bo'lgan Banax fazosini \hat{E} bilan belgilaymiz.

1-teorema. *Evklid fazosining to'ldiruvchisi ham Evklid fazosidir.*

Izboti: Bu teoremaning izboti metrik fazolarning to'ldiruvchisi haqidagi teoremaga o'xshashdir. E ning x va y elementlarini olamiz. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ E fazoning elementlaridan tuzilgan va mos ravishda x va y ga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bo'lsin. (x_n, y_n) sonli ketma-ketlikni ko'ramiz. Ushbu

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) - (x_m, y_m) &\leq |x_n - y_m| + |(x_n - x_m, y_m)| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \|y_m\| \end{aligned}$$

tengsizlikdan $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik ekanligi ko'rinish turibdi. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$ mavjud. Bu limit $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ketma-ketliklarga emas, balki faqat x va y elementlargagina bog'liqligi bevosita tekshiriladi. Endi \hat{E} da skalyar ko'paytmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n).$$

Bu ifodaning skalyar ko'paytma ekanligi E dagi skalyar ko'paytmaning 1) - 4) shartlaridan limitga o'tish natijasida kelib chiqadi. Masalan, 1) shart

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, x_n) = (y, x).$$

Shunga o'xshash

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n, x_n)} = \sqrt{(x, x)}$$

Demak, \hat{E} Evklid fazosidir.

Ta'rif. To'la Evklid fazosi *Gilbert fazosi* deyiladi.

H Gilbert fazosida $\{\varphi_n\}$ ortonormal sistema berilgan bo'lsin. Bessel tengsizligiga asosan $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sonlar biror $f \in H$ elementning Furye koeffitsientlari bo'lishi uchun $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ qator yaqinlashuvchi bo'lishi zarur.

Gilbert fazosida bu shart shu bilan birga kifoyadir. Boshqacha aytganda, quyidagi teorema o'rinni.

2-teorema (*Riss—Fisher teoremasi*). N Gilbert fazosida ixtiyoriy $\{\phi_n\}$ ortonormal sistema va $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ shartni qanoatlanuvchi $\{c_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda shunday $f \in H$ element mavjudki, c_k sonlar f ning Furye koeffitsientlaridir, ya'ni $c_k = (f, \phi_k)$ va

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2$$

Isboti. $f_n = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$ deb olamiz. Bu holda

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1} \phi_{n+1} + \dots + c_{n+p} \phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\{f_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir.

Demak, H to'la bo'lgani uchun $\{f_n\}$ biror $f \in H$ elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Ushbu

$$(f, \phi_i) = (f_n, \phi_i) + (f - f_n, \phi_i) \quad (1)$$

tenglikda $n \geq i$ bo'lsa, $(f_n, \phi_i) = c_i$ va

$$(f - f_n, \phi_i) \leq \|f - f_n\| \|\phi_i\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Demak, (1) tenglikning chap tomonidagi ifoda n ga bog'liq bo'lmagan uchun $n \rightarrow \infty$ da limingga o'tsak, 4.2-§, (5) tenglikka asosan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \left(f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \phi_k \right) = \|f - f_n\|^2 \rightarrow 0,$$

$$\text{ya'ni } (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 .*$$

Ko'p hollarda quyidagi teorema foydalidir.

3-teorema. Separabel H Gilbert fazosida ortonormal $\{\varphi_n\}$ sistema to'la bo'lishi uchun H da $\{\varphi_n\}$ sistemaning har bir elementiga ortogonal bo'lgan noldan farqli elementning mavjud emasligi zarur va kifoya.

Isboti. $\{\varphi_n\}$ to'la va, demak, 4.2-§ dagi 3-teoremaga asosan yopiq sistema bo'lsin deb faraz qilaylik. Agar f har bir $\{\varphi_n\}$ ga ortogonal bo'lsa, uning hamma Furye koeffitsientlari nolga tengdir. Parseval tengligiga asosan

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0 \text{ yoki } f = \theta.$$

Aksincha, agar $\{\varphi_n\}$ to‘la bo‘lmasa, shunday $g \neq 0$. topiladiki,

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (c_k = (g, \phi_k)).$$

Riss-Fisher teoremasiga asosan $(f, \phi_k) = c_k$ va $(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ shartlarni qanoatlantiruvchi f element topiladi. By holda har qanday ϕ_n uchun

$$(f - g, \phi_n) = (f, \phi_n) - (g, \phi_n) = c_k - c_k = 0,$$

ya’ni $f - g$ har bir ϕ_k ga ortogonal va

$$\|f\| = (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g) = \|g\|.$$

Demak, $f - g \neq 0$.

H_1, H_2 Evklid fazolari bo‘lib, $x \longleftrightarrow y (x \in H_1, y \in H_2)$ ular orasidagi chiziqli izomorfizm bo‘lsin (1.6- §). Bu izomorfizm ushbu

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2), x_1, x_2 \in H_1, y_1, y_2 \in H_2$$

xossaga ham ega bo‘lsa, u holda unga H_1 va H_2 Gilbert fazolari orasidagi izometrik izomorfizm deyiladi.

4-teorema. *Ixtiyoriy ikki cheksiz o‘lchamli separabel Gilbert fazosi o‘zaro izometrik izomorfdir.*

Isboti. Ravshanki, teoremani isbotlash uchun har qanday cheksiz o‘lchamli separabel Gilbert fazosining 4.2-§ 2- misoldagi l_2 fazoga izometrik izomorfligini ko‘rsatish kifoya. 4.2- § dagi 2-teoremaga asosan cheksiz o‘lchamli separabel H Gilbert fazosida $\{\varphi_n\}$ to‘la ortonormal sistema mavjud.

H ning har bir f elementiga shu elementning $\{\varphi_n\}$ ga nisbatan Furye koeffitsientlari $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ to‘plamini mos qo‘yamiz. So‘ngra

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) < \infty$$

bo‘lgani uchun $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ ketma-ketlik l_2 fazoning elementidir.

Aksincha, l_2 dagi ixtiyoriy $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementga Riss-Fisher teoremasiga asosan biror $f \in H$ element mos keladi va f ning Furye koeffitsientlari $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ ga teng.

Bu moslik o‘zaro bir qiymatlidir.

Agar

$$f \longleftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots), g \longleftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$$

mos qo‘yilsa, u holda, ravshanki,

$$f + g \longleftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots)$$

va

$$\alpha f \longleftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots)$$

Nihoyat, Parseval tengligidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$$

Haqiqatan,

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

va

$$\begin{aligned} (f + g, f + g) &= (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \end{aligned}$$

ya'ni

$$(f, f) + 2(f, g) + (g, g) = (f, f) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + (g, g)$$

va

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

4.4- §. Qism fazolar. Ortogonal to‘ldiruvchilar

Ravshanki, har qanday Gilbert fazosi normalangan fazodir. Gilbert fazosida ham qism fazo tushunchasi normalangan fazoning qism fazo tushunchasi kabi kiritiladi. Ya’ni Gilbert fazosida yopiq bo‘lgan vektor qism fazo Gilbert fazosining qism fazosi deyiladi.

Misollar.

1. H Gilbert fazosida h elementni olamiz. Shu elementga ortogonal bo‘lgan elementlar H ning qism fazosini tashkil qiladi. Bunday elementlar to‘plami vektor fazo hosil qilishi skalyar ko‘paytmaning 2), 3) shartlaridan, yopiqligi esa skalyar ko‘paytmaning uzlusizligidan kelib chiqadi.

2. l_2 Gilbert fazosining elementlari $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklardan iborat. Bu fazoda $x_1=0$ shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar qism fazo tashkil qiladi. Yoki, masalan, toq koordinatalari nolga teng bo‘lgan elementlar to‘plami ham l_2 ning qism fazosidir. Gilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosi ham Gilbert fazosidir. Agar H separabel bo‘lsa, u holda (2.5-§, 1-teoremagaga asosan) M ham separabel Gilbert fazosidir. Xususan, M da ham to‘la ortonormal sistema mavjud.

Quyidagi teorema Gilbert fazolari nazariyasida katta ahamiyatga ega.

1-teorema. H_1 to‘plam H Gilbert fazosining qism fazosi bo‘lsin. Ixtiyoriy x element

$$x = x' + x'' \quad (x' \in H_1, x'' \in H_1^\perp) \tag{1}$$

ko‘rinishda bir qiymatli yoziladi. Bu yerda x' element quyidaga xossaga ega:

$$\|x - x'\| = \rho(x, x') = \rho(x, H_1) = \inf \{ \rho(x, x_1) : x_1 \in H_1 \} \tag{2}$$

Izboti. H_1 to‘plamdan x elementgacha bo‘lgan masofani d bilan belgilaymiz, ya’ni
 $d = \rho(x, H_1)$

Ixtiyoriy n son uchun ushbu

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $x_n \in H_1$ elementni olamiz. 4.2- § dagi 2) xossaga binoan (parallelogramm formulasi):

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 &= \\ &= 2 \left[\|x - x_n\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

So‘ngira $\frac{x_n + x_m}{2}$ element H_1 ga tegishli bo‘lgani uchun

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2.$$

Bu munosabatdan, (4) va (5) munosabatlarni hisobga olsak, ushbu

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2 \left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi ko‘rinadi, ya’ni $\{x_n\}$ - fundamental ketma-ketlik.

H to‘la bo‘lgani uchun $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ element mavjud. H_1 yopiq, demak, $x' \in H_1$. (4)

tengsizlikda limitga o‘tsak, $\|x - x'\|^2 \leq d^2$, ya’ni $\|x - x'\| \leq d$ kelib chiqadi.

Demak, $\|x - x'\| = d$.

Endi y element H_1 ga tegishli bo‘lsin. Ixtiyoriy λ son uchun $x' + \lambda y \in H_1$ demak,

$\|x - x' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq d^2$ ya’ni, agar $x'' = x - x'$ belgilash kiritsak,

$$-\lambda(x'', y) - \lambda(y, x'') + |\lambda|^2 (y, y) \geq 0$$

Xususan $\lambda = (x'', y) / (y, y)$ bo‘lganda

$$-\frac{|x'', y|^2}{(y, y)} - \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geq 0$$

ya’ni $|(x'', y)|^2 \leq 0$. Demak, $(x'', y) = 0$ va $x'' \perp y$, ya’ni $x'' \in H_1^\perp$. Shu bilan (1) isbotlanadi. Nihoyat, (1) ko‘rinishda ifodalash yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$x = x'_1 + x''_1 \quad (x'_1 \in H_1, x''_1 \in H_1^\perp)$$

bo‘lsa, u holda $x' - x'_1 = x''_1 - x''$. Ya’ni H_1 ning elementi bo‘lmish $x' - x'_1$ element H_1^\perp ning $x''_1 - x''$ elementiga teng, demak, u o‘z-o‘ziga ortogonal, ya’ni $x' - x'_1 = x''_1 - x'' = 0$.*

Isbotlangan 1-teoremadagi x' va x'' elementlar x elementning mos ravishda H_1 va H_1^\perp fazolarga proeksiyalari deyiladi. x elementga x' elementni mos qo‘yuvchi

$P_{H_1} : H \rightarrow H_1$ aks ettirish H_1 ga *proektor* deyiladi (ya’ni $P_{H_1}(x) = x_1$). Ravshanki, P_{H_1} — chiziqli operator.

1-natija. Ixtiyoriy M qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisi ortogonal to‘ldiruvchisi M ning o‘ziga teng, ya’ni

$$(M^\perp)^\perp = M.$$

Shunday qilib, M va M^\perp o‘zaro ortogonal to‘ldiruvchi qism fazolardir.

Agar $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik M dagi to‘la ortogonal sistema, $\{\phi'_n\}$ esa M^\perp dagi to‘la ortogonal sistema bo‘lsa, u holda bu to‘plamlarning yig‘indisi H da to‘la ortogonal sistema hosil qiladi. Demak, M dagi ixtiyoriy ortogonal sistema H da to‘la bo‘lgan ortogonal sistemagacha kengaytirilishi mumkin.

Agar ixtiyoriy $f \in H$ element $f = h_1 + h_2$ ($h_1 \in M$, $h_2 \in M^\perp$) ko‘rinishda yozilishi mumkin bo‘lsa, u holda H o‘zaro ortogonal bo‘lgan M va M^\perp qism fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi deyilib,

$$H = M \oplus M^\perp \quad (6)$$

ko‘rinishda yoziladi.

To‘g‘ri yig‘indi tushunchasi ixtiyoriy chekli yoki soni sanoqli qism fazolar uchun ham kiritilishi mumkin.

Ta’rif. H Gilbert fazosining

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

qism fazolari berilgan bo‘lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) Har qanday M_i va M_j ($j \neq i$) fazolar o‘zaro ortogonal, ya’ni M_i ning ixtiyoriy elementi M_j ning ixtiyoriy elementiga ortogonal;

2) H ning ixtiyoriy f elementi ushbu

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, h_n \in M_n \quad (7)$$

ko‘rinishda yoyiladi (agar M_n larning soni cheksiz bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty$ shart talab qilinadi). Bu holda H o‘zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi deyiladi va $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ ko‘rinishda yoziladi.

f elementning (7) ko‘rinishda yoyilishi yagonadir.

Darhaqiqat, agar $f = h'_1 + h'_2 + \dots + h'_n + \dots$ ning boshqa bir yoyilishi bo‘lsa, u holda

$$0 = f - f = (h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) + \dots + (h_n - h'_n) + \dots$$

Ixtiyoriy n uchun $h_n - h'_n$ element M_n ga tegishli. Shuning uchun yuqoridagi tenglikni $h_n - h'_n$ ga skalyar ko‘paytirsak, ushbu

$$0 = (h_n - h'_n, h_n - h'_n)$$

tenglik hosil bo‘ladi, bundan $h_n - h'_n = 0$, ya’ni ixtiyoriy n uchun

$$h_n = h'_n.$$

To‘g‘ri yig‘indining xocsalaridan $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$ tenglik ham osonlikcha kelib chiqadi.

Shunga o‘xhash, sonli chekli yoki sanoqli Gilbert fazolarning to‘g‘ri yig‘indisi tushunchasini kiritish mumkin.

H_1, h_2 Gilbert fazolari bo‘lsin. Ularning to‘g‘ri yig‘indisi bo‘lgan H Gilbert fazosi quyidagicha kiritiladi.

H ning elementlari (h_1, h_2) ko‘rinishdagi juftliklardan iborat ($h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$). H da skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritiladi:

$$((h_1, h_2), (h'_1, h'_2)) = (h_1, h'_1) + (h_2, h'_2).$$

Bunday aniqlangan H fazo Gilbert fazosini hosil qilishi bevosita tekshiriladi. Agar

$$H'_1 = \{(h_1, 0) : h_1 \in H_1\}, \quad H'_2 = \{(0, h_2) : h_2 \in H_2\}$$

ko‘rinishda olinsa, u holda H'_1 va H'_2 o‘zaro ortogonal bo‘lgan H ning qism fazolari bo‘lib, $H'_1 \cong H_1, H'_2 \cong H_2$ izometrik izomorfizmlar o‘rinlidir. Ravshanki,

$$H = H'_1 + H'_2$$

Shunga o‘xhash, soni chekli yoki soni sanoqli $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ Gilbert fazolarining to‘g‘ri yig‘idisi aniqlanadi:

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

H ning elementlari deb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty, \quad h_n \in H_n$$

shartni qanoatlantiruvchi $(h_1, h_2, \dots, h_n, \dots)$ ketma-ketliklarga aytildi. So‘ngira

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \quad h_n \in H_n$$

va

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_n, \dots), \quad g_n \in H_n$$

elementlarning skalyar ko‘paytmasi ushbu

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n)$$

ko‘rinishda kiritiladi.

4.5- §. Kompleks Evklid fazolari

Haqiqiy Evklid fazolari bilan bir qatorda kompleks Evklid fazolarini ham (ya’ni skalyar ko‘paytmasi kompleks son bo‘lgan vektor fazolarni) qarash mumkin.

Ta’rif. E kompleks vektor fazoda quyidagi to‘rt shartni qanoatlantiruvchi kompleks qiymatli (x, y) funksiya kiritilgan bo‘lsa, E *kompleks Evklid fazosi* deyiladi:

- 1) $(x, y) = (\overline{y}, \overline{x})$;
- 2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, bu yerda $\bar{\lambda}$ son λ ga qo‘shma kompleks son;
- 3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
- 4) $(x, x) \geq 0$ va $x \neq \theta$ bo‘lsa, $(x, x) > 0$.

Yuqoridagi 1) va 2) xossalardan

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$$

kelib chiqadi. Haqiqatan

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y).$$

Misollar.

1. n o'lchamli C^n kompleks fazoda

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

ko'rinishda kirtsak, C^n Evklid fazosi bo'ladi.

2. L_2 kompleks fazo. Uning elementlari ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi kompleks sonlar ketma-ketliklaridan iborat.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ va } y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$$

elementlarning skalyar ko'paytmasi ushbu

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

ifoda bilan aniqlanadi.

3. $L_2[a, b]$ kompleks fazo $[a, b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi kompleks funksiyalar fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha olinadi:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4. $L_2(D)$ kompleks fazo. $D = [a, b] \times [a, b]$ to'plamda kvadrati bilan jamlanuvchi ikki haqiqiy o'zgaruvchili kompleks qiymatli funksiyalar fazosini $L_2(D)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$(f(t, s) \in L_2(D)) \Leftrightarrow \left(\int_a^b \int_a^b |f(t, s)|^2 dt ds < \infty \right).$$

Bu fazoda skalyar ko'paytma 3- misoldagidek kiritiladi:

$$(f, g) = \int_a^b \int_a^b f(t, s) \overline{g(t, s)} dt ds.$$

$L_2[a, b]$ va $L_2(D)$ fazolarda to'la ortonormal sistemalarni o'rganadigan bo'lsak, ular orasida quyidagi bog'lanish bor.

Agar $\{\psi_n(t)\}$ sistema $L_2[a, b]$ fazoda to'la ortonormal bo'lsa, u holda $\{\phi_{n,m}(t, s)\} = \{\psi_n(t)\psi_m(s)\}$ sistema $L_2(D)$ fazoda to'la va ortonormal bo'ladi.

Darhaqiqat,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b \phi_{n,m}(t,s) \overline{\phi_{k,l}(t,s)} dt ds = \\
&= \int_a^b \int_a^b \psi_n(t) \psi_m(s) \overline{\psi_k(t)} \overline{\psi_l(s)} dt ds = \\
&= \int_a^b \psi_n(t) \overline{\psi_k(t)} dt \int_a^b \psi_m(s) \overline{\psi_l(s)} ds = \\
&= \begin{cases} 1, & \text{agar } k = n, m = l \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{aks holda,} \end{cases}
\end{aligned}$$

ya'ni $\{\phi_{n,m}(t,s)\}$ - ortonormal sistema.

Biror $f(t,s) \in L_2(D)$ funksiya hamma $\{\phi_{n,m}(t,s)\}$ funksiyalarga ortogonal bo'lsa, u holda ixtiyoriy m, n uchun

$$\int_a^b \int_a^b f(t,s) \overline{\psi_n(t)} \overline{\psi_m(s)} dt ds = 0$$

ya'ni

$$\int_a^b \overline{\psi_m(s)} \left(\int_a^b f(t,s) \overline{\psi_n(t)} dt \right) ds = 0$$

Demak,

$$f_0(s) = \int_a^b f(t,s) \overline{\phi_n(t)} dt \in L_2[a,b]$$

funksiya hamma $\{\psi_m(s)\}$ funksiyalarga ortogonal. Bu sistema to'la bo'lgani sababli $f_0(s) = 0$, ya'ni deyarli barcha $s_0 \in [a,b]$ uchun

$$\int_a^b f(t,s_0) \overline{\psi_n(t)} dt = 0$$

Yana $\{\psi_n(t)\}$ sistemaning to'la ekanligidan foydalansak, deyarli barcha $s_0 \in [a,b]$ uchun $f(t,s) = 0$ funksiya t ga nisbatan deyarli hamma yerda aynan nolga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(t,s_0) = 0$. Bu esa $\{\phi_{n,m}(t,s)\}$ sistemaning to'laligini bildiradi.

Kompleks Evklid fazosida elementning normasi haqiqiy Evklid fazosidagi kabi kiritiladi:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

Elementlarning ortogonalligi tushunchasi ham odatdagidek kiritiladi, ya'ni $(x, y) = 0$ bo'lsa, x va y o'zaro orthogonal elementlar deyiladi.

E kompleks Evklid fazosida $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik ortonormal sistema bo'lsin, ya'ni

- 1) $(\phi_i, \phi_j) = 0 \quad i \neq j,$
- 2) $\|\phi_i\| = 1, \quad i = 1, 2, \dots$

Agar $f \in E_i$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda

$$c_n = (f, \phi_n)$$

lar f elementning $\{\phi_n\}$ sistemaga nisbatan *Furye koeffitsientlari* deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

ifoda f elementning *Furye qatori* deyiladi. Haqiqiy fazolarga o‘xshash, kompleks fazolar uchun ham Bessel tengsizligi o‘rinlidir, ya’ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq (f, f).$$

To‘la kompleks Evklid fazosi *Gilbert fazosi* deyiladi.

Quyidagi teorema 4.3- § dagi 4-teoremaga o‘xshash isbotlanadi.

1-teorema. Ixtiyoriy ikki cheksiz o‘lchamli separabel kompleks Gilbert fazosi izometrik izomorfdir.

Mashq uchun masalalar

1. Normaning quyidagi xossalarni isbotlang:

$$1) \|x + y\| \geq \|x\| - \|y\|;$$

2) $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ bo‘lsa (ya’ni x_n ketma-ketlik x elementga norma bo‘yicha yaqinlashsa),

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\|$$

munosabatni isbotlang.

2. V Banax fazosida M qism fazo berilgan bo‘lsin (ya’ni M yopiq vektor qism fazo). $V_0 = V/M$ faktor fazoda normani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|, \quad \xi - \text{ekvivalentlik sinfi.}$$

Bu formula bilan aniqlangan funksionalning norma ekanligini va V_0 fazo shu normaga nisbatan to‘la ekanligini isbotlang.

3. Haqiqiy funksiyalarning $L_2[0,1]$ sinfi deb, $[0,1]$ segmentda kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar to‘plamiga aytildi.

a) Ushbu Bunyakovskiy-Shvarts tengsizligini isbotlang:

$$\left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| \leq \left\{ \left[\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right] \left[\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right] \right\}^{\frac{1}{2}};$$

b) $L_2[0,1]$ fazoda odadagi algebraik amallarni va ushbu

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

skalyar ko‘paytmani kirtsak, bu fazo Evklid fazosiga aylanishini isbotlang;

c) $L_2[0,1]$ Evklid fazosida ortogonal bo‘lgan ikki elementga misol keltiring;

d) Ushbu $f(x) = x^\alpha$ funksiya α sonning qanday qiymatlarida $L_2[0,1]$ fazoga tegishli bo‘лади?

4. Normalangan V haqiqiy fazoda ushbu tenglik bajarilsin:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2],$$

Quyidagicha aniqlangan funksiyani skalyar ko‘paytma ekanligini isbotlang:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

5. Separabel bo‘limgan Gilbert fazosiga misol keltiring.

6. Separabel bo‘limgan Gilbert fazosida ham to‘la ortonormal sistema mavjudligini isbotlang.

7. H Gilbert fazosida $\{\phi_\alpha\}$ to‘la ortonormal sistema bo‘lsin. Ixtiyoriy $f \in H$ element uchun ushbu

$$f = \sum_{\alpha} (f, \phi_{\alpha}) \phi_{\alpha}, \quad \|f\|^2 = \sum_{\alpha} (f, \phi_{\alpha})^2$$

tengliklar o‘rinli ekanligini isbotlang (bu yerdagi yig‘indilarda noldan farqli elementlarning soni chekli yoki sanoqlidir).

8. L_2 Gilbert fazosida quyidagi qism fazoni olamiz:

$$M_k = \{x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_1 = a_2 = \dots = a_k\}.$$

M_k^\perp -qism fazoni toping.

9. $L_2[0,1]$ Gilbert fazosida o‘zgarmas funksiyalardan hosil bo‘lgan qism fazoning ortogonal to‘ldiruvchisini toping.

10. Gilbert fazosida uzlusiz chiziqli f funksionalni olib, quyidagi to‘plamni tuzamiz:

$$V_0 = \{x \in V : f(x) = 0\}.$$

a) V_0 Gilbert fazosi ma’nosida qism fazo ekanligini isbotlang;

b) V_0^\perp -qism fazoning o‘lchamini toping.

11. $L_2[a,b]$ kompleks fazoda skalyar ko‘paytmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

a) skalyar ko‘paytmaning xossalari ni isbotlang.

b) $C^2[a,b]$ Evklid fazosi $L_2[a,b]$ fazoning yopiq bo‘limgan qism fazosi ekanligini isbotlang.

12. Separabel Gilbert fazosi bir o‘lchamli qism fazolarining to‘g‘ri yig‘indisi bo‘lishini ko‘rsating.

13. Separabel Gilbert fazosida sanoqli, lekin to‘la bo‘limgan ortogonal sistema quring.

14. Separabel Gilbert fazosida M ham, M^\perp ham cheksiz o‘lchamli bo‘lgan qism fazo mavjudligini isbotlang.

15. $C[a,b]$ fazoda uning normasini hosil qiluvchi skalyar ko‘paytma mavjud emasligini isbotlang.

V BOB. TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLAR

5.1-§. Topologik vektor fazoning ta’rifi va ba’zi xossalari

E kompleks yoki haqiqiy sonlar maydoni K ustidagi vektor fazo va τ undagi topologiya bo’lsin.

Ta’rif. (E, τ) juftlik topologak vektor fazo deyiladi, agar $x+y$ va $\lambda \cdot x$ algebraik amallar $x, y \in E, \lambda \in K$ o’zgaruvchilar bo‘yicha birgalikda τ topologiyaga nisbatan uzlusiz bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $x, y \in E$ va $\lambda \in K$ uchun:

- 1) $x+y$ nuqtaning har bir $U(x+y)$ atrofi uchun x va y ning mos ravishda shunday $U(x)$ va $U(y)$ atroflari mavjudki, ular uchun $U(x)+U(y) \subset U(x+y)$ munosabat o‘rinli;
- 2) λx nuqtaning ixtiyoriy $U(\lambda x)$ atrofi uchun x ning shunday $U(x)$ atrofi va shunday $r>0$ son mavjudki, $|\beta - \lambda| < r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha β sonlar uchun $\beta U(x) \subset U(\lambda x)$ munosabat o‘rinli.

Topologik vektor fazoning topologiyasi *vektor topologiya* deyiladi. (E, τ) topologik vektor fazo bo’lsin. Har bir $a \in E$ va $\lambda \in K, \lambda \neq 0$ uchun $f_a(x) = x+a$ va $g_\lambda(x) = \lambda x$ ko‘rinishda aniqlangan $f_a : E \rightarrow E$ va $g_\lambda : E \rightarrow E$ aks ettirishlarni olamiz.

1-teorema. f_a va g_λ aks ettirishlar (E, τ) ni o‘zini o‘ziga gomeomorf aks ettiradi.

Isboti. Vektor fazoning ta’rifiga ko‘ra, f_a va g_λ aks ettirishlar o‘zaro bir qiyamatlidir. So‘ngra f_a uchun teskari aks ettirish f_{-a} , g_λ uchun esa $g_{\frac{1}{\lambda}}$ teskari aks ettirish bo‘ladi.

Topologik vektor fazoda algebraik amallarning uzlusizligidan $f_a, g_\lambda, f_{-a}, g_{\frac{1}{\lambda}}$ aks ettirishlarning uzlusizligi kelib chiqadi. Demak, f_a ham, g_λ ham gomeomorfizmdir.

Bu tasdiqdan kelib chiqadiki, agar $\Sigma = \{U\}$ sistema (E, τ) topologik vektor fazodagi nolning atroflari sistemasi bazisi bo‘lsa, u holda $\sum_a = \{a+U : U \in \Sigma\}$ sistema (E, τ) fazodagi a nuqtaning atroflari sistemasi uchun bazis bo‘ladi. Demak, topologik vektor fazoning topologiyasi 3.2-§ dagi 2-teoremaga asosan nolning atroflari sistemasining bazisi bilan to‘la aniqlanar ekan.

2-teorema. Agar (E, τ) topologik vektor fazodagi $\Sigma = \{U\}$ nolning atroflari sistemasi uchun bazis bo‘lsa, u holda

- 1) har bir U yutuvchi to‘plam;
- 2) har bir $U \in \Sigma$ uchun shunday $V \in \Sigma$ mavjudki, $V+V \subset U$;
- 3) nolning shunday muvozanatlashgan W atrofi mavjudki, $W \subset U$ bo‘ladi.

Isboti. 1) $a \in E$ va $f(\lambda) = \lambda a, \lambda \in K$ bo‘lsin. U holda $f : K \rightarrow E$ aks

ettirish $\lambda=0$ nuqtada uzlusiz bo‘lgani tufayli ixtiyoriy $U \in \Sigma$ uchun $0 \in K$ ning shunday $\{\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon\}$ atrofi mavjudki, uning faks ettirishdagi tasviri U ning qismi bo‘ladi, ya’ni agar $|\lambda| \leq \varepsilon$ bo‘lsa, $\lambda a \in U$ bo‘ladi.

Bundan, agar $|\mu| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik bajarilsa, $a \in \mu U$ ekanligi kelib chiqadi;

2) $g(x, y) = x + y$; ($g : E \times E \rightarrow E$) aks ettirish $(x, y) = (\theta, \theta)$ nuqtada uzlusiz bo‘lgani tufayli ixtiyoriy $U \in \Sigma$ uchun nolning shunday V_1 va V_2 atroflari mavjudki, agar $x \in V_1$ va $y \in V_2$ bo‘lsa, u holda $x + y \in U$.

3.2-§, 2-teoremaga asosan nolning shunday $V \in \Sigma$ atrofi mavjudki, $V \subset V_1 \cap V_2$ bo‘ladi, bundan esa $V + V \subset U$ ekanligi kelib chiqadi;

3) Ushbu $h(\lambda, x) = \lambda x$ ($h : K \times E \rightarrow E$) aks ettirish $(0, \theta)$ nuqtada uzlusiz bo‘lgani uchun nolning shunday $V \in \Sigma$ atrofi va $\varepsilon > 0$ son mavjudki, $|\lambda| \leq \varepsilon$ va $x \in V$ shartlarni qanoatlantiruvchi λ va x uchun $\lambda x \in U$, ya’ni $\lambda V \subset U$. So‘ngra W sifatida ushbu $W = \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V$ to‘plamni olamiz. Ravshanki, W nolning atrofi va $W \subset V$.

Ixtiyoriy $x \in W$ uchun shunday $\lambda(|\lambda| \leq \varepsilon)$ topiladiki, $x \in \lambda V$. Bundan ixtiyoriy $t \in E$ uchun $tx \in t\lambda V$. Endi, agar $|t| \leq 1$ bo‘lsa, u holda $|\lambda t| \leq \varepsilon$, va demak, $tx \in \mu V$, bu yerda $|\mu| \leq \varepsilon$. Shunday qilib, $tx \in \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda V = W$, ya’ni W to‘plam nolning $W \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi muvozanatlashgan atrofi ekan.

Natija. Har bir topologik vektor fazoda nolning atroflari sistemasining muvozanatlashgan atroflardan iborat bazisi mavjuddir.

Ta’rif. Agar topologik vektor fazoda nolning atroflari sistemasining qavariq atroflardan iborat bazisi mavjud bo‘lsa, bunday topologik vektor *fazo lokal qavariq fazo* deyiladi.

3-teorema. *Lokal qavariq fazoda nolning atroflari sistemasining quyidagi xossalarga ega bo‘lgan Σ bazisi mavjuddir:*

1) ixtiyoriy $U \in \Sigma$ va $V \in \Sigma$ uchun shunday $W \in \Sigma$ mavjudki, $W \subset U \cap V$;

2) agar $U \in \Sigma$ bo‘lsa, barcha $\lambda \neq 0$ uchun $\lambda U \in \Sigma$;

3) har bir $U \in \Sigma$ absolyut qavariq va yutuvchi to‘plamdir.

Aksincha, agar E vektor fazoda uning qism to‘plamlaridan iborat va 1) — 3) shartlarni qanoatlantiruvchi bo‘sh bo‘lmagan Σ sistema berilgan bo‘lsa, u holda E da shunday topologiya mavjudki, bu topologiyada E lokal qavariq fazo bo‘lib, Σ esa undagi nolning atroflari sistemasini uchun bazisni tashkil etadi.

Isboti. E lokal qavariq fazo bo‘lgani uchun unda nolning qavariq atroflaridan iborat Σ bazis mavjud. Faraz qilaylik, $U \in \Sigma$ ana shunday atroflardan biri bo‘lsin. Ushbu $W = \bigcap_{|\mu|=1} \mu U \subset U$ to‘plam nolning absolyut qavariq atrofi ekanligini isbotlaymiz.

2-teoremadan har bir $U \in \Sigma$ uchun nolning muvozanatlashgan $V \subset U$ atrofi mavjudligi kelib chiqadi. Bundan $\mu V \subset \mu U$ munosabat barcha $|\mu|=1$

uchun o‘rinli. Ammo V muvozanatlashgan atrof bo‘lgani uchun $\mu V = V$. Demak, $V \subset \bigcap_{|\mu|=1} \mu U = W$ va demak, W nolning atrofi ekan. Har bir μU qavariq to‘plam ekanligidan W ning ham qavariqligi kelib chiqadi. Endi W ning muvozanatlashgan to‘plam ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni barcha $\lambda (|\lambda| \leq 1)$ uchun $\lambda W \subset W$ munosabatni isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in V$ element va $\lambda (|\lambda| \leq 1)$ sonni olamiz. Ma’lumki, bunday kompleks sonni $\lambda = rt (0 \leq r \leq 1, |t| = 1)$ ko‘rinishda yozish mumkin. U holda W qavariq bo‘lgani uchun $rx = rx + (1-r)\theta \in W = \bigcap_{|\mu|=1} \mu U$, ya’ni ixtiyoriy $\mu (|\mu|=1)$ son uchun $rx \in \mu U$. Endi $|t^{-1}\mu|=1$ munosabatni hisobga olsak, $rx \in t^{-1}\mu U$, bundan $\lambda x = t \cdot r \cdot x \in \mu U$. Olingan $\mu (|\mu|=1)$ ixtiyoriy bo‘lgani sababli $\lambda x \in \bigcap_{|\mu|=1} \mu U = W$.

Shunday qilib, W to‘plam U ning ichida joylashgan nolning bir vaqtida ham qavariq, ham muvozanatlashgan, ya’ni absolyut qavariq atrofi ekan. Bundan lokal qavariq fazolarda nolning absolyut qavariq atroflaridan iborat Σ bazisi mavjud ekanligi kelib chiqadi. Ushbu $\Sigma' = \{\lambda V : \lambda \neq 0, V \in \Sigma\}$ sistemani olsak, u ham nolning atroflari sistemasi uchun absolyut qavariq atroflardan iborat va 2) shartni qanoatlantiruvchi bazis bo‘ladi. Σ' bazis bo‘lgani sababli 1) shart o‘rinlidir. Σ' ning tuzilishidan uning 3) shartni ham qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Aksincha, endi sistema 1)-3) shartlarni qanoatlantirsin deb faraz qilaylik.

Ushbu $\Xi = \{V \subset E : \text{biror } U \in \Sigma \text{ uchun } U \subset V\}$ sistemani olamiz. U holda $\Sigma_a = \{a + V : V \in E\}$ sistema $a \in E$ nuqtaning atroflari sistemasining 1) - 4) xossalari qanoatlantiradi (3.2-§). Haqiqatan ham 1) - 3) shartlarning bajarilishi ravshan. 4) shartning bajarilishini tekshiramiz. Agar $a + V \in \Sigma_a$ bo‘lsa, u holda

shunday $U \in \Sigma$, mavjudki, $U \subset V$ o‘rinli, bundan esa barcha $b \in a + \frac{1}{2}U$ uchun

$a + V \in \Sigma_b$ ekanligi kelib chiqadi, chunki $b + \frac{1}{2}U \subset a + U \subset a + V$. Demak, 4)

xossa isbotlandi. Shunday qilib, E fazoda $a \in E$ nuqtaning Σ_a atroflari sistemasi bilan aniqlangan τ topologiya mavjuddir. Nihoyat, shu topologiyaning vektor topologiya ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy

$$U \in \Sigma, x, y \in E \text{ uchun } \left(x + \frac{1}{2}U \right) + \left(y + \frac{1}{2}U \right) \subset x + y + U$$

munosabat o‘rinli ekanligidan qo‘shish amalining uzluksizligi kelib chiqadi.

Endi λx ko‘paytmaning uzluksizligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $a \in E$, $\alpha \in K$ va $U \in \Sigma$ ni olamiz. U yutuvchi to‘plam bo‘lgani uchun shunday $\mu > 0$ mavjudki,

$a \in \mu U$ bo‘ladi. So‘ng $0 < 2\eta < \frac{1}{\mu}$ shartni qanoatlantiruvchi η va

$0 < 2\delta < \frac{1}{|\alpha| + \eta}$ shartni qanoatlantiruvchi δ sonlarni tanlaymiz. Ushbu

$|\lambda - \alpha| < \eta$ va $x \in a + \delta U$ shartlarni qanoatlantiruvchi λ son va $x \in E$ uchun

$$\lambda x - \alpha a = \lambda(x - a) + (\lambda - \alpha)a \in \delta(|\alpha| + \eta)U + \eta\mu U \subset U$$

ya'ni skalyarga ko'paytirish amali ham uzlusizdir.*

4-teorema. *Topologik vektor fazoda qavariq to'plamning yopilmasi qavariq, muvozanatlashgan to'plamning yopilmasi esa muvozanatlashgan bo'ladi.*

Iloboti. A qavariq to'plam bo'lsin. Nolning har bir U atrofi uchun 2-teoremaga asosan muvozanatlashgan shunday V atrofi mavjudki, $V + V \subset U$. Biror $a, b \in \bar{A}$ nuqtalarni olsak, u holda $x \in A \cap (a + V)$ va $y \in A \cap (b + V)$ nuqtalar mavjud. A to'plam qavariq bo'lgani tufayli ixtiyoriy r ($0 < r < 1$) son uchun

$$\begin{aligned} rx + (1 - r)y &\in [rA + (1 - r)A] \cap [ra + (1 - r)b + rV + \\ &+ (1 - r)V] \subset A \cap [ra + (1 - r)b + V + V] \subset A \cap (ra + (1 - r)b + U). \end{aligned}$$

Demak, ixtiyoriy U uchun

$$(r \cdot a + (1 - r)b + U) \cap A \neq \emptyset,$$

ya'ni $ra + (1 - r)b \in \bar{A}$. Muvozanatlashgan to'plam uchun ham isbot shunga o'xshash bo'ladi.*

1-natija. Topologik vektor fazoda abvolyut qavariq to'plamning yopilmasi ham absolyut qavariqdir.

2-natija. Topologik vektor fazoda nolning atroflari sistemasining yopiq muvozanatlashgan atroflardan iborat bazisi mavjuddir; lokal qavariq fazolarda esa nolning atroflari sistemasining yopiq absolyut qavariq atroflardan iborat bazisi mavjuddir.

Iloboti. Σ nolning muvozanatlashgant atroflaridan tashkil topgan bazis bo'lsin. $\Xi = \{\bar{U} : U \in \Sigma\}$ sistemani olamiz. 4-teoremadan Ξ nolning yopiq muvozanatlashgan atroflari sistemasini ekanligi kelib chiqadi. Endi Ξ nolning barcha atroflari sistemasini uchun bazis tashkil etishini isbotlaymiz. U nolning ixtiyoriy atrofi bo'lsin. U holda shunday $V \in \Sigma$ mavjudki, $V + V \subset U$ bo'ladi. Endi, agar $x \in \bar{V}$ bo'lsa, unda $(x + V) \cap V \neq \emptyset$ munosabat o'rinni va shuning uchun $x \in V - V = V + V \subset U$, ya'ni $\bar{V} \subset U$. Demak, Ξ nol atroflarining bazisidir. Fazo lokal qavariq bo'lgani holda Σ sifatida 3-teoremadagi bazisni olsak, 4-teoremaning 1-natijasiga ko'ra har bir $U \in \Sigma$ uchun \bar{U} absolyut qavariqdir; qolgan xossalalar esa osonlikcha ko'rsatiladi.*

5-teorema. *Σ sistema E topologsh vektor fazodagi nolning atroflari sistemasining bazisi bo'lsin. E ning Xausdorf fazosi bo'lishi uchun $\bigcap_{U \in \Sigma} U = \{\theta\}$*

shart bajarilishi zarur va kifoyadir.

Iloboti. Agar E Xausdorf fazosi va $x \neq \theta$ bo'lsa, shunday $U \in \Sigma$ mavjudki, $x \in \bar{U}$ bo'ladi, ya'ni $\bigcap_{U \in \Sigma} U = \{\theta\}$ shart bajariladi. Aksincha, $\bigcap_{U \in \Sigma} U = \{\theta\}$ bo'lsin.

Ixtiyoriy $x \neq y$ uchun $x - y \neq \theta$ demak, shunday $U \in \Sigma$ mavjudki, $x - y \in \bar{U}$ munosabat qanoatlantiriladi. So'ng $V + V \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi

muvozanatlashgan $V \in \Sigma$ atrofnı olamız. U holda $(x+V) \cap (y+V) = \emptyset$. Darhaqiqat, agar $z \in (x+V) \cap (y+V)$ element mavjud bo'lsa edi, u holda $x-y = (z-y)-(z-x) \in V-V = V+V \subset U$ bo'lar edi. Bu esa $x-y \notin U$ munosabatga zid. Shunday qilib, E Xausdorf fazosidir.*

5.2-§. Yarimnormalar

E vektor fazodagi *yarimnorma* deb, E da aniqlangan va quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi $p : E \rightarrow R$ haqiqiy funksiyaga aytildi:

- (1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ barcha $\alpha \in K$ va $x \in E$ uchun;
- (2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ barcha $x, y \in E$ uchun (yarim additivlik).

Agar ixtiyoriy $x \neq \theta$ uchun $p(x) > 0$ bo'lsa, ravshanki, p - normadir.

1-teorema. p funksiya E vektor fazodagi *yarimnorma* bo'lsin. U holda

- 1) $p(\theta) = 0$;
- 2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ barcha $x, y \in E$ uchun;
- 3) $p(x) \geq 0$ barcha $x \in E$ uchun;
- 4) $\{x : p(x) = 0\}$ to'plam E ning vektor qism fazosi bo'ladi;
- 5) $V = \{x : p(x) < 1\}$ to'plam absolyut qavariq va yutuvchidir.

Isboti. 1) xossa $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ shartdan $\alpha = 0$ bo'lganda kelib chiqadi;

2) p ning yarimnorma ekanligidan $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$, ya'ni $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Shunga o'xshash, $p(y-x) \geq p(y) - p(x)$ tengsizlik ham o'rinni. $p(x-y) = p(y-x)$ bo'lgani uchun yuqoridagilardan $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ tengsizlik kelib chiqadi;

3) agar 2) xossada $y=\theta$ deb olsak, $p(x) \geq |p(x)| \geq 0$ tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $\forall x \in E$ uchun $p(x) \geq 0$;

4) endi $p(x) = p(y) = 0$ va $\alpha, \beta \in K$ bo'lsa,

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$$

munosabatdan $p(\alpha x + \beta y) = 0$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni $\{x : p(x) = 0\}$ to'plam E ning vektor qism fazosi ekan;

5) ushbu $V = \{x : p(x) < 1\}$ to'plamni olaylik. Ravshanki, V muvozanatlashgan. Agar $x, y \in V$ va $0 \leq t \leq 1$ bo'lsa,

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < t + 1 - t = 1$$

o'rinni bo'ladi. Shuning uchun V qavariqdir, demak, V absolyut qavariq to'plam ekan. $x \in E$ va $t > p(x)$ bo'lsa, u holda $p\left(\frac{1}{t}x\right) = \frac{1}{t}p(x) < 1$, yani $t^{-1}x \in B$.

Shunday qilib, $x \in tB$. Demak V - yutuvchi to'plam.*

Ta'rif. Absolyut qavariq va yutuvchi A to'plam berilgan bo'lsin. Ushbu $p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}$ funksiya A to'plamning Minkovskiy funksionali

deyiladi. A to‘plam yutuvchi bo‘lgani sababli barcha $x \in E$ uchun $p_A(x) < +\infty$.

2-teorema. A to‘plam E vektor fazodagi absolyut qavariq va yutuvchi to‘plam bo‘lsin. U holda

1) $p_A(x)$ funksional E da yarimnorma bo‘ladi;

2) $B = \{x : p_A(x) < 1\}$ va $C = \{x : p_A(x) \leq 1\}$ to‘plamlar uchun $B \subset A \subset C$ va $p_B = p_A = p_C$ munosabatlar o‘rinlidir.

Isboti. Har bir $x \in B$ uchun $H_A(x) = \{t > 0 : x \in tA\} \subset R$ to‘plamni tuzamiz. $t \in H_A(x)$ va $s > t$ bo‘lsin. A to‘plam qavariq va $\theta \in A$ bo‘lgani sababli ixtiyoriy $x \in A$ uchun $\left(1 - \frac{t}{s}\right)\theta + \frac{t}{s}x \in A$ bo‘ladi, ya’ni $tx \in sA$ munosabat o‘rinlidir. Bundan $tA \subset sA$ munosabat va $N_A(x)$ to‘plamning yarim to‘g‘ri chiziqdan iborat ekanligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $x, y \in E$ uchun ushbu

$$p_A(x) < s \text{ va } p_A(y) < t \quad (1)$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy s va t sonlarni olamiz. U holda $x \in sA$ va $y \in tA$ bo‘ladi; bundan esa A absolyut qavariq to‘plam bo‘lganligi uchun $x + y \in sA + tA \subset (s+t)A$ munosabat kelib chiqadi. Shunga ko‘ra $p_A(x+y) \leq s+t$. Bundan (1) tengsizliklardagi s va t sonlar ixtiyoriy bo‘lgani uchun $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ kelib chiqadi. $p_A(\alpha x) = |\alpha| p_A(x)$ munosabat shunga o‘xshash ko‘rsatiladi.

Agar $p_A(x) < 1$ bo‘lsa, $1 \in H_A(x)$, ya’ni $x \in A$. Ravshanki, agar $x \in A$ bo‘lsa, $p_A(x) \leq 1$. Shularga ko‘ra $B \subset A \subset C$. Bundan ixtiyoriy x uchun $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$ ya’ni

$$p_C(x) \leq p_A(x) \leq p_B(x). \quad (2)$$

Endi ushbu

$$p_C(x) < s < t \quad (3)$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy s, t sonlarni olamiz. U holda $\frac{x}{s} \in C$ va

demak, $p_A\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1$, shunga ko‘ra $p_A\left(\frac{x}{t}\right) \leq \frac{s}{t} < 1$. Demak, $\frac{x}{t} \in B$, bundan $p_B\left(\frac{x}{t}\right) \leq 1$ ya’ni $p_B(x) \leq t$.

Yuqoridagi (3) tengsizlikda s, t ixtiyoriy bo‘lgani sababli $p_B(x) \leq p_C(x)$. Bundan va (2) munosabatdan $p_C(x) = p_B(x)$ tenglik kelib chiqadi.*

E vektor fazoda yarimnormalarning biror P sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar har bir $x \neq 0$ uchun shunday $p \in P$ mavjud bo‘lsaki, uning uchun $p(x) \neq 0$ shart bajarilsa, P sistema E vektor fazoning nuqtalarini ajratuvchi sistema deyiladi.

3-teorema. Lokal qavariq E Xausdorff fazosida nol atroflari sistemasining absolyut qavariq atroflardan iborat bo‘lgan Σ bazisini olamiz, p_U esa $U \in \Sigma$ atrofning Minkovskiy funksionali bo‘lsin. U holda $\{p_U, U \in \Sigma\}$ sistema E ning

nuqtalarini ajratuvchi uzluksiz yarimnormalar sistemasini hosil qiladi.

Isboti. Agar $x \in E$ va $x \neq 0$ bo'lsa, shunday $U \in \Sigma$ mavjudki, $x \notin U$, ya'ni 2-teoremaga asosan $p_U(x) \geq 1$. Shunday qilib, $\{p_U, U \in \Sigma\}$ sistema E ning nuqtalarini ajratuvchi yarimnormalar sistemasidir.

Endi ixtiyoriy $V \in \Sigma$ va $\varepsilon > 0$ olamiz. U holda barcha $x \in \varepsilon V$ uchun $\rho_V(x) \leq \varepsilon$; bundan, agar $x - y \in \varepsilon V$ bo'lsa, $|p_V(x) - p_V(y)| \leq p_V(x - y) \leq \varepsilon$ ekanligi, ya'ni yarimnormaning uzluksizligi kelib chiqadi.*

4-teorema. *E vektor fazoda P yarimnormalar sistemasi berilgan bo'lsin. Har bir $\varepsilon > 0$ va $p \in P$ uchun $V(p, \varepsilon) = \{x : p(x) \leq \varepsilon\}$ to'plamni tuzamiz. Σ sistema $V(p, \varepsilon)$ to'plamlarning barcha chekli kesishmalaridan iborat bo'lsin. U holda E da shunday τ vektor topologiya mavjudki, bu topologiyada:*

- 1) *E lokal qavariq fazo va har bir $p \in P$ uzluksiz;*
- 2) *Σ nolning barcha atroflari sistemasi uchun bazisdir;*
- 3) *agar P sistema E ning nuqtalarini ajratuvchi bo'lsa, (E, τ) Xausdorf fazosi bo'ladi.*

Isboti. Har bir $V(r, \varepsilon)$ to'plam absolyut qavariq va yutuvchi bo'lgani uchun Σ ning elementlari ham absolyut qavariq va yutuvchi bo'ladi. Ixtiyoriy $\alpha > 0$ uchun $\alpha V(r, \varepsilon) = V(r, \alpha \varepsilon)$ munosabat o'rinni bo'lganligidan, har bir $U \in \Sigma$ va $\alpha > 0$ uchun $\alpha U \in \Sigma$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi agar U_1 va $U_2 \in \Sigma$ bo'lsa, shunday $U \in \Sigma$ topiladiki, $U \subset U_1 \cap U_2$ munosabat bajariladi. Shunday qilib, 5.1-§ dagi 3-teoremaning barcha shartlari bajarildi, demak E da teoremamizning 1 va 2-xossalari qanoatlantiruvchi τ topologiya mavjuddir. Endi $V(p, \varepsilon)$ to'plamlarning aniqlanishiga ko'ra har bir $p \in P$ yarimnormaning uzluksizligi kelib chiqadi. Nihoyat, R yarimnormalarning ajratuvchi sistemasi bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda $\bigcap_{U \in \Sigma} U = \bigcap_{p \in P, \varepsilon > 0} V(p, \varepsilon) = \{\theta\}$ bo'ladi, shunday qilib, 5.1- §; ning 5-teoremasiga ko'ra (E, τ) lokal qavariq Xausdorf fazosidir.*

Misollar. 1. *Chekli o'lchamli fazolar.* Agar n o'lchamli Evklid fazosida topologiya $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ norma yordamida aniqlansa, bu fazo lokal qavariq Xausdorf fazosi bo'ladi. Bunda nolning barcha atroflari sistemasining bazisi sifatida ushbu $V_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\} (\varepsilon > 0)$ to'plamlarni olish mumkin.

2. Uzluksiz funksiyalar fazosi. a) $[a, b]$ segmentdagi barcha uzluksiz haqiqiy (yoki kompleks) funksiyalarning $C[a, b]$ to'plamida topologiya $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ norma bo'yicha aniqlansa $C[a, b]$ ham lokal qavariq fazoni tashkil etadi;

b) M kompakt, $C(M)$ to'plam bu kompaktdagi barcha uzluksiz haqiqiy (yoki kompleks) funksiyalardan iborat bo'lsin. Ushbu $\|x\| = \max_{t \in M} |x(t)|$ norma yordamida kiritilgan topologiyada $C(M)$ lokal qavariq fazo bo'ladi;

c) $C(R)$ to'g'ri chiziqdagi barcha uzluksiz haqiqiy

(yoki kompleks) funksiyalar to‘plami bo‘lsin. Har bir $n \in N$ uchun ushbu $p_n(x) = \max_{-n \leq t \leq n} |x(t)|$ yarimnormani aniqlaymiz.

$C(R)$ fazo $\{\rho_n := 1, 2, \dots\}$ yarimnormalar sistemasi bilan aniqlangan topologiyada lokal qavariq Xausdorf fazosidir.

3. Har bir normalangan chiziqli fazo o‘zining normasi orqali kiritilgan topologiyada lokal qavariq Xausdorf fazosi bo‘ladi, bunda nol atroflarining bazisi vazifasini $\{x : \|x\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ sistema bajaradi.

4. Cheksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi.

a) $C^\infty[a, b]$ fazo $[a, b]$ segmentdagi cheksiz differensiallanuvchi haqiqiy (yoki kompleks) funksiyalarning vektor fazosi bo‘lsin. Ushbu $p_m(x) = \max_{a \leq t \leq b} |x^{(m)}(t)|$, ($m \in N$, $x \in C^\infty[a, b]$) belgilashni kiritamiz.

U holda $\{p_m : m \in N\}$ sistema $C^\infty[a, b]$ fazoning nuqtalarini ajratuvchi yarimnormalar sistemasini tashkil etadi va bu sistema yordamida kiritilgan topologiyada $C^\infty[a, b]$ lokal qavariq Xausdorf fazosi bo‘ladi;

b) $C^\infty(R)$ to‘g‘ri chiziqdagi barcha cheksiz differentsiallanuvchi haqiqiy (yoki kompleks) funksiyalar to‘plami bo‘lsin. $p_{mn}(x) = \max_{-n \leq t \leq n} |x^{(m)}(t)|$ ifoda yarimnormani aniqlaydi, bu yerda $m, n \in N$, $x \in C^\infty(R)$.

Bu holda ham $\{p_{mn} : m, n \in N\}$ yarimnormalar sistemasi $C^\infty(R)$ fazoning nuqtalarini ajratib, unda lokal qavariq Xausdorf topologiyasini aniqlaydi.

5. Biror p musbat son uchun l_p fazo ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha ketma-ketliklardan iborat bo‘lsin. Har qanday $a \geq 0, b \geq 0, 0 < \rho < 1$ uchun $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ tengsizlik o‘rinli bo‘lgani sababli $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p$ funksiya l_p da metrika bo‘ladi. Bu metrika l_p da τ vektor topologiyani aniqlashini, ya’ni (l_p, τ) topologik vektor fazo ekanligini ko‘rsatamiz.

Metrikaning ko‘rinishidan ravshanki,

$$\begin{aligned} d(x+z, y+z) &= d(x, y), \\ d(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda|^p d(x, y) \end{aligned} \tag{4}$$

bu yerda $x, y, z \in l_p$, $\lambda \in R$.

Topologik vektor fazo ta’rifidagi 1) va 2) aksiomalarni tekshiramiz.

Ma’lumki, X metrik fazoda x nuqtaning atroflari $U(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(x, z) < \varepsilon\}$ ko‘rinishda olinadi. Demak, 1) aksiomaning bajarilishini isbotlash uchun

$$U(x, \varepsilon/2) + U(y, \varepsilon/2) \subset U(x+y, \varepsilon) \tag{5}$$

munosabatni isbotlash kifoya. Ixtiyoriy $z_1 \in U(x, \varepsilon/2)$ va $z_2 \in U(y, \varepsilon/2)$ nuqtalar uchun $d(x, z_1) < \varepsilon/2$, $d(y, z_2) < \varepsilon/2$, Demak, (4) munosabatlarning birinchisiga asosan

$d(x+y, z_1+z_2) = d(x+y-z_1, z_2) = d(x-z_1, z_2-y) \leq d(x-z_1, \theta) +$
 $+ d(\theta, z_2-y) = d(x, z_1) + d(y, z_2) < \varepsilon$,
ya'ni $z_1+z_2 \in U(x+y, \varepsilon)$; shu bilan (5) isbotlandi.

Endi 2) aksiomaning bajarilishini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in l_p$ elementni va $\lambda \in R$ sonni olamiz. $U(\lambda x, \varepsilon)$ atrof λx elementning ixtiyoriy ε -atrofi bo'lsin. Endi $\varepsilon_1 > 0$ va $r > 0$ sonlarni quyidagi tensizliklarni qanoatlantiradigan qilib olamiz:

$$r < \left(\frac{\varepsilon}{2d(x, \theta)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+r)^p}$$

U holda ixtiyoriy $z \in U(x, \varepsilon_1)$ va $\beta \in R (|\lambda - \beta| < r)$ uchun (4) munosabatlarga asosan

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \beta z) &= d(\lambda x - \beta x, \beta z - \beta x) \leq d(\lambda x - \beta x, \theta) + d(\theta, \beta z - \beta x) = \\ &= |\lambda - \beta|^p d(x, \theta) + |\beta|^p d(x, z) < r^p d(x, \theta) + (|\lambda| + r)^p d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Demak, $\beta z \in U(\lambda x, \varepsilon)$, ya'ni 2) aksioma ham bajariladi.

Shunday qilib, (l_p, τ) - topologik vektor fazo. Ammo, (l_p, τ) lokal qavariq fazo emas. Shuni ko'rsatamiz. Agar (l_p, τ) lokal qavariq fazo bo'lganida edi, nolning $\{x : d(x, \theta) < 1\}$ atrofida joylashgan har bir V atrof uchun uning shunday qavariq atrofi U va $W = \{x : d(x, \theta \leq \varepsilon)\}$ atrofi mavjudki, ular ushbu $W \subset U \subset V$ munosabatlarni qanoatlantirar edi. Quyidagi ketma-ketlikni tuzamiz:

$$x^{(r)} = \{x_n^{(r)}\}, \text{bu yerda } x_n^{(r)} = \begin{cases} 1, & \text{agar } r = n \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } r \neq n \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

U holda barcha $r=1, 2$, uchun $\varepsilon^{\frac{1}{p}} x^{(r)} \in W \subset U$. Endi U qavariqligidan har bir $n \in N$ uchun

$$y = \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}}{n} \sum_{r=1}^n x^{(r)} \in U \subset V$$

munosabat kelib chiqadi. Ammo $d(y, \theta) = \varepsilon n^{1-\rho}$ masofa uchun p yetarlicha katta bo'lganda $d(y, \theta) > 1$. Ya'ni $y \notin V$. Bu ziddiyat (l_p, τ) fazoning lokal qavariq emasligini ko'rsatadi.

5.3-§. Xan-Banax teoremasi

E vektor fazo bo'lsin. Mazkur paragrafda biz E ning biror vektor qism fazosida aniqlangan chiziqli funksionalni uning ayrim xossalarni saqlagan holda butun E fazoga davom ettirish masalasini ko'ramiz. Quyida keltiriladigan teoremlar topologik vektor fazolar nazariyasining eng muhim teoremlaridan hisoblanadi.

1-teorema (Xan-Banax teoremasi) E haqiqiy vektor fazo, p unda
96

aniqlangan yarimnorma bo'lib, fo esa E ning E₀ qism fazosida aniqlangan va

$$f_0(x) \leq p(x) \quad (x \in E_0) \quad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi chiziqli funksional bo'lsin. U holda E fazoda shunday f chiziqli funksional mavjudki, u fo ning davomi bo'ladi (ya'ni f / E₀ = f₀)

$$f(x) \leq p(x) \quad (x \in E) \quad (2)$$

Izboti. Agar E₀ ≠ E munosabat o'rini bo'lsa, f₀ funksionalni (2) shartni qanoatlantiradigan qilib biror E₁ ⊃ E₀ vektor qism fazoga davom ettirish mumkinligini ko'rsatamiz. Biror z ∈ E / E₀ elementni olib, E₀ va z bilan hosil qilingan E₁ = E₀ + Rz vektor qism fazoni ko'ramiz. Ta'rifga asosan, E₁ fazoning elementlari ushbu

$tz + x, \quad x \in E_0, \quad t \in R$
ko'rinishga ega. f₁ funksional f₀ funksionalning E fazoga biror davomi bo'lsa, ravshanki,

$$f_1(tz + x) = tf_1(z) + f_0(x).$$

Agar c = f₁(z) belgilash kiritsak, u holda ixtiyoriy c uchun f₁ chiziqli funksional f₀ funksionalning davomi bo'ladi. Biz c sonni (2) shartni nazarda tutib tanlaymiz, ya'ni bu son ushbu

$$f_0(x) + tc \leq p(x + tz)$$

tengsizlikni ixtiyoriy x va t uchun qanoatlantirsin. Musbat t uchun bu tengsizlik quyidagi tengsizlikka ekvivalent:

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right)$$

ya'ni

$$c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \quad (3)$$

Manfiy t uchun esa ushbu

$$c \geq -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \quad (4)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Demak, (3) va (4) shartlarni bir vaqtida qanoatlantiruvchi c son mavjudligini isbotlash kerak.

$$\begin{aligned} E_0 \text{ dan olingan ixtiyoriy } y', y'' \text{ elementlar uchun (2) shartga asosan} \\ f_0(y'') - f_0(y') = f_0(y'' - y') \leq p(y'' - y') = p((y'' + z) - (y' + z)) \leq \\ \leq p(y'' + z) + p(-y' - z) \end{aligned}$$

ya'ni

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z)$$

Bu yerda u' va u'' ixtiyoriy bo'lgani sababli

$$c'' = \inf_{y'' \in E_0} (-f_0(y'')) + p(y'' + z) \geq c' = \sup_{y' \in E_0} (-f_0(y') - p(-y' - z))$$

Agar c'' ≥ c ≥ c' tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror c sonni olsak, u holda ixtiyoriy y', y'' ∈ E₀ uchun

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq c \geq -f_0(y') - p(-y' - z)$$

Xususan $y' = y'' = \frac{x}{t}$ bo‘lganda, (3) va (4) tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, f_0 funksionalni (2) shartni qanoatlantiradigan qilib E_1 vektor qism fazoga davom ettirish mumkin.

Endi teoremaning isbotini Sorn lemmasini (6.1-§) yordamida yakunlaymiz. Buning uchun (L, g) juftliklardan iborat bo‘lgan Ω to‘plamni ko‘ramiz, bu yerda:

- 1) L to‘plam $E_0 \subset L \subset E$ munosabatni qanoatlantiruvchi vektor qism fazo;
- 2) g chiziqli funksional bo‘lib, f_0 ning L vektor qism fazoga davomi;
- 3) ixтиори $x \in L$ uchun $g(x) \leq p(x)$.

Ω to‘plam bo‘sh emas, chunki $(E_0, f_0) \in \Omega$. Endi Ω to‘plamda qisman tartib kiritamiz: agar $L_1 \supset L_2$ bo‘lib, g_2 funksional g_1 funksionalning davomi bo‘lsa, u holda $(L_1, g_1) \leq (L_2, g_2)$ deb hisoblaymiz. Qisman tartiblangan Ω to‘plamda Sorn lemmasining shartlari bajariladi. Haqiqatan $\Omega_0 \subset \Omega$ ixтиори chiziqli tartiblangan to‘plam bo‘lsin.

$$L_0 = \bigcup \{L : (L, g) \in \Omega_0\}$$

to‘plam E ning vektor qism fazosidir. Darhaqiqat $x, y \in L_0$ elementlarni olsak, shunday L_1, L_2 fazolar topiladiki, $x \in L_1$, $y \in L_2$ bo‘ladi va $(L_1, g_1), (L_2, g_2) \in \Omega_0$. Ω_0 chiziqli tartiblangan bo‘lgani sababli $(L_1, g_1) \geq (L_2, g_2)$ yoki $(L_2, g_2) \geq (L_1, g_1)$. Masalan, $(L_1, g_1) \geq (L_2, g_2)$ deb faraz qilaylik, u holda $L_1 \supset L_2$ va demak, $x, y \in L_1$ ya’ni ixтиори λ, μ haqiqiy sonlar uchun $\lambda x + \mu y \in L_1 \subset L_0$.

L_0 ning ixтиори x elementi biror $L((L, g) \in \Omega)$ ga tegishli; $g_0(x) = g(x)$ deb olsak, L_0 vektor qism fazoda biror g_0 chiziqli funksional aniqlangan bo‘ladi. Ravshanki, $(L_0, g_0) \in \Omega$ va (L_0, g_0) element Ω_0 to‘plam uchun yuqori chegaradir. Sorn lemmasiga asosan Ω to‘plamda maksimal element (L_{\max}, f_{\max}) mavjud. Agar biz $L_{\max} = E$ tenglikni isbotlasak, u holda f_{\max} kerakli funksional bo‘ladi. Agar $L_{\max} \subset E$, $L_{\max} \neq E$ bo‘lganda edi, biz isbotning boshida ko‘rsatilgan yo‘l bilan f_{\max} funksionalni biror $E_1 \supset E_{\max}$ vektor qism-fazoga davom ettirgan bo‘lar edik, bu esa (L_{\max}, f_{\max}) maksimal element ekanligiga zid. Demak, $L_{\max} = E$ va $f_{\max} = f$ kerak bo‘lgan funksional.*

Endi Xan-Banax teoremasini kompleks vektor fazolar uchun isbotlaymiz.

2-teorema. *E kompleks vektor fazoda p biron yarimnorma bo‘lib, E ning biror E_0 vektor qism fazosida aniqlangan f_0 chiziqli funksional*

$$|f_0(x)| \leq p(x) \quad (x \in E_0)$$

shartni qanoatlantirsin. U holda E da aniqlangan shunday ffunksional mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|f(x)| \leq p(x), \quad x \in E, \tag{5}$$

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0$$

Isboti. Ma'lumki, ixtiyoriy kompleks fazoni haqiqiy vektor fazo sifatida qarash mumkin. E_R va E_{oR} bilan mos ravishda haqiqiy fazo sifatida olingan E va E_0 fazolarni belgilaymiz. Ravshanki, p yarimnorma E_R fazoda ham yarimnormadir va $f_{oR}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ funksional (f_0 ning haqiqiy qismi) E_{oR} fazoda ushbu

$$|f_{oR}(x)| \leq p(x)$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy funksionaldir. Demak, E_{oR} fazoda f_{oR} funksional $f_{oR}(x) \leq p(x)$

tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni E_R, E_{oR}, f_{oR} lar uchun 1-teoremaning shartlari o'rinni. Shu teoremaga asosan E_R fazoda aniqlangan ushbu

$$\begin{aligned} f_R(x) &\leq p(x), \quad x \in E_R \\ f_R(x) &= f_{oR}(x), \quad x \in E_{oR} \end{aligned} \tag{6}$$

xossalarga ega haqiqiy funksional mavjud. Ushbu

$$-f_R(x) = f_R(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

tengsizlikka asosan quyidagi tengsizlikka egamiz:

$$|f_R(x)| \leq p(x), \quad x \in E_R.$$

Endi f funksionalni E fazoda quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = f_R(x) - i f_R(ix).$$

Bu $f(x)$ kompleks chiziqli funksional ekanligi bevosita tekshiriladi. f uchun ushbu

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in E_0.$$

$$\operatorname{Re} f(x) = f_R(x), \quad x \in E$$

munosabatlar o'rinni. Darhaqiqat, $x_0 \in E_0$ uchun

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f_R(x_0) - i f_R(ix_0) = f_{oR}(x_0) - i f_{oR}(ix) = \\ &= \operatorname{Re} f_0(x_0) - i \operatorname{Re} f_0(ix_0) = \operatorname{Re} f_0(x_0) - i \operatorname{Re}(if_0(x_0)) = \\ &= \operatorname{Re} f_0(x_0) + i \operatorname{Im} f_0(x_0) = f_0(x_0) \end{aligned}$$

Ikkinchini munosabat ixtiyoriy $x \in E$ uchun $f_R(x)$ haqiqiy son ekanligidan kelib chiqadi.

Nihoyat, $|f(x)| \leq p(x)$ tengsizlikni isbotlash kerak. Aksini faraz qilsak, biror $x_0 \in E$ uchun ushbu $|f(x_0)| > p(x_0)$ tengsizlik o'rinni bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy λ kompleks sonni $\lambda = re^{i\varphi}$ ($r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$) ko'rinishda yozish mumkin. Xususan, $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$. Agar $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$ elementni olsak, u holda

$$f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi} f(x_0)] = \rho > \rho(x_0) = \rho(y_0)$$

Bu esa (6) munosabatga zid. Demak, ixtiyoriy $x \in E$ uchun $|f(x)| \leq p(x)$.*

5.4-§. Topologik vektor fazolarni metrikalashtirish va normalashtirish

(E, τ) topologik vektor fazo bo'lsin. Agar E da shunday $\rho(x, y)$ metrika mavjud bo'lsaki, bu metrika yordamida kiritilgan topologiya τ topologiya bilan

ustma-ust tushsa, bu fazoni *metrikalashtirish mumkin* deyiladi.

Agar ixtiyoriy x, y, z elementlar uchun $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ tenglik bajarilsa, ρ invariant metrika deyiladi. Agar (E, τ) topologik vektor fazoda topologiya biror bir invariant metrika bilan aniqlangan bo‘lib, bu metrikada E to‘la fazo bo‘lsa, u Φ fazo deyiladi. Lokal qavariq Φ fazo *Freshe fazosi* deyiladi. Ravshanki, agar (E, τ) metrikalangan topologik vektor fazo bo‘lsa, u holda nol atroflarining sanoqli bazisi mavjud bo‘ladi. Bunga teskari bo‘lgan quyidagi tasdiq ham o‘rinli.

1-teorema. Agar (E, τ) Xausdorf topologik vektor fazosida nolning atroflari sistemasi uchun sanoqli bazis mavjud bo‘lsa, u holda E da shunday d metrika mavjudki:

a) d metrika yordamida kiritilgan topologiya E ning τ topologiyasi bilan ustma-ust tushadi;

b) markazi nolda bo‘lgan ixtiyoriy ochiq shar muvozanatlashgandir;

c) d invariant, ya’ni barcha $x, y, z \in E$ uchun

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

Agar E fazo lokal qavariq ham bo‘lsa, d metrikani shunday tanlash mumkinki, u a)-c) shartlardan tashqari quyidagi shartni ham qanoatlantiradi;

d) barcha ochiq sharlar qavariqdir.

Istboti. Teoremaning shartiga ko‘ra E fazoda nol atroflari sistemasining

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi sanoqli bazisi $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ mavjuddir. Agar E lokal qavariq fazo bo‘lsa, V_p larni absolyut qavariq qilib tanlash mumkin. D bilan quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi barcha ratsional sonlar to‘plamini belgilaymiz:

1) har bir $r \in D$ ni ushbu

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n} \quad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda $c_n(r) = 0$ yoki 1;

2) yuqoridagi (2) qatorda ko‘pi bilan soni chekli $c_n(r)$ koeffitsientlar noldan farqli.

Shunday qilib, har bir $r \in D$ uchun $0 \leq r < 1$ tengsizlik o‘rinli. Ixtiyoriy $r \in D$ son uchun quyidagi to‘plamni kiritamiz:

$$A(r) = c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + c_3(r)V_3 + \dots \quad (3)$$

2) shartga ko‘ra (3) tenglikning o‘ng tomonidagi noldan farqli hadlarning soni chekli. Ixtiyoriy $r \geq 1$ uchun $A(r) = E$ deb qabul qilamiz. Har bir V_i to‘plam ochiq bo‘lgani uchun $A(r) (r \neq 0)$ ham ochiq.

So‘ng $f(x) = \inf\{r : x \in A(r)\} (x \in E)$ funksiyani tuzamiz va $d(x, y) = f(x-y) (x \in E, y \in E)$ belgilashni kiritamiz.

d ning kerakli xossalarga ega bo‘lishi ushbu

$$A(r) + A(s) \subset A(r+s) \quad (r, s \in D) \quad (4)$$

munosabatga asoslanadi.

Bu munosabatni isbotlashdan oldin, qanday qilib bu munosabatdan teoremaning o‘rinli ekanligi kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Har bir $A(s)$, $s \in D$ uchun $\theta \in A(s)$ va (4) munosabatdan kelib chiqadiki, agar $r < t$ bo‘lsa, u holda

$$A(r) + A(r) + A(t - r) \subset A(t) \quad (5)$$

Shunday qilib, $\{A(r)\}$ to‘plamlar oilasi « \subset » munosabatga nisbatan chiziqli tartiblangandir. Endi barcha $x \in E$ va $y \in E$ uchun

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad (6)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Buning uchun umumiyatlikni chegaralamasdan (6) ning o‘ng tomonini 1 dan kichik deb faraz qilishimiz mumkin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz. D to‘plamda shunday r va s sonlar topiladiki, ular uchun $f(x) < r, f(y) < s$ va $r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$ munosabatlar o‘rinli. Endi $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ bo‘lsa, (4) dan ushbu $x + y \in A(r + s)$ munosabat kelib chiqadi. Bundan $f(x + y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon$ tengsizliklar o‘rinlidir. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo‘lgani uchun bundan o‘z navbatida (6) tengsizlik kelib chiqadi. Har bir $A(r)$ muvozanatlashgan bo‘lgani uchun $f(x) = f(-x)$ bo‘ladi. Ravshanki, $f(\theta) = 0$. Agar $x \neq \theta$ bo‘lsa, shunday $n \in N$ mavjudki, $\bar{x} \in V_n = A(2^{-n})$ munosabat bajariladi, ya’ni $f(x) \geq 2^{-n} > 0$.

$f(x)$ funksiyaning bu xossalardan va $d(x, y) = f(x - y)$ munosabatdan d ning invariant metrika ekanligi kelib chiqadi.

Markazi nolda bo‘lgan ochiq sharlar E ning topologiyasyada ochiq bo‘lishi ushbu

$$B_\delta(0) = \{x : f(x) < \delta\} = \bigcup_{r < \delta} A(r)$$

tenglikdan kelib chiqadi. Endi agar $\delta < 2^{-n}$ bo‘lsa, $B_\delta(0) \subset V_n$ bo‘ladi, ya’ni har bir V_n to‘plam E dagi d metrika orqali kiritilgan topologiyada nolning atrofi bo‘ladi. Bu mulohazalar a) ning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Har bir $A(r)$ muvozanatlashgan bo‘lgani uchun $B_\delta(0)$ ham muvozanatlashgan. Agar har bir V_n qavariq bo‘lsa, ixtiyoriy $r \in D$ uchun $A(r)$ ham qavariqdir; bundan (5) munosabatga ko‘ra har bir $B_\delta(0)$ sharning qavariqligi kelib chiqadi.

Endi (4) formulani induksiyani qo‘llab isbotlaymiz. P_N quyidagi tasdiqni bildirsin: agar $r + s < 1$ bo‘lib, barcha $n \geq N$ lar uchun $c_n(r) = c_n(s) = 0$ bo‘lsa, u holda

$$A(r) + A(s) \subset A(r + s) \quad (7)$$

P_1 tasdiq bevosita ko‘rsatiladi. P_{N-1} tasdiq biror bir $N > 1$ uchun o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilaylik. Biror $r \in D$, $s \in D$, $r + s < 1$ sonlar uchun $n > N$ bo‘lganda $c_n(r) = c_n(s) = 0$ bo‘lsin. Biz r' va s' sonlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$r = r' + c_N(r)2^{-N}, \quad s = s' + c_N(s)2^{-N}, \quad (8)$$

u holda, ravshanki, $r' + s' \leq r + s < 1$, $c_n(r') = c_n(s') = c_n(r' + s') = 0$ ($n > N - 1$) va

$$A(r) = A(r') + c_N(r)V_N, \quad A(s) = A(s') + c_N(s)V_N \quad (9)$$

P_{N-1} tasdiq o‘rinli bo‘lgani sababli $A(r') + A(s') \subset A(r' + s')$. Shunday qilib,

$$A(r) + A(s) \subset A(r' + s') + c_N(r)V_N + c_N(s)V_N \quad (10)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Agar $c_N(r)=c_N(s)=0$ bo‘lsa, u holda $r=r'$ va $s=s'$ bo‘lib, (10) munosabat (7) munosabatga keltiriladi. Endi agar $c_N(r)=0$ va $c_N(s)=1$ bo‘lsa, (10) ning o‘ng tomoni quyidagi ko‘rinishga ega:

$$A(r'+s')+V_N = A(r'+s'+2^{-N}) = A(r+s)$$

va, demak, yana (7) munosabat o‘rinlidir.

$c_n(r)=1$ va $c_n(s)=0$ bo‘lgan hol shunga o‘xshash talqin qilinadi. Endi agar $c_N(r)=c_N(s)=1$ bo‘lsa, u holda (10) ning o‘ng tomoni quyidagicha

$$\begin{aligned} A(r'+s')+V_N + V_N &\subset A(r'+s')+V_{N-1} = A(r'+s') + \\ &+ A(2^{-N+1}) \subset A(r'+s'+2^{-N+1}) = A(r+s) \end{aligned}$$

bo‘ladi. (Bu yerda P_{N-1} tasdiqdan foydalanildi). Shunday qilib, P_{N-1} tasdiqdan P_N tasdiq kelib chiqar ekan.

Ta’rif. (E, τ) topologik vektor fazoda A to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar nolning har bir V atrofi uchun shunday $r>0$ son topilsaki, ushbu $A \subset tV$ munosabat ixtiyoriy $t>r$ son uchun bajarilsa, u holda A chegaralangan to‘plam deyiladi.

Ravshanki, chegaralangan to‘plamning ta’rifidagi shartni nolning atroflari sistemasining biror bazisi uchun talab etish kifoyadir.

2-teorema. a) agar A chegaralangan to‘plam bo‘lib, $B \subset A$ bo‘lsa, B ham chegaralangadir;

b) agar A chegaralangan to‘plam bo‘lsa, u holda har bir $\lambda \in K$ uchun λA ham chegaralangadir;

c) agar A, B chegaralangan to‘plamlar bo‘lsa, $A \cup B$ va $A+B$ ham chegaralangan to‘plamdir.

Isboti. a) ning isboti o‘z-o‘zidan ma’lum.

b) V nolning ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. Umumiyatlikni chegaralamagan holda V ni muvozanatlashgan deb olishimiz mumkin.

A to‘plam chegaralangan bo‘lgani uchun shunday $c>0$ son topiladiki, $A \subset tV$ munosabat barcha $t>c$ lar uchun bajariladi.

Agar $\lambda=0$ bo‘lsa, λA to‘plam chegaralanganligi ravshan. Agar $\lambda \neq 0$ bo‘lsa, $\lambda = r \cdot \alpha$ deb yozib olsak, bunda $r>0$, $|\alpha|=1$ va barcha $t>s$ lar uchun $\lambda A \subset t\lambda V = tr \cdot \alpha V = t \cdot rV$, chunki V muvozanatlashgan to‘plam bo‘lganligidan $\alpha(|\alpha|=1)$ son uchun ushbu $\alpha V = V$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, agar $t'>rs$ bo‘lsa, $\lambda A \subset t'V$ ya’ni λA ham chegaralangandir.

c) V nolning ixtiyoriy atrofi bo‘lsin. Nolning $U+U \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofini olamiz. A chegaralangan bo‘lgani uchun shunday $s_1>0$ son topiladiki, $A \subset tU$ shart $t>s_1$ uchun bajariladi; shunga o‘xshash shunday $s_2>0$ son topiladiki, $t>s_2$ bo‘lganda $B \subset tU$; bundan esa $A+B \subset tU+tU \subset tV$, $t>s$, ya’ni $A+B$ ning chegaralanganligi kelib chiqadi. $A \cup B$ ning ham chegaralangaligi shunga o‘xshash ko‘rsatiladi.

Agar (E, τ) topologik vektor fazoda shunday norma mavjud bo‘lsaki, bu norma yordamida kiritilgan topologiya τ topologiya bilan ustma-ust tushsa, E

fazo normallanuvchi deyiladi.

3-teorema. (A.N.Kolmogorov teoremasi). Xausdorf topologik vektor fazosi normallanuvchi bo‘lishi uchun bu fazoda nolning chegaralangan qavariq atrofi mavjud bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Izboti. Zarurligi. Agar (E, τ) normallangan fazo bo‘lsa, nolning $V_1 = \{x : \|x\| < 1\}$ atrofi qavariq va chegaralangandir.

Kifoyaligi. (E, τ) topologik vektor fazoda V nolning qavariq va chegaralangan atrofi bo‘lsin. 5.1-§ dagi 3-teoremaning izbotidagi kabi $U = \bigcap_{|\mu|=1} \mu V$ to‘plam nolning absolyut qavariq atrofi bo‘ladi. Endi p funksional U atrofning Minkovskiy funksionali bo‘lsin. p ning norma ekanligini izbotlaymiz.

Agar $x \neq \theta$ bo‘lsa, nolning shunday W atrofi mavjudki, $x \in W$ bo‘ladi. U atrof chegaralangan bo‘lgani uchun $U \in tW$ munosabat biror $t > 0$ uchun o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $\frac{1}{t}U \subset W$. Bundan $x \in \frac{1}{t}U$ yoki, boshqacha qilib aytganda, $p(x) \geq \frac{1}{t} > 0$ tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $p(x)$ norma ekan. U atrof chegaralangan bo‘lgani uchun nolning har bir W atrofi uchun shunday $n \in N$ mavjudki, $\frac{1}{n}U \subset W$, ya’ni E dagi norma bo‘yicha kiritilgan topologiya τ bilan ustma-ust tushadi.

Mashq uchun masalalar

1. Haqiqiy sonlar fazosi R ni o‘zi ustida vektor fazo sifatida olamiz. Bu fazoda vektor topologiya bo‘lmagan topologiyaga misol keltiring.

2. Agar topologik vektor fazoda biror ochiq va chegaralangan to‘plam mavjud bo‘lsa, u *lokal chegaralangan fazo* deyiladi. Ixtiyoriy normalangan fazo lokal chegaralangan fazoligini izbotlang.

3. Lokal chegaralangan bo‘lmagan topologik vektor fazoga misol keltiring.

4. Topologik vektor fazoda quyidagi tasdiqlar teng kuchli ekanligini izbotlang:

a) M to‘plam chegaralangan bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik va nolga intiluvchi $\{\varepsilon_n\}$ musbat sonlar ketma-ketligi uchun $\{\varepsilon_n x_n\}$ ketma-ketlik nolga intilishi zarur va kifoyadir.

b) ixtiyoriy yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangandir.

5. Lokal chegaralangan fazoda bir-birini yutuvchi to‘plamlardan iborat nolning atroflari bazisi mavjudligini izbotlang.

6. Topologik vektor fazoda U ochiq to‘plam qavariq bo‘lishi uchun $U + U = 2U$ tenglik zarur va kifoyaligini izbotlang.

7. Vektor fazodagi A qavariq to‘plam yutuvchi bo‘lishi uchun uning

Minkovskiy funksionali chekli bo‘lishi zarur va kifoyaligini isbotlang.

VI BOB. QISMAN TARTIBLANGAN FAZOLAR

6.1-§. Qisman tartiblangan to‘plamlar

Ma’lumki, haqiqiy sonlarning asosiy xususiyatlaridan biri ularni solishtirish mumkinligi edi, ya’ni har qanday ikki haqiqiy sonning birini ikkinchisidan katta, teng yoki kichikligini aniqlash mumkin. Shu ma’noda haqiqiy sonlar tuplami chiziqli tartiblangan, ya’ni har qanday ikki x va y haqiqiy son uchun quyidagi uch munosabatdan biri o‘rinlidir:

$$x < y, \quad x > y, \quad x = y.$$

Ammo matematikaning turli sohalarida odatda shunday ob’ektlar uchraydiki, ularning orasida chiziqli tartib o‘rnatilmagan. Ularning ba’zi bir juft elementlarinigina solishtirish mumkin. Masalan, F to‘plam $[0, 1]$ oraliqda aniqlangan barcha haqiqiy funksiyalardan iborat bo‘lsin. Agar F dan olingan f va g funksiyalar uchun har qanday $x \in [0,1]$ nuqtada $f(x)$ son $g(x)$ sondan kichik bo‘lmasa, $f(x)$ ni $g(x)$ dan katta yoki teng deymiz. F to‘plamni shu ma’noda *qisman tartiblangan* deymiz. Bu misol shuni ko‘rsatadiki, F to‘plamda ixtiyoriy ikki funksiyani emas, balki ba’zi bir juft funksiyalarnigina solishtirish mumkin. Haqiqatdan ham, agar biror nuqtada f funksiya g funksiyadan katta bo‘lib, boshqa bir nuqtada f funksiya g funksiyadan kichik bo‘lsa, biz bunday funksiyalarni solishtira olmaymiz.

Ta’rif. Agar biror X to‘plamning ba’zi juft x va y elementlari uchun biron qoidaga muvofiq $x \geq y$ munosabat berilgan bo‘lib, u quyidagi uchta aksiomani qanoatlantirsa, u holda X to‘plam qisman tartiblangan, “ \geq ” munosabat esa *qisman tartib* yoki *tengsizlik* deyiladi:

- 1) $x \geq x$;
- 2) agar $x \geq y$ va $y \geq x$ bo‘lsa, u holda $x = y$;
- 3) agar $x \geq y$ va $y \geq z$ bo‘lsa, u holda $x \geq z$.

Kelgusida $x \geq y$ munosabatni ba’zan $y \leq x$ ko‘rinishda ham yozamiz.

Bu holda x katta yoki teng y (y kichik yoki teng x) deb o‘qiladi. Agar qisman tartiblangan to‘plamda x va y elementlar uchun ushbu $x \geq y$, $x \leq y$ munosabatlarning biri o‘rinli bo‘lsa, u holda bu *elementlarni solishtirish mumkin* deyiladi.

Misollar. 1) R^n vektor fazoda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlar uchun $x_i \geq y_i$ munosabat ixtiyoriy i - koordinatada bajarilsa, $x \geq y$ deymiz. Yuqoridagi 1) - 3) aksiomalarning bajarilishi bevosita tekshiriladi.

2) m, s, l_2 fazolarda ham qisman tartib koordinatalar yordamida birinchi misoldagidek aniqlanadi.

3) N natural sonlar to‘plami bo‘lsin. Agar m son n songa bo‘linsa, $m \geq n$ deymiz. Masalan, $8 \geq 4$, $9 \geq 3$. Lekin 9 va 6 sonlarini bu ma’noda solishtirib bo‘lmaydi. Demak, N to‘plam bu ma’noda qisman tartiblangan.

4) M ixtiyoriy to‘plam bo‘lib, Ω sistema M ning barcha qism to‘plamlaridan iborat bo‘lsin. $A, B \in \Omega$ elementlar uchun $A \subset B$ munosabat

bajarilsa, $A \leq B$ deymiz. Bu holda (Ω, \leq) juftlik qisman tartiblangan to‘plam bo‘ladi.

Ixtiyoriy to‘plamda qisman tartibni turlicha kiritish mumkin. Masalan, natural sonlar to‘plamida qisman tartibni odatdagicha (bunda N chiziqli tartiblangan bo‘ladi) va yuqoridagi 3) misoldagidek ham kiritish mumkin bo‘lib, bu ikki qisman tartib turlidir.

Shuning uchun qisman tartiblangan to‘plam ko‘rilganda to‘plam bilan birga qanday tartib kiritilganligini aniqlab qo‘yish zarur.

Ta’rif. Agar qisman tartiblangan to‘plamning har qanday ikki elementini solishtirish mumkin bo‘lsa, bu to‘plam *zanjur* yoki *chiziqli tartiblangan* deyiladi.

Masalan, R haqiqiy sonlar to‘plami chiziqli tartiblangandir.

Ta’rif. Qisman tartiblangan X to‘plamning har qanday $x, y \in X$ elementlari uchun ushbu

$$z \geq x, z \geq y (z \leq x, z \leq y)$$

munosabatlarni qanoatlanadirigan $z \in X$ element mavjud bo‘lsa, u holda X to‘plam *yuqoriga (pastga) yo‘nalgan* deyiladi.

Ravshanki, har qanday zanjir ham yuqoriga, ham pastga yo‘nalgaridir.

Yo‘nalgan to‘plam tushunchasi ketma-ketlik tushunchasini umumlashtirishda foydalidir. Har qanday $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikni natural argumentning funksiyasi deb hisoblash mumkin, ya’ni $x_n = x(n) : N \rightarrow X$.

Biror $x = f(\alpha)$ funksiya qisman tartiblangan A to‘plamda aniqlangan va uning qiymatlari biror X to‘plamdan bo‘lsin deb faraz qilaylik. Quyidagi ta’rifni berish uchun biz α argumentni indeks ko‘rinishida, funksiyani esa $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ ko‘rinishda yozamiz.

Ta’rif. Agar A yuqoriga yoki pastga yo‘nalgan to‘plam bo‘lsa, $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ funksiya to‘r, x_{α} elementlar esa to‘rning hadlari deyiladi.

Misollar. 5) odatdagи $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik to‘rdir. Bu yerda $x_n = x(n)$ natural sonlar to‘plamida aniqlangan funksiya. Natural sonlar to‘plami esa yuqoriga yo‘nalgan to‘plamdir.

6) 4-misoldagi Ω to‘plam ixtiyoriy A va B elementlar bilan birga ularning $A \cap B$ kesishmasini ham o‘z ichiga oladi. Demak, Ω pastga yo‘nalgan to‘plam bo‘ladi. Endi har qanday $A \in \Omega$ uchun A ning biror elementini tanlab olib, uni $x(A) = x_A$ deb belgilasak, $\{x_A\}_{A \in \Omega}$ to‘r hosil qiladi.

To‘r tushunchasi ayniqsa topologiyada muhim rol o‘ynaydi.

X qisman tartiblangan to‘plam bo‘lsin. E to‘plam X ning qismi bo‘lib, $y \in X$ shunday element bo‘lsaki, har qanday $x \in E$ uchun $y \geq x$ ($y \leq x$) tengsizlik bajarilsa, u holda y element E to‘plamning *yuqori chegarasi (quyi chegarasi)* deyiladi. Agar E to‘plamning yuqori (quyi) chegarasi mavjud bo‘lsa, E to‘plam *yugoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi. Yuqoridan hamda quyidan chegaralangan to‘plam *chegaralangan to‘plam* deyiladi. Agar $y \in X$ shunday element bo‘lsaki, X to‘plamda undan katta (kichik) element mavjud bo‘lmasa, u holda y *maksimal (minimal) element* deyiladi. Shuni aytish kerakki, X

to‘plamda maksimal element bilan solishtirib bo‘lmaydigan elementlar mavjud bo‘lishi mumkin.

Misol. 7) Uch x, y, z elementdan iborat bo‘lgan X to‘plamda qisman tartibni quyidagicha kiritamiz: $x > y, x < z; y$ va z o‘zaro solishtirib bo‘lmaydigan elementlar. Bu to‘plamda y va z maksimal elementlar, x esa minimal element.

Quyida isbotsiz keltirilgan lemma matematikada katta rol o‘ynaydi.

Sorn lemmasi. Agar qisman tartiblangan X to‘plamda har qanday zanjir yuqori chegaraga ega bo‘lsa, u holda har qanday $x_0 \in X$ element uchun undan katta yoki teng bo‘lgan maksimal element mavjud.

Ta’rif. X qisman tartiblangan to‘plam bo‘lsin. Agar $E \subset X$ to‘plam uchun eng kichik yuqori chegara mavjud bo‘lsa, bu element *supremum* yoki *aniq yuqori chegara* deyiladi va $\sup E$ (yoki VE) bilan belgilanadi. Ya’ni $\sup E$ shunday elementki:

(1) har qanday $x \in E$ element uchun $\sup E \geq x$;

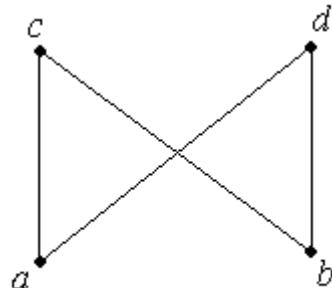
(2) agar har qanday $x \in E$ uchun $y \geq x$ bo‘lsa, bu holda $y \geq \sup E$.

Shunga o‘xshash, infimum yoki aniq, quyi chegara tushunchasi kiritiladi, ya’ni $\inf E$ (yoki) $\wedge E$ shunday elementki:

(1) har qanday $x \in E$ element uchun $\inf E \leq x$;

(2) agar har qanday $x \in E$ element uchun $y \leq x$ bo‘lsa, u holda $y \leq \inf E$.

Agar indekslarga bog‘liq $\{y_\xi\}_{\xi \in \tilde{A}}$ sistema berilgan bo‘lsa, bu sistemaning supremumi (infimumi) $\sup_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ yoki $\bigvee_{\xi \in \tilde{A}} y_\xi$ ($\inf_{\xi \in \tilde{A}} y_\xi$ yoki $\bigwedge_{\xi \in \tilde{A}} y_\xi$) bilan belgilanadi.



1-rasm

Shuni aytib o‘tish kerakki, har qanday to‘plam supremumga yoki infimumga ega bo‘lishi shart emas.

8) Masalan, to‘rt elementli $\{a, b, c, d\}$ to‘plamda qisman tartibni quyidagicha kiritamiz (1-rasm):

$$a \leq c, a \leq d, b \leq c, b \leq d,$$

a va b , c va d solishtirib bo‘lmaydigan elementlar. Bu misolda $\{a, b\}$ va $\{c, d\}$ to‘plamlar supremumga ham, infimumga ham ega emas.

\sup va \inf tushunchalarining ta’riflaridan ularning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi:

a) agar E to‘plam uchun $\sup E$ (inf E) mavjud bo‘lsa, u yagonadir;

b) agar $\sup E$ va $\inf E$ mavjud bo‘lsa, u holda $\sup E \geq \inf E$;

v) agar $E_1 \subset E_2$ bo‘lsa, va $\sup E_1, \sup E_2, (\inf E_1, \inf E_2)$

mavjud bo'lsa, bu holda $\sup E_1 \leq \sup E_2$ ($\inf E_1 \geq \inf E_2$));

g) agar har qanday $x \in E_1$ va $y \in E_2$ elementlar uchun $x \leq y$ tengsizlik bajarilib, $\sup E_1$ va $\inf E_2$ mavjud bo'lsa, u holda

$$\sup E_1 \leq \inf E_2.$$

1-teorema (assotsiativlik qonuni). $E = \bigcup_{\xi \in \Gamma} E_\xi$ bo'lib, har qanday $\xi \in \Gamma$ uchun $\sup E_\xi = y_\xi$ va $y = \sup_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ mavjud bo'lsa u holda $y = \sup E$ ya'ni

$$\sup E = \sup_{\xi \in \Gamma} (\sup E_\xi).$$

Isboti. Har qanday $x \in E$ uchun shunday $\xi \in \Gamma$ mavjudki, $x \in E_\xi$ va $x \leq y_\xi \leq y$. Demak, y element E to'plamning yuqori chegarasi. Yana biror z elementni E to'plamning yuqori chegarasi deb faraz qilaylik. $E_\xi \subset E$ bo'lgani uchun z har qanday E_ξ to'plamning ham yuqori chegarasi, ya'ni $y_\xi \leq z$. Shuning uchun $y = \sup y_\xi \leq z$. Demak, $y = \sup E$.

Assotsiativlik qonuni inf uchun ham o'rinni.

6.2-§. Panjaralar

Qisman tartiblangan X to'plamda chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ to'plam uchun supremum (infimum) mavjud bo'lsa, uni ushbu

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$$

ko'rinishda yozamiz, ya'ni

$$\sup\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n,$$

$$\inf\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

Ta'rif. Qisman tartiblangan X to'plamda har qanday ikki $x_1, x_2 \in X$ element uchun supremum $x_1 \vee x_2$ va infimum $x_1 \wedge x_2$ mavjud bo'lsa, X panjara deyiladi (matematik adabiyotda panjara termini o'rniga struktura termini ham ishlataladi).

Matematik induksiyadan foydalanib, quyidagi teoremani osonlikcha isbot qilish mumkin.

1-teorema. *Har qanday panjarada ixtiyoriy chekli to'plam chegaralangan bo'lib, supremum bilan infimumga ega.*

Misollar. 1) Har qanday zanjir panjaradir;

2) 6.1-§ dagi 1) -4) misollar ham panjaraga misoldir. Masalan, 4) misolda $A, B \in \Omega$ elementlar uchun

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B$$

1) misolda esa, agar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, bo'lsa, $x \vee y = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $x \wedge y = (\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n)$, bu yerda

$$z_i = \begin{cases} x_i, & \text{agar } x_i \geq y_i \text{ bo'lsa}, \\ y_i, & \text{agar } x_i \leq y_i \text{ bo'lsa}, \end{cases} \quad \varpi_i = \begin{cases} x_i, & \text{agar } x_i \leq y_i \text{ bo'lsa}, \\ y_i, & \text{agar } x_i \geq y_i \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Shunga o'xshash 3) misoldagi to'plamning ham panjaraligi ko'rsatiladi.

Masalan, $n \wedge m$ son n va m sonlarning eng katta umumiyligi bo‘luvchisi, $n \vee m$ esa eng kichik umumiyligi bo‘linuvchisidir.

6.1- § dagi 8) misol panjara emas, chunki masalan, $a \vee b$ va $c \vee d$ mavjud emas.

Ta‘rif. Agar panjaradagi har qanday bo‘sh bo‘lmagan to‘plam supremumga va infimumga ega bo‘lsa, bu panjara to‘la deyiladi.

Agar panjaradagi har qanday bo‘sh bo‘lmagan yuqoridan chegaralangan to‘plam supremumga va quyidan chegaralangan to‘plam infimumga ega bo‘lsa, panjara shartli to‘la deyiladi.

6.1- § dagi 1)-3) misollardagi panjaralar to‘la emas, lekin shartli to‘la. 4) misoldagi panjara to‘la panjaradir. Shartli to‘la bo‘lmagan panjaraga misol 6.3- § ning 3) misolida keltiriladi.

Har qanday to‘la panjarada eng katta va eng kichik elementlarning mavjudligi ta‘rifdan bevosita kelib chiqadi.

2-teorema. *Agar X panjarada har qanday yuqoridan chegaralangan to‘plam supremumga ega bo‘lsa, bu panjara shartli to‘la.*

Izboti. Teoremani izbotlash uchun har qanday quyidan chegaralangan to‘plamning infimumga egaligini ko‘rsatish kerak. $E \subset X$ bo‘sh bo‘lmagan, quyidan chegaralangan to‘plam bo‘lsin. Bu holda E ning quyisi chegaralaridan iborat I to‘plam bo‘sh bo‘lmaydi va yuqoridan E ning har bir elementi bilan chegaralangan bo‘ladi. Teoremaning shartiga asosan $y = \sup I$ mavjud. Supremumning ta‘rifiga binoan har qanday $x \in E$ uchun $y \leq x$, ya’ni y element E to‘plamning quyisi chegaralaridan biri, demak, $y \in I$. Shuning uchun va $y = \sup I$ bo‘lgani tufayli bu element E to‘plamning eng katta quyisi chegarasidir, ya’ni $y = \inf E$

Ta‘rif. Har qanday $x, y, z \in X$ elementlar uchun ushbu

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad (1)$$

munosabat o‘rinli bo‘lgan panjara *distributiv panjara* deyiladi.

3-teorema. *Distributiv panjarada har qanday x, y, z elementlar uchun quyidagi munosabat o‘rinlidir:*

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \quad (2)$$

(ya’ni (1) formulada \vee va \wedge belgilarni o‘zaro almashtirish mumkin).

Izboti. (2) formulaning o‘ng tomonini (1) formulaga asosan quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = [x \wedge (y \vee z)] \vee [z \wedge (y \vee z)] = [x \wedge (y \vee z)] \wedge z$$

Kvadrat qavs ichidagi ifodaga yana (1) munosabatni va assotsiativlik qonunini (6.1- §, 1-teorema) qo‘llaymiz:

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee z = [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \vee z = (x \wedge y) \vee [(x \wedge z) \vee z] = (x \wedge y) \vee z$$

Bu yerda biz $(x \wedge z) \vee z = z$ tenglikdan foydalandik.*

Misollar. 1) Har qanday zanjir distributiv panjaraga misoldir.
2) 6.1-§ dagi 1), 2) va 4) misollar ham distributiv panjaraga misollardir. Masalan, 4) misolda distributiv qonun to‘plamlar nazariyasidan ma’lum quyidagi tasdiqdan kelib chiqadi: M to‘plamning har qanday A, B, C qism to‘plamlari uchun quyidagi

munosabat o‘rinlidir:

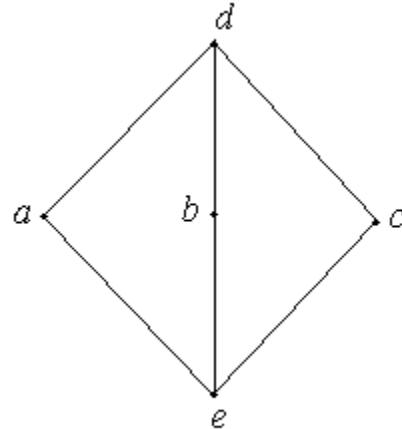
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Quyidagi panjara distributiv emas (2- rasm).

$$X = \{a, b, c, d, e\},$$

$$e \leq a \leq d, e \leq b \leq d, e \leq c \leq d.$$

Haqiqatan



2-rasm

$$(a \vee b) \wedge c = d \wedge c = c,$$

$$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = e \wedge e = e.$$

Endi biz panjaralarda tartib bo‘yicha yaqinlashish tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif. X panjaraning $\{x_n\}$ elementlari ketma-ketligi uchun shunday ikki $\{y_n\}; y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n < \dots$ (monoton o‘suvchi), $\{z_n\}; z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n \geq \dots$ (monoton kamayuvchi) ketma-ketlik mavjud bo‘lsaki, bular uchun ushbu

$$1) x = \sup y_n = \inf z_n;$$

$$2) y_n \leq x_n \leq z_n$$

shartlar bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga (o)-yaqinlashuvchi (*tartib bo‘yicha yaqinlashuvchi*) deyiladi va $x_n \xrightarrow{(0)} x$ yoki $x = (0) \lim x_n$ bilan belgilanadi, x element esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning (o)-limiti deyiladi. Masalan, to‘g‘ri chiziqda (o)-yaqinlashish oddiy yaqinlashish bilan teng kuchli.

4-teorema. *Monoton o‘suvchi (kamayuvchi) $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlikning x elementga (o)-yaqinlashishi uchun $x = \sup x_n (x = \inf x_n)$ shart zarur va kifoyadir.*

Izboti. Zarurligi. $x_n \xrightarrow{(0)} x$ va $\{x_n\}$ monoton o‘suvchi bo‘lsin. Ta’rifdagi $\{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklarni olamiz. Bunda $x = \inf z_n$ va har qanday m va n sonlar uchun $z_m \geq x_n$ bo‘lgani tufayli har qanday n uchun $x \geq x_n$.

Bundan tashqari, agar biron i element va har qanday natural n uchun $u \geq x_n$ bo‘lsa, bu holda har qanday n uchun $u \geq y_n$ ya’ni $u \geq \sup y_n = x$. Supremumning ta’rifiga asosan, $x = \sup x_n$.

Kifoyaligi. $\{x_n\}$ monoton o‘suvchi bo‘lib, $x = \sup x_n$ bo‘lsin. Bu holda har

qanday n natural son uchun $z_n=x$ va $y_n=x_n$ ketma-ketliklar ta'rifdagi ketma-ketliklar vazifasini bajaradi.*

Shuni aytib o'tish kerakki, (o)-yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangandir, chunki har qanday n uchun $z_1 \geq x_n \geq y_1$.

5-teorema. $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib, har qanday n natural son uchun $x_n < x'_n$ bo'lsin. Agar $x=(0)\lim x_n$ va $x'=(0)\lim x'_n$ mavjud bo'lsa, u holda $x \leq x'$.

I sboti. Limitning ta'rifiga asosan shunday $\{z'_n\}$, $\{y_n\}$ ketma-ketliklar mavjudki, z'_n monoton kamayuvchi bo'lib, $\inf z'_n=x'$; y_n esa monoton o'suvchi bo'lib, $\sup y_n=x$ va $y_n \leq x_n, x'_n \leq z'_n$. Bu holda har qanday m va n natural sonlar uchun

$$y_n \leq z'_m.$$

6.1- § dagi g) xossaga asosan

$$x = \sup y_n \leq \inf z'_m = x'.$$

Natija. Berilgan yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqatgina bitta (o)- limitga ega bo'lishi mumkin.

6.3- §. Bul algebralari

Agar panjarada eng katta (eng kichik) element mavjud bulsa, bu element *bir (nol)* deyiladi va 1 (0) bir (nol) elementi bilan belgilanadi. Distributiv panjalararning muhim sinfi Bul algebralariadir.

Ta'rif. Bir va nol ($0 \neq 1$) elementlarga ega bo'lgan distributiv E panjaraning har bir x elementi uchun $x \vee Cx = 1$ va $x \wedge Cx = 0$ tengliklarni qanoatlantiruvchi Cx element mavjud bo'lsa, E *Bul algebrasasi* deyiladi. Cx element x ga nisbatan to'ldiruvchi element deyiladi.

1-teorema. *Bul algebrasining har bir x elementi yagona to'ldiruvchi elementga ega.*

I sboti. y va z elementlar x elementning to'ldiruvchilari deb faraz qilaylik, ya'ni $x \wedge y = x \wedge z = 0$, $x \vee y = x \vee z = 1$, u holda 6.2- §, 3- teoremagaga muvofiq,

$$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge z) = (y \vee x) \wedge (y \vee z) = 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z,$$

$$z = z \vee 0 = z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y) = 1 \wedge (z \vee y) = z \vee y$$

ya'ni $y=z$.*

2-teorema. *To'ldiruvchi Cx element quyidagi xossalarga ega:*

- a) har qanday $x \in E$ uchun $C(Cx)=x$;
- b) agar $x \wedge y = 0$ bo'lsa, u holda $x \leq Cy$;
- c) $x \leq y$ va $Cx \geq Cy$ ekvivalent tafsizliklardir;

d) $M \subset E$ to'plam uchun $\vee M$ (yoki $\wedge M$) mavjud bo'lsa, u holda $C(\vee M) = \wedge CM$ ($C(\wedge M) = \vee CM$), bu yerda $CM = \{Cm : m \in M\}$.

I sboti. a) xossa to'ldiruvchining ta'rifiga binoan 1-teoremadan kelib chiqadi;

b) $x \vee Cy$ elementni a bilan belgilaymiz. So'ngra

$$a \vee y = (x \vee Cy) \vee y = x \vee (Cy \vee y) = x \vee 1 = 1,$$

$$a \wedge y = (x \vee Cy) \wedge y = (x \wedge y) \vee (Cy \wedge y) = 0 \vee 0 = 0$$

Ko‘rinib turibdiki, $a = Cy$, demak, $Cy = x \vee Cy$, ya’ni $x \leq Cy$;

c) agar $x \leq y$ bo‘lsa, bu holda $x \wedge Cy = (x \wedge y) \wedge Cy = x \wedge (y \wedge Cy) = x \wedge 0 = 0$; b) xossaga binoan $x \wedge Cy = 0$ dan $Cy \leq Cx$ kelib chiqadi. Shunga o‘xhash, $Cy \leq Cx$ dan $x \leq y$ kelib chiqadi;

d) $m \in M$ bo‘lsa, u holda $m \leq \vee M$, ya’ni $Cm \geq C(\vee M)$ yoki $C(\vee M)$ element Cm to‘plam uchun quyi chevara.

Agar z element Cm to‘plam uchun quyi chevara, ya’ni har qanday $m \in M$ uchun $z \leq Cm$ bo‘lsa, u holda $Cz \geq m$ va $Cz \geq \vee M$. e) ga binoan $z \leq C(\vee M)$.

Bu tengsizlik ixtiyoriy quyi chevara uchun o‘rinli bo‘lgani tufayli, $\wedge CM = C(\vee M)$ kelib chiqadi. Shunga o‘xhash, $\vee CM = C(\wedge M)$ tenglik ham isbotlanadi.*

3-teorema. $M \subset E$ to‘plam uchun $\vee M$ (yoki $\wedge M$) mavjud bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda har qanday $e \in E$ element uchun quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$$e \wedge (\vee M) = \bigvee_{m \in M} (e \wedge m) \quad (e \vee (\wedge M) = \bigwedge_{m \in M} (e \vee m))$$

(umumlashgan distributiv qonunlar).

Isboti. Har qanday $m \in M$ uchun $\vee M \geq m$ bo‘lgani tufayli $e \wedge (\vee M) \geq e \wedge m$ ya’ni $e \wedge (\vee M)$ element $\{e \wedge m, m \in M\}$ to‘plam uchun yuqori chegaradir. Endi $z \in E$ shu to‘plam uchun ixtiyoriy yuqori chevara bo‘lsin, ya’ni $z \geq e \wedge m$, $m \in M$. U holda har bir $m \in M$ uchun

$$z \vee Ce \geq (e \wedge m) \vee Ce = (e \vee Ce) \wedge (m \vee Ce) = 1 \wedge (m \vee Ce) = m \vee Ce \geq m$$

ya’ni $z \vee Ce \geq \vee M$. Bundan

$$z = z \vee 0 = z \vee (e \wedge Ce) = (z \vee e) \wedge (z \vee Ce) \geq (z \vee e) \wedge (\vee M) \geq e \wedge (\vee M)$$

Shunday qilib, ixtiyoriy z yuqori chevara uchun $z \geq e \wedge (\vee M)$ o‘rinli, demak, $e \wedge (\vee M)$ -aniq yuqori chevara, ya’ni

$$\bigvee_{m \in M} (e \wedge m) = e \wedge (\vee M)$$

Shunga o‘xhash, $e \vee (\wedge M) \bigwedge_{m \in M} (e \vee m)$ tenglik ham isbotlanadi.*

Misollar. 1. Δ ixtiyoriy to‘plam bo‘lib, E uning barcha qism to‘plamlaridan iborat sistema bo‘lsin. Ikki $A, B \in E$ to‘plam uchun $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $A \leq B$ deyiladi. 6.1-§ dagi 4-misolda E ning distributiv panjaraligi 142- betda ko‘rsatilgan edi. Bu panjarada 1 element Δ to‘plamning o‘zi, 0 element esa bo‘sh to‘plamdan iborat. $A \in E$ elementning to‘ldiruvchisi $CA = \Delta / A$ to‘plamdir. Hosil bo‘lgan E Bul algebrasini 2^Δ bilan belgilanadi;

2) Z to‘plam $I=[0,1]$ segmentning Lebeg ma’nosida o‘lchovli qism to‘plamlaridan iborat bo‘lsin. Demak, $Z \subset 2^I$. Ma’lumki, $\emptyset (=0), I (=1) \in Z$ va $a, b \in Z$ bo‘lsa, $a \cup b$ va $a \cap b$ ham Z ning elementlari bo‘ladi. Demak, Z distributiv panjara va 1, 0 ga ega. Lebeg ma’nosida o‘lchovli a to‘plamning to‘ldiruvchisi $Ca = I/a$ ham o‘lchovli bo‘lgani uchun Z Bul algebrasidir;

3) Δ ixtiyoriy cheksiz to‘plam bo‘lsin. E orqali Δ ning chekli yoki to‘ldiruvchisi chekli bo‘lgan qism to‘plamlari sistemasini belgilasak, bu sistema 1) misoldagi 2^Δ Bul algebrasining qismi bo‘ladi va o‘zi ham 2^Δ dagi qisman tartibga nisbatan Bul algebrasini tashkil qiladi.

Ta’rif. E Bul algebrasining ixtiyoriy qism to‘plami (ixtiyoriy sanoqli qism to‘plami) supremumga ega bo‘lsa, E to ‘la (σ - to ‘la) deyiladi.

2- teoremadagi d) xossaladan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. To‘la (σ -to‘la) Bul algebrasida har qanday to‘plam (har qanday sanoqli to‘plam) infimumga ega.

Misollar. 1) 2^Δ Bul algebrasi to‘ladir; 2) misoldagi Z Bul algebrasi to‘la emas, lekin σ -to‘ladir; 3) misoldagi E Bul algebrasi xatto σ -to‘la emas. Buni ko‘rsatish uchun Δ to‘plamni har biri cheksiz bo‘lgan Δ_1 , va Δ_2 to‘plamlarga ajratamiz. So‘ng $M \subset \Delta_1$, sanoqli to‘plam va $V_t = \{t\}$, ($m \in M$) bir nuqtadan iborat bo‘lgan to‘plamlar bo‘lsin. E ning ta’rifiga binoan $B_m \in E$. Ammo $\bigvee_{m \in M} B_m \in E$ chunki M to‘plamning o‘zi ham, to‘ldiruvchisi ham cheksiz.

6.4-§. Vektor panjaralar

Ta’rif. X to‘plam bir vaqtida vektor fazo va panjara bo‘lsin. Quyidagi shartlar bajarilsa, X vektor panjara deyiladi:

- 1) agar $x \geq y$ bo‘lsa, har qanday $z \in X$ element uchun $x + y \geq y + z$;
- 2) agar $x \geq y$ bo‘lsa, har qanday $\lambda \geq 0$ haqiqiy son uchun $\lambda x \geq \lambda y$.

Misollar. 1) R^n vektor fazoda qisman tartibni quyidagicha kiritamiz:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, agar $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2, \dots, x_n \geq y_n$ bo‘lsa.

Ravshanki, bunday qisman tartibga nisbatan R^n vektor panjara hosil qiladi;

2) s fazo ham ilgari kiritilgan algebraik amallar hamda qisman tartibga nisbatan vektor panjaraga misoldir;

3) l_p fazo, $p > 0$. Bu fazo quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklari fazosi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Bu fazoda ham algebraik amallar va qisman tartib koordinatalar bo‘yicha kiritiladi. Agar $x, y \in l_p$ bo‘lsa, u holda $x+y$ va $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ham l_p ning elementlari bo‘lishini isbotlash kerak.

Har qanday $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ haqiqiy sonlar uchun $\alpha + \beta \leq 2\alpha$ yoki $\alpha + \beta \leq 2\beta$, ya’ni $(\alpha + \beta)^p \leq 2^p \alpha^p$ yoki $(\alpha + \beta)^p \leq 2^p \beta^p$ bo‘ladi.

Har ikki holda ham:

$$(\alpha + \beta)^p \leq 2^p (\alpha^p + \beta^p).$$

Bu tengsizlikni x va y elementlarning mos koordinatalariga qo‘llasak, quyidagi tengsizlik hosil bo‘ladi:

$$|x_n + y_n|^p \leq (|x_n| + |y_n|)^p \leq 2^p (|x_n|^p + |y_n|^p).$$

Bu tengsizliklarning n ga nisbatan yig'indisi olinsa, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < +\infty$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $x + y \in l_p$.

Har qanday $n = 1, 2, \dots$ uchun

$$|x_n \vee y_n| \leq |x_n| \vee |y_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \vee y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)^p < \infty$$

Shuning uchun $x \vee y \in l_p$.

Vektor panjaralarning ba'zi elementar xossalarini keltiramiz.

a) $x \geq y$ va $x - y \geq \theta$ teng kuchlidir.

Haqiqatan, $x \geq y$ bo'lsa, u holda 1) ga asosan $x + (-y) \geq y + (-y)$, ya'ni $x - y \geq \theta$. Aksincha $x - y \geq \theta$ bo'lsa, yana 1) ga asosan $x - y + y \geq \theta + y$, ya'ni $x \geq y$.

b) agar $x \geq y$ bo'lsa, $-x \leq -y$. Darhaqiqat, $x \geq y$ bo'lsa, u holda $x - y \geq \theta$, ya'ni $(-y) - (-x) \geq \theta$. Demak, $-y \geq -x$.

c) agar $x \geq y$, $z \geq u$ bo'lsa, $x + z \geq y + u$. Haqiqatan, $x \geq y$ va $z \geq u$ bo'lgani uchun $x - y \geq \theta$ va $z - u \geq \theta$. 1) aksiomaga asosan $(x - y) + (z - u) \geq \theta + z - u = z - u \geq \theta$. Tengsizlikning tranzitivlik xossasiga binoan $(x - y) + (z - u) \geq \theta$; ya'ni

$$(x + z) - (y + u) = (x - y) + (z - u) \geq \theta.$$

Demak, $x + z \geq y + u$.

d) agar $x \geq y$ va $\lambda < 0$ bo'lsa, $\lambda x \leq \lambda y$. Darhaqiqat, $\lambda < 0$ bo'lsa, $-\lambda > 0$; 1) ga asosan $-\lambda x \geq -\lambda y$; b) ga asosan $\lambda x \leq \lambda y$.

1-teorema. X vektor panjara, x_{ξ} ($\xi \in \Gamma$) uning elementlari bo'lib, $y = \sup_{\xi \in \tilde{A}} (-x_{\xi})$ mavjud bo'lsa, u holda $-y = \inf_{\xi \in \tilde{A}} (x_{\xi})$ bo'ladi.

Isboti. $y \geq -x_{\xi}$ bo'lgani uchun b) ga ko'ra $-y \leq x_{\xi}$, $\xi \in \Gamma$. Endi $z \in X$ har qanday x_{ξ} dan kichik element bo'lsa, u holda $-z \geq -x_{\xi}$ va $z \leq -y$ ya'ni $z \leq -y$. Bundan infimumning ta'rifiga asosan $-y = \inf_{\xi \in \tilde{A}} x_{\xi}$.

2-teorema. X vektor panjara va x_{ξ} ($\xi \in \Gamma$) uning elementlari bo'lsin. Agar $\sup x_{\xi}$ mavjud bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar o'rinnlidir:

$$1) \quad y + \sup_{\xi \in \tilde{A}} x_{\xi} = \sup_{\xi \in \tilde{A}} (y + x_{\xi}), \quad y \in X;$$

$$2) \quad \lambda \sup_{\xi \in \tilde{A}} x_{\xi} = \sup_{\xi \in \tilde{A}} (\lambda x_{\xi}), \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in R;$$

$$3) \quad \lambda \sup_{\xi \in \tilde{A}} x_{\xi} = \inf_{\xi \in \tilde{A}} (\lambda x_{\xi}), \quad \lambda \leq 0, \quad \lambda \in R.$$

Ishboti. $\sup x_\xi$ elementni x bilan belgilaymiz. Ravshanki, $y + x_\xi \leq y + x$ tengsizlik har qanday $\xi \in \Gamma$ va $y \in X$ uchun o'rinnlidir. Agar $z \in X$ shunday element bo'lsaki, $y + x_\xi \leq z$ tengsizlik har qanday $\xi \in \Gamma$ uchun bajarilsa, u holda $x_\xi \leq z - y$. Shuning uchun $x \leq z - y$ yoki $x + y \leq z$.

Bundan $x + y = \sup_{\xi \in \Gamma} (y + x_\xi)$, ya'ni 1) tenglik o'rinnli.

Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, 2) tenglik o'z-o'zidan ravshan. Shuning uchun $\lambda > 0$ deb hisoblaymiz. Vektor panjaraning ta'rifidagi 2) shartga binoan har qanday $\xi \in \Gamma$ uchun $\lambda x_\xi \leq \lambda x$ tengsizlik bajariladi. Agar $z \in X$ shunday element bo'lsaki, har qanday $z \in X$ uchun $\lambda x_\xi \leq z$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_\xi \leq \frac{1}{\lambda} z$, bundan $x \leq \frac{1}{\lambda} z$ yoki $\lambda x \leq z$. Shunday qilib, $\lambda x = \sup_{\xi \in \tilde{\Lambda}} (\lambda x_\xi)$, ya'ni 2) tenglik isbotlandi.

So'ng yuqoridagi 2) tenglikka binoan $\sup_{\xi \in \Gamma} |\lambda| x_\xi = |\lambda| x$.

1-teoremaga asosan $\lambda < 0$ bo'lsa,

$$\inf_{\xi \in \tilde{\Lambda}} \{ \lambda x_\xi \} = -\sup_{\xi \in \tilde{\Lambda}} \{ |\lambda| x_\xi \} = -|\lambda| x = \lambda x = \lambda \sup_{\xi \in \tilde{\Lambda}} x_\xi .*$$

Natija. X vektor fazoda qisman tartib kiritilgan bo'lib, vektor panjara ta'rifidagi 1) va 2) shartlar bajarilsa va har qanday $x \in X$ uchun $x \vee \theta$ mavjud bo'lsa, u holda X vektor panjaradir.

Bu natija quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi:

$$[(x - y) \vee \theta] + y = x \vee y, \quad x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)].* \quad (1)$$

3-teorema. *Har qanday $x, y \in X$ uchun ushbu tenglik o'rinnlidir:*

$$(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y.$$

Ishboti. 2-teoremaning natijasidagi (1) formulaga va 2 teoremaning 1) tasdig'iga ko'ra

$$\begin{aligned} x \vee y &= [(x - y) \vee \theta] + y = [(-y) \vee (-x)] + x + y. \quad 1\text{-teoremaga ko'ra} \\ (-y) \vee (-x) &= -(x \wedge y). \end{aligned}$$

$$\text{Shuning uchun } x \vee y = x + y - (x \wedge y), \quad \text{ya'ni}$$

$$(x \vee y) + (x \wedge y) = x + y.$$

Ta'rif. X vektor panjara va x uning biror elementi bo'lsin. $x_+ = x \vee \theta$ element x ning *musbat qismi*, $x_- = (-x) \vee \theta$ element x ning *manfiy qismi*, $|x| = x_+ + x_-$, $|x|$ element esa x ning *moduli* deyiladi.

Agar $x \geq \theta$ bo'lsa, x *musbat element* deyiladi.

Ta'rifdan ravshanki, har qanday $x \in X$ element uchun $x_+, x_-, |x|$ musbat elementlardir. Agar $x \geq \theta$ bo'lsa, u holda $x_+ = x$, $x_- = \theta$, ya'ni $|x| = x$.

Misol. 4) s fazoda $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ element berilgan bo'lsin. Bu holda $x_+ = \{x_n^+\}_{n=1}^\infty$, $x_- = \{x_n^-\}_{n=1}^\infty$ bu yerda:

$$x_n^+ = \begin{cases} x_n, & \text{agar } x_n \geq 0 \\ 0, & \text{agar } x_n < 0 \end{cases} \quad \text{bo'lsa}, \quad x_n^- = \begin{cases} 0, & \text{agar } x_n \geq 0 \\ |x_n|, & \text{agar } x_n < 0 \end{cases} \quad \text{bo'lsa}.$$

R^n, l_p fazolarda ham x_+, x_- va $|x|$ elementlar shunga o'xshash aniqlanadi.

4-teorema. X vektor panjaradagi har qanday x element uchun

$$x = x_+ - x_-.$$

Isboti. 3-teoremaga asosan

$$x = x + \theta = (x \vee \theta) + (x \wedge \theta) = x_+ - [(-x) \vee \theta] = x_+ - x_-.*$$

5-teorema. Vektor panjarada quyidagi munosabatlar o'rinni:

- a) $(x + y)_+ \leq x_+ + y_+, (x + y)_- \leq x_- + y_-;$
- b) agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $(\lambda x)_+ = \lambda x_+, (\lambda x)_- = \lambda x_-;$
- c) agar $\lambda < 0$ bo'lsa, $(\lambda x)_+ = -\lambda x_-, (\lambda x)_- = -\lambda x_+;$
- d) $|x + y| \leq |x| + |y|;$
- e) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|;$
- f) $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta;$

Isboti. a) $x_+ \geq x, y_+ \geq y$ bo'lgani uchun $x_+ + y_+ \geq x + y$ va $x_+ + y_+ \geq \theta$ bo'lgani uchun $x_+ + y_+ \geq (x + y) \vee \theta = (x + y)_+$.

Shunga o'xshash $(x + y)_- \leq x_- + y_-$ tengsizlik ham isbotlanadi.

b) va c) xossalardan 2-teoremdan kelib chiqadi.

d) Isbotlangan a) xossaga ko'ra

$$x_+ + y_+ \leq x_+ + y_+ \text{ va } (x + y)_- \leq x_- + y_-,$$

demak,

$$|x + y| = (x + y)_+ + (x + y)_- \leq x_+ + y_+ + x_- + y_- = |x| + |y|$$

e) xossa b) va c) xossalardan kelib chiqadi.

f) $|x| = \theta$ bo'lsa, bu holda $x_+ + y_+ = \theta$, ya'ni $x = \theta$.*

Endi har qanday vektor panjaraning distributiv panjara ekanligini isbotlaymiz.

6-teorema. Har qanday X vektor panjarada umumlashgan distributiv qonunlar o'rinnidir, ya'ni mos pavishda $\sup_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ va $\inf_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ mavjud bo'lsa, u holda

$$a) x \wedge (\sup_{\xi \in \Gamma} y_\xi) = \sup_{\xi \in \Gamma} (x \wedge y_\xi);$$

$$b) x \vee (\inf_{\xi \in \Gamma} y_\xi) = \inf_{\xi \in \Gamma} (x \vee y_\xi)$$

Bu teoremani isbotlashni quyidagi lemmadan boshlaymiz.

Lemma. $\{x_\xi\}$ $\xi \in \Gamma$ vektor panjara elementlari bo'lib, $x = \sup x_\xi$ mavjud bo'lsin. Bu holda ushbu

$$x_+ = \sup_{\xi \in \Gamma} x_\xi^+, \quad x_- = \inf_{\xi \in \Gamma} x_\xi^-$$

tengliklar o'rinnidir.

Isbot. Assotsiativlik qonuniga asosan (6.1- §, 1-teorema)

$$x_+ = x \vee \theta = (\sup_{\xi \in \Gamma} x_\xi) \vee \theta = \sup_{\xi \in \Gamma} (x_\xi \vee \theta) = \sup_{\xi \in \Gamma} x_\xi^+$$

Endi ikkinchi tenglikni isbotlaymiz, ya'ni

$$x_- = \inf_{\xi \in \Gamma} x_\xi^-$$

$x \geq x_\xi$ bo'lgani sababli $x_- \leq x_\xi^-$ tengsizlik bajariladi. Agar $y \in X$ shunday element bo'lsaki, y har qanday x_ξ^- elementdan kichik, ya'ni $y \leq x_\xi^-$ ($\xi \in \Gamma$) bo'lsa, u holda $-y \geq -x_\xi^- = x_\xi - x_\xi^+$ ya'ni $x_\xi^+ - y \geq x_\xi$. Bu tengsizlikda supremumga o'tsak va yuqorida isbot qilingan birinchi tenglikdan foydalansak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$x_+ - y \geq x = x_+ - x,$$

ya'ni $-y \geq -x_-$ yoki $y \leq x_-$. Shuning uchun inf ning ta'rifiga asosan $x_- = \inf_{\xi \in \Gamma} x_\xi^-$.

Lemma isbotlandi.

Teoremaniig isbotiga o'tamiz.

a) $y = \sup_{\xi \in \Gamma} y_\xi$ mavjud deb faraz qilaylik. Bu holda 2-teoremaga asosan $y - x = \sup_{\xi \in \Gamma} (y_\xi - x)$. Lemmaga ko'ra $(y - x)_- = \inf_{\xi \in \Gamma} (y_\xi - x)_-$.

$$1\text{-teoremaga asosan, } -(y - x)_- = \sup_{\xi \in \Gamma} [-(y_\xi - x)_-],$$

ya'ni

$$(y - x) \wedge \theta = \sup_{\xi \in \Gamma} [(y_\xi - x) \wedge \theta]$$

Bu tenglikning ikki tomoniga x element qo'shilsa, ushbu

$$y \wedge x = \sup_{\xi \in \Gamma} (y_\xi \wedge x)$$

tenglik hosil bo'ladi. Demak, a) isbotlandi.

3) Isbotlangan a) formulada x o'rniga $-x$, y_ξ o'rniga $-y_\xi$ ni olsak, quyidagi formula hosil bo'ladi:

$$y \wedge (-x) = \sup_{\xi \in \Gamma} [(-y_\xi) \wedge (-x)] \quad (\text{bu yerda } y = \sup_{\xi \in \Gamma} (-y_\xi))$$

yoki

$$-(-y \vee x) = \sup_{\xi \in \Gamma} [-y_\xi \vee x] = -\inf_{\xi \in \Gamma} (y_\xi \vee x) \quad \text{yoki } -y \vee x = \inf_{\xi \in \Gamma} (y_\xi \vee x).$$

Ammo bu yerda 2-teoremadagi 3) ga asosan

$$y = \sup_{\xi \in \Gamma} (-y_\xi) = -\inf_{\xi \in \Gamma} y_\xi.$$

Demak, $-y = \inf_{\xi \in \Gamma} y_\xi$. Shuning uchun

$$(\inf_{\xi \in \Gamma} y_\xi) \vee x = \inf_{\xi \in \Gamma} (y_\xi \vee x). *$$

Bu paragrafni «bir» li vektor panjaralarni o'rganish bilan yakunlaymiz.

Ta'rif. X vektor panjaraning «bir» elementi deb, har qanday x musbat element uchun ushbu $x \wedge 1 > \theta$ munosabatni qanoatlantiradigan musbat 1 elementga aytildi.

Har qanday vektor panjara ham birga ega bo'lavermaydi. Masalan, X shunday haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat bo'lsinki, bu ketma-ketliklarning noldan farqli koordinatalarining soni chekli bo'lsin. Bu holda X vektor panjara, ammo birga ega bo'lmaydi.

Shuni ham aytib o'tish kerakki, agar 1 bir bo'lsa, bu holda, masalan, λ ham bir bo'ladi ($\lambda > 0$ - haqiqiy son), ya'ni agar X vektor panjarada bir mavjud bo'lsa, bu birlarning soni cheksizdir. Shuning uchun birli vektor panjara ko'rilganda, bir tayinlanib qo'yilgan deb faraz qilamiz va uni 1 bilan belgilaymiz.

Ta'rif. X birli vektor panjara bo'lib, e uning biror elementi bo'lsin. Agar $e \wedge (1-e) = \theta$ bo'lsa, u holda e birlik element deyiladi. Birlik elementlar to'plamini X ning *bazasi* deymiz va $\nabla(X)$ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, $e \geq \theta$ va $1-e \geq \theta$, ya'ni har qanday e birlik element uchun $\theta \leq e \leq 1$ tengsizlik o'rinnlidir. θ va 1 ham bazaning elementlaridir.

Misollar. R^n va s fazolarda bazaning elementlari koordinatalari 0 va 1 dan iborat bo'lgan elementlardir.

Bu fazolarda bir sifatida mos ravishda (1, 1, ..., 1) va (1, 1, ..., 1, ...) elementlar olinadi. Bazisning ta'rifidan ko'rinish turibdiki, e bazaning elementi bo'lsa, $1-e$ ham bazaning elementidir.

7-teorema. *X birli vektor panjara bo'lib, $\nabla(X)$ uning bazasi bo'lsin. Bu holda $\nabla(X)$ panjara hosil qiladi. Agar $\{e_\xi\}$ birlik elementlar to'plami bo'lib, $e = \sup_{\xi \in \Gamma} e_\xi$, ($e' = \inf_{\xi \in \Gamma} e_\xi$) mavjud bo'lsa, e (e') ham birlik elementdir. Bundan tashqari, $\nabla(X)$ o'zidagi qisman tartibga nisbatan Bul algebrasini hosil qiladi va $e \in \nabla(X)$ element uchun 1-e element uning to'ldiruvchisiadir.*

Ishboti. $e = \sup_{\xi \in \Gamma} e_\xi$ mavjud deb faraz qilaylik. Ushbu $\theta \leq 1-e \leq 1-e_\xi$ munosabatlar har bir indeks uchun o'rinnli va $e_\xi \wedge (1-e_\xi) = \theta$ bo'lgani uchun $e_\xi \wedge (1-e) = \theta$ ham o'rinnlidir. Distributivlik qonuniga asosan

$$e \wedge (1-e) = (\sup_{\xi \in \Gamma} e_\xi) \wedge (1-e) \sup_{\xi \in \Gamma} [e_\xi \wedge (1-e)] = \theta$$

ya'ni $e \in \nabla(X)$.

Agarda $e' = \inf_{\xi \in \Gamma} e_\xi$ mavjud bo'lsa, u holda $-e' = \sup_{\xi \in \Gamma} (-e_\xi)$ va $1-e' = \sup_{\xi \in \Gamma} (1-e_\xi)$. So'ngra $1-e \in \nabla(X)$ bo'lgani uchun, yuqorida ko'rsatganimizga asosan, $1-e' \in \nabla(X)$, ya'ni $e' \in \nabla(X)$.

$\nabla(X)$ to'plam X panjaraning qismi bo'lib, X da distributivlik qonunlari o'rinnli bo'lgani uchun $\nabla(X)$ ham distributiv panjaradir. Bundan tashqari, $0 = \theta$ va 1 elementlar $\nabla(X)$ dagi eng kichik va eng katta elementlardir, chunki yuqorida aytiganiidek, har bir e birlik element uchun $\theta \leq e \leq 1$ munosabat o'rinnlidir. Ta'rifga binoan $e \wedge (1-e) = \theta$. 3-teoremaga asosan

$$[e \vee (1-e)] + [e \wedge (1-e)] = e + (1-e).$$

Demak,

$$e \vee (1-e) = 1$$

Ya'ni 1-e element e elementning to'ldiruvchisining xossalariiga ega, shuning uchun $Ce=1-e$. Shunday qilib, $\nabla(X)$ Bul algebrasidir.*

6.5- §. Qisman tartiblangan topologik vektor fazolar

E haqiqiy vektor fazo bo'lib, unda biror qisman tartib kiritilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar E da quyidagi ikki shart bajarilsa, u *qisman tartiblangan vektor fazo* deyiladi.

- 1) agar $x \geq y$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z \in E$ uchun $x + z \geq y + z$;
- 2) agar $x \geq y$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy musbat son $\lambda \in R$ uchun $\lambda x \geq \lambda y$.

Ravshanki, har bir vektor panjara qisman tartiblangan vektor fazodir.

Qisman tartiblangan vektor fazodagi tartibni konus yordamida ham kirtsat bo'ladi.

Vektor fazoning K qismi 1) $K + K \subset K$ 2) $\lambda K \subset K (\lambda \geq 0)$, 3) $K \cap (-K) = \{\theta\}$ shartlarni qanoatlantirsa, K konus deyiladi.

Ravshanki, qisman tartiblangan E vektor fazoning musbat elementlari to'plami $E_+ = \{x \in E : x \geq \theta\}$ konusdir. Darhaqqat, ixtiyoriy, $x, y \in E_+$ uchun 1) shartga asosan $x + y \geq x \geq \theta$, ya'ni $E_+ + E_+ \subset E_+$ va 2) shartga asosan ixtiyoriy $x \in E_+$ va $\lambda \geq 0$ uchun $\lambda x \in E_+$, ya'ni $\lambda E_+ \subset E_+$ 3) shart ravshan.

Aksincha, E vektor fazoda biror K konus berilgan bo'lsin. E da qisman tartibni quyidagicha kiritamiz:

$$(x \geq y) \Leftrightarrow x - y \in K.$$

Bunda E qisman tartiblangan vektor fazo va $E_+ = K$ ekanligi bevosita tekshiriladi.

E qisman tartiblangan vektor fazo, E_+ esa uning musbat elementlaridan iborat konus bo'lsin. Ushbu $[x, y] = (x + E_+) \cap (y - E_+)$ belgilashni kiritamiz. Bunda $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ bo'lib, bu to'plam E dagi *interval* deyiladi.

Agar E fazoning A qismi to'plami biror intervalda yotsa, A to'plam *tartiban chegaralangan*, qisqacha, (o)-*chegaralangan* deyiladi.

A to'plamning qisman tartiblangan fazoda (o)-*chegaralangan* bo'lishi barcha $x \in A$ uchun $|x| \leq a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a \in A$ element mavjudligiga teng kuchli.

Agar ixtiyoriy $x, y \in A$ elementlar uchun, $x \leq y$ ekanligidan $[x, y] \subset A$ bo'lishi kelib chiqsa, A to'plam (o)-*qavariq* deb ataladi. Masalan, har bir interval (0)-*qavariqdir*.

E ning ixtiyoriy A qismi to'plami bo'yicha

$$[A] = (A + E_+) \cap (A - E_+) = \bigcup_{x, y \in A} [x, y]$$

to'plam tuzaylik. U A to'plamni o'z ichiga olgan eng kichik (o)-*qavariq* to'plam ekanligini payqash oson. Shuning uchun $[A]$ to'plam A ning (o)-*qavariq qobig'i*

deyiladi. Doim $A \subset [A]$ munosabat o‘rinli. $A = [A]$ tenglik bajarilganda va faqat shu holda A to‘plam (o)-qavariq bo‘ladi.

Agar ixtiyoriy $x \in A$, $y \in E$ elementlar uchun $|y| \leq |x|$ tengsizlikdan $y \in A$ munosabat kelib chiqsa, A to‘plam *jismoniy to ‘plam* deyiladi. Har bir jismoniy to‘plam muvozanatlangan ekanligi ravshan. Jismoniy to‘plamning qavariq qobig‘i yana jismoniy to‘plam bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Misol. s vektor panjarada juft nomerli koordinatalari nolga teng vektorlardan iborat to‘plam jismoniydir. Haqiqatan, $y = \{y_i\} \in s$, $x = \{x_i\} \in s$ vektorlar uchun $|y| \leq |x|$ tengsizlik bajarilib $x_{2n} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) bo‘lsa, u holda $y_{2n} = 0$.

E qisman tartiblangan vektor fazo bo‘lsin. $(x, y) \rightarrow x \wedge y$, $(x, y) \rightarrow x \vee y$ amallardan iborat $E \times E$ ning E ga akslantirishlari hamda $x \rightarrow x_+$, $x \rightarrow x_-$, $x \rightarrow |x|$ mosliklardan iborat E ning o‘z-o‘ziga akslantirishlari (o)-*operatsiyalar* [(o)- *amallar*] deyiladi.

1-teorema. *Faraz kelaylik E , bir tomondan topologik vektor fazo, ikkinchi tomondan, qisman tartiblangan vektor fazo bo‘lsin. U holda (o)-operatsiyalardan ixtiyoriy birining uzluksizligidan boshqalarining uzluksizligi kelib chiqadi.*

Teoremaning o‘rnliligi $x + y$, λx amallarning uzluksizligidan va ushbu

$$x \vee y = -\{(-x) \wedge (-y)\}, x_- = (-x)_+, |x| = x + 2x_-,$$

$$x \wedge y = -\frac{1}{2}\{|x - y| - (x - y)\} + y$$

munosabatlardan bevosita kelib chiqadi.*

E qisman tartiblangan topologik vektor fazo bo‘lsin. Agar E da nol elementning (o)- qavariq atroflari bazisi mavjud bo‘lsa, E_+ konus *normal* konus deyiladi. Normal konusli E fazoda nolning muvozanatlangan atroflari bazisi topiladi. Buning ustiga E lokal qavariq fazo bo‘lsa, unda bir vaqtida ham qavariq, ham (o)-qavariq atroflari bazisini qurish mumkin.

Ta’rif. Agar E topologik vektor fazo bir vaqtida vektor panjara hosil qilib, nolning jismoniy atroflari bazisiga ega bo‘lsa, u *topologik vektor panjara* deyiladi. Agar shu bilan birga E ning topologiyasi lokal qavariq bo‘lsa, E *lokal qavariq vektor panjara* deb ataladi. To‘la metrikalanuvchi lokal qavariq vektor panjara qisqacha *Freshe panjarasi* deb yuritiladi. Masalan, R^n va s Freshe panjaralaridir. E normalangan fazo va shu bilan birga vektor panjara bo‘lsa, va $|x| \leq |y|$ tengsizlikdan $\|x\| \leq \|y\|$ kelib chiqsa, E *normalangan panjara* deyiladi. To‘la normalangan panjara qisqacha *Banax panjarasi* deb yuritiladi.

Misol. $C[a, b]$ Banax fazosida qisman tartibni quyidagicha kiritamiz:

$$(f \leq g) \Leftrightarrow f(t) \leq g(t), \forall t \in [a, b], f, g \in C[a, b].$$

Ravshanki, bunda $C[a, b]$ vektor panjara va $|f|(t) = |f(t)|$. Demak, $|f| \leq |g|$ bo‘lsa, u holda

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |g(t)| = \|g\|,$$

ya’ni $C[a, b]$ -Banax panjarasi.

Quyidagi teorema berilgan fazoning topologik vektor panjara ekanligini

amalda tekshirishda qulaylik yaratadi.

2-teorema. E topologik vektor fazo hamda vektor panjara bo'lsin. E topologik vektor panjara bo'lishi uchun uning E_+ konusi normal va (o)-operatsiyalar uzluksiz bo'lishi zarur ham kifoya.

Izboti. E topologik vektor fazo, $\Sigma = \{U\}$ nol elementning jismoniy atroflari bazisi bo'lsin. $U \in \Sigma$ atrofning jismoniyligi tufayli $0 \leq x \leq y$ va $y \in U$ shartlardan $x \in U$ kelib chiqadi. Nolning ixtiyoriy V atrofiga ko'ra, $U + U \subset V$ bo'lgan $U \in \Sigma$ atrof topamiz. Endi nolning $W - W \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi W atrofini topib, $V^* = U \cap W$ to'plamni qaraymiz. Agar $V^* \subset V$ ekanligini ko'rsatsak, bundan E fazoda nolning (o)-qavariq atroflari bazisi mavjudligi kelib chiqadi. Shu maqsadda $x \in V^*$ deb faraz qilaylik, bu holda $x' \leq x \leq x''$ shartni qanoatlantiruvchi x' , $x'' \in U \cap W$ elementlar topiladi. $x'' - x' \in W - W \subset U$ bo'lgani uchun $0 \leq x - x' \leq x'' - x' \in U$ demak, $x - x' \in U$. Shunday qilib, $x = (x - x') + x' \in U + U \subset V$. Bundan E fazoning E_+ konusi normal ekanligi kelib chiqadi.

Endi (o)-amallarning uzluksizligini ko'rsatamiz. 1-teoremaga asoslanib, ularidan birining, masalan, $x \rightarrow x_+$ amalning uzluksizligini ko'rsatish yetarli: $U \in \Sigma$ va $x - x_0 \in U$ bo'lsin. $|x_+ - (x_0)_+| \leq |x - x_0|$ tengsizlikdan va U atrofning jismoniyligidan $x_+ - (x_0)_+ \in U$ kelib chiqadi.

Shu bilan teoremaning zaruriylik qismi isbotlandi. Aksincha, E fazoning E_+ konusi normal va (o)-amallar uzluksiz bo'lsin, E topologik vektor fazoda nolning jismoniy atroflari bazisini quramiz. Buning uchun nolning (o)-qavariq muvozanatlangan atroflari bazisi $\Xi = \{V\}$ ni olamiz. Har bir $V \in \Xi$ uchun $U + U \subset V$ bo'lgan $U \in \Xi$ atrof mavjud. Bunga ko'ra $x \in W$ dan $x_+ \in U$ kelib chiqadigan $W \in \Xi$ atrof tanlaymiz. $x \rightarrow x_+$ ning uzluksizligiga asosan bunday W atrof mavjud.

Shunday qilib, $x \in W$ bo'lsa, $-x \in W$, demak, $x_+ \in U$, $x_- = (-x)_+ \in U$. Bundan $|x| = x_+ + x_- \in U + U \subset V$. Nihoyat, $|y| \leq |x|$, $x \in W$ bo'lsa, $y \in [-|x|, |x|] \subset V$ kelib chiqadi. Bu esa W atrofning jismoniy qobig'i bo'lgan $\{y \in E : \text{biror } x \in W \text{ uchun } |y| \leq |x|\}$ to'plam V atrofda yotadi, ya'ni har bir $V \in \Xi$ atrofga nolning jismoniy atrofini joylashtirish mumkin, demakdir. Talab qilingan bazis qurildi.*

3-teorema. E topologik vektor panjarada uning musbat elementlari konusi E_+ yopiq to'plamdir.

Izboti. $E_+ = \{x \in E : x \geq \theta\}$ tenglikdan E_+ konus $x \rightarrow x_-$ uzluksiz akslantirishda θ ning proobrazi, shu sababli yopiq to'plam bo'lishi kelib chiqadi.*

4-teorema. E normal konusli topologik vektor fazo bo'lsin. Bu holda har bir (o)-chegaralangan qism to'plam topologik ma'noda chegaralangan bo'ladi.

Izboti. $\sum = \{U\}$ nolning (o)-qavariq muvozanatlangan atroflari bazisi deylik. Agar $A \subset [a, b] \subset E$ bo'lsa, berilgan U atrof uchun $\lambda a \in U$, $\lambda b \in U$

bo‘ladigan λ musbat sonni tanlaymiz, U ning (o)-qavariqligidan $\lambda[a,b] \subset U$. Bundan $[a, b]$ intervalning va demak, uning qismi bo‘lgan A to‘plamning topologik ma’noda chegaralanganligi kelib chiqadi.*

Mashq uchun masalalar

1. R to‘g‘ri chiziqdagi x va y elementlar uchun $x-y$ ayirma ratsional son bo‘lsa, biz $x>y$ deylik. Bu munosabat qisman tartib bo‘ladimi?

2. R^n fazodagi qisman tartibda (6.1-§, 1-misol) qanday to‘plamlar chegaralangan bo‘ladi?

3. Tekislikda (2-masala, $n=2$) markazi nol nuqtada, radiusi birga teng bo‘lgan yopiq sharni olamiz. Bu to‘plamning supremumini, infimumini, maksimal va minimal elementlarini toping.

4. Tekislikda shunday qisman tartib kritingki, bunda u chiziqli tartiblangan (ya’ni zanjir) bo‘lsin.

5. s, m fazolar koordinatalar bo‘yicha kiritilgan qisman tartibga nisbatan panjara ekanligini isbotlang.

6. Panjara bo‘lmagan qisman tartiblangan to‘plamga misollar keltiring.

7. Biror M to‘plamning chekli qism to‘plamaridan iborat bo‘lgan X to‘plama odatdagagi qisman tartibni olamiz ($A \subset B \Rightarrow A \leq B$).

a) X ning panjara ekanligini isbotlang;

b) X panjara shartli to‘lami? Qanday M to‘plamlar uchun X to‘la panjara bo‘ladi?

8. X ixtiyoriy Bul algebrasi bo‘lsin. $|x - y|$ orqali $(x \wedge Cy) \vee (Cx \wedge y)$ elementni belgilaymiz. Quyidagi munosabatlarni isbotlang.

a) $x = |y - |x - y||$;

b) $|x \vee y - x \vee z| \leq |y - z|$;

c) $|x \wedge y - x \wedge z| \leq |y - z|$;

d) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$.

Bu yerda $x - y = x \wedge Cy$.

9. 6.3- §, 3- misoldagi Bul algebrasi to‘la ham emas, σ -to‘la ham emasligini ko‘rsatgan edik. Shu Bul algebrasini o‘z ichiga oluvchi to‘la (σ -to‘la) Bul algebrasini toping.

10. $C[a,b]$ vektor panjarada bir mavjudmi?

11. $C[a, b]$ vektor panjaraning hamma birlik elementlarini toping.

12. $S[a,b]$ orqali $[a,b]$ oraliqda Lebeg ma’nosida o‘lchovli funksiyalar fazosini belgilaymiz va $S[a,b]$ da qisman tartibni $C[a,b]$ fazodagidek aniqlaymiz. $S[a,b]$ vektor panjara ekanligini isbotlang.

13. Yuqoridagi 10, 11- masalalarni $S[a,b]$ vektor panjara uchun yeching.

II QISM. OPERATORLAR NAZARIYASI

VII BOB. TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLARDA UZLUKSIZ OPERATORLAR

7.1- §. Uzluksiz chiziqli operatorlar

E va F topologik vektor fazolarning birini ikkinchisiga aks ettiruvchi T chiziqli operator berilgan bo'lsin (1.6-§).

Agar E va F dagi topologiyalarga nisbatan T operator uzluksiz bo'lsa, u uzluksiz chiziqli operator deyiladi.

1-teorema. E topologik vektor fazoni F topologik vektor fazoga aks ettiruvchi T chiziqli operator uzluksiz bo'lishi uchun u nol nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va kifoyadir.

Izboti. Zaruruligi o'z-o'zidan ravshan.

Kifoyaligi. $T\theta = \theta^1$ munosabatdan va T operatorining nol nuqtada uzluksizligidan F fazodagi θ elementning ixtiyoriy V atrofi uchun E fazoda θ elementning shunday U atrofi mavjudligi kelib chiqadiki, ular uchun ushbu

$$T(U) \subset V$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Agar $\Sigma = \{U\}$ -nolning atroflari bazasi va $x \in E$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda x ning atroflari bazasi $\{x+U\}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Demak,

$$T(x+U) = Tx + T(U) \subset Tx + V.$$

Bu munosabatdan operatorning ixtiyoriy x nuqtada uzluksiz ekanligi bevosita ko'rinish turibdi.*

1-natija. Agar T chiziqli operator biror $x_0 \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda T uzluksiz chiziqli operatordir.

2-natija. Agar E va F metrikalangan topologik vektor fazolar bo'lsa, u holda T chizikli operator uzluksiz bulishi uchun ushbu

$$x_n \rightarrow \theta \Rightarrow Tx_n \rightarrow \theta$$

munosabat bajarilishi zarur va kifoyadir.

Misollar. 1. R^n fazoni o'ziga aks ettiruvchi chiziqli operator Yevklid normasida uzluksizdir. Ma'lumki, $E=R^n$ fazoni o'ziga aks ettiruvchi ixtiyoriy T chiziqli operator ushbu

$$T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

ko'rinishdagi matritsa yordamida aniqlanadi. Bu holda biror $x' \in R^n$ elementning tasviri bo'lgan $y' = Tx' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ element quyidagicha aniqlanadi:

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x'_k.$$

* 1) Qulaylik maqsadida, E va F fazolarning nol elementlarini bitta θ harfi bilan belgilaymiz.

Demak,

$$\|Tx - Tx'\| = \|T(x - x')\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (a_{ik}(x_k - x'_k))^2 \right)}$$

Koshi - Bunyakovskiy tengsizligiga binoan

$$\|Tx - Tx'\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x'_k)^2} = M \|x - x'\|.$$

M o‘zgarmas son bo‘lgani uchun $x \rightarrow x'$ munosabatdan $Tx \rightarrow Tx'$ munosabat kelib chiqadi. Ya’ni T - uzluksiz operator.

Rⁿ fazodagi ixtiyoriy chiziqli funksionalning uzluksizligi ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

2. $E = F = C[0,1]$ topologik vektor fazoda T operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$y = Tx = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds.$$

Bu yerda K(t,s) funksiyani $[0,1] \times [0,1]$ to‘plamda uzluksiz deb faraz qilamiz.

Bevosita ko‘rinib turibdiki, T operator $C[0,1]$ fazoni $C[0,1]$ fazoga aks ettiruvchi chiziqli operatordir. Endi biz T ning uzluksiz ekanligini isbotlaymiz.

$C[0,1]$ metrikalangan topologik vektor fazo bo‘lgani uchun 2- natijaga ko‘ra $x_n \rightarrow \theta \Rightarrow Tx_n \rightarrow \theta$ munosabat o‘rinli ekanligini ko‘rsatish kifoya. $[0,1] \times [0,1]$ to‘plam kompakt bo‘lgani uchun K(t,s) funksiya chegaralangan:

$$|K(t,s)| \leq M.$$

U holda

$$\rho(Tx_n, \theta) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 K(t,s)x_n(s)ds \right| \leq M \cdot \max_{0 \leq s \leq 1} |x_n(s)| = M \cdot \rho(x_n, \theta)$$

Demak, $x_n \rightarrow \theta$ ekanligidan $Tx_n \rightarrow \theta$ kelib chiqadi.

2-teorema. E, F haqiqiy topologik vektor fazolar bo‘lib, T additiv (ya’ni $T(x+y) = Tx + Ty$ xossaga ega bo‘lgan) va uzluksiz aks ettirish bo‘lsin. U holda T chiziqli operatordir.

Izboti. T operatorning chiziqliligini isbotlash uchun uning bir jinsliligini, ya’ni ixtiyoriy λ haqiqiy son va $x \in E$ uchun $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ munosabat o‘rinli ekanligini ko‘rsatish kifoya.

Agar $\lambda = n$ natural son bo‘lsa, u holda T operatorning additivligidan ushbu: $T(nx) = T(x+x+\dots+x) = Tx + Tx + \dots + Tx = nTx$ munosabat kelib chiqadi. Ushbu $T(\theta) = T(\theta + \theta) = T(\theta) + T(\theta) = 2T(\theta)$ tenglikdan $T(\theta) = \theta$ tenglik kelib chiqadi. Bundan $T(-x) + T(x) = T(x-x) = T(0) = \theta$, ya’ni $T(-x) = -T(x)$ munosabat kelib chiqadi. m manfiy butun son bo‘lsa, u holda $(-m)$ - natural son. Shuning uchun $T(mx) = -T(-mx) = -(-m)Tx = mTx$, ya’ni $T(mx) = mTx$ munosabat ixtiyoriy m butun son uchun bajariladi. Endi p/q - ixtiyoriy ratsional son bo‘lsin, p, q - butun sonlar; u holda

$$T\left(\frac{p}{q}x\right) = T\left(p \cdot \frac{1}{q}x\right) = pT\left(\frac{x}{q}\right)$$

$\xi = \frac{x}{q}$ -belgilash kirtsak, u holda

$$T\left(\frac{x}{q}\right) = T(\xi) \text{ va } T(x) = T(\xi \cdot q) = qT(\xi)$$

yoki

$$T\left(\frac{x}{q}\right) = T(\xi) = \frac{1}{q}T(x).$$

Demak,

$$T\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}T(x).$$

Nihoyat λ ixtiyoriy haqiqiy son va $\{\lambda_n\}$ ketma-ketlik λ songa yaqinlashuvchi ratsional sonlar ketma-ketligi bo'lsin. U holda T uzlusiz bo'lgani uchun

$$T(\lambda x) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\lambda_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n T x = \lambda T x$$

Bu yerda biz topologik vektor fazoda haqiqiy songa ko'paytirish amalining uzlusizligidan foydalandik.*

E topologik vektor fazoni F topologik vektor fazoga aks ettiruvchi barcha uzlusiz chiziqli operatorlar to'plamini $L(E,F)$ bilan belgilaymiz.

Bu to'plam 1.6-§ da kiritilgan operatorlar ustidagi amallarga nisbatan vektor fazodir.

Ikki uzlusiz operatorning yig'indisi va uzlusiz operatorning songa ko'paytmasi uzlusiz operatorligi topologik vektor fazodagi amallarning uzlusizligidan bevosita kelib chiqadi.

Demak, $L(E,F)$ vektor fazo $Z(E,F)$ fazoning (1.6-§) vektor qism fazosidir.

Agar $E=F$ bo'lsa, $L(E,F)$ o'rniغا $L(E)$ yozamiz. Agar $F=K$ sonlar maydoni bo'lsa, $L(E,K)$ fazoni E' bilan belgilaymiz va E ga qo'shma fazo deymiz. Ya'ni E' qo'shma fazo E da aniqlangan uzlusiz chiziqli funksionallardan tashkil topgan.

$E=F$ bo'lgan holda $Z(E)$ va $L(E)$ fazolarda ko'paytirish amali kiritib, ularni halqaga aylantirish mumkin. $Z(E)$ fazoni halqaga aylantirish uchun ko'paytma sifatida operatorlarning kompozitsiyasi $A \circ B$ ni olamiz:

$$A \cdot B = A \circ B, \text{ ya'ni } (AB)x = A(Bx).$$

Agar ixtiyoriy $x \in E$ uchun $Ax = Bx$ bo'lsa, A va B operatorlar bir-biriga teng deyiladi. Ravshanki,

- 1) $A(BC) = (AB)C;$
- 2) $A(B + C) = AB + AC$
- 3) $(B+C)A = BA + CA$

ya'ni $Z(E)$ halqa; bu halqa chiziqli operatorlar halqasi deyiladi. Uzlusiz operatorlar ko'paytmasining uzlusizligi uzlusiz aks ettirishlarning

kompozitsiyasi uzlusiz ekanligidan kelib chiqadi. Demak, shu amallarga nisbatan $L(E)$ to‘plam ham halqadir. $Z(E)$ va $L(E)$ halqada birlik element mavjud. Bu element birlik operator deb ataladi va quyidagicha ta’riflanadi: ixtiyoriy $x \in E$ uchun $Ix = x$. Har bir $A \in Z(E)$ uchun $AI = IA = A$ munosabat bevosita kelib chiqadi. Agar $\dim E \neq 1$ bulsa, $Z(E)$ halqa kommutativ emas.

Bunga misollar keltiramiz. 1. $L(\mathbb{R}^2)$ ikki o‘lchamli fazodagi chiziqli operatorlar halqasi bo‘lsin. Ma’lumki, bu halqa ikkinchi tartibli kvadrat matritsalar halqasidir. Algebra kursidan ma’lumki, umumiyl holda A va B matritsalar uchun AB matritsa BA matritsaga teng emas. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matritsalarni qarasak,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, $AB \neq BA$.

2. $L(C[a,b])$ operatorlar halqasida

$$\begin{aligned} Ax &= \int_a^b tsx(s)ds, \\ Bx &= tx(t) \end{aligned}$$

deb olsak,

$$\begin{aligned} ABx &= A(Bx) = \int_a^b ts(sx(s))ds = t \int_a^b s^2 x(s)ds, \\ BAx &= B(Ax) = t \int_a^b tsx(s)ds = t^2 \int_a^b sx(s)ds \end{aligned}$$

ya’ni $AB \neq BA$.

I_E va I_F operatorlar mos ravishda E va F dagi birlik operatorlar bo‘lsin. $A \in Z(E,F)$, $B \in Z(F,E)$ operatorlar uchun ushbu

$$BA = I_E \quad (AB = I_F)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda B operator A operatoriga chapdan (o‘ngdan) teskari operator deyiladi.

Agar A operator uchun chapdan teskari bo‘lgan B operator va o‘ngdan teskari bo‘lgan C operator mavjud bo‘lsa, u holda $B=C$.

Darhaqiqat,

$$B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_E C = C.$$

$B=C$ operator A^{-1} bilan belgilanadi va A ga teskari operator deyiladi.

Agar A operator uzlusiz bo‘lib, uning teskari operatori A^{-1} mavjud bo‘lsa, A^{-1} operator umumiyl holda uzlusiz bo‘lmashligi ham mumkin.

Bunga misol keltiramiz. Noldan farqli hadlarining soni ko‘pi bilan chekli bo‘lgan $x=\{x_n\}$ ketma-ketliklar fazosi X da normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \max_{n=1,2,\dots} |x_n|$$

Bu normalangan fazoda $T : X \rightarrow X$ chiziqli operatorni ushbu

$$Tx = \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$$

tenglik bilan aniqlaymiz. Ravshanki,

$$\|Tx\| \leq \|x\|$$

demak, $x \rightarrow \theta$ da $Tx \rightarrow \theta$, ya'ni T -uzluksiz chiziqli operator. Bu operator uchun teskari operator mavjud va

$$T^{-1}x = \{nx_n\}$$

Ammo T^{-1} uzluksiz emas. Darhaqiqat,

$$x^{(k)} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

elementlardan tuzilgan ketma-ketlikni olsak,

$$\|x^{(k)}\| = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Lekin

$$T^{-1}x^{(k)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

ya'ni

$$\|T^{-1}x^{(k)}\| = 1 \neq 0.$$

Demak, T^{-1} uzluksiz emas. Qanday hollarda $A \in L(E, F)$ dan $A^{-1} \in L(F, E)$ kelib chiqishi keyingi paragraflarning birida ko'rildi.

Endi E, F lokal qavariq fazolar bo'lib, $\{p\}$ va $\{q\}$ mos ravishda E va F dagi topologiyalarni aniqlovchi yarim normalar sistemasi bo'lsin.

3-teorema. $T : E \rightarrow F$ chiziqli operator uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi shart zarur va kifoyadir, ixtiyoriy $q \in \{q\}$ yarimnorma uchun shunday $p \in \{p\}$ yarimnorma va musbat β son topiladiki, ushbu

$$q(Tx) \leq \beta p(x) \quad (1)$$

munosabat ixtiyoriy $x \in E$ element uchun bajariladi.

Istboti. Kifoyaligi. F fazoda nolning atroflari bazisidan ixtiyoriy

$$V = \{y \in F : q_i(y) \leq \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}\}$$

atrofni olamiz. (1) shartga ko'ra, shunday $p_i \in \{p\}$ yarimnormalar va β_i sonlar mavjudki,

$$q_i(Tx) \leq \beta_i p_i(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Endi E fazoda ushbu

$$U = \left\{ x \in E : p_i(x) \leq \frac{\varepsilon_i}{\beta_i}, \quad i = \overline{1, n} \right\}$$

atrofini olsak, u holda ixtiyoriy $x \in U$ uchun

$$q_i(Tx) \leq \beta_i p_i(x) = \beta_i \cdot \frac{\varepsilon_i}{\beta_i} = \varepsilon_i,$$

ya'ni $Tx \in V$. Demak, $T(U) \subset V$. Bu T ning θ nuqtada uzlusizligini ko'rsatadi.

1-teoremaga asosan T uzlusiz operatorordir.

Zarurligi. T operator θ nuqtada uzlusiz. Ta'rifga binoan ixtiyoriy $q \in \{q\}$ yarimnorma va $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $p \in \{p\}$ yarimnorma va $\delta > 0$ son topiladiki, ushbu

$$p(x) \leq \delta$$

tengsizlikdan $q(Tx) \leq \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

Ushbu $\lambda p(x) \leq \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\lambda > 0$ sonni tanlab olamiz. U holda $p(\lambda x) \leq \delta$, demak, $q(T(\lambda x)) \leq \varepsilon$, ya'ni $q(Tx) \leq \frac{\delta}{\lambda}$. Agar $p(x)=0$ bo'lsa, λ sonni ixtiyoriy ravishda katta qilib olish mumkin, demak, $q(Tx)=0$. Agar $p(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $\lambda = \frac{\delta}{p(x)}$ deb olish mumkin. Bunda

$$q(Tx) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{\delta} p(x) = \beta p(x) \quad \left(\beta = \frac{\varepsilon}{\delta} \right). *$$

Natija. Lokal qavariq E fazodagi f chiziqli funksional uzlusiz bo'lishi uchun quyidagi shart zarur va kifoyadir: shunday $p \in \{p\}$ yarimnorma va $\beta > 0$ son mavjudki,

$$|f(x)| \leq \beta p(x) \tag{2}$$

tengsizlik ixtiyoriy $x \in E$ uchun bajariladi.

Ta'rif. E, F topologik vektor fazolar bo'lsin. Agar $T: E \rightarrow F$ chiziqli operator E dagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamni F dagi chegaralangan to'plamga aks ettirsa, u chegaralangan deyiladi.

Ixtiyoriy uzlusiz chiziqli operator chegaralangandir. Darhaqiqat, T uzlusiz bo'lsa, F dagi nolning ixtiyoriy V atrofining asli $T^{-1}(V)$ to'plam E dagi nolning atrofidir. E dan biron chegaralangan V to'plam olsak, chegaralanganlik ta'rifiga asosan shunday $\lambda > 0$ son topiladiki, ixtiyoriy $\mu(|\mu| \leq \lambda)$ son uchun $\mu B \subset T^{-1}(V)$, demak, $\mu TB \subset V$, ya'ni TV to'plam F fazoda chegaralangan.

4-teorema. E va F lokal qavariq fazolar bo'lib, E metrikalangan bo'lsin. U holda ixtiyoriy chegaralangan $T: E \rightarrow F$ chiziqli operator uzlusizdir.

Isboti. Dastavval E fazoda biror absolyut qavariq A to'plam ixtiyoriy chegaralangan to'plamni yutuvchi bo'lsa, u nolning atrofi ekanligini isbotlaymiz. Agar E dagi metrikani ρ bilan belgilasak, u holda

$$V_n = \left\{ x \in E : \rho(\theta, x) \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

to'plamlar E da nol atroflarining sanoqli bazisini tashkil qiladi. Agar ixtiyoriy $n = 1, 2, \dots$ uchun $V_n \subset nA$ bo'lmasa, u holda $x_n \in V_n$, $\bar{x_n} \in nA$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Demak, $x_n \rightarrow \theta$, bundan $\{x_n\}$ - chegaralangan to'plam. Ixtiyoriy $n = 1, 2, \dots$ uchun $x_n \in nA$ bo'lgani sababli A

to‘plam $\{x_n\}$ chegaralangan to‘plamni yuta olmaydi. Bu ziddiyat biror n_0 uchun $V_{n_0} \subset n_0 A$ munosabat bajarilishini ko‘rsatadi, ya’ni $\frac{1}{n_0} V_{n_0} \subset A$. Demak, A nolning atrofi.

Endi $T : E \rightarrow F$ chegaralangan chiziqli operator bo‘lsin. F dagi nolning ixtiyoriy absolyut qavariq V atrofini olamiz. Agar $B \subset E$ ixtiyoriy chegaralangan to‘plam bo‘lsa, u holda V to‘plam chegaralangan TV to‘plamni yutuvchidir, ya’ni biror n_0 natural son uchun $TB \subset n_0 V$, bundan $B \subset n_0 T^{-1}(V)$. Demak, $T^{-1}(V) \subset E$ to‘plam E dagi har qanday chegaralangan to‘plamni yutuvchi to‘plamdir. Yuqoridagi mulohazalarga asosan $T^{-1}(V)$ nolning atrofidir, ya’ni T operator nolda va demak, har bir nuqtada uzluksiz.*

7.2- §. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Ochiq aks ettirish va yopiq grafik haqidagi teoremlar

Bu paragrafda ko‘riladigan fazolarni F fazo (ya’ni to‘la metrikalangan vektor fazo) deb faraz qilamiz. ρ metrika F fazodagi biror metrika bo‘lsa, $|x| = \rho(\theta, x)$ belgilashni kiritamiz.

1. *Tekis chegaralanganlik prinsipi.*

$\Gamma = \{\alpha\}$ indekslar to‘plami bo‘lib, $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ sistema E fazoni F fazoga aks ettiruvchi uzluksiz chiziqli operatorlar sistemasi bo‘lsin.

1-teorema. Ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\{T_\alpha x, \alpha \in \Gamma\}$ to‘plam F fazoning chegaralangan qismi bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow \theta} T_\alpha x = \theta$$

munosabat α ga nisbatan tekis bajariladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, ushbu $|T_\alpha x| \leq \varepsilon$ munosabat ixtiyoriy $x(|x| \leq \delta)$ element va ixtiyoriy $\alpha \in \Gamma$ uchun o‘rinli.

Ishboti. Ushbu belgilashni kiritamiz:

$$E_k = \left\{ x \in E : \left| \frac{1}{k} T_\alpha(x) \right| + \left| \frac{1}{k} T_\alpha(-x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \forall \alpha \right\},$$

bu yerda $k = 1, 2, \dots, \varepsilon > 0$. T_α operatorlar uzluksiz bo‘lgani sababli har bir E_k yopiq to‘plamdir. Teoremaning shartiga binoan ixtiyoriy x uchun $\{T_\alpha x, \alpha \in \Gamma\}$ tuplam chegaralangan bo‘lgani sababli shunday k topiladiki, $x \in E_k$, demak,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

E fazo to‘la metrik fazo bo‘lgani uchun Ber teoremasiga binoan (2.6-§, 3-teorema) shunday k_0 natural son topiladiki, E_{k_0} to‘plam F ning biror qismida zich bo‘ladi, ya’ni shunday $B = B(x_0, \delta)$ shar topiladiki, ixtiyoriy $y \in B$ elementning ixtiyoriy U_y atrofi uchun $U_y \cap E_{k_0} \neq \emptyset$ (ya’ni E_{k_0} to‘plam B sharning hamma

yerida zich). Shuning uchun $B \subset \bar{E}_{k_0} = E_{k_0}$ (chunki E_{k_0} yopiq to‘plam). Bu munosabatni quyidagicha yozsa ham bo‘ladi:

$$x_0 + x \in E_{k_0} (x_0 \in E_{k_0}, |x| \leq \delta)$$

Demak, ixtiyoriy $\alpha \in \Gamma$ uchun ushbu

$$\left| \frac{1}{k_0} T_\alpha(x + x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \left| \frac{1}{k_0} T_\alpha(-x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o‘rinlidir. Demak,

$$\left| \frac{1}{k_0} T_\alpha(x) \right| \leq \left| \frac{1}{k_0} T_\alpha(x + x_0) \right| + \left| \frac{1}{k_0} T_\alpha(-x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

ya’ni $|x| \leq \delta$ munosabatdan ixtiyoriy $\alpha \in \Gamma$ uchun ushbu

$$\left| T_\alpha \left(\frac{x}{k_0} \right) \right| \leq \varepsilon$$

munosabat kelib chiqadi.

Ushbu $y = \frac{x}{k_0}$ belgilashni kirlitsak, yuqoridagi xossa quyidagicha yoziladi:

ixtiyoriy $y \in E$ uchun $|y| \leq \frac{\delta}{k_0}$ munosabatdan $|T_\alpha(y)| \leq \varepsilon$

tengsizlik α ga nisbatan tekis bajarilishi kelib chiqadi, ya’ni

$$\lim_{y \rightarrow \theta} T_\alpha y = \theta .*$$

2-teorema (Banax - Shteynxaus teoremasi). E fazoni F fazoga akslantiruvchi $\{T_n\}$ uzluksiz chiziqli operatorlar ketma-ketligi har bir nuqtada fundamental bo‘lsin, ya’ni ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik F fazoda fundamental bo‘lsin. U holda ushbu

$$\lim_{x \rightarrow \theta} T_n x = \theta$$

limit n ga nisbatan tekisdir.

Izboti. $\Gamma = N = \{1, 2, \dots\}$ deb olamiz. Ixtiyoriy x element uchun $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik fundamental, demak chegaralangan. Shularni hisobga olsak, 2-teoremaning izboti 1-teoremadan bevosita kelib chiqadi.*

3-teorema. Agar $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset L(E, F)$ ketma-ketlik har bir nuqtada fundamental bo‘lsa, u holda shunday $T \in L(E, F)$ operator topiladiki, berilgan ketma-ketlik T operatoriga har bir nuqtada yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Izboti. Teoremaning shartiga ko‘ra ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ kema-ketlik F fazoda fundamentaldir.

F fazo to‘la bo‘lgani uchun $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ kema-ketlik biror $y_x \in F$ elementga yaqinlashuvchi bo‘ladi. T operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$Tx = y_x$$

Ravshanki, T operator E fazoni F fazoga aks ettiradi. T chiziqli operatordir, chunki

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha T_n x_1 + \beta T_n x_2] = \alpha T x_1 + \beta T x_2. \end{aligned}$$

Nihoyat, T uzlusiz operator hamdir. Haqiqatdan, Banax-Shteynxaus teoremasini $\{T_n\}$ ketma-ketlikka qo'llasak,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| \leq \delta \Rightarrow |T_n x| \leq \varepsilon, \forall n \in N$$

munosabat kelib chiqadi. Bu yerda n bo'yicha limitga o'tsak, quyidagi munosabat hosil bo'ladi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x| \leq \delta \Rightarrow |Tx| \leq \varepsilon,$$

ya'ni T uzlusiz operatordir.*

2. Ochiq aks ettirish haqidagi teorema.

Ta'rif. Agar T operator ochiq to'plamni ochiq to'plamga akslantirsa u ochiq akslantirish deyiladi.

4-teorema. $T : E \rightarrow F$ uzlusiz chiziqli operator bo'lib, $T(E)=F$ tenglik bajarilsin. Bu holda T ochiq operatordir, ya'ni E dagi ixtiyoriy G ochiq to'plamning tasviri TG to'plam F fazoda ochiqdir.

Izboti. Qulaylik uchun izbotini 3 qismga bo'lamiz:

a) G to'plam F fazodagi θ nuqtaning ochiq atrofi bo'lsin. Bu yerda biz \overline{TG} to'plam F fazoda θ nuqtaning atrofi ekanligini izbotlaymiz. Topologik vektor fazoda ayirish amali uzlusiz bo'lgani uchun θ nuqtaning ushbu

$$U - U \subset G$$

shartni qanoatlantiradigan muvozanatdagi U atrofi mavjud. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ ketma-ketlik

nolga intilgani sababli ixtiyoriy $x \in E$ element uchun shunday n topiladiki, $\frac{x}{n}$ element U atrofga tegishli bo'ladi, ya'ni $x \in nU$. Demak,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU,$$

va

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTU.$$

F to'la bo'lgani uchun Ber teoremasiga asosan shunday n_0 natural son mavjudki, $n_0 TU$ to'plam F ning biror qismida zinch bo'ladi, ya'ni θ ning V ochiq atrofi topiladiki, ushbu

$$V \subset n_0 \overline{TU} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{n_0} V \subset \overline{TU}$$

munosabat bajariladi. Songa ko'paytirish amali uzlusiz bo'lgani uchun $W = \frac{1}{n_0} V$ to'plam $x \in E$ elementning ochiq atrofidir va

$$W \subset \overline{TU}.$$

Demak,

$$\overline{TG} \supset \overline{TU - TU} \supset \overline{TU} - \overline{TU} \supset W - W \ni \theta$$

va $W - W = \bigcup_{\alpha \in W} \{\alpha - W\}$ ochiq to‘plam. Shuning uchun $W - W$ to‘plam θ elementning atrofi, ya’ni $T\bar{G}$ to‘plam θ elementning ochiq atrofini o‘z ichiga oladi.

b) $B_\varepsilon \subset E$ va $C_\varepsilon \subset F$ orqali markazi θ da va radiusi ε ga teng bo‘lgan sharlarni belgilaymiz. Ixtiyoriy $\varepsilon_0 > 0$ son uchun shunday $\varepsilon_i > 0$ sonlar topiladiki, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$ tongsizlik bajariladi. Yuqoridagi a) punktga binoan shunday $\eta_i > 0$ ($\eta_i \rightarrow 0$) sonlar topiladiki, ushbu

$$\overline{TB}_{\varepsilon_i} \supset C_{\eta_i}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

munosabat bajariladi.

Endi quyidagini isbotlaymiz:

$$TB_{2\varepsilon_0} \supset C_{\eta_0},$$

ya’ni

$$\forall y \in C_{\eta_0} \exists x \in B_{2\varepsilon_0} : y = Tx$$

Yuqoridagi (1) munosabatda $i=0$ deb, ixtiyoriy $y \in C_{\eta_0} \subset \overline{TB}_{\varepsilon_0}$ elementni olamiz. Demak, B_{ε_0} da

$$|y - Tx_1| < \eta_1$$

shartni qanoatlantiruvchi x_1 element mavjud. Bundan $y - Tx_1 \in C_{\eta_1}$. Yuqoridagi (1) munosabatni $i=0$ uchun qo‘llasak, ushbu

$$|(y - Tx_1) - Tx_2| < \eta_2$$

tongsizlikni qanoatlantiruvchi $x_2 \in B_{\varepsilon_1}$ element topiladiki, ya’ni $|y - T(x_1 + x_2)| < \eta_2$ va xokozo. Shu tarzda davom ettirib har bir $B_{\varepsilon_{n-1}}$ sharda ushbu

$$\left| y - T \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right| < \eta_n \quad (2)$$

shartni qanoatlantiruvchi x_n element topamiz. Endi $\sum_{i=1}^n x_i$ elementni z_n bilan belgilaymiz. Hosil bo‘lgan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik fundamental ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy m, n ($m < n$) natural sonlar uchun ushbu

$$\begin{aligned} |z_n - z_m| &= |x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \\ &\quad + \dots + |x_n| \leq \varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} + \dots + \varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

munosabatlar o‘rinli. Yuqorida kiritilgan $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun $|z_n - z_m| \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$. Bu munosabatdan $\{z_n\}$ ning fundamental ekanligi kelib chiqadi. Bundan E to‘la bo‘lgani uchun $\{z_n\}$ ketma-ketlik biror x elementga yaqinlashadi, ya’ni

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Endi $\eta_i \rightarrow 0$ shartni va T ning uzluksizligini hisobga olsak, yuqoridagi munosabatdan ushbu

$$y = Tx$$

tenglik kelib chiqadi. Metrik fazoda metrikaning uzluksizligidan foydalanib, quyidagi munosabatlarni yozishimiz mumkin:

$$\rho(\theta, x) = |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_1| + \dots + |x_n|).$$

Ma'lumki, $x_i \in B_{\varepsilon_{i-1}}$, ya'ni $|x_i| \leq \varepsilon_{i-1}$. Bu tengsizlikdan foydalanib ushbu tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|x| = \rho(\theta, x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1}) \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

Demak,

$$x \in B_{2\varepsilon_0}, \text{ yoki } TB_{2\varepsilon_0} \supset C_{\eta_0}.$$

Shunday qilib, E fazodagi θ elementning ixtiyoriy atrofining tasviri F fazoda θ elementning atrofidir.

c) G to'plam E fazoda ixtiyoriy ochiq to'plam bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in G$ element uchun θ elementning ushbu

$$x + M \subset G$$

shartni qanoatlantiruvchi M atorofi topiladi. b) ga asosan θ elementning TM to'plam ichida butunlay joylashgan U atrofi mavjud. Demak,

$$TG \supset T(x + M) = Tx + TM \supset Tx + U$$

ya'ni TG –ochiq to'plam.*

Quyidagi teorema funksional analizning eng muhim teoremlaridan biridir.

5-teorema. (teskari operator haqidagi teorema). $T : E \rightarrow F$ chiziqli izomorfizm bo'lsin. (1.6-§). Agar T uzluksiz bo'lsa, u holda T^{-1} ham uzluksiz chiziqli operatordir.

Ishboti. T^{-1} ning mavjudligi teoremaning shartlaridan bevosita ko'rinish turibdi. T^{-1} chiziqli operator ekanligini isbotlash uchun $x_1, x_2 \in E$ elementlarni va $\alpha \in K$ sonni olamiz. $Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2$ bo'lsin, u holda

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 = y_1 + y_2,$$

demak,

$$T^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2.$$

So'ng $T(\alpha x_1) = \alpha Tx_1 = \alpha y_1$, bundan $T^{-1}(\alpha y_1) = \alpha x_1 = \alpha T^{-1}y_1$, ya'ni T^{-1} chiziqli operator. Endi E fazoda ixtiyoriy G ochiq to'plamni olsak, bu to'plamning T^{-1} operatoriga nisbatan olingan asli $(T^{-1})^{-1}(G) = TG$ ga teng. 4-teoremaga asosan TG-ochiq to'plam, ya'ni T^{-1} –uzluksiz operator.*

3. Yopiq grafik haqidagi teorema.

$T : E \rightarrow F$ chiziqli operator E fazoning $D(T) = \text{dom } T$ vektor qism fazosida aniqlangan bo'lsin, ya'ni $D(T)$ to'plam T operatorning aniqlanish sohasi bo'lsin. Ma'lumki (1.6-§), ushbu

$$grT = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F$$

to‘plam T operatorning grafigi deyiladi. Agar grT to‘plam $E \times F$ fazoda yopiq bo‘lsa, T operator yopiq deyiladi. E, F fazolar F-fazolar bo‘lsa, $E \times F$ fazo ham F-fazo bo‘ladi: bu fazoda $\alpha' = (x', y') \in E \times F$ va $\alpha'' = (x'', y'') \in E \times F$ elementlar orasidagi masofa quyidagicha aniqlandi:

$$\rho(\alpha', \alpha'') = |x' - x''| + |y' - y''|.$$

T operatorning yopiqligi quyidagicha ifodalanadi: agar $(x_n, Tx_n) \in grT$ va $x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y$ bo‘lsa, u holda

$$x \in D(T) \text{ va } y = Tx.$$

6-teorema. (yopiq grafik haqidagi teorema). E fazoni F fazoga aks ettiruvchi yopiq, chiziqli T operator uzlusizdir.

Izboti. T chiziqli operator bo‘lgani uchun grT to‘plam $E \times F$ fazoning vektor qism fazosidir (1.6-§, 2-teorema). gr T to‘plam $E \times F$ fazoning yopiq qism fazosi bo‘lgani uchun gr T ning o‘zi F-fazo hosil qiladi. gr T fazoni E fazoga aks ettiruvchi pr_E operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$pr_E(x, Tx) = x, (x, Tx) \in gr T.$$

Ravshanki, pr_E uzlusiz chiziqli operator bo‘lib, gr T fazoni E fazoga o‘zaro bir qiymatli aks ettiradi va uning qiymatlar sohasi E fazoga tengdir. 5-teoremaga muvofiq uzlusiz chiziqli pr_E^{-1} operator mavjud. Ushbu

$$pr_E^{-1}(x) = (x, Tx), pr_F(x, Tx) = Tx$$

munosabatlardan $T = pr_F \circ pr_E^{-1}$ kelib chiqadi, ya’ni T operator uzlusiz operatorlarning kompozitsiyasiga teng, demak, T ham uzlusiz.*

7.3-§. Normalangan fazoda chiziqli operatorning normasi

E va F normalangan fazolar, $T : E \rightarrow F$ bo‘lsin.

Ta’rif. T chiziqli operator uchun ushbu

$$\|Tx\| \leq M \cdot \|x\|, \forall x \in E$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $M > 0$ son mavjud bo‘lsa, u holda T operator chegaralangan deyiladi. Bu ta’rif 7.1-§ da kiritilgan chegaralanganlik ta’rifiga ekvivalent.

1-teorema. $T : E \rightarrow F$ chiziqli operator uzlusiz bo‘lishi uchun uning chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoyadir.

Izboti. Zarurligi. T uzlusiz, ammo cheragaralanmagan bo‘lsin deb faraz qilaylik. Bu holda ixtiyoriy n natural son uchun shunday $x_n \in E$ element mavjudki, ushbu

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|$$

tengsizlik bajariladi. Ravshanki, $x_n \neq \theta$. Ushbu $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ elementni olsak, bevosita ko‘rinib turibdiki, $\|y_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, ya’ni $y_n \rightarrow \theta$. T uzlusiz bo‘lgani uchun $Ty_n \rightarrow \theta$. Ammo

$$\|Ty_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \cdot \|Tx_n\| > \frac{1}{n\|x_n\|} \cdot n \cdot \|x_n\| = 1.$$

Demak, $\|Ty_n\| > 1$; ziddiyat hosil bo‘ladi.

Kifoyaligi. T chegaralangan chiziqli operator bo‘lsa, u holda ta’rifga asosan $\|Tx\| \leq M \|x\|$ ($M > 0$).

Agar x_n ketma-ketlik θ ga intilsa, u holda $\|x_n\| \rightarrow 0$.

Demak,

$$\|Tx_n\| \leq M \|x_n\| \rightarrow 0,$$

ya’ni $Tx_n \rightarrow \theta$

bundan T operatorning θ nuqtada uzlusizligi va demak, har bir elementda uzlusizligi kelib chiqadi.*

Isbotlangan teoremadan L(E,F) fazo chegaralangan chiziqli operatorlar to‘plamiga tengligi kelib chiqadi.

Ta’rif. $T \in L(E, F)$ operatorning normasi deb quyidagi songa aytildi:

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|Tx\| \leq M(x), \forall x \in E\}.$$

Normaning teng kuchli ta’riflari quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

Lemma.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Izboti. Ixtiyoriy $M (M > \|T\|)$ son va $x (\|x\| \leq 1)$ element uchun $\|Tx\| \leq M$ o‘rinli, bundan

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq M.$$

Demak,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \|T\|,$$

ya’ni

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq \|T\| \quad (1)$$

bundan $\|T\| = 0$ bo‘lganda lemma ravshan. Agar $\|T\| > 0$ bo‘lsa, ushbu

$$0 < b < \|T\|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy b sonni olamiz.

Ta’rifga asosan quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradigan x_0 element mavjud.

$$\|Tx_0\| > b \|x_0\|, x_0 \neq \theta.$$

Demak, $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ elementni olsak, u holda $\|y_0\|=1$ va $\|Ty_0\|=\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}>b$, bundan $\sup_{\|y\|=1}\|Ty\|>b$. Olingan b son $\|T\|$ dan kichik ixtiyoriy son bo'lgani uchun oxirgi tengsizlikdan ushbu

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geq\|T\|$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlikni yuqoridagi (1) tengsizlik bilan solishtirsak, isbotlanayotgan tenglik kelib chiqadi.*

Operator normasining quyidagi xossalari yuqoridagi lemmadan osonlikcha kelib chiqadi:

- 1) $\|T\|=0\Leftrightarrow T=0$;
- 2) $\|\lambda T\|=|\lambda|\cdot\|T\|$, $\lambda\in K$, $T\in L(E,F)$;
- 3) $\|T_1+T_2\|\leq\|T_1\|+\|T_2\|$, $T_1, T_2\in L(E,F)$;
- 4) $\|T_1T_2\|\leq\|T_1\|\|T_2\|$

Masalan, 3) xossani isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} \|T_1+T_2\| &= \sup_{\|x\|\leq 1}\|(T_1+T_2)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|T_1x+T_2x\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}(\|T_1x\|+\|T_2x\|) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\|T_1x\| + \sup_{\|x\|\leq 1}\|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

Demak, $L(E,F)$ fazo normalangan fazodir.

Xususan, $F=K$ bo'lganda, uzlusiz chiziqli funksionallar fazosi normalangan bo'lib, bu fazodagi norma ushbu ko'rinishda aniqlanadi:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

Misollar. 1. Nol operator $Ox=\theta(x\in E)$ tenglik bilan aniqlanadi. Ravshanki, $\|O\|=0$.

2. I birlik operatorni olamiz. Ixtiyoriy $x\in E$ element uchun $Ix=x$ bo'lgani sababli ushbu

$$\|I\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ix\|=\sup_{\|x\|=1}\|x\|=1$$

tenglik, ya'ni $\|I\|=1$ o'rindir.

3. Normalangan E fazoda T chiziqli operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$Tx=\lambda x, \quad \lambda\in K$$

U holda

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|=1}\|\lambda x\|=\sup_{\|x\|=1}|\lambda|\cdot\|x\|=|\lambda|,$$

ya'ni

$$\|T\|=|\lambda|$$

4. n o'lchamli E vektor fazoda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazisni, m o'lchamli F fazoda esa $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ bazisni olamiz.

Ravshanki, $T:E \rightarrow F$ chiziqli operatorni $\{e_i\}_{i=1}^n$ bazis elementlarida aniqlash kifoyadir. Buning uchun o‘z navbatida $g_i = Te_i$ elementlarning $\{e'_i\}_{i=1}^m$ bazis bo‘yicha koordinatalarini bilish yetarlidir, ya’ni

$$g_i = Te_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} e'_k, \quad a_{ik} \in K$$

Agar $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in E$ ixtiyoriy vektor bo‘lsa, u holda

$$y = Tx = T\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^m a_{ik} e'_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i\right) e'_k = \sum_{k=1}^m \eta_k e'_k,$$

bu yerda $\eta_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i \quad (k = 1, 2, \dots, m)$

Demak, T operator (a_{ij}) matritsa yordamida aniqlanib, u $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektorga ushbu ko‘rinishda qo‘llanilar ekan:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = Tx = T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

E va F fazolarda Yevklid normasini olamiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan ushbu

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{k=1}^m \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i \right|^2 \leq \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right) = \left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \right) \|x\|^2 \end{aligned}$$

munosabat, ya’ni ushbu

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2} \|x\|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, T chegaralangan chiziqli operator va

$$\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i,k} |a_{ik}|^2}.$$

Xususan, agar E va F chekli o‘lchamli fazolar Yevklid normasi bilan qaralsa, u holda ixtiyoriy $T:E \rightarrow F$ chiziqli operator uzlucksizdir.

5. $E=R^n$ va $F=R^m$ fazolarda ushbu

$$\|x\| = \max_i |\xi_i|, \quad \|y\| = \max_k |\eta_k|$$

normalarini olib, $T=(a_{ik})$ chiziqli operatorning normasini hisoblaymiz. Ushbu

$$\|y\| = \|Tx\| \max_k |\eta_k| \leq \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \cdot |\xi_i| \leq \|x\| \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$$

munosabatdan

$$\|T\| \leq \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \quad (2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Faraz qilaylik,

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

bo'lsin. U holda $x = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ vektorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi_i^0 = \operatorname{sgn} a_{ik_0} = \begin{cases} 1, & a_{ik_0} > 0 \text{ bo'lsa}, \\ -1, & a_{ik_0} < 0 \text{ bo'lsa}, \\ 0, & a_{ik_0} = 0 \text{ bo'lsa}. \end{cases}$$

bundan ravshanki, $\|x_0\| \leq 1$ va

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq \|Tx_0\| = \max_k \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_i^0 \right| = \sum_{i=1}^n a_{ik_0} \operatorname{sgn} a_{ik_0} = \\ &= \sum_{i=1}^n |a_{ik_0}| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \end{aligned} .$$

Bundan va (2) tengsizlikdan

$$\|T\| = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}|.$$

6. E separabel Gilbert fazosida $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ortonormal bazis bo'lsin. U holda (4.3-§) ixtiyoriy $x \in E$ element ushbu

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

ko'rinishga ega. Biror $C > 0$ son va $\{\lambda_n\} (|\lambda_n| \leq C)$ sonli ketma-ketlikni olib, operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \xi_i) e_i. \quad (3)$$

Tx elementning mavjudligi ushbu

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \xi_i|^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$$

tengsizlikdan va Riss-Fisher teoremasidan bevosita kelib chiqadi (4.3-§).

T ning chiziqli operator ekanligi bevosita ko'rinib turibdi. (3) tenglikdan $T e_i = \lambda_i e_i$ tenglik kelib chiqadi. Ushbu $\lambda = \sup |\lambda_n|$ belgilashni kiritamiz. U holda

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i \xi_i|^2 \leq \lambda^2 \|x\|^2,$$

bundan

$$\|T\| \leq \lambda.$$

Har bir e_i vektor birlik sharga tegishli (ya'ni $\|e_i\| = 1$) bo'lgani uchun

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \geq \sup_n \|Te_n\| = \sup_n |\lambda_n| = \lambda$$

Demak,

$$\|T\| = \lambda = \sup_n |\lambda_n|$$

7. $L_2[a,b]$ fazoda Fredgolm operatori.

D orqali ushbu to‘plamni belgilaymiz:

$$D = [a,b] \times [a,b] = \{(t,s) : t \in [a,b], s \in [a,b]\}.$$

Biror $K(t, s)$ funksiya $L_2(D)$ fazoga tegishli, ya’ni ushbu

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt = K^2 < \infty \quad (4)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsin. $K(t, s)$ funksiya yordamida $L_2(a,b)$ Gilbert fazosida chiziqli operatorni quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy $x(t) \in L_2[a,b]$ element uchun

$$Tx = \int_a^b K(t, s)x(s)ds = y(t). \quad (5)$$

Dastavval, $y(t)$ funksiya $L_2(a,b)$ fazoning elementi ekanligini ko‘rsatamiz.

Fubini teoremasiga asosan deyarli hamma $t \in [a,b]$ nuqtalar uchun $|K(t, s)|^2$ funksiya s argumentga nisbatan Lebeg ma’nosida jamlanuvchidir. Demak, deyarli hamma t uchun $y(t)$ funksiya ikki elementning skalyar ko‘paytmasiga teng ya’ni chekli. Ushbu

$$|K(t)|^2 = \int_a^b |K(t, s)|^2 ds$$

funksiya jamlanuvchidir, chunki

$$\int_a^b |K(t)|^2 dt = \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt = K^2 < \infty.$$

Demak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga asosan

$$|y(t)|^2 = \left| \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right|^2 \leq \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right) \left(\int_a^b |x(s)|^2 ds \right) = K^2 \|x\|^2$$

Shuning uchun ushbu

$$\int_a^b |y(t)|^2 dt \leq \int_a^b |K(t)|^2 dt \cdot \|x\|^2 = K^2 \|x\|^2 \quad (6)$$

integral mavjud, ya’ni $y(t) \in L_2[a,b]$. Demak, (5) formula $L_2(a,b)$ fazoda operatorni aniqlaydi.

Bu T operator Fredgolm operatori, $K(t, s)$ funksiya esa uning o‘zagi deyiladi. Yuqoridagi (6) munosabatdan

$$\|T\| \leq K = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 ds dt}$$

tengsizlik va T uzlusiz operatorligi bevosita kelib chiqadi.

7.4-§. Normalangan fazolarda funksional analizning asosiy prinsiplari

I. *Banax-Shteynxaus teoremasi.*

1-teorema. E va F Banax fazolari bo‘lib, $\{T_n\} \subset L(E, F)$ operatorlar ketma-ketligi har bir nuqtada fundamental bo‘lsin. U holda ularning normalari ketma-ketligi $\{\|T_n\|\}$ chegaralangandir.

Isboti. Banax fazosi F - fazo bo‘lgani uchun 7.2-§ dagi 2-teoremaning shartlari bajariladi. Shu teoremaga asosan ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} T_n x = 0$$

munosabat n ga nisbatan tekis bajariladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjudki, $\|T_n x\| < \varepsilon$ munosabat ixtiyoriy n natural son va normasi δ dan kichik bo‘lgan x element uchun bajariladi. Demak, ixtiyoriy $\|x\| \leq 1$ element uchun ($\|\delta x\| \leq \delta$ munosabatni nazarda tutsak) ushbu

$$\delta \|T_n x\| = \|T_n(\delta x)\| \leq \varepsilon,$$

ya’ni

$$\|T_n x\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Operator normasining ta’rifiga asosan, ushbu

$$\|T_n x\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$$

tengsizlik ixtiyoriy n uchun o‘rinlidir.

II. *Xan -Banax teoremasi.*

2-teorema. Normalangan E fazoning E_0 vektor qism fazosida uzlusiz f_0 chiziqli funksional berilgan bo‘lsin. U holda E fazoda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi uzlusiz f chiziqli funksional mavjud:

$$1) f|_{E_0} = f_0$$

$$2) \|f\| = \|f_0\|$$

Isboti. E fazoda ushbu $p(x) = \|f_0\| \cdot \|x\|$ yarimnormani kiritamiz (aslida $p(x)$ -normadir). Bu holda ixtiyoriy $x \in E_0$ element uchun $|f_0(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\| = p(x)$ 5.3-§ dagi Xan-Banax teoremasiga asosan quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksional mavjud:

$$1) f|_{E_0} = f_0;$$

$$2) \text{ixtiyoriy } x \in E \text{ element uchun } |f(x)| \leq p(x).$$

Demak,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} p(x) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f_0\| \cdot \|x\| = \|f_0\|,$$

ya'ni

$$\|f\| \leq \|f_0\|.$$

Bu munosabatdan f funksionalning chegaralanganligi va, demak, uzlusizligi kelib chiqadi va nihoyat,

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E_0}} |f(x)| \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E_0}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E_0}} |f_0(x)| = \|f_0\|$$

Demak, $\|f\| = \|f_0\|^*$.

III. L(E,F)fazoning to'laligi.

3-teorema. E normalangan fazo, F Banax fazosi bo'lsa, u holda L(E, F) fazo operatorning normasiga nisbatan Banax fazosidir.

Ishboti. L(E, F) fazoning normalangan fazoligi ko'rsatilgan edi.

Bu fazo to'la ekanligini isbotlaymiz. $\{T_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjudki, ixtiyoriy $n, m > N$ natural sonlar uchun ushbu tengsizlik o'rinnlidir:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Ixtiyoriy $x(\|x\| \leq 1)$ element uchun ushbu

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlikdan $\{T_n x\}$ ketma-ketlikning F fazoda fundamental ekanligi kelib chiqadi. F fazo to'la bo'lgani uchun $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ mavjud. Ixtiyoriy $z \in E$ elementni ushbu $z = \lambda x_0 (\|x_0\| \leq 1)$ ko'rinishda yozish mumkin.

Demak,

$$T_n z = T_n \lambda x_0 = \lambda T_n x_0 \rightarrow \lambda Tx_0.$$

Bu z uchun $Tz = \lambda Tx_0$ deb olamiz. Bu bilan $T: E \rightarrow F$ operatorni aniqladik. Ravshanki, T-chiziqli operator. Endi T operatorning uzlusizligini ko'rsatamiz. Buning uchun T ning chegaralangan ekanligini isbotlash kifoyadir. (1) tengsizlikda m bo'yicha limitga o'tsak, ushbu

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \quad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$\|Tx\| = \|T_n x - (T_n x - Tx)\| \leq \|T_n x\| + \|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x\| + \varepsilon \leq \|T_n\| + \varepsilon.$$

$\{T_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lgani uchun ($\|T_n\|$) ketma-ketlik chegaralangan, ya'ni shunday M son mavjudki, ixtiyoriy n uchun $\|T_n\| \leq M$.

Demak, ixtiyoriy $x(\|x\| \leq 1)$ element uchun

$$\|Tx\| \leq M + \varepsilon.$$

bundan

$$\|T\| = \sup_{x \leq 1} \|Tx\| \leq M + \varepsilon.$$

Shunday qilib, T- chegaralangan.

Endi yuqoridagi (2) tengsizlik ixtiyoriy $x(\|x\| \leq 1)$ element uchun o‘rinli ekanligini hisobga olsak, $n \geq N$ bo‘lganda ushbu

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0,$$

ya’ni T_n ketma-ketlik norma bo‘yicha T operatoriga yaqinlashuvchi ekan.

Natija. Ixtiyoriy normalangan E fazo uchun $E' = L(E, K)$ qo‘shma fazo funksionalning normasiga nisbatan Banax fazosidir.

Bu natija $K = (R \text{ yoki } C)$ fazoning to‘laligidan bevosita kelib chiqadi.

IV. Teskari operator haqidagi teorema.

4-teorema. E va F Banax fazolara bo‘lib. $T : E \rightarrow F$, chiziqli izomorfizm bo‘lsin. Agar T uzlusiz operator bo‘lsa, u holda T^{-1} ham uzlusiz chiziqli operatorordir.

Izboti. B-fazolar F-fazolarning xususiy holi bo‘lgani uchun bu teorema 7.2-§ dagi 5-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

1-natija. T_0 operator E Banax fazosini F Banax fazosiga akslantiruvchi chegaralangan chiziqli operator bo‘lib, T_0^{-1} unga teskari operator bo‘lsin.

$\Delta T : E \rightarrow F$ biron chegaralangan operator bo‘lib, $\|\Delta T\| < \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$ tengsizlik

bajarilsin. U holda $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ operator mavjud va chegaralangan.

Izboti. Ixtiyoriy $y \in F$ elementni olamiz va ushbu

$$Bx = T_0^{-1}y - T_0^{-1}\Delta Tx$$

formula bilan aniqlangan $B : E \rightarrow E$ aks ettirishni ko‘ramiz.

Ixtiyoriy $x_1, x_2 \in E$ uchun

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|T_0^{-1}\Delta Tx_2 - T_0^{-1}\Delta Tx_1\| \leq \|T_0^{-1}\Delta T\| \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

$\|\Delta T\| < \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$ tengsizlikdan B aks ettirish qisqartirib aks ettirish ekanligi bevosita

kelib chiqadi. Qisqartirib aks ettirish prinsipiiga asosan ushbu

$$x = Bx$$

shartni qanoatlantiruvchi yagona nuqta topiladi (2.9- §), ya’ni

$$x = Bx = T_0^{-1}y - T_0^{-1}\Delta Tx,$$

demak,

$$T_0x + \Delta Tx = y.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $y \in F$ uchun $T_0x + \Delta Tx = y$ tenglama yagona yechimiga ega, ya’ni $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ mavjud. Teskari operator haqidagi teoremagaga asosan $(T_0 + \Delta T)^{-1}$ - chegaralangan operator.

2-natija. E Banax fazosida I birlik operator, $T : E \rightarrow F$ chegaralangan va $\|T\| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi operator bo'lsin. U holda $(I - T)^{-1}$ operator mavjud bo'lib, u chegaralangan va ushbu ko'rinishga ega:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

Ishboti. $(I - T)^{-1}$ mavjudligi va chegaralanganligi 1-natijadan bevosita kelib chiqadi: $(T = I, \Delta T = T)$. $\|T\| < 1$ tengsizlikdan $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty$. E fazo to'la bo'lgani uchun $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\|$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ qatorning yig'indisi ham chegaralangan operatorligi kelib chiqadi, chunki bu holda 3-teoremaga asosan $L(E, E) = L(E)$ -Banax fazosi. Ixtiyoriy n uchun ushbu

$$(I - T) \sum_{k=0}^n T^k = \sum_{k=0}^n T^k (I - T) = I - T^{n+1}$$

tenglik o'rinni. Endi $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ munosabatdan

$$(I - T) \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k (I - T) = I$$

ya'ni

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

kelib chiqadi.

Teskari operator haqidagi yana bir iborani keltirishdan oldin quyidagi lemmanni isbotlaymiz.

Lemma. E normalangan fazo, F Banax fazosi bo'lsin, E fazoning hamma yerida zinch E₀ vektor qism fazoda aniqlangan ixtiyoriy chegaralangan $T_0 : E_0 \rightarrow F$ chiziqli operatorni uning normasini saqlagan holda butun E fazoga yagona ravishda davom ettirish mumkin.

Ishboti. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun unga yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset E_0$ ketma-ketlik mavjud. F fazoda $\{T_0 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikni ko'ramiz. Ushbu

$$\|T_0 x_n - T_0 x_m\| \leq \|T_0\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

tengsizlikka asosan $\{T_0 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik fundamentaldir va F to'la bo'lgani sababli u biror $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0 x_n \in F$ limitga ega. Bu limit x elementga yaqinlashuvchi ketma-ketlikka bog'liq emas, chunki agar $x'_n \rightarrow x$ boshqa bir ketma-ketlik bo'lsa, u holda

$$\|T_0 x'_n - T_0 x_n\| \leq \|T_0\| \cdot \|x'_n - x_n\| \rightarrow 0,,$$

ya'ni

$$\lim_{n \leftarrow \infty} T_0 x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 x_n.$$

Endi biz $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 x_n$ deb olsak, u holda T operator x elementda aniqlangan bo'lib, u shu tarzda butun E fazoga davom ettiriladi. Ravshanki, bu operator chiziqli. Ushbu

$$\|T_0 x_n\| \leq \|T_0\| \cdot \|x_n\|$$

tengsizlikda n bo'yicha limitga o'tsak, $\|Tx\| \leq \|T_0\| \cdot \|x\|$ tengsizlik, ya'ni $\|T\| \leq \|T_0\|$ munosabat kelib chiqadi. Ikkinchini tomondan, T operator T_0 ning davomi bo'lgani uchun $\|T\| \geq \|T_0\|$ ya'ni $\|T\| = \|T_0\|$. Nihoyat, T operatorning yagonaligini isbotlaymiz. Agar T' operator T_0 ning boshqa bir davomi bo'lsa, u holda

$$T' x_n = T_0 x_n = Tx_n.$$

Bu yerda n bo'yicha limitga o'tsak, $T' x = Tx$, ya'ni $T' = T$ kelib chiqadi.

Natija. Agar E normalangan fazoni F Banax fazosiga akslantiruvchi T chiziqli operator E ning hamma yerida zich to'plamda nolga teng bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in E$ uchun $Tx = \theta$. Endi isbotlangan lemmadan foydalanib, teskari operator haqidagi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

5-teorema. E, F Banax fazolari bo'lib, $T : E \rightarrow F$ chiziqli operator bo'lsin. T operator chegaralangan teskari operatoriga ega bo'lishi uchun quyidagi ikki shart zarur va kifoyadir:

1) $\text{Im } T = \{Tx : x \in E\}$ to'plam F ning hamma yerida zich;

2) biror $C > 0$ son va ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$\|Tx\| \geq C \|x\|.$$

Isboti. Zarurligi. Agar $T^{-1} : F \rightarrow E$ chegaralangan bo'lsa, ravshanki, $T(E) = \text{Im } T = F$ va $\|T^{-1}y\| \leq M \cdot \|y\|$, $y \in F$, $M > 0$. Bu holda ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$\|T^{-1}(Tx)\| \leq M \|Tx\|,$$

ya'ni $\|x\| \leq M \|Tx\|$, bundan

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{M} \|x\| = C \|x\| \left(C = \frac{1}{M} > 0 \right).$$

Kifoyaligi. Teoremaning shartlari bajarilgan bo'lsa, T- monomorfizmdir, ya'ni $\ker T = \{\theta\}$. Darhaqiqat agar $Tx = \theta$ bo'lsa, u holda 2) shartga asosan $\|Tx\| \geq C \|x\|$, demak $\|x\| = 0$, ya'ni $x = \theta$. Shuning uchun $\text{Im } T \subset F$ to'plamda T^{-1} operator aniqlangan. Bu operator chegaralangan. Haqiqatan, ixtiyoriy $y = Tx \in \text{Im } T$ uchun shartga asosan

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{C} \|Tx\| = \frac{1}{C} \|y\|.$$

Lemmagaga asosan bu operatorning normasini saqlagan holda butun F fazoga davom ettirish mumkin. Hosil bo'lgan operator T operator uchun teskari operatordir.

7. 5-§. Chiziqli operatorlar fazosida topologiyalar

E va F lokal qavariq fazolar bo‘lib, ulardagi topologiyalarni aniqlovchi yarimnormalar sistemasi mos ravishda $\{p\}$ va $\{q\}$ bo‘lsin.

1. Oddiy yaqinlashish topologiyasi (nuqtalarda yaqinlashish topologiyasi, s-topologiya). $L(E,F)$ fazodagi oddiy yaqinlashish topologiyasi deb, ushbu

$$p(T) = p(T, x_1, x_2, \dots, x_n, q) = \sup_{1 \leq k \leq n} q(Tx_k)$$

yarimnormalar bilan aniqlangan lokal qavariq topologiyaga aytildi, bu yerda

$$T \in L(E, F), \quad q \in \{q\}, \quad \{x_k\}_{k=1}^n \subset E$$

$L(E,F)$ fazo oddiy yaqinlashish topologiyasi bilan ko‘rilganda bu fazo $L_s(E,F)$ bilan belgilanadi. Agar $\{T_n\} \subset L(E, F)$ ketma-ketlik T operatorga shu topologiya bo‘yicha yaqinlashsa, buni ushbu ko‘rinishda belgilaymiz:

$$T_n \xrightarrow{s} T$$

Quyidagi teorema ta’rifdan bevosita kelib chiqadi.

1-teorema. Quyidagi ikki ibora ekvivalentdir:

$$1) \quad T_n \xrightarrow{n} T, \quad T_n, T \in L(E, F)$$

2) ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $T_n x$ ketma-ketlik F fazoda $T x$ elementga yaqinlashadi.

II. Tekis yaqinlashish topologiyasi. (b- topologiya). Endi $L(E,F)$ fazoda lokal qavariq topologiyani boshqacharoq kiritamiz. $\Omega = \{B\}$ sistema E fazodagi chegaralangan to‘plamlar sistemasi bo‘lsin. T chiziqli operatorning yarimnormasini ushbu formula bilan aniqlaymiz.

$$r(T) = r(T, B, q) = \sup_{x \in B} q(Tx),$$

bu yerda $T \in L(E, F)$, $q \in \{q\}$, $B \in \Omega$. Kiritilgan $\{p\}$ yarimnormalar sistemasi lokal qavariq topologiyani aniqlaydi. Bu topologiya b-topologiya yoki chegaralangan yaqinlashish topologiyasi (yoki tekis yaqinlashish topologiyasi) deyiladi. $L(E, F)$ fazo b-topologiya bilan olinganda uni $L_b(E, F)$ bilan belgilaymiz.

Ta’rifdan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

2-teorema. Quyidagi ikki ibora ekvivalentdir:

$$1) \quad T_n \xrightarrow{b} T, \quad T_n, T \in L(E, F);$$

2) F fazodagi θ elementning ixtiyoriy U atrofi va ixtiyoriy $B \in \Omega$ to‘plam uchun shunday $N = N(U, B)$ natural son mavjudki, ushbu

$$T_n x - Tx \in U$$

munosabat ixtiyoriy $x \in B$ element va $n \geq N$ natural son uchun bajariladi.

Agar E va F normalangan fazolar bo‘lsa, oddiy yaqinlashish topologiyasi operatorlarning kuchli topologiyasi deyiladi, chegaralangan yaqinlashish topologiyasi esa operatorlarning tekis topologiyasi deyiladi.

Ixtiyoriy chekli to‘plam chegaralangan bo‘lgani uchun b-topologiya s-topologiyadan kuchliroqdir.

Ta’rif. E topologik vektor fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik va $x \in E$ berilgan bo‘lsin. Agar nolning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday $N(U)$ natural son topiladiki, barcha $n \geq N(U)$ ($n, m \geq N(U)$) uchun $x - x_n \in U$ ($x_m - x_n \in U$) munosabat bajarilsa, x_n ketma ketlik x elementga yaqinlashuvchi (fundamental) deyiladi.

Ta’rif. Agar topologik vektor fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u sekvensial to‘la fazo deyiladi.

3-teorema. E va F Banax fazolari bo‘lsa, $L_s(E, F)$ sekvensial to‘la fazodir.

Izboti. Banax fazolari F-fazolarning xususiy holi bo‘lgani uchun bu teorema 7.2-§ dagi 3-teoremaning natijasidir. *

4-teorema. E va F normalangan fazolar bo‘lsin. Bu holda $L(E, F)$ fazodagi operatorlarning tekis topologiyasi $L(E, F)$ fazoda operatorlarning normasi bilan aniqlangan topologiyaga teng kuchli.

Izboti. Ravshanki, normalangan E fazoda B to‘plam chegaralangan bo‘lishi uchun ushu

$$\beta = \sup \{\|x\| : x \in B\} < \infty$$

munosabat zarur va kifoyadir. Demak, $B \in \Omega$ to‘plam sifatida $B_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ sharni olsak, quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$p(T, B_1, \|\cdot\|) = \sup_{x \in B_1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Demak, operatorlarning tekis topologiyasi normaning topologiyasidan kuchliroqdir.

Endi tekis topologiyada θ elementning U atrofini olamiz, ya’ni

$$\begin{aligned} U &= \left\{ T : p(T, B, \|\cdot\|) < \varepsilon \right\} = \left\{ T : \sup_{x \in B} \|Tx\| < \varepsilon \right\} \supset \left\{ T : \sup_{\|x\| \leq \beta} \|Tx\| < \varepsilon \right\} = \left\{ T : \beta \|T\| < \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ T : \|T\| < \frac{\varepsilon}{\beta} \right\} \end{aligned}$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, normaning topologiyasi tekis topologiyadan kuchliroqdir. Demak, bu topologiyalar teng kuchli.

Normalangan fazolarda operatorlarning s-topologiyada (ya’ni kuchli topologiyada) yaqinlashish shartini tekshirishda quyidagi teorema foydalidir.

5-teorema. E Banax fazosini F Banax fazosiga aks ettiruvchi chegaralangan chizikli operatorlarning $\{T_n\}$ ketma-ketligi berilgan bo‘lsin $\{T_n\}$ ketma-ketlik biron T operatoriga s-topologiyada yaqinlashishi uchun quyidagi ikki shart zarur va kifoyadir:

- 1) $\{\|T_n\|\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan (ya’ni biror $M > 0$ uchun $\|T_n\| \leq M, n = 1, 2, \dots$);
- 2) E fazoda to‘la bo‘lgan (4.1-§) biror Δ to‘plamning ixtiyoriy x elementi uchun $n \rightarrow \infty$ da $T_n x \rightarrow Tx$.

Ishboti. Zarurligi. 1) shart 7.4- § dagi Banax-Shteynxaus teoremasidan, 2) shart esa ta’rifdan bevosita kelib chiqadi.

Kifoyaligi. Δ to‘plamning E fazoda to‘laligi uning chiziqli qobig‘i bo‘lgan $L[\Delta]$ to‘plamning E fazoda zichligidan iboratligini eslaylik. 1) va 2) shartlar bajarilgan bo‘lsin. U holda $\{T_n\}$ operatorlar chiziqli bo‘lgani tufayli ushbu

$$T_n x \rightarrow T x$$

munosabat $L[\Delta]$ to‘plamning har bir x elementi uchun ham bajariladi. Endi x_0 element E fazoning ixtiyoriy elementi bo‘lsin. $L[\Delta]$ to‘plam E fazoda zich bo‘lgani uchun x_0 elementga yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset L[\Delta]$ ketma-ketlik mavjud. 1) shartga asosan ushbu

$$\|T_n\| \leq M$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi M son mavjud. $M_0 = \max(M, \|T\|)$ belgilash kiritamiz.

$\{x_k\}$ ketma-ketlik x_0 ga yaqinlashuvchi bo‘lgani sababli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son topiladiki, ushbu

$$\|x_k - x_0\| < \varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy $k > N$ natural son uchun bajariladi. Demak, ushbu munosabatlar o‘rinlidir:

$$\begin{aligned} \|T_n x_0 - T x_0\| &\leq \|T_n x_0 - T x_k\| + \|T_n x_k - T x_k\| + \|T x_k - T x_0\| \leq \\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x_0 - x_k\| + \|T_n x_k - T x_k\| + \|T\| \cdot \|x_k - x_0\| < M_0 \varepsilon + . \\ &+ \|T_n x_k - T x_k\| + M_0 \varepsilon = 2M_0 \varepsilon + \|T x_k - T x_0\| \end{aligned}$$

Ammo har bir x_k element $L[\Delta]$ ga tegishli bo‘lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da ushbu

$$\|T_n x_k - T x_k\| \rightarrow 0$$

munosabat kelib chiqadi, bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x_0 - T x_0\| \leq 2M_0 \varepsilon$$

ε -ixtiyoriy kichik son bo‘lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x_0 - T x_0\| = 0,$$

ya’ni $T_n \xrightarrow{s} T$

Endi yuqorida kiritilgan $L(E, F)$ fazodagi topologiyalarni $L(E, K) = E'$ fazoda ko‘ramiz. E' fazo $L(E, F)$ fazoning xususiy holi bo‘lsada, b-topologiya va s-topologiya bu fazoda boshqa nomlarga egadir.

E lokal qavariq fazo bo‘lib, $E' = L(E, K)$ uning qo‘shma fazosi bo‘lsin.

E' fazoda oddiy yaqinlashish topologiyasi sust topologiya deyiladi va $\sigma(E', E)$ bilan belgilanadi. E' fazo $\sigma(E', E)$ topologiya bilan olinsa, uni biz E'_w bilan belgilaymiz. Qulaylik uchun f funksionalning x elementdagi qiymati $f(x)$ ni $\langle x, f \rangle$ bilan belgilaymiz. Ta’rifga binoan $\sigma(E', E)$ topologiya quyidagi ko‘rinishdagi yarimnormalar bilan aniqlanadi:

$$p(f) = p(fx_1, x_2, \dots, x_n) = \sup_{1 \leq l \leq n} |f(x_l)| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, f \rangle|,$$

bu yerda $f \in E'$, $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n$. Demak, E'_ω fazoda θ elementning atroflari bazisini ushbu

$$U(\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n) = \{f \in E' : |\langle x_i, f \rangle| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\},$$

ko‘rinishdagi to‘plamlar hosil qiladi.

E' fazoda chegaralangan yaqinlashish topologiyasi kuchli topologiya deyiladi va b bilan belgilanadi. E' fazo b-topologiya bilan olinganda, uni $(E', b) = E'_b$ bilan belgilaymiz. Bu topologiya ushbu

$$p(f, B) = \sup_{x \in B} |\langle x, f \rangle|$$

ko‘rinishdagi yarimnormalar yordamida aniqlanadi, bu yerda b - chegaralangan to‘plam, $f \in E'$. Nol elementning atroflari bazisini quyidagicha yozamiz:

$$U(\varepsilon, B) = \left\{ f \in E' : \sup_{x \in B} |\langle x, f \rangle| < \varepsilon, \varepsilon > 0, B \in \Omega \right\}.$$

Yuqorida chiziqli operatorlar uchun isbotlangan teoremlardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1) E' fazoda $\{f_n\}$ ketma-ketlik $f \in E'$ elementga sust yaqinlashishi uchun ushbu

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

munosabat ixtiyoriy $x \in E$ da bajarilishi zarur va kifoyadir.

2) b-topologiya $\sigma(E', E)$ topologiyadan kuchliroq.

3) E normalangan fazo bo‘lsa, u holda E' fazodagi b-topologiya shu fazodagi normaning (funksionalning normasi) topologiyasi bilan teng kuchlidir. Xususan, $(E', b) = (E', \|\cdot\|)$ Banax fazosidir (7.4-§.dagi 3-teoremaning natijasi).

4) E Banax fazosi bo‘lsin. $\{f_n\} \subset E'$ ketma-ketlik, $f \in E'$ elementga sust yaqinlashishi uchun quyidagi ikki shart zarur va kifoyadir:

a) $\{\|f_n\|\}$ -chegaralangan ketma-ketlik;

b) E fazoda to‘la bo‘lgan biror A to‘plamning ixtiyoriy x elementi uchun ushbu

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

munosabat o‘rinli.

Tekis chegaralanganlik prinsipidan va 3-teoremadan quyidagi teoremlar mos ravishda kelib chiqadi.

6-teorema. E Banax fazosi bo‘lib, ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, u holda $\{\|f_n(x)\|\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik ham chegaralangandir.

7-teorema. E Banax fazosi bo'lsa, $E_\omega^* = (E', \sigma(E', E))$ fazo sekvensial to'ladir, ya'ni E' fazoda sust topologiyadagi har qanday fundamental ketma-ketlik sust yaqinlashuvchidir.

Misollar. 1. Separabel Gilbert fazosida 7.3-§, 6-misoldagi T operatorni ko'ramiz. Bunda $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ element uchun

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i \xi_i) e_i, \quad (|\lambda_i| < C, \quad i = 1, 2, \dots).$$

Endi T_n operatorni ushbu

$$T_n x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i - \frac{i}{n+i} \right) \xi_i e_i$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Operatorlarning $\{T_n\}$ ketma-ketligi T ga s-topologiyada yaqinlashadi. Darhaqiqat, 7.3-§ dagi 6-misolga binoan

$$\|T_n\| = \sup_i \left| \lambda_i - \frac{i}{n+i} \right| \leq \sup |\lambda_i| + 1 = \|T\| + 1,$$

ya'ni $\{\|T_n\|\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Ixtiyoriy e_i uchun $n \rightarrow \infty$ da

$$\|T_n e_i - T e_i\| = \left\| \left(\lambda_i - \frac{i}{n+i} \right) e_i - \lambda_i e_i \right\| = \left| \frac{i}{n+i} \right| \rightarrow 0.$$

Ortonormal $\{e_i\}$ bazis E fazoda to'la to'plam bo'lgani sababli 5-teoremaga asosan $T_n \rightarrow T$. Ammo $\{T_n\}$ ketma-ketlik T ga b-topologiyada (ya'ni, 4-teoremaga asosan norma bo'yicha) yaqinlashmaydi. Haqiqatan, ixtiyoriy n uchun

$$\|T_n - T\| = \sup_i \left| \left(\lambda_i - \frac{i}{n+i} \right) - \lambda_i \right| = \sup_i \frac{i}{n+i} = 1 \not\rightarrow 0.$$

2. Agar 1-misolda T_n operatorni ushbu

$$T_n x = \sum \left(\lambda_i - \frac{1}{n} \right) \xi_i e_i$$

ko'rinishda olsak, u holda

$$\|T_n - T\| = \sup_i \left| \left(\lambda_i - \frac{1}{n} \right) - \lambda_i \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 ,$$

ya'ni $T_n \xrightarrow{b} T$.

3. $E = C[-1,1]$ uzluksiz funksiyalarning normalangan fazosi bo'lsin. Bu fazoda δ chiziqli funksionalni quyidagicha kiritamiz:

$$\delta(x) = x(0), \quad x \in C[-1,1]$$

Ravshanki, $\delta \in E'$. Bu fazoda olingan $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlik ushbu shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi_n(t)=0$, $|t|>\frac{1}{n}$ uchun; $\varphi_n(t)\geq 0$, $t\in[-1,1]$ uchun;

2) $\int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = 1$.

φ_n funksiyalar yordamida f_n chiziqli funksionalni quyidagicha kiritamiz:

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 \varphi_n(t) x(t) dt.$$

Ravshanki, $f_n \in E'$. Matematik analizdan ma'lum bo'lgan o'rta qiymat haqidagi teorema asosan ixtiyoriy $x \in C[-1,1]$ uchun

$$f_n(x) = \int_{-1}^1 \varphi_n(t) x(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t_n) x(t_n) = x(t_n) \int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = x(t_n),$$

bu yerda $-\frac{1}{n} \leq t_n \leq \frac{1}{n}$. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x(0) = \delta(x).$$

Shuning uchun $\{f_n\}$ ketma-ketlik δ funksionalga sust topologiyada yaqinlashadi.

Mashq uchun masalalar

1. H Gilbert fazosida H_1 qism fazoni olamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy $h \in H$ element yagona usulda ushbu ko'rinishda tasvirlanadi:

$$h = h_1 + h_2 \quad (h_1 \in H_1, h_2 \in H_1^\perp)$$

P proektorni ushbu

$$Ph = h_1$$

tenglik bilan aniqlaymiz. P ning uzlusizligini isbotlang.

2. $C[a,b]$ fazoda T operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$T\varphi(t) = \int_a^b k(t,s) \varphi(s) ds,$$

bu yerda $k(t,s)$ - ikki o'zgaruvchining uzlusiz funksiyasi.

a) T operator $L(C[a,b])$ ning elementi ekanligini isbotlang;

b) $C[a,b]$ fazoda ikki xil norma kiritamiz:

1) $\|\varphi\| = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)|$;

$$2) \|\varphi\| = \left[\int_a^b \varphi^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Yuqoridagi T operator ikkala normada ham uzlusizligini isbotlang.

3. a) E, F, L topologik vektor fazolar. $A:E \rightarrow F$, $B:F \rightarrow L$ uzlusiz chiziqli operatorlar bo'lsin. U holda $Cx = B(Ax) = B \circ A(x)$ operator ham uzlusiz chiziqli operator ekanligini isbotlang;
 b) agar A operator $\text{dom } A \subset E$ to'plamda, B operator $\text{dom } B \subset F$ to'plamda aniqlangan bo'lsa,

$$\text{dom } C = \text{dom } A \cap A^{-1}(\text{dom } B)$$

munosabatni isbotlang;

- c) agar $\text{dom } A$ va $\text{dom } B$ vektor qism fazolar bo'lsa, u holda $\text{dom } C$ ham E ning vektor qism fazosi ekanligini isbotlang.

4. E, F normalangan fazolar bo'lib, $A:E \rightarrow F$ uzlusiz operator bo'lsa, u holda uning grafigi bo'lgan grA to'plam $E \times F$ ning yopiq qismi ekanligini isbotlang.

5. E va F fazolar sifatida $C[a,b]$ fazoni olamiz. $D = \{x(t) \in E : x'(t) \in E\}$ belgilash kiritamiz. D to'plamda T chiziqli operatorni ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$Tx = x'$$

T operator yopiq, ammo uzlukli ekanligini isbotlang.

6. $T:E \rightarrow F$ yopiq operator bo'lib, T^{-1} teskari operator mavjud bo'lsin. T^{-1} operatorning ham yopiqligini isbotlang,

7. X vektor fazoda τ_1 va τ_2 topologiyalar berilgan bo'lib, X ularning har biriga nisbatan F -fazo bo'lsin. Agar τ_1 topologiya τ_2 topologiyadan kuchliroq bo'lsa, u holda τ_1 va τ_2 topologiyalar teng kuchlidir, ya'ni $\tau_1 = \tau_2$. Isbotlang.

8. E, F, L normalangan fazolar bo'lib, $A:E \rightarrow F$, $B:F \rightarrow L$ chegaralangan chiziqli operatorlar bo'lsin. Ushbu tengsizlikni isbotlang:

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

9. $E = R^n$ va $F = R^m$ fazolarda mos ravishda quyidagi normalar berilgan bo'lsin:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|, \quad \|y\| = \sum_{i=1}^m |\eta_i|, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m.$$

$A = (a_{ij}): E \rightarrow F$ chiziqli operatorning normasini hisoblang.

10. E, F Banax fazolari, $A_0:E \rightarrow F$ uzlusiz chiziqli operator bo'lib, uning uzlusiz A_0^{-1} teskari operatori mavjud bo'lsin. Agar $A \in L(E,F)$ operator $\|A\| < -\frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$ shartni qanoatlantirsa, u holda $A_0 + A$ operator ham uzlusiz teskari operatorga ega ekanligini isbotlang.

11. H Gilbert fazosida H_0 qism fazoni olib, H_0 ga proektorni P bilan belgilaymiz. Proektoring quyidagi xossalari ni isbotlang:

- a) ixtiyoriy $x \in H$ element uchun Px va $x - Px$ o‘zaro ortogonal elementlardir;
- b) $Px = x$ tenglik bajarilishi uchun $x \in H_0$ munosabat zarur va kifoya;
- c) $Px = \theta$ tenglik bajarilishi uchun $x \perp H_0$ munosabat zarur va kifoya;
- d) agar H_0 fazo $\{\theta\}$ dan farqli bo‘lsa, P ning normasi birga teng.

12. H Gilbert fazosida chegaralangan $P: H \rightarrow H$ chiziqli operator berilgan bo‘lsin. P proektor bo‘lishi uchun ushbu shartlar zarur va kifoyadir:

a) $P^2 = P$; b) $\|P\| \leq 1$.

13. E, F lokal qavariq fazolar bo‘lib, B to‘plam E fazoning chegaralangan qismi, q esa F fazoda yarim norma bo‘lsin. Ixtiyoriy $A \in L(E, F)$ uchun ushbu

$$p(A) = p(A, B, q) = \sup_{x \in B} q(Ax)$$

chekli son bo‘lib, uning yarim norma ekanligini isbotlang.

VIII BOB. CHIZIQLI FUNKSIONALLAR VA QO'SHMA FAZO

8.1 -§. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar va gipertekisliklar

1. Chiziqli funksionallar va gipertekisliklar orasida bog'lanish. E normalangan fazo bo'lib, $f : E \rightarrow K$ chiziqli funksional va $H = \ker f = f^{-1}(0)$ uning yadrosi bo'lsin. Ravshanki, H to'plam E ning vektor qism fazosi, a vektor H ga tegishli bo'lmasan ixtiyoriy vektor bo'lsin, ya'ni $f(a) \neq 0$. U holda ixtiyoriy $x \in E$ element uchun ushbu

$$y = x - \frac{f(x)}{f(a)}a$$

vektor H ning elementidir, chunki $f(y) = 0$. Demak, ixtiyoriy $x \in E$ vektor ushbu

$$x = \lambda a + y \quad (\lambda = \frac{f(x)}{f(a)}, y \in H)$$

ko'rinishda yoziladi. Bunday tasvirlash bir qiymatlidir.

Haqiqatan, x boshqa bir

$$x = \mu a + y_1 \quad (\mu \in K, y_1 \in H)$$

ko'rinishda ham tasvirlansa, u holda

$$f(x) = \mu f(a) = \lambda f(a),$$

bundan $f(a) \neq 0$ bo'lgani uchun $\mu = \lambda$ va demak, $y_1 = y$. Shuning uchun E fazo quyidagi to'g'ri yig'indi (1,5-§) ko'rinishida tasvirlanadi:

$$E = Ka \oplus H.$$

Xususan, $E|H \cong Ka$, ya'ni codim H=1 (1.5- §).

Ta'rif. E vektor fazoning H qism fazosi uchun codim H=1 bo'lsa, H gipertekislik deyiladi.

Demak, yuqoridagi mulohazalarga binoan noldan farqli ixtiyoriy chiziqli funksional uchun $H = \ker f$ qism fazo E dagi gipertekislikdir.

Aksincha, E fazoda ixtiyoriy H gipertekislik $f^{-1}(0) = H$ shartni qanoatlantiruvchi biror chiziqli funksionalni aniqlaydi.

Darhaqiqat, codim H=1 bo'lgani tufayli ixtiyoriy $a \in H$ uchun

$$E = Ka \oplus H$$

tenglik o'rinnidir, ya'ni ixtiyoriy $x \in E$ quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = \lambda a + h, \quad h \in H, \quad \lambda \in K.$$

Funksionalni bu elementda quyidagicha aniqlaymiz:

$$f(x) = \lambda.$$

Bevosita ko'rrib turibdiki f chiziqli funksional va $f^{-1}(0) = H$.

Agar boshqa bir g chiziqli funksional uchun ham $H = g^{-1}(0)$ bo'lsa u holda shunday $\alpha \in K$ mavjudki, $g = \alpha f$ bo'ladi. Haqiqatan,

$g(x) = g(\lambda a + h) = \lambda g(a) = f(x)g(a) = \alpha f(x)$,
bu yerda $\alpha = g(a)$.

Ushbu $f(x) = 0$ tenglama H gipertekislikning tenglamasi deyiladi.

E topologik vektor fazoda ixtiyoriy H gipertekislik yoki yopiq, yoki E ning hamma yerida zinch. Darhaqiqat, topologik vektor fazoda qo'shish va songa ko'paytirish amallari uzluksiz bo'lgani sababli E ning vektor qism fazosining yopilmasi ham vektor qism fazodir. Demak, H ning yopilmasi \bar{H} ham E ning qism fazosi. H gipertekislik bo'lgani sababli uni o'z ichiga oluvchi E dan farqli qism fazo mavjud emas. Bundan

$$\bar{H} = H \text{ yoki } \bar{H} = E.$$

1-teorema. E normalangan fazo bo'lsin. $f(x) = 0$ tenglama H gipertekislikning tenglamasi bo'lsin. f chiziqli funksional uzluksiz bo'lishi uchun H yopiq bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. Zarurligi. f uzluksiz chiziqli funksional va $\{0\}$ to'plam K maydonning yopiq qismi bo'lgani uchun $f^{-1}(0) = H$ yopiqdir.

Kifoyaligi. H yopiq gipertekislik bo'lib, $f(x) = 0$ uning tenglamasi bo'lsin. Ushbu

$$f(a) = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi $a \in E$ elementni olsak, ravshanki, $a + H$ ham yopiq to'plamdir va $\theta \in a + H$, chunki ixtiyoriy $z = a + h$ ($h \in H$) element uchun $f(z) = f(a) = 1$. Demak, θ elementning $a + H$ bilan kesishmaydigan $B_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ atrofi mavjud, ya'ni

$$B_\varepsilon \cap (a + H) = \emptyset. \quad (1)$$

Ixtiyoriy $x \in B_\varepsilon$ uchun $f(x) \neq 1$, chunki, agar $f(x) = 1$ bo'lsa edi, u holda $f(x - a) = f(x) - f(a) = 0$, ya'ni $x \in a + H$; bu esa (1) ga zid.

B_ε sharning ixtiyoriy x elementi uchun ushbu $|f(x)| < 1$ tengsizlikni isbotlaymiz.

Aksincha, biror $x_0 \in B_\varepsilon$ element uchun $|f(x_0)| = \alpha > 1$ tengsizlik bajarilsin deb

faraz qilaylik. U holda $f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right) = 1$ va $\left\|\frac{x_0}{\alpha}\right\| = \frac{\|x_0\|}{\alpha} < \|x_0\| < \varepsilon$, ya'ni $\frac{1}{\alpha}x_0 \in B_\varepsilon$ bu esa yuqorida ko'rsatilgan $f(x) \neq 1$ ($x \in B_\varepsilon$) munosabatga zid. Demak, B_ε sharning ixtiyoriy x elementi uchun $|f(x)| < 1$, ya'ni f chegaralangan ya'ni (uzluksiz) funksional.

2. Chiziqli funksional normasining geometrik ma'nosi. Normalangan E fazoda uzluksiz f chiziqli funksionalni olamiz. $c \in K$ son uchun ushbu

$$H_c = \{x \in E : f(x) = c\} = f^{-1}(c)$$

belgilash kiritamiz. Bevosita ko'rinish turibdiki, a element $f(a) = c$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda

$$H_c = a + H, \quad H = f^{-1}(0).$$

d orqali H_1 to‘plam bilan θ nuqta orasidagi masofani belgilaymiz, ya’ni

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\|.$$

Ixtiyoriy $x \in H_1$ element uchun

$$f(x) = 1 \leq \|f\| \cdot \|x\|,$$

ya’ni

$$\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$$

Bundan

$$d \geq \frac{1}{\|f\|}. \quad (2)$$

Funksional normasining ta’rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $x_\varepsilon \in E$ element mavjudki, ushbu

$$|f(x_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|$$

tengsizlik bajariladi, ya’ni

$$1 > \frac{1}{|f(x_\varepsilon)|} (\|f\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\| = (\|f\| - \varepsilon) \left\| \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)} \right\|.$$

Agar $a_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{f(x_\varepsilon)}$ kirlitsak, u holda $a_\varepsilon \in H_1$ va $1 > (\|f\| - \varepsilon) \|a_\varepsilon\|$, ya’ni

$\|a_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. Bundan

$$d = \inf_{a \in H_1} \|a\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Bu tengsizlikda ε ixtiyoriy bo‘lgani uchun

$$d \leq \frac{1}{\|f\|}. \quad (3)$$

Yuqoridagi (2) va (3) tengsizliklardan ushbu

$$d = \frac{1}{\|f\|}$$

yoki

$$\|f\| = \frac{1}{d}$$

tenglik kelib chiqadi. Natijada quyidagi teorema isbotlandi.

2-teorema. Uzluksiz f chiziqli funksionalning normasi $H_1 = \{x \in E : f(x) = 1\}$ to‘plam bilan θ nuqta orasidagi masofaning teskari qiymatiga teng.
7.4-§ da isbotlangan Xan - Banax teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi.

3-teorema. Normalangan E fazoning ixtiyoriy $x_0 \neq \theta$ elementi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi uzlusiz f chiziqli funksional mavjud.

$$1) f(x_0) = 1;$$

$$2) \|f\| = \|x_0\|^{-1}.$$

Isboti. E fazoning ushbu

$$L = \{tx_0, t \in K\}$$

qism fazosini olamiz. L fazoda f_0 funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_0(tx_0) = t.$$

Ravshanki, $f_0(x_0) = 1$ va

$$\|f_0\| = \sup_{\|tx_0\|=1} |f_0(tx_0)| = \sup_{|t|=\frac{1}{\|x_0\|}} |t| = \|x_0\|^{-1}.$$

Xan - Banax teoremasiga asosan f_0 funksionalni E fazoga normasini saqlagan holda davom ettirish mumkin. Hosil bo‘lgan funksional 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi funksionaldir.*

Misollar. 1) R^n fazoda ixtiyoriy f funksional ushbu

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \quad (f_i = f(e_i))$$

ko‘rinishda ifodalanadi, bu yerda $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. (Bu misol 7.3-§ dagi 4-misolning xususiy $n=1$ holi.)

Chiziqli funksionalning normasi R^n fazodagi normaga bog‘liq. Bunga ikkita misol keltiramiz.

a) R^n fazoda $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}$ normani olamiz. U holda

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2}.$$

Isboti. Koshi - Bunyakovskiy tengsizligiga asosan ixtiyoriy $x \in R^n$ element uchun ushbu

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2} \|x\|$$

tengsizlik o‘rinlidir, ya’ni ushbu

$$\|f\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2} \tag{4}$$

munosabatga egamiz. Endi $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0)$ elementni

$$\xi_i^0 = \frac{f_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}}, \quad i = \overline{1, n}$$

ko‘rinishda olsak, u holda $\|x_0\|=1$ va

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| \sum_{i=1}^n f_i \xi_i^0 \right| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}} \cdot \sum_{i=1}^n |f_i|^2 = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2} \end{aligned}$$

Bundan

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}.$$

Bu munosabatni yuqoridagi (4) tengsizlik bilan solishtirsak, ushbu

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i|^2}$$

tenglik kelib chiqadi.

b) R^n fazoda normani ushbu

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$$

ko‘rinishda olsak, bu misol 7.3-§ dagi 5-misolning xususiy holi ($n=1$) bo‘ladi. Demak,

$$\|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i|$$

Agar R^n fazoda $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ norma olinsa, $\|f\| = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i|$ ekanligi shunga o‘xshash kelib chiqadi.

2) Normalangan $C[0,1]$ fazoda ushbu

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k)$$

funksionalni olamiz, bu yerda $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1]$ ixtiyoriy nuqtalar, $c_k \in R$ ($k = \overline{1, n}$). f -chiziqli funksional. Darhaqiqat,

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \eta x_2) &= \sum_{k=1}^n c_k [\lambda x_1(t_k) + \eta x_2(t_k)] = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \lambda x_1(t_k) + \sum_{k=1}^n c_k \eta x_2(t_k) = \lambda f(x_1) + \eta f(x_2) \end{aligned}$$

Bu funksionalning normasini hisoblaymiz. Ushbu

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n c_k x(t_k) \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \sum_{k=1}^n |c_k| = \sum_{k=1}^n |c_k| \|x\|$$

tengsizlikdan f funksionalning uzluksizligi va quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Endi $[0,1]$ oraliqda uzluksiz x_0 funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$x_0(t_k) = \operatorname{sgn} c_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

va $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ oraliqlarda $x_0(t)$ ni chiziqli funksiya, $[0, t_1]$ va $[t_n, 1]$ oraliqda $x_0(t)$ ni o‘zgarmas deb olamiz. Ravshanki, $\|x_0\| \leq 1$ va

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq |f(x_0)| = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k x_0(t_k) = \sum_{k=1}^n c_k \operatorname{sgn} c_k = \sum_{k=1}^n |c_k| \end{aligned}$$

ya’ni

$$\|f\| \geq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Demak,

$$\|f\| = \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

3) Haqiqiy sonlarning nolga yaqinlashuvi ketma-ketliklari fazosini c_0 bilan belgilab, bu fazoda $x = \{\xi_n\}$ elementning normasini quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Bu normalangan fazoga qo‘shma bo‘lgan fazoni topamiz. Agar ushbu

$$e^{(k)} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots) \in c_0$$

elementlarini olsak, ravshanki, ixtiyoriy $x = \{\xi_n\}$ elementga ushbu

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n \xi_k e^{(k)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$$

elementlardan tuzilgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Haqiqatan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x^{(n)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| (0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots) \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq 1+n} |\xi_k| \right) = 0$$

Endi ixtiyoriy $f \in (c_0)'$ funksionalga ushbu $\{t_k\} = \{f(e^{(k)})\}$ sonli ketma-ketlikni

mos qo‘yib, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ qator yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Agar

$y^{(k)} = \sum_{i=1}^k (\operatorname{sgn} f_i) e^{(i)} \in c_0$ elementni olsak, ravshanki $\|y^{(k)}\| \leq 1$. Demak,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \geq \sup_k |f(y^{(k)})| = \sup_k \sum_{i=1}^k |f_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \quad (5)$$

ya'ni $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ absolyut yaqinlashuvchi qator. Shunday xossaga ega bo'lgan $\{f_k\} = \tilde{f}$ sonli ketma-ketliklar fazosi l_1 bilan belgilanadi va $\{f_k\} \in l_1$ elementning normasi deb $\|\tilde{f}\| = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ olinadi. Shunday qilib, har bir $f \in (c_0)'$ funksionalga l_1 fazoning $\{f_k\} = \tilde{f}$ elementi mos qo'yildi. Ixtiyoriy $x \in c_0$ uchun

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e^{(k)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k f(e^{(k)}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k , \end{aligned}$$

ya'ni f funksionalning x elementdagi qiymati $\tilde{f} \in l_1$ element yordamida quyidagicha hisoblanadi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k \quad (6)$$

Aksincha, l_1 fazoning ixtiyoriy $\{f_k\}$ elementi (6) formula bo'yicha c_0 fazoda chiziqli funksionalni aniqlaydi. Uning chekliligi va chegaralanganligi ushbu tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k f_k| \leq \\ &\leq \sup_k |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| . \end{aligned} \quad (7)$$

Shu bilan birga

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \|\tilde{f}\| .$$

Bu tengsizlikni (5) tengsizlik bilan solishtirsak $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ tenglik kelib chiqadi.

Demak, $f \rightarrow \tilde{f}$ moslik $(c_0)'$ fazoni l_1 fazoga akslantiruvchi izometrik izomorfizm, ya'ni $(c_1)' = l_1$.

4) Endi 3- misolda kiritilgan l_1 fazoga qo'shma fazo m fazo ekanligini isbotlaymiz. l_1 fazoda ushbu

$$g^k = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, 0, \dots)$$

elementni olsak, ixtiyoriy $f = \{f_k\} \in l_1$ uchun

$$f^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_k g^k = (f_1, f_2, \dots, f_n, 0, 0, \dots) \in l_1$$

elementlardan tuzilgan $\{f^{(n)}\}$ ketma-ketlik f elementga norma bo'yicha yaqinlashadi. Darhaqiqat, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ qator yaqinlashuvchi bo'lgani sababli

$$\|f - f^{(n)}\| = \|(0, 0, \dots, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ixtiyoriy $F \in (l_1)'$ funksionalga $\tilde{F} = \{F_k\} = \{F(g^k)\}$ ketma-ketlikni mos qo'yib, uning chegaralanganligini isbotlaymiz. Haqiqatan,

$$\|F\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F(f)| \geq \sup_k |F(g^k)| = \sup_k |F_k|, \quad (8)$$

demak, $\tilde{F} = \{F_k\} \in m$. Shunday qilib, har bir $F \in (l_1)'$ funksionalga m fazoning \tilde{F} elementi mos qo'yildi. Ixtiyoriy $f \in l_1$ uchun

$$\begin{aligned} F(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F(f^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\sum_{k=1}^n f_k g^k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k F_k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k, \end{aligned}$$

ya'ni F funksionalning f elementdagи qiymati ushbu formula yordamida hisoblanadi:

$$F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k \quad (9)$$

Aksincha, m fazoning ixtiyoriy $\tilde{F} = \{F_k\}$ elementi (9) formula orqali l_1 fazoda chiziqli funksionalni aniqlaydi. Uning chekliligi va chegaralanganligi quyidagi tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} F(f) &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k F_k| \leq \sup_k |F_k| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \\ &= \sup_k |F_k| \cdot \|f\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Endi m fazoda $\tilde{F} = \{F_k\}$ elementning normasi $\sup_k |F_k|$ ekanligini eslasak, (10) tengsizlikka binoan

$$\|F\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |F(f)| \leq \sup_k |F_k| = \tilde{F}.$$

Buni (8) bilan solishtirsak, $\|F\| = \|\tilde{F}\|$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $F \rightarrow \tilde{F}$ izometrik izomorfizmdir, ya'ni $(l_1)' = m$.

3. Gilbert fazosida chiziqli funksionallar. Endi Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishini topamiz. E Gilbert fazosidan biror y elementni tanlab olsak, ushbu

$$f(x) = (x, y) \quad (11)$$

formula E fazoda uzlusiz chiziqli funksionalni aniqlaydi. Darhaqiqat, f ning chiziqli ekanligi skalyar ko‘paytma aksiomalaridan, chegaralanganligi esa ushbu

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Koshi - Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi. Xususan,

$$\|f\| \leq \|y\| \quad (12)$$

munosabat o‘rinlidir.

Ammo eng muhimi shundaki, Gilbert fazosida har bir uzlusiz chiziqli funksional (11) ko‘rinishga ega. Aniqrog‘i, quyidagi teorema o‘rinlidir.

4-teorema. (Riss teoremasi). E Gilbert fazosida ixtiyoriy uzlusiz f chiziqli funksional uchun (11) tenglikni qanoatlantiruvsh yagona y_f element mavjud va shu y_f element uchun ushbu munosabat o‘rinlidir:

$$\|f\| = \|y_f\| \quad (13)$$

Izboti. Yuqoridagi 1-teoremaga asosan $H = f^{-1}(0)$ to‘plam E ning yopiq qism fazosidir. Agar $f \equiv 0$, ya’ni $H=E$ bo‘lsa, $y_f = \theta$ deb olishimiz mumkin. $H \neq E$ holni ko‘raylik, ya’ni H to‘plam E ning xos qism fazosi bo‘lsin. Ixtiyoriy $y_0 \in H$ element ushbu

$$y_0 = y' + y'' \quad (y' \in H, y'' \in H^\perp)$$

ko‘rinishda yoziladi (4.4-§, 1-teorema).

Ravshanki $y'' \neq 0$ va $f(y'') \neq 0$. Demak, $f(y'') = 1$ deb hisoblash mumkin. Ixtiyoriy $x \in E$ elementni olib, $f(x)$ sonni α bilan belgilaymiz. U holda $x' = x - \alpha y''$ element H ning elementidir, chunki

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0$$

Demak, $(x', y'') = 0$ va

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha(y'', y'')$$

ya’ni

$$f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) = (x, y_f),$$

bu yerda

$$y_f = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Shunday qilib, (11) tenglikni qanoatlantiruvchi y_f element topiladi. Bu elementning yagonaligi bevosita kelib chiqadi. Darhaqiqat, agar ixtiyoriy $x \in E$ element uchun ushbu

$$(x, y_f) = (x, y'_f)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $(x, y_f - y'_f) = 0$, ya’ni $y_f - y'_f \perp E$, demak,

$$y_f - y'_f = 0.$$

Ushbu

$$\|f\| \geq f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right) = \frac{(y_f, y_f)}{\|y_f\|} = \|y_f\|$$

tengsizlikni yuqoridagi (12) tengsizlik bilan solishtirsak, (13) tenglik hosil bo‘ladi.

E Gilbert fazosining har bir elementiga ushbu

$$(\tau y)(x) = (x, y)$$

formula bo‘yicha τy chiziqli funksionalni mos qo‘ysak, hosil bo‘lgan

$$\tau : E \rightarrow E' \quad (14)$$

operator qo‘shma chiziqlidir, ya’ni

$$\tau(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} \tau y_1 + \bar{\beta} \tau y_2.$$

Haqiqatan,

$$\begin{aligned} [\tau(\alpha y_1 + \beta y_2)](x) &= (x, \alpha y_1 + \beta y_2) = (x, \alpha y_1) + (x, \beta y_2) = \\ &= \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2) = (\bar{\alpha} \tau y_1 + \bar{\beta} \tau y_2)(x) \end{aligned}$$

Endi $\tau : E \rightarrow E'$ monomorfizm ekanligini isbotlaymiz.

Agar $\tau y = 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x \in E$ element uchun

$$(x, y) = (\tau y)(x) = 0,$$

ya’ni $y \perp E$. Demak, $y = \theta$.

Yuqorida isbotlangan 4-teoremaga asosan τ epimorfizm va

$$\|\tau(y)\| = \|y\|,$$

ya’ni $\tau : E \rightarrow E'$ - izometrik izomorfizm (agar E' kompleks Gilbert fazosi bo‘lsa, τ - qo‘shma chiziqli izometrik izomorfizm).

Misollar. 1) $L_2[a, b]$ Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiyligi ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$f(x) = (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x, y \in L_2[a, b]$$

2) l_2 Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiyligi ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k, \\ x &= (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in l_2, \\ y &= (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in l_2. \end{aligned}$$

8.2-§ Ikkinchi qo‘shma fazo va refleksivlik

E biron normalangan fazo va E' unga qo‘shma fazo bo‘lsin. Ma’lumki, E' ham vektor fazo va funksionalning normasiga nisbatan Banax fazosi (7.4-§). Shu sababli E' fazoda aniqlangan uzluksiz chiziqli funksionallarni ko‘rishimiz

mumkin. Ravshanki, bu funksionallar ham biror E'' Banax fazosini hosil qiladi; bu fazo E ga ikkinchi qo'shma fazo deyiladi.

E fazodan biron x_0 elementni olib, ushbu

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad f \in E' \quad (1)$$

formula yordamida E' fazoda ψ_{x_0} funksionalni aniqlash mumkin.

1-teorema. Yuqoridagi (1) formula orqali aniqlangan ψ_{x_0} funksional E' fazoda chiziqli uzlusiz funksionaldir, ya'ni $\psi_{x_0} \in E''$.

Isboti. Ravshanki, (1) formula har bir $f \in E'$ funksionalga biror sonni mos qo'yadi, ya'ni ψ_{x_0} funksionaldir. Ixtiyoriy $f_1, f_2 \in E'$ va α, β haqiqiy sonlar uchun ψ_{x_0} ning ta'rifiiga asosan

$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \psi_{x_0}(f_1) + \beta \psi_{x_0}(f_2)$,
ya'ni ψ_{x_0} chiziqli funksionaldir. Uning uzlusizligi esa ushbu

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|x_0\| \cdot \|f\| \quad (2)$$

tengsizlikdan bevosita ko'rinish turibdi.

Bu teoremaga asosan E fazoning har bir x_0 elementiga E'' fazoning biror ψ_{x_0} elementi mos qo'yiladi. Bu moslikni π bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\pi(x_0) = \psi_{x_0}, \quad \pi: E \rightarrow E''.$$

Bu moslik E fazoni E'' fazoga tabiiy aks ettirish deyiladi.

2-teorema. $\pi: E \rightarrow E''$ aks ettirish monomorfizmdir.

Isboti. π chiziqli aks ettirish ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha x_1 + \beta x_2)(f) &= \psi_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \\ &= \alpha \psi_{x_1}(f) + \beta \psi_{x_2}(f) = \alpha \pi(x_1)(f) + \beta \pi(x_2)(f) = [\alpha \pi(x_1) + \beta \pi(x_2)](f) \end{aligned}$$

Bu yerda $f \in E'$ ixtiyoriy bo'lgani sababli

$$\pi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \pi(x_1) + \beta \pi(x_2).$$

Endi π ning monomorfizm ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x_1, x_2 \in E$ elementlar uchun $x_1 \neq x_2$ bo'lsa, u holda

$$x_0 = x_1 - x_2 \neq \theta.$$

8.1-§ dagi 3-teoremaga asosan shunday $f \in E'$ funksional mavjudki, unda ushbu

$$f(x_0) = 1$$

tenglik bajariladi, ya'ni

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \neq 0.$$

Demak, topilgan $f \in E'$ uchun

$$\pi(x_1)(f) = \psi_{x_0}(f) = f(x_1) \neq f(x_2) = \psi_{x_2}(f) = \pi(x_2)(f).$$

Demak, $\pi(x_1) \neq \pi(x_2)$, ya'ni π monomorfizmdir.

3-teorema. $\pi: E \rightarrow E''$ aks ettirish izometriyadir, ya'ni

$$\|\pi(x)\| = \|x\|, \quad x \in E,$$

bu yerda $\|\pi(x)\|$ ifoda E'' fazodagi norma.

Ishboti. Ushbu

$$|\pi(x)(f)| = |\psi_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|$$

munosabatga asosan funksional normasining ta'rifiiga ko'ra

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\| \quad (3)$$

Ixtiyoriy $x \in E$ ($x \neq \theta$) uchun 8.1-§ dagi 3-teoremaga asosan ushbu

$$\|f_0(x)\| = 1 = \|f_0\| \cdot \|x\|$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $f_0 \in E'$ funksional mavjud.

Demak,

$$\begin{aligned} \|\pi(x)\| &= \sup_{f \in E'} \frac{|\pi(x)(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in E'} \frac{|\psi_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in E'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \\ &\geq \frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|} = \frac{\|f_0\| \|x\|}{\|f_0\|} = \|x\|, \end{aligned}$$

ya'ni $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$. Bundan va (3) tengsizlikdan kerak bo'lgan ushbu

$$\|\pi(x)\| = \|x\|$$

tenglik kelib chiqadi.

Natija. Ixtiyoriy normalangan E fazo ikkinchi qo'shma fazoning biror $\pi(E) \subset E''$ vektor qism fazosiga izometrik izomorfdir.

E ni $\pi(E)$ ga aynan teng deb hisoblab, $E \subset E''$ munosabatga ega bo'lamiz.

Ta'rif. Agar π aks ettirish E ni butun E'' ga aks ettirsa, ya'ni $\pi(E) = E''$ bo'lsa, u holda normalangan E fazo refleksiv fazo deyiladi.

Ixtiyoriy normalangan fazoga qo'shma fazo to'la bo'lgani sababli ixtiyoriy refleksiv normalangan fazo to'ladir.

Misollar. 1) Ixtiyoriy E Gilbert fazosi refleksivdir. Chunki E fazo E' fazoga qo'shma izomorf (8.1-§, 4-teoremaga asosan), E esa o'z navbatida E'' fazoga qo'shma izomorf. Demak, E fazo E'' fazoga izomorfdir.

2) O'zi-o'ziga qo'shma bo'lмаган refleksiv normalangan fazoga misol keltiramiz. R^n fazoda normani quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|.$$

Bu fazoni R_1^n bilan belgilaymiz. Agar norma ushbu

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$$

ko'rinishda olinsa, buni R_∞^n bilan belgilaymiz, 8.1-§, 1, b) misolga binoan $(R_1^n)' = R_\infty^n$, $(R_\infty^n)' = R_1^n$. Demak, $(R_1^n)'' = R_1^n$, $(R_\infty^n)'' = R_\infty^n$, ya'ni R_1^n va R_∞^n refleksiv fazolardir.

3) Haqiqiy sonlarning nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklari fazosi s_0 refleksiv emas. Chunki 8.1- § dagi 3-misolga binoan $(c_0)' = l_1$, 4-misolga binoan $(l_1)' = m$, ya’ni $(c_0)'' = m \neq c_0$.

4) Har qanday refleksiv fazo to‘la bo‘lgani sababli ixtiyoriy to‘la bo‘lmagan normalangan fazo refleksiv emas.

8.3-§. Sust topologiya va sust yaqinlashish

E va E' mos ravishda topologik vektor fazo va uning qo‘shma fazosi bo‘lsin. Soni chekli $f_1, f_2, \dots, f_n \in E'$ funksionallar va $\varepsilon > 0$ son uchun ushbu

$$U\{f_1, f_2, \dots, f_n, \varepsilon\} = \{x \in E : |f_i(x)| < \varepsilon; i = \overline{1, n}\} \quad (1)$$

to‘plam θ nuqtani o‘z ichiga oluvchi ochiq to‘plamdir, ya’ni nolning atrofidir. (1) ko‘rinishdagi chekli sondagi to‘plamlarning kesishmasi shu ko‘rinishdagi biror to‘plamni o‘z ichiga oladi. Masalan,

$$\begin{aligned} U(f_1, f_2, \dots, f_n, \varepsilon) \cap U(g_1, g_2, \dots, g_k, \delta) &\supset \\ &\supset U(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_k, \min(\varepsilon, \delta)). \end{aligned}$$

Demak, E fazoda shunday topologiya kiritish mumkinki, unda nol atroflarining bazisi (1) ko‘rinishdagi to‘plamlardan iborat bo‘ladi. Bu topologiya $\sigma(E, E')$ bilan belgilanadi va sust topologiya deb ataladi. Chunki bu topologiya E' dan olingan har bir funksionalning E da uzlusiz bo‘lishini ta’minlovchi topologiyalarning ichida eng sustidir. Ravshanki, bu topologiya E fazoning o‘zidagi topologiyadan sustroqdir.

Nol atroflarining ta’rifiga asosan, agar E da yetarli darajada ko‘p uzlusiz chiziqli funksionallar mavjud bo‘lsa, ya’ni $\forall x \neq \theta \exists f \in E : f(x) \neq 0$ shart bajarilsa, u holda sust topologiya Xausdorf topologiyasidir. Sust topologiyada yaqinlashish sust yaqinlashish deyiladi. Xususan, $\{x_k\} \subset E$ ketma-ketlik $x_0 \in E$ nuqtaga sust yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun ushbu

$$f(x_k) \rightarrow f(x_0), \quad \forall f \in E' \quad (2)$$

munosabat bajarilishi zarur va kifoyadir.

Darhaqiqat, masalan, $x_0 = \theta$ bo‘lgan holni ko‘ramiz. Agar ixtiyoriy $f \in E'$ uchun $f(x_k) \rightarrow 0$ bo‘lsa, u holda nolning ixtiyoriy

$$U\{f_1, f_2, \dots, f_n, \varepsilon\} = U$$

atrofini aniqlovchi har bir $f_i (i = \overline{1, n})$ uchun shunday N_i natural son topiladiki,

$$|f_i(x_k)| < \varepsilon$$

tengsizlik ixtiyoriy $k \geq N_i$ uchun bajariladi. Demak, $N = \max_{i=1, n} N_i$ deb olsak, u

holda $k > N$ bo‘lganda ixtiyoriy $i = \overline{1, n}$ uchun $|f_i(x_k)| < \varepsilon$, ya’ni $x_k \in U$.

Aksincha, ixtiyoriy U uchun shunday N son mavjud bo'lsinki, $x_k \in U$ munosabat ixtiyoriy $k \geq N$ uchun bajarilsin. U holda har bir $f \in E'$ uchun $f(x_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Sust yaqinlashishdan farq qilish uchun E fazoning o'z topologiyasidagi yaqinlashishni kuchli yaqinlashish deyiladi. Har bir $f \in E'$ ning uzlusizligiga va (2) munosabatga asosan kuchli yaqinlashishdan sust yaqinlashish kelib chiqadi. Xusan, agar E normalangan fazo bo'lsa, norma bo'yicha yaqinlashishdan sust yaqinlashish kelib chiqadi.

Normalangan fazolarda sust yaqinlashishni tekshirish uchun quyidagi teorema foydalidir.

1-teorema. Normalangan E fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x_0 \in E$ nuqtaga sust yaqinlashuvchi bo'lishi uchun quyidagi ikki shart zarur va kifoyadir: 1) $\|x_n\| \leq M$ biror $M > 0$ son va ixtiyoriy n natural son uchun o'rinni;

2) E' fazoda to'la bo'lgan biror Δ to'plamning ixtiyoriy f elementi uchun ushbu munosabat o'rinni

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Bu teorema 7.5-§ dagi 5-teoremaga o'xshash isbotlanadi.

Sust yaqinlashishning mohiyatini quyidagi misollarda ko'ramiz.

1. Chekli o'lchamli R^n fazoda sust va kuchli yaqinlashishlar ekvivalent. R^n fazoda e_1, e_2, \dots, e_n ortonormal bazis olamiz. Ushbu $\{x_k\}$ ketma-ketlik biror $x \in R^n$ elementga sust yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ushbu

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^{(1)}e_1 + \dots + x_k^{(n)}e_n, \\ x &= x^{(1)}e_1 + \dots + x^{(n)}e_n \end{aligned}$$

tengliklardan foydalanib, quyidagi munosabatlarni yozishimiz mumkin:

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \rightarrow (x, e_1) = x^{(1)},$$

.

$$x_k^{(n)} = (x_k, e_n) \rightarrow (x, e_n) = x^{(n)},$$

ya'ni $\{x_k\}$ ketma-ketlik x elementga koordinatalar bo'yicha yaqinlashadi. Demak, $k \rightarrow \infty$ da

$$\|x_k - x\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_k^{(i)} - x^{(i)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

ya'ni $\{x_k\}$ ketma-ketlik x ga kuchli yaqinlashadi. Bundan ko'rinish turibdiki, sust yaqinlashishdan kuchli yaqinlashish kelib chiqadi. Bunga teskari ibora doim o'rinni bo'lgani sababli bu yaqinlashishlar ekvivalent.

2. H Gilbert fazosida ixtiyoriy uzlusiz chiziqli funksional skalyar ko'paytma ko'rinishida ifodalanishi sababli, $\{x_k\}$ ketma-ketlik H da biror x elementga sust yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $y \in H$ elementga nisbatan ushbu

$$(x_k, y) \rightarrow (x, y)$$

munosabat bajarilishi zarur va kifoyadir.

3. l_2 fazoda sust yaqinlashish. Ma'lumki, l_2 fazoda ortonormal bazis sifatida ushbu

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots), \dots$$

vektorlar sistemasini olish mumkin. 2 - misoldagi y sifatida e_i larni olsak, biror $\{x_k\}$ ketma-ketlikni x ga sust yaqinlashishidan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \rightarrow x^{(i)} = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

ya'ni sust yaqinlashuvchi ketma-ketlik koordinatalar bo'yicha ham shu elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Agar $\{x_k\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda (3) shart kifoya ham bo'ladi. Darhaqiqat, bunda 1- teoremaning shartlari qanoatlantirilishi uchun Δ to'plam sifatida $\{e_i\}$ sistemani olish kerak ($\Delta \subset l'_2 = l_2$).

Shunday qilib, chegaralangan ketma-ketliklar uchun l_2 fazoda sust yaqinlashish koordinatalar bo'yicha yaqinlashish bilan teng kuchlidir.

Shuni ham aytib o'tish kerakki, l_2 fazoda sust yaqinlashish kuchli yaqinlashishdan farq qiladi. Masalan, $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ ketma-ketlik l_2 fazoda θ vektorga sust yaqinlashadi, chunki ixtiyoriy $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_2$ element uchun

$$(y, e_n) = y_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ammo ixtiyoriy n uchun $\|e_n\| = 1 \rightarrow 0$, ya'ni $\{e_n\}$ ketma-ketlik θ ga kuchli yaqinlashmaydi.

4. c_0 fazoda sust yaqinlashish. Bu fazoda ham chegaralangan ketma-ketliklar uchun sust yaqinlashish koordinatalar bo'yicha yaqinlashish bilan mos tushishini ko'rsatamiz. Har bir $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in c_0$ elementga uning ξ_k koordinatasini

mos qo'yuvchi funksionalni g^k bilan belgilaymiz. Ravshanki, $g^k \in (c_0)' = l_1$ (8.1-§, 3, 4-misollar). Demak, agar biror $\{x_n\} \in c_0$ ketma-ketlik x elementga sust yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda 1-teoremaga asosan u norma bo'yicha chegaralangan va ixtiyoriy k uchun

$$\xi_k^{(n)} = g^k(x_n) \rightarrow g^k(x) = \xi_k, \quad n \rightarrow \infty.$$

Aksincha, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga koordinatalar bo'yicha yaqinlashib, norma bo'yicha chegaralangan bo'lsa, u holda ixtiyoriy k uchun $g^k(x_n) \rightarrow g^k(x)$. 8.1-§ dagi 4-misolda ko'rsatilganidek, ixtiyoriy $f = (f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) \in l_1 = (c_0)'$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k g^k \right\| = 0,$$

ya'ni $\{g^k\}_{k=1}^\infty$ to'plam $l_1 = (c_0)'$ fazoda to'la. 1-teoremaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga sust yaqinlashuvchi. Xususan, bu fazoda ham sust yaqinlashishdan kuchli yaqinlashish kelib chiqmaydi. Masalan 8.1-§, 3-misoldagi $\{e^k\}$ ketma-ketlik nolga sust yaqinlashuvchi, ammo ixtiyoriy k uchun $\|e^k\|=1$.

8.4-§. Qo'shma fazoda sust topologiya va chegaralangan to'plamlar

E topologik vektor fazo, E' uning qo'shma fazosi bo'lsin. 7.5-§ da qo'shma fazoda $\sigma(E', E)$ topologiya, ya'ni sust topologiya tushunchasi kiritilib, uning ayrim xossalari o'r ganilgan edi. Bu topologiyani E' fazodagi sust topologiyadan, ya'ni $\sigma(E', E'')$ topologiyadan ajratish maqsadida uni *- sust topologiya deymiz. Ushbu paragrafda E ni separabel normalangan fazo deb olamiz va shu fazoga qo'shma bo'lган E' fazodagi chegaralangan (funksionalning normasi ma'nosida) to'plamlarning muhim xossalarni keltiramiz.

S^* orqali E' fazodagi yopiq birlik sharni belgilaymiz, ya'ni

$$S^* = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}.$$

1-teorema. *-sust topologiyani S^* sharda qaralsa, bu topologiyani metrikalashtirish mumkin.

Isboti. E fazoning birlik sharida zikh bo'lган sanoqli $\{x_n\}$ to'plamni olamiz. S^* fazoda metrikani ushbu

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |< f - g, x_n >| \quad (1)$$

formula yordamida kiritamiz. Bu yerda ushbu $< f, x > = f(x)$, $f \in E'$, $x \in E$ belgilashdan foydalandik. Kiritilgan $\rho(f, g)$ funksiya haqiqatan ham metrika ekanligi bevosita ko'rinish turibdi. Undan tashqari, bu metrika siljитishga nisbatan invariant, ya'ni

$$\rho(f + h, g + h) = \rho(f, g), \quad \forall h \in E'.$$

Endi S^* to'plamda $\sigma(E', E)$ topologiyadagi nolning atroflari sistemasi shu to'plamda ρ metrika yordamida aniqlangan atroflar sistemasi bilan teng kuchli ekanligini ko'rsatilishi kifoya. Boshqacha qilib aytganda, quyidagi ikki xossa isbotlanishi kerak:

- 1) ixtiyoriy $S_\varepsilon = \{f \in E' : \rho(f, \theta) < \varepsilon\}$ shar S^* bilan nolning *- sust topologiyadagi biror atrofining kesishmasini o'z ichiga oladi;
- 2) E' dagi nolning $\sigma(E', E)$ topologiyadagi ixtiyoriy atrofi S^* sharning biror S_ε shar bilan kesishmasini o'z ichiga oladi.

Ushbu $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi N sonni tanlab, nolning *-sust topologiyadagi quyidagi atrofini olamiz:

$$V = V_{x_1, \dots, x_{N, \varepsilon/2}} = \left\{ f : |\langle f, x_k \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}, k = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Ixtiyoriy $f \in S^* \cap V$ uchun

$$\begin{aligned} \rho(f, \theta) &= \sum_{n=1}^N 2^{-n} |\langle f, x_n \rangle| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |\langle f, x_n \rangle| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=1}^N 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ya'ni $S^* \cap V \subset S_\varepsilon$. 1) xossa isbotlandi.

Nolning *-sust topologiyadagi biror

$$U = U_{y_1, y_2, \dots, y_n}; \delta = \left\{ f : |\langle y_k, f \rangle| < \delta, k = 1, 2, \dots, m \right\}$$

atrofini olamiz ($\|y_k\| \leq 1, k = 1, \dots, m$). Olingan $\{x_n\}$ to'plam S ning hamma yerida zich bo'lgani sababli shunday n_1, \dots, n_m natural sonlar topiladi, har bir $k = 1, 2, \dots, m$

uchun ushbu $\|y_k - x_{n_k}\| < \frac{\delta}{2}$ tengsizlik o'rinni bo'ladi. Agar

$$N = \max(n_1, \dots, n_m), \varepsilon = 2^{-(N+1)} \delta \text{ deb olsak, u holda } f \in S^* \cap S_\varepsilon \text{ uchun}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x_n, f \rangle| < \varepsilon.$$

Bu tengsizlikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$|\langle x_n, f \rangle| < 2^n \varepsilon$$

$$\text{va xususan, } |\langle x_{n_k}, f \rangle| 2^n k \varepsilon \leq 2^{N\varepsilon} = \frac{\delta}{2}$$

Demak, ixtiyoriy $k = 1, 2, \dots, m$ uchun

$$|\langle y_k, f \rangle| \leq |\langle x_{n_k}, f \rangle| + |\langle y_k - x_{n_k}, f \rangle| < \frac{\delta}{2} + \|f\| \|y_k - x_{n_k}\| < \delta,$$

ya'ni $S^* \cap S_\varepsilon \subset U$.

2-teorema. Senarabel normalangan fazoning qo'shma fazosidagi yopiq shar $\sigma(E', E)$ topologiyada kompaktdir.

Isboti. Ravshanki, bu teoremani S^* birlik shar uchun isbotlash kifoya. 1-teoremaga asosan *-sust topologiya S^* sharda metrika yordamida aniqlanadi. Demak, S^* shar 2.8-§ dagi ta'rif ma'nosida *-sust topologiyada nisbiy kompakt va yopiq ekanligini isbotlash kerak.

a) S^* sharning nisbiy kompaktligi. E fazoda zich bo'lgan biror $\{x_n\}$ sanoqli to'plamni olamiz. S^* shardagi ixtiyoriy $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik uchun ushbu

$$\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1), \dots, \varphi_n(x_1), \dots$$

sonli ketma-ketlik chegaralangan, chunki

$$|\varphi_n(x_1)| \leq \|\varphi_n\| \|x_1\| \leq \|x_1\|; n = 1, 2, \dots$$

Demak, $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlikdan shunday

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots \quad (2)$$

qismiy ketma-ketligi tanlash mumkinki, ushbu

$$\varphi_1^{(1)}(x_1), \varphi_2^{(1)}(x_1), \dots, \varphi_n^{(1)}(x_1), \dots$$

sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shunga o‘xshash, (2) ketma-ketlikning shunday

$$\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}, \dots$$

qism ketma-ketligi topiladiki,

$$\varphi_1^{(2)}(x_2), \varphi_2^{(2)}(x_2), \dots, \varphi_n^{(2)}(x_2), \dots$$

sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi va hokazo. Shu tarzda davom ettirib, har biri oldingisining qismiy ketma-ketligi bo‘lgan

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots$$

$$\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}, \dots$$

...

ketma-ketliklar sistemasini hosil qilamiz. Bunda $\{\varphi_n^{(1)}\}$ ketma-ketlik x_1, x_2, \dots, x_k nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘ladi. Endi

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(n)}, \dots$$

„diagonal“ ketma-ketlikni olsak, u holda ixtiyoriy x_k element uchun

$$\varphi_1^{(1)}(x_k), \varphi_2^{(2)}(x_k), \dots, \varphi_n^{(n)}(x_k), \dots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Chunki bu ketma-ketlik yuqoridagi ketma-ketliklarning har birining biron yerdan boshlab qism ketma-ketligi bo‘ladi. $\{x_n\}$

to‘plam E da zinch bo‘lgani sababli 7.5- § dagi 5- teoremaning 4) natijasidan $\{\varphi_n^{(n)}\}$

ketma-ketlikning *- sust yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya’ni S* to‘plam *-sust topologiyada nisbiy kompaktdir.

b) S* sharning *-sust topologiyada yopiqligi. Ixtiyoriy $f_0 \in S^*$ uzluksiz chiziqli funksionalni olamiz, ya’ni $\|f_0\| > 1$. Funksionalning normasi ta’rifiga asosan $\|x\| = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi shunday $x \in E$ element topiladiki,

$|f_0(x)| = \alpha > 1$ o‘rinli bo‘ladi. Ushbu $U = \left\{ f \in E : f(x) > \frac{\alpha+1}{2} \right\}$ to‘plam *-sust topologiyada f_0 elementning atrofi bo‘ladi (7.5-§) va S* shar bilan kesishmaydi, ya’ni S* - yopiq.

Ravshanki, yuqorida isbotlangan teorema faqat birlik shar uchun emas, balki radiusi ixtiyoriy bo‘lgan shar uchun ham o‘rinlidir. Bundan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Separabel normalangan fazoga qo‘shma bo‘lgan fazoda ixtiyoriy chegaralangan to‘plam *-sust topologiyada nisbiy kompaktdir.

8.5-§. Qo‘shma operatorlar

1. Topologik vektor fazolarda qo'shma operatorlar. E va F topologik vektor fazolar, E' va F' mos ravishda ularning topologik qo'shma fazolari bo'lib, $T:E \rightarrow F$ uzlusiz chiziqli operator bo'lsin. F fazoda aniqlangan uzlusiz g chiziqli funksionalni olamiz. Endi g ni Tx elementga qo'llasak, ushbu $g(T \cdot):E \rightarrow K$ aks ettirish E da aniqlangan uzlusiz chiziqli funksionaldir. Darhaqiqat,

$$g(T(\alpha x_1 + \beta x_2)) = g(\alpha Tx_1 + \beta Tx_2) = \alpha g(Tx_1) + \beta g(Tx_2),$$

ya'ni $g(Tx)$ - chiziqli funksional. Uning uzlusizligi g va T ning uzlusiz ekanligidan kelib chiqadi. Demak,

$$g(Tx) = f(x), \quad f \in E'.$$

Shunday qilib, F' dagi ixtiyoriy g elementga E' dagi f element ushbu

$$\langle x, f \rangle = \langle Tx, g \rangle$$

formula bo'yicha mos qo'yildi. Bu moslikni biz T^* bilan belgilaymiz, ya'ni $f = T^* g$, demak, $T^*: F' \rightarrow E'$ aks ettirish quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\langle Tx, g \rangle = \langle x, T^* g \rangle. \quad (1)$$

1-teorema. a) $T^* = F' \rightarrow E'$ - chiziqli operator;

$$b) (T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*;$$

$$c) (\lambda T)^* = \lambda T^*, \quad \lambda \in K.$$

Istboti. a) ixtiyoriy $\alpha, \beta \in K$ va $g_1, g_2 \in F'$ uchun (1) formulaga asosan

$$\langle x, T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) \rangle = \langle Tx, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle = \alpha \langle Tx, g_1 \rangle + \beta \langle Tx, g_2 \rangle =$$

$$= \alpha \langle x, T^* g_1 \rangle + \beta \langle x, T^* g_2 \rangle = \langle x, \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2 \rangle.$$

ya'ni

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2.$$

b)

$$\langle x, (T_1 + T_2)^* g \rangle = \langle (T_1 + T_2)x, g \rangle = \langle T_1 x + T_2 x, g \rangle = \langle T_1 x, g \rangle + \langle T_2 x, g \rangle =$$

$$= \langle x, T_1^* g \rangle + \langle x, T_2^* g \rangle = \langle x, T_1^* g + T_2^* g \rangle$$

ya'ni

$$(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*;$$

$$c) \quad \langle x, (\lambda T)^* g \rangle = \langle \lambda Tx, g \rangle = \langle T(\lambda x), g \rangle = \langle \lambda x, T^* g \rangle = \langle x, \lambda T^* g \rangle,$$

ya'ni

$$(\lambda T)^* = \lambda T^*.$$

Yuqorida kiritilgan T^* chiziqli operator T ga qo'shma operator deyiladi.

1-misol. $T: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli operator (a_{ij}) matritsa yordamida berilgan bo'lsin.

Demak, $y = Tx$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bo'lsa, u holda

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ma'lumki, f chiziqli funksional

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Ushbu

$$f(x) = g(Tx) = \sum_{i=1}^m g_i y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m g_i a_{ij}$$

tenglikdan quyidagi munosabat bevosita kelib chiqadi.

$$f_i = \sum_{i=1}^m g_i a_{ij}.$$

Ammo $f = T^* g$. Shunday qilib, T^* operator (a_{ij}) matritsaga qo‘shma bo‘lgan (a_{ji}) matritsa bilan aniqlanadi.

Agar E va F normalangan fazolar bo‘lsa, u holda E' va F' ham normalangan fazolar bo‘ladi. Demak, T va T^* operatorlarning normalari haqida gapirish mumkin.

2-teorema. Agar E va F Banax fazolari bo‘lib. $T : E \rightarrow F$ chegaralangan chiziqli operator bo‘lsa, u holda

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Isboti. Funksional va operator normasi ta’rifiga asosan ixtiyoriy $g \in F'$ va $x \in E$ elementlar uchun ushbu

$$|T^* g(x)| = |<x, T^* g>| = |<Tx, g>| = |g(Tx)| \leq \|g\| \|Tx\| \leq \|g\| \|T\| \|x\|$$

tengsizlik, ya’ni ushbu

$$\|T^* g\| \leq \|T\| \|g\|$$

tengsizlik o‘rinlidir. Demak,

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

munosabatga egamiz. Endi $x \in E$ ($Tx \neq \theta$) elementni olib, $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$, elementni

qaraymiz. Ravshanki $\|y\| = 1$.8.1-§ dagi 3-teoremaga asosan ushbu:

$$1) g(y) = <y, g> = 1;$$

$$2) \|g\| = \|y\|^{-1} = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $g \in F'$ funksional mavjud. Demak,

$$1 = <y, g> = <\frac{Tx}{\|Tx\|}, g>, \text{ ya’ni } <Tx, g> = \|Tx\|.$$

Ushbu

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= |<Tx, g>| = |<x, T^* g>| = \|T^* g(x)\| \leq \|T^* g\| \|x\| \leq \\ &\leq \|T^*\| \|g\| \|x\| = \|T^*\| \|x\| \end{aligned}$$

tengsizlikdan $\|T\| \leq \|T^*\|$ munosabat kelib chiqadi. Endi (2) ni hisobga olsak,

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

2. Gilbert fazosida qo‘shma operator. N Gilbert fazosi va $T : H \rightarrow H$ chegaralangan chiziqli operator bo‘lsin. Endi $\tau : H \rightarrow H'$ 8.1-§ dagi 3- punktda

keltirilgan izometrik qo'shma chiziqli izomorfizm bo'lsin. τ quyidagicha aniqlanganligini eslatib o'tamiz:

$$(\tau y)(x) = (x, y).$$

So'ng $T^*: H' \rightarrow H'$ operator $T: H \rightarrow H$ operatoriga qo'shma operator bo'lsin. Ushbu

$$\bar{T}^* = \tau_0^{-1} T_0^* \tau: H \rightarrow H$$

aks ettirish chegaralangan chiziqli operator ekanligi bevosita ko'rinish turibdi. Ravshanki, \bar{T}^* operator ushbu

$$(Tx, y) = (x, \bar{T}^* y) \quad (3)$$

xossaga ega. (3) formulani \bar{T}^* operatorning ta'rifi deb olish ham mumkin. $\|T^*\| = \|T\|$ va τ, τ^{-1} izometriyalar bo'lgani uchun

$$\|\bar{T}^*\| = \|T\|$$

\bar{T}^* operator T operator uchun Ermit qo'shma operatori deyiladi.

Qulaylik uchun Gilbert fazolari ko'rildigandagina, \bar{T}^* operatorni T ga qo'shma operator deymiz va T^* bilan belgilaymiz. Boshqacha qilib aytganda, H Gilbert fazosidagi T operator uchun qo'shma T^* operator ushbu

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad (4)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Ta'rif. Agar $T^* = T$ tenglik bajarilsa, $T: H \rightarrow H$ operator o'z-o'ziga qo'shma deyiladi.

Demak, $T: H \rightarrow H$ chiziqli operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun ushbu

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

tenglik ixtiyoriy $x, y \in H$ elementlar uchun bajarilishi kerak.

Agar H haqiqiy Gilbert fazosi bo'lsa, o'z-o'ziga qo'shma operator simmetrik operator deyiladi. Agar H kompleks Gilbert fazosi bo'lsa, o'z-o'ziga qo'shma operator Ermit operatori deyiladi.

Ta'rif. O'z-o'ziga qo'shma T operator ixtiyoriy $x \in H$ uchun ushbu $(Tx, x) \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda T musbat operator deyiladi.

2-misol. H Gilbert fazosi, $H_0 \subset H$ esa uning qism fazosi bo'lsin. $P = P_{H_0}$ proektorni olamiz (4.4-§). P o'z-o'ziga qo'shma va musbat operatorligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $y \in H$ uchun $y - Py \perp H_0$, ixtiyoriy $x \in H$ uchun, $0 = (Px, y - Py) = (Px, y) - (Px, Py)$, ya'ni

$$(Px, y) = (Px, Py).$$

Shunga o'xshash, $(x, Py) = (Px, Py)$, demak,

$$(Px, y) = (x, Py)$$

va

$$(Px, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geq 0,$$

ya'ni P- musbat operatordir.

Ixtiyoriy $T \in L(H)$ operatorning T^* qo'shma operatori ham chiziqli va uzluksiz bo'lgani uchun T operatoriga T^* operatorni mos qo'yish amali $*: L(H) \rightarrow L(H)$ aks ettirishdir (bu amal involyutsiya deyiladi). Endi H kompleks Gilbert fazosi bo'lsin.

3-teorema. $*: L(H) \rightarrow L(H)$ amali quyidagi xossalarga ega:

- 1) $(T^*)^* = T$;
- 2) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$;
- 3) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$;
- 4) $T^* T$ - musbat operator, $T + T^*$ va $i(T - T^*)$ - Ermit operatorlari;
- 5) $\|T^* T\| = \|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$;
- 6) $I^* = I$, $I: H \rightarrow H$ birlik operator;
- 7) agar T^{-1} operator mavjud bo'lsa, u holda $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Isboti. 1) Ixtiyoriy $x, y \in H$ elementlar uchun (4) formulaga binoan $(Tx, y) = (x, T^* y) = (\overline{T^* y}, x) = (\overline{(y, T^*)^* x}) = ((T^*)^* x, y)$, ya'ni $((T^*)^* x - Tx, y) = 0$.

Demak, $(T^*)^* x = Tx$, $(T^*)^* = T$;

- 2) $(x, (\alpha T_1 + \beta T_2)^* y) = ((\alpha T_1 + \beta T_2)x, y) = (\alpha T_1 x, y) + (\beta T_2 x, y) = (T_1(\alpha x), y) + (T_2(\beta x), y) = (\alpha x, T_1^* y) + (\beta x, T_2^* y) = (x, \bar{\alpha} T_1^* y) + (x, \bar{\beta} T_2^* y) = (x, (\bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*) y)$; ya'ni $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$.

- 3) $(x, (T_1 T_2)^* y) = (T_1 T_2 x, y) = (T_1(T_2 x), y) = (T_2 x, T_1^* y) = (x, T_2^*(T_1^* y)) = (x, T_2^* T_1^* y)$, ya'ni $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

4) Ixtiyoriy $x, y \in H$ elementlar uchun

$(T^* T x, y) = (x, (T^* T)^* y) = (x, T^*(T^*)^* y) = (x, T^* T y)$, ya'ni $T^* T$ - Ermit operatori va $(T^* T x, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0$, ya'ni $T^* T$ - musbat operator.

$$\begin{aligned} ((T + T^*) x, y) &= (x, (T + T^*)^* y) = \\ &= (x, (T^* + T^{**}) y) = (x, (T^* + T) y) = (x, (T + T^*) y) \end{aligned}$$

ya'ni $T + T^*$ - Ermit operatori.

So'ng

$$\begin{aligned} (i(T - T^*) x, y) &= ((T - T^*)(ix), y) = (ix, (T - T^*)^* y) = (ix, (T^* - T)y) = \\ &= (x, \bar{i}(T^* - T)y) = (x, i(T - T^*)y) \end{aligned}$$

demak, $i(T - T^*)$ - Ermit operatori.

5) Ma'lumki, ixtiyoriy $T_1, T_2 \in L(H)$ operatorlar uchun $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$. Demak, $\|T^* T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$.

Ammo Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan ushbu tengsizlik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned}\|T\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\|=1} (x, T^* Tx) \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|T^* Tx\| = \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T^* Tx\| = \|T^* T\|.\end{aligned}$$

Demak, $\|T\|^2 = \|T^* T\|$. Endi T o'rnida T^* operatorni olsak, ushbu

$$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$$

tenglik hosil bo'ladi, ya'ni $\|TT^*\| = \|T^* T\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$.

6) O'z-o'zidan ravshan.

7) Agar $T^{-1}T = TT^{-1} = I$ bo'lsa, u holda $(T^{-1}T)^* = (TT^{-1})^* = I^* = I$, ya'ni $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I$. Demak, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Misollar. 3. T chiziqli operator C^n fazoni C^n fazoga aks ettiruvchi bo'lib, $T = (a_{ij})$ matritsa yordamida berilgan bo'lsin.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$, $y = Tx = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^n$ bo'lsa, u holda

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Xuddi 1-misoldagidek, T^* operator (\bar{a}_{ji}) matritsa bilan ifodalanishini ko'rsatish mumkin. Demak, T operator Ermit operatori bo'lishi uchun ushbu

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

munosabat zarur va kifoyadir.

4. $L_2[a, b]$ kompleks Gilbert fazosida Fredgolm operatorini ko'ramiz;

$$Tx(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds, \quad (5)$$

bu yerda $x(t) \in L_2[a, b]$, $\int_a^b \int_a^b K^2(t, s) ds dt = K^2 < \infty$.

Shu operator uchun qo'shma operatorni topamiz. $L_2[a, b]$ fazoda skalyar ko'paytma ushbu

$$(x, y) = \int x(t) \overline{y(t)} dt$$

ko'rinishda bo'lgani uchun

$$(Tx, y) = \int_a^b \overline{y(t)} \left[\int_a^b K(t, s) x(s) ds \right] dt.$$

Fubini teoremasiga asosan

$$(Tx, y) = \int_a^b \int_a^b K(t, s)x(s)\overline{y(t)} dt ds = \int_a^b x(s) \left[\int_a^b K(t, s)\overline{y(t)} dt \right] ds = (x, z),$$

bu yerda

$$\overline{z(s)} = \int_a^b K(t, s)\overline{y(t)} dt,$$

ya'ni

$$z(t) = \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds.$$

Demak,

$$T * y = \int_a^b \overline{K(s, t)} y(s) ds.$$

Natijada quyidagi teorema isbotlandi.

4-teorema. Agar $L_2[a, b]$ fazoda T Fredgolm operatori $K(t, s)$ o'zak bilan aniqlansa, u holda T^* operator $\overline{K(s, t)}$ o'zak bilan aniqlanadi.

Natija. (5) formula bilan aniqlangan Fredgolm operatori Ermit operatori bo'lishi uchun ushbu

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}$$

tenglikning o'rini bo'lishi zarur va kifoyadir.

5. Haqiqiy $L_2[a, b]$ fazoda (5) formula yordamida aniqlangan Fredgolm operatoriga qo'shma operator $K(s, t)$ yadro bilan aniqlanadi va T simmetrik operator bo'lishi uchun ushbu

$$K(t, s) = K(s, t)$$

munosabat zarur va kifoyadir.

Mashq uchun masalalar

1. $C[a, b]$ fazoda ushbu

$$f(x) = \int_a^b x(t) dt, \quad x \in C[a, b]$$

tenglik bilgi aniqlangan funksional uzluksiz va chiziqli ekanligini isbotlab, uning normasini toping.

2. Yuqoridagi masalani ushbu

$$F(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt, \quad x \in C[a, b]$$

funksional uchun yeching, bu yerda $y_0(t) \in C[a, b]$ - biror tayinlangan funksiya.

3. $C[a, b]$ fazoda δ_{t_0} funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

Uning uzluksiz va normasi birga teng ekanligini isbotlang.

4. Refleksiv normalangan fazoning ixtiyoriy yopiq qism fazosi ham refleksiv ekanligini isbotlang.

5. Banax fazosi refleksiv bo‘lishi uchun uning qo‘shma fazosi refleksiv bo‘lishi zarur va kifoyaligini isbotlang.

6. $C^2[a, b]$ fazo refleksiv emasligini isbotlang.

7. Biror H Gilbert fazosida $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga sust yaqinlashib, $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, $n \rightarrow \infty$ munosabat bajarilsin. Bu holda x_n ketma-ketlik x elementga kuchli yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

8. Yuqoridagi masalani $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ shart o‘rniga $\|x_n\| \leq \|x\| (n = 1, 2, \dots)$ shart olinganda isbotlang.

9. Biror Banax fazosida yopiq bo‘lgan, ammo sust topologiyada yopiq bo‘lmagan to‘plamga misol keltiring.

10. Normalangan fazoda biror to‘plam sust topologiyada chegaralangan bo‘lishi uchun u norma bo‘yicha chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoyaligini isbotlang.

11. $C[a, b]$ fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga sust yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $t \in [a, b]$ uchun $x_n(t) \rightarrow x(t)$ ekanligini ko‘rsating.

12. $C[a, b]$ fazo sust topologiyada to‘la emasligini ko‘rsating.

13. Normalangan E fazo uchun E' fazodagi $\sigma(E', E'')$ topologiya $\sigma(E', E)$ topologiyadan kuchliroq ekanligini isbotlang.

14. Agar E refleksiv Banax fazosi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $T \in L(E)$ uchun $T^{**} = T$ tenglikni isbotlang.

15. T chiziqli operator H Gilbert fazosida berilgan bo‘lsin. Agar biror $H_0 \subset H$ qism fazoning ixtiyoriy h_0 elementi uchun $Th_0 \in H_0$ bo‘lsa, H_0 qism fazo T operatoriga nisbatan invariant deyiladi. Agar H_0 qism fazo T operatoriga nisbatan invariant bo‘lsa, u holda H_o^\perp qism fazo T ga Ermit qo‘shma bo‘lgan T^* operatoriga nisbatan invariant ekanligini ko‘rsating.

16. H Gilbert fazosida chegaralangan $P: H \rightarrow H$ operator biror H_0 qism fazoga proektor bo‘lishi uchun u quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur va kifoya ekanligini isbotlang:

a) $P^2 = P$; b) $P^* = P$.

IX BOB. SPEKTRAL ANALIZ ELEMENTLARI

Mazkur bob davomida uchraydigan barcha vektor fazolarni C kompleks sonlar maydoni ustida ko‘ramiz. Bu talab kompleks sonlar maydonining algebraik yopiqligi bilan bog‘liq.

9.1-§. Spektr va rezolventa

E kompleks Banax fazosida aniqlangan va qiymatlari ham E da bo‘lgan chegaralangan chiziqli T operator berilgan bo‘lsin. λ kompleks parametrga bog‘liq bo‘lgan $\{T - \lambda I\}$ operatorlar sistemasini olamiz. Ravshanki, har bir λ uchun $T - \lambda I$ chegaralangan chiziqli operator.

Ta’rif. Agar $\lambda_0 \in C$ uchun $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ operator mavjud bo‘lib, chegaralangan bo‘lsa, λ_0 son T operator uchun *regulyar qiymat* deyiladi. Regulyar qiymat bo‘lmagan kompleks sonlar to‘plami T operatoriинг spektri deyiladi va $\sigma(T)$ bilan belgilanadi.

Demak, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ bo‘lsa, $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ mavjud emas, yoki $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ chegaralanmagan operatordir. Agar E chekli o‘lchamli normalangan fazo bo‘lsa, $\sigma(T)$ spektr faqat shunday λ lardan iboratki, ular uchun $(T - \lambda I)^{-1}$ mavjud emas, chunki chekli o‘lchamli normalangan fazoda har qanday chiziqli operator chegaralangan. Bu holda chiziqli algebra kursidan ma’lumki, $\lambda \in \sigma(T)$ uchun $Tx = \lambda x$ tenglama noldan farqli x_0 yechimga ega, ya’ni

$$Tx_0 = \lambda x_0, \quad x_0 \neq 0$$

Demak, chekli o‘lchamli fazoda chiziqli operatorning spektri faqat xos qiymatlardan iborat va ularning soni ko‘pi bilan $\dim E$ ga teng.

Cheksiz o‘lchamli fazolarda masala murakkabroq. VII bobdan bizga ma’lumki, chiziqli chegaralangan $A : E \rightarrow E$ operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan bo‘lishi uchun quyidagi 2 shartning bajarilishi zarur va kifoya:

1) A -quyidan chegaralangan, ya’ni shunday $m > 0$ mavjudki,

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \forall x \in E;$$

2) A operatorning qiymatlaridan iborat to‘plam E da zinch:

$$\overline{\operatorname{Im} A} = E.$$

Shunday qilib, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ bo‘lsa, $A = T - \lambda_0 I$ operator uchun yuqoridagi ikki shartning kamida biri o‘rinli emas.

Birinchi shartni qanoatlantirmaydigan λ lar to‘plamini $\pi(T)$, ikkinchi shartni qanoatlantirmaydigan λ lar to‘plamini esa $\gamma(T)$ bilan belgilaymiz. Demak,

$$\sigma(T) = \pi(T) \cup \gamma(T).$$

Ta’rif. Chiziqli operatorning xos qiymatlaridan iborat to‘plam operatorning diskret spektri deyiladi; uni $\pi_0(T)$ bilan belgilaymiz.

$\gamma(T) \setminus \pi_0(T) = \sigma_{qold}(T)$ to‘plam operatorning qoldiq spektri, $\pi(T) \setminus [\gamma(T) \cup \pi_0(T)] = \sigma_{uzl}(T)$ to‘plam esa operatorning uzluksiz spektri deyiladi.

Tuzilishiga ko‘ra $\pi_0(T), \sigma_{qold}(T)$ va $\sigma_{uzl}(T)$ to‘plamlarning ixtiyori ikkitasi o‘zyaro kesshmaydi va

$$\sigma(T) = \pi_0(T) \cup \sigma_{qold}(T) \cap \sigma_{uzl}(T).$$

Yuqorida ko‘rdikki, chekli o‘lchamli fazolarda $\sigma(T) = \pi_0(T)$. Demak, $\sigma_{qold}(T) = \emptyset$ va $\sigma_{uzl}(T) = \emptyset$. Cheksiz o‘lchamli fazolarda, umuman aytganda, qoldiq spektr va uzluksiz spektr bo‘sh bo‘lmashligi mumkin. Buni tasdiqlovchi bir necha misol keltiramiz.

1) $C[0,1]$ kompleks fazoda, ya’ni $[0,1]$ da aniqlangan uzluksiz kompleks funksiyalar fazosida quyidagi operatorni olamiz:

$$Tx(t) = t \cdot x(t).$$

Ravshanki, $T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operator chiziqli va chegaralangan. Agar λ_0 kompleks son uchun $\lambda_0 \in [0,1]$ bo‘lsa, operatorning teskarisi mavjud va chegaralangan.

Haqiqatan,

$$(T - \lambda_0 I)^{-1} x(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda_0}.$$

$t \in [0, 1]$ va $\lambda_0 \notin [0,1]$ bo‘lgani uchun $t - \lambda_0 \neq 0$ va $\left| \frac{1}{t - \lambda_0} \right|$ yuqoridan chegaralangan. Demak, $C \setminus [0,1]$ to‘plam regulyar nuqtalardan iborat. Endi $\lambda_0 \in [0,1]$ bo‘lsin. U holda $T - \lambda_0 I$ operator quidian chegaralanmagan, ya’ni

$$\|(T - \lambda_0 I)x\| \geq m \cdot \|x\| \quad \forall x \in C[0,1]$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi musbat $m > 0$ mavjud emas. Darhaqiqat, quyidagi funksiyalar ketma-ketligini olamiz:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } t \in \left[\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n} \right] \text{ bo‘lsa} \\ 1, & \text{agar } t = \lambda_0 \text{ bo‘lsa,} \\ & \left[\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 \right] \text{ va } \left[\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{n} \right] \end{cases}$$

oraliqda chiziqli funksiya.

Ravshanki, $x_n \in C[0,1]$ va $\|x_n\| = 1$. Shu bilan birga

$$\|(T - \lambda_0 I)x_n\| = \max_{t \in [0,1]} |(t - \lambda_0)x_n(t)| < \frac{1}{n},$$

ya’ni $T - \lambda_0 I$ operator quidian chegaralanmagan. Demak, $\lambda_0 \in \pi(T)$. Ikkinchini tomondan, $T - \lambda_0 I$ operatorning qiymatlaridan iborat to‘plam $t = \lambda_0$ nuqtada 0 ga aylanuvchi funksiyalardan tashkil topgan. U holda $C[0,1]$ da norma bo‘yicha

yaqinlashishdan har bir $t \in [0,1]$ nuqtada yaqinlashish kelib chiqishi tufayli $\overline{Im(A - \lambda_0 I)} \neq C[0,1]$. Belgilashimizga ko‘ra $\lambda_0 \in \gamma(T)$. Shunday qilib,

$$\sigma(T) = \pi(T) = \gamma(T) = [0,1].$$

Nihoyat,

$$tx(t) = \lambda x(t), t \in [0,1]$$

tenglama ($x(t)$ ga nisbatan) noldan farqli yechimga ega emas. Demak, $\pi_0(T) = \emptyset$ va shuning uchun $Tx(t) = t \cdot x(t)$ operatorning diskret va uzlusiz spektrlari bo‘sh to‘plamlar ekan. Natijada

$$\sigma(T) = \sigma_{\text{qold}}(T) = [0,1]; \quad \sigma_{\text{uzl}}(T) = \pi_0(T) = \emptyset.$$

2. l_2 kompleks Gilbert fazosida diagonal operator quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\alpha_1, \xi_1, \alpha_2, \xi_2, \dots), \text{ bu yerda } (\xi_1, \xi_2, \dots) = x \in l_2, \alpha_i \in C, i = 1, 2, \dots$$

T ning diagonal operator deyilishiga sabab, bu operator l_2 ning kanonik bazisida cheksiz diagonal matritsa ko‘rinishida yoziladi:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Agar $\sup \|\alpha_i\| < +\infty$ bo‘lsa, T -chegaralangan operator (7,3-§, 6-misol). $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ belgilash kiritib quyidagi tengliklarni isbot qilamiz:

- a) $\pi_0(T) = M$;
- b) $\sigma_{\text{uzl}}(T) = \bar{M} \setminus M$;
- c) $\sigma(T) = \bar{M}, \sigma_{\text{qold}} = \emptyset$.

a) $M \subset \pi_0(T)$ munosabat o‘rinli ekanligi ravshan. $\pi_0(T) \subset M$ munosabatni ko‘rsatamiz. Agar $\lambda \in \pi_0(T)$ bo‘lsa, shunday $x_0 \neq \theta$ mavjudki, $(T - \lambda I)x_0 = \theta$, Demak,

$$((\alpha_1 - \lambda)\xi_1, (\alpha_2 - \lambda)\xi_2, (\alpha_3 - \lambda)\xi_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots).$$

$x_0 \neq 0$ bo‘lgani uchun biror $\xi_k \neq 0$. U holda $\lambda = \alpha_k \in M$

Endi b) va c) tengliklarni isbotlaymiz. Avval $\pi(T) = M$ va $\gamma(T) = \pi_0(T)$ tengliklarni ko‘rsataylik. Agar $\lambda \in C \setminus \bar{M}$ bo‘lsa, λ regulyar qiymat ekanligi ravshan. Shuning uchun $\pi(T) \subset \bar{M}$. Agar $\lambda \in \bar{M}$ bo‘lsa, λ ga yaqinlashuvchi $\{\alpha_{n_k}\} \subset M$ qism ketma-ketlik mavjud.

U holda barcha n lar uchun ushbu

$$\|\lambda - \alpha_n\| \geq \beta > 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi β mavjud emas. Demak, $T - \lambda I$ operator quyidan chegaralamagan, ya’ni $\lambda \in \pi(T)$. Shunday qilib, $\pi(T) = \bar{M}$.

Endi $\gamma(T) = \pi_0(T)$ tenglikni isbotlaymiz. Agar $\lambda \in \pi_0(T)$ bo'lsa, a) ga ko'ra biror k uchun $\lambda = \alpha_k$. U holda $\text{Im}(T - \lambda I)$ to'plam k-koordinatasi 0 ga teng bo'lgan vektorlardan iborat. Demak, $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq l_2$, ya'ni $\pi_0(T) \subset \gamma(T)$. Aksincha, $\lambda \in \gamma(T)$ bo'lsin. U holda

$$\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq l_2.$$

Shunday qilib, $\overline{\text{Im}(T - \gamma I)}^\perp \neq \{\theta\}$. Ikkinchchi tomondan, itiyoriy H Gilbert fazosida chegaralangan B chiziqli operator uchun

$$\overline{(\text{Im } B)}^\perp = \ker B^*$$

tenglik o'rini; bu yerda $\ker B^*$ to'plam B^* qo'shma operatorning yadrosi. Darhaqiqat, ixtiyoriy $x \in \ker B^*$ va $y \in \text{Im } B$ uchun $B^*x = 0$ va $y = Bz$. Demak, $(x, y) = (x, Bz) = (B^*x, z) = (\theta, z) = 0$, ya'ni $x \perp \text{Im } R$. Bundan $x \perp \overline{\text{Im } B}$, ya'ni $\ker B^* \subset (\overline{\text{Im } B})^\perp$.

Aksincha ixtiyoriy, $z \in (\overline{\text{Im } B})^\perp$ va $x \in l_2$ uchun $Bx \in \text{Im } B$, va demak,

$$(B^* z, x) = (z, Bx) = 0.$$

Bu yerda x ixtiyoriy bo'lgani sababli $B^*z = \theta$, ya'ni $z \in \ker B^*$.

Bundan $\ker B^* \supset (\overline{\text{Im } B})^\perp$. Demak, shunday $x_0 \in l_2 (x_0 \neq \theta)$ mavjudki,

$$(T - \lambda I)^* x_0 = \theta. \quad (1)$$

T diagonal operator bo'lgani uchun $T^*T = TT^*$.

Quyidagi

$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$ tenglikdan $\|Tx\| = \|T^*x\|$, $\forall x \in l_2$ kelib chiqadi. Demak, (1) ga ko'ra

$$\|(T - \lambda I)x_0\| = \|T - \lambda I\|^* x_0\| = 0,$$

ya'ni $Tx_0 = \lambda x_0$. Bundan esa $\lambda \in \pi_0(T)$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\pi_0(T) = \gamma(T) = M$. U holda, aniqlanishiga ko'ra

$$\sigma_{uzl}(T) = \bar{M} \setminus M, \sigma(T) = \bar{M}, \sigma_{gold}(T) = \emptyset.$$

Yuqorida biz spektrning ichki tuzilishini misollarda ko'rdik. Endi spektrning asosiy xossalari bilan tanishamiz.

1-teorema. Spektr yopiq to'plamdir.

Isboti. Ta'rifga ko'ra, spektr - regulyar nuqtalar to'plamining to'ldiruvchisi. Demak, regulyar nuqtalar to'plamining ochiqligini ko'rsatish kifoya. Haqiqatan, λ_0 regulyar nuqta bo'lsin. U holda $(T - \lambda_0 I)^{-1}$ operator mavjud va chegaralangan. Ushbu

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|} \quad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\lambda \in C$ uchun $T - \lambda I$ operatorni ko‘raylik. Ravshanki,

$$B = (T - \lambda_0 I)^{-1} [(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)]$$

ifoda ma’noga ega va $B : E \rightarrow E$. Ikkinci tomondan esa

$$\|B\| = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \cdot \|(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)\| = \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \cdot |\lambda - \lambda_0|.$$

(2) ga ko‘ra $\|B\| < 1$. Modomiki $\|B\| < 1$ ekan, 7.4-§ dan ma’lumki, $(I + B)^{-1}$ mavjud va chegaralangan. Agar B ni quyidagi

$B = (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda_0 I) = (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I) - I$ ko‘rinishda yozib olsak,

$$I + B = (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I)$$

bo‘ladi. Demak, $(T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I)$ operator teskarilanuvchi, ya’ni chegaralangan teskari operatorga ega. U holda

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 T) \cdot \left| (T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I) \right|$$

ayniyatga ko‘ra $T - \lambda I$ operator teskarilanuvchi, chunki $T - \lambda_0 I$ va $(T - \lambda_0 I)^{-1} (T - \lambda I)$ teskarilanuvchi. Shunday qilib, (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha λ lar uchun $(T - \lambda I)^{-1}$ mavjud va chegaralangan operator, ya’ni λ_0 regulyar qiymatlar to‘plamining ichki nuqtasi. Demak, spektr yopiq to‘plamdir.*

2-teorema. Har qanday chegaralangan T operatorning spektri chegaralangan to‘plam va radiusi $\|T\|$ ga teng doira ichida joylashgan.

Isboti. Agar $|\lambda| > \|T\|$ bo‘lsa, $\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1$ tengsizlik o‘rinli. Demak, $\left(\frac{1}{\lambda} T - I \right)^{-1}$ mavjud va chegaralangan. U holda

$$T - \lambda I = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} T - I \right)$$

ham teskarilanuvchi. Shunday qilib, $|\lambda| > \|T\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha λ lar T operator uchun regulyar qiymatdir, ya’ni quyidagi munosabat o‘rinli

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \|T\|\} .*$$

Spektrning yana ham chuqurroq xossalarni o‘rganish uchun bir necha tushunchalar kiritamiz.

Ta’rif. λ regulyar qiymat uchun

$$R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$$

operator *rezolventa* (aniqrog‘i, T operatorning *rezolventasi*) deyiladi.

Ta’rifga ko‘ra $R(\lambda)$ kompleks argument λ ning funksiyasi bo‘lib,

qiymatlari esa E ni E ga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorlardan iborat. Demak,

$$R(\cdot) : C \setminus \sigma(T) \rightarrow L(E),$$

bu yerda $L(E)$ -chegaralangan operatorlar fazosi.

Ta’rif. Kompleks tekislikdagi G ochiq sohada aniqlangan va qiymatlari F Banax fazosiga tegishli bo‘lgan $g(\lambda)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $f \in F'$ uchun ushbu

$$\phi(\lambda) = f(g(\lambda)), \phi : G \rightarrow C$$

kompleks funksiya G da analitik bo‘lsa, u holda $g(\lambda)$ bu sohada *sust analitik funksiya* deyiladi.

3-teorema. $R(\lambda)$ rezolventa $C \setminus \sigma(T)$ ochiq sohada va ∞ nuqtada sust analitik funksiya hamda $R(\infty) = 0$.

Izboti. Haqiqatan, $\lambda_0 \in C \setminus \sigma(T)$ va f Banax fazosi $L(E)$ da aniqlangan chiziqli uzluksiz funksional bo‘lsin. Yuqoridagi 1- teoremaning isbotida ko‘rganimizdek, yetarli kichik $|\lambda - \lambda_0|$ uchun $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ mavjud va

$$T - \lambda I = [I - (T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)](T - \lambda_0 I)$$

tenglikka ko‘ra

$$R(\lambda) = R(\lambda_0) [I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1} \quad (3)$$

ayniyat o‘rinli. Demak, $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$ bo‘lsa, $[I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1}$ ifodani

quyidagi qatorga yoyishimiz mumkin:

$$[I - R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)]^n$$

U holda (3) ga ko‘ra f uzluksiz bo‘lgani sababli

$$f(R(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $a_n = f \left\{ [R(\lambda_0)]^{n+1} \right\}$. Ravshanki,

$$|a_n| = \left| f \left\{ [R(\lambda_0)]^{n+1} \right\} \right| \leq \|f\| \|R(\lambda_0)\|^{n+1}.$$

$$\text{Shunday qilib, } |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|} \quad \text{tengsizlikdan} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(R(\lambda))$ analitik funksiya, ya’ni $R(\lambda)$ -sust analitik funksiya.

Endi ∞ nuqtaning atrofini ko‘raylik. Agar $\lambda \neq 0$ bo‘lsa ushbu

$$T - \frac{1}{\lambda} I = -\frac{1}{\lambda} (I - \lambda T)$$

munosabatdan

$$R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left(T - \frac{1}{\lambda}I\right)^{-1} = -\lambda(I - \lambda T)^{-1}$$

kelib chiqadi, ya'ni

$$R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda(I + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \dots). \quad (4)$$

Demak, $\lambda \rightarrow 0$ da $R(\infty) = 0$ tenglik o'rinni va (4) ga muvofiq $R(\lambda)$ funksiya $\lambda = \infty$ nuqtada sust analitik bo'ladi.

4-teorema. Har qanday chegaralangan chiziqli operatorning spektri bo'sh bo'limgan to'plamdir.

Ishboti. $\sigma(T) = \emptyset$ deb faraz qilaylik. 3-teoremada isbot qilinganiga ko'ra $R(\lambda)$ funksiya S kompleks tekislikda va ∞ nuqtada sust analitik. Demak, $L(E)$ da aniqlangan f uzlusiz chiziqli funksional uchun $f(R(\lambda))$ kompleks funksiya analitik bo'ladi. Agar $f(R(\lambda))$ funksiyaning ∞ nuqtada analitik ekanligini va $f(R(\infty)) = 0$ tenglikni hisobga olsak, $f(R(\lambda))$ funksiya ∞ nuqtaning atrofida chegaralanganligi kelib chiqadi. Ya'ni shunday $M_1 > 0$ va $r > 0$ mavjudki, $\lambda(|\lambda| > r)$ uchun ushbu

$$|f(R(\lambda))| \leq M_1$$

tengsizlik o'rinni. Demak, $f(R(\lambda))$ funksiya kompleks tekislikda chegaralangan. Liuvill teoremasiga ko'ra $f(R(\lambda))$ o'zgarmas funksiya:

$$f(R(\lambda)) = \text{const.}$$

Agar $f(R(\infty)) = 0$ tenglikni inobatga olsak, ushbu $f(R(\lambda)) \equiv 0$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu yerda f ixtiyoriy uzlusiz funksional bo'lgani uchun Xan-Banax teoremasining natijasiga ko'ra

$$R(\lambda) \equiv 0.$$

Ikkinchi tomondan esa

$$R(\lambda) \cdot (T - \lambda I) = I,$$

demak, $R(\lambda) \neq 0$. Shunday qilib, $\sigma(T) = \emptyset$ farazimiz ziddiyatga olib keldi.

Chiziqli operatorlarni o'rghanishda spektrni lokalizatsiyalash (ajratish) masalasi muhim ahamiyatga ega. Yuqoridagi 2-teoremada spektrning chegaralangan to'plam ekanligini ko'rsatdik.

Ushbu

$$\rho(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

son T operatorning *spektral radiusi* deyiladi.

5-teorema. Ixtiyoriy chegaralangan chiziqli T operator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ mavjud va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \rho(T). \quad (5)$$

Ishboti. Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \geq \rho(T), \quad (6)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \rho(T) \quad (7)$$

tengsizliklarni ko'rsatsak, teorema isbot qilingan bo'ladi.

a) (6) tengsizlikning isboti. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$\rho(T^n) = \sup_{\mu \in \sigma(T^n)} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|^n = (\rho(T))^n \quad (8)$$

munosabat o'rini ekanligini tekshirish qiyin emas. 2-teoremada isbot qilganimizga ko'ra

$$\rho(T^n) \leq \|T^n\|. \quad (9)$$

(8) va (9) dan ixtiyoriy n uchun

$$\rho(T) \leq \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Demak, xususan

$$\rho(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

va (6) tengsizlik o'rini.

b) (7) tengsizlikning isboti. Agar λ_0 kompleks son $|\lambda_0| < \frac{1}{\rho(T)}$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $\frac{1}{\lambda_0}$ regulyar qiymat bo'ladi. Demak, $R(\lambda)$ rezolventa $\frac{1}{\lambda_0}$ nuqtada

sust analitik. U holda ixtiyoriy $f \in [L(E)]'$ uchun (4) ga asosan

$$f\left(R\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(T^n). \quad (10)$$

Bu Teylor qatori $|\lambda| < \frac{1}{\rho(T)}$ bo'lganda Koshi alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi. Qatorning yaqinlashuvchiligidan esa $|\lambda^n f(T^n)|$ sonlarning nolga yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy $f \in [L(E)]'$ uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(\lambda^n T^n) \rightarrow 0$, ya'ni $\{\lambda^n T^n\} \subset L(E)$ ketma-ketlik nolga sust yaqinlashuvchidir (8.3- §).

8.3-§ dagi 1-teoremaga asosan shunday $c > 0$ son mavjudki,

$$\|\lambda^n T^n\| \leq c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ya'ni

$$|\lambda^n| \cdot \|T^n\| \leq c.$$

Oxirgi munosabatdan esa

$$|\lambda| \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \sqrt[n]{c}.$$

Endi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \frac{1}{|\lambda|}. \quad (11)$$

Shunday qilib, (11) munosabat $|\lambda| < \frac{1}{\rho(T)}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi

barcha λ lar uchun o‘rinli. Demak. (11) da $\lambda \rightarrow \frac{1}{\rho(T)}$ da limitiga o‘tilsa,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \rho(T)$$

kelib chiqadi, ya’ni (7) tengsizlik o‘rinli.

Misol sifatida Volterra operatorini ko‘raylik. Volterra operatori $C[a, b]$ fazoda quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$(Tx)(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)ds,$$

bu yerda $K(t, s)$ o‘zak bo‘lib, $\Delta = \{(t, s) : a \leq t \leq b; a \leq s \leq b\}$ to‘plamda aniqlangan uzluksiz funksiya. Ravshanki, $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, chegaralangan chiziqli operator. Volterra operatorining spektral radiusini topish uchun ushbu belgilashni kiritamiz:

$$\max_{(t, s) \in \Delta} |K(t, s)| = M$$

Operatorning tuzilishiga ko‘ra

$$T^2x(t) = T(Tx(t)) = \int_a^t [K(t, s_1) \int_a^{s_1} K(s_1, s_2)x(s_2)ds_2]ds_1$$

yoki umumiy holda

$$T^n x(t) = \int_a^t [K(t, s_1) \int_a^{s_1} [K(s_1, s_2) \dots \int_a^{s_{n-1}} K(s_{n-1}, s_n)x(s_n)ds_n] \dots] ds_1$$

Agar $|K(t, s)| \leq M$ tengsizlikni hisobga olsak,

$$|T^n x(t)| \leq M^n \cdot \int_a^t \left[\int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots \right] ds_{n-1} \dots ds_1 \cdot \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Matematik analiz kursidan ma’lumki,

$$\int_a^t \int_a^{s_1} \dots \int_a^{s_{n-1}} ds_n ds_{n-1} \dots ds_1 = \frac{(t-a)^n}{n!}$$

Demak,

$$\|T^n\| \leq \frac{M^n (b-a)^n}{n!},$$

ya’ni

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leq \frac{M \cdot (b-a)}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0.$$

Shunday qilib, Volterra operatorining spektral radiusi 0 ga teng.

Yuqorida biz spektr va rezolventa tushunchasini faqat kompleks fazoda

aniqlangan operator uchun kiritdik va teoremalarni isbot qilishda bu talabdan foydalandik. Lekin amalda esa (ba'zan matematik fizika masalalarida) to'la bo'lmanan yoki faqat haqiqiy sonlar maydoni ustida qurilgan normalangan fazolarda aniqlangan operatorlarning spektrini topish masalalari uchraydi. Quyidagi ikkita izoh yordamida bu masalalar o'r ganilgan holga keltiriladi.

1-izoh. E to'la bo'lmanan kompleks normalangan fazo va $T:E \rightarrow E$ chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. Ma'lumki, E ni to'ldirish mumkin (4.1-§, 1-teorema). Hosil bo'lgan kompleks Banax fazosini \bar{E} bilan belgilaymiz. E fazo \bar{E} da zinch bo'lganligi va $T:E \rightarrow E$ chegaralangan bo'lganligi uchun T operatorni \bar{E} fazoga normasini saqlagan holda davom ettirishimiz mumkin (7.4-§ dagi lemma). Natijada hosil bo'lgan operatorni T bilan belgilab, T operatorning spektrini quyidagicha kiritamiz:

$$\sigma(T) = \sigma(\bar{T})$$

2-izoh. E haqiqiy Banax fazosi bo'lsin. Chiziqli algebra kursidan ma'lum bo'lgan tenzor ko'paytma tushunchasidan foydalanib, yangi \bar{E} fazoni quyidagicha kiritamiz:

$$\bar{E} = C \oplus E.$$

Kiritilgan fazo E fazoning kompleksifikatsiyasi deyiladi (tenzor ko'paytma bilan tanish bo'lmanan o'quvchilar \bar{E} ni formal ravishda $E \oplus iE$ deb tushunishlari mumkin).

Ravshanki, \bar{E} kompleks Banax fazosi va ixtiyoriy $x \in \bar{E}$ elementni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = y + iz, \quad y, z \in E.$$

O'z navbatida, bu tenglikdan foydalanib, T operatorni \bar{E} ga davom ettirishimiz mumkin:

$$Tx = Ty + iTz.$$

Tabiiy ravishda T operatorning spektri quyidagi formula orqali kiritiladi:

$$\sigma(T) = \sigma(\bar{T}).$$

9.2-§. Proeksion operatorlar

Quyida biz Gilbert fazosida aniqlangan operatorlarning maxsus sinflarini o'r ganamiz.

Ta'rif. H Gilbert fazosida aniqlangan P chiziqli operator

$$1) P^2 = P,$$

$$2) P^* = P$$

shartlarni qanoatlantirsa, u *ortogonal proeksiyalash operatori* deyiladi.

Ixchamlik maqsadida, bu bobda ortogonal proeksiyalash operatori iborasi o'rnida *proektor* so'zini ishlatamiz.

1-teorema. Har qanday proektor chegaralangan operator va $P \neq 0$ bo'lsa, $\|P\| = 1$.

Isboti. Ushbu

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^*Px, x) = (P^2x, x) = (Px, x)$$

munosabatdan Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$\|Px\|^2 \leq \|Px\| \cdot \|x\|$. Demak, $\|Px\| \leq \|x\|$, ya'ni P chegaralangan va $\|P\| \leq 1$. Ikkinchini tomondan, $\|P\| = \|P\|^2 \leq \|P\|^2$, ya'ni $P \neq 0$ bo'lsa $\|P\| \geq 1$. Shunday qilib, $\|P\| = 1$.*

Misol. L to'plam H ning yopiq qism fazosi, L^\perp esa uning ortogonal to'ldiruvchisi bo'lsin. U holda, ma'lumki,

$$H = L \oplus L^\perp,$$

ya'ni ixtiyoriy $x \in H$ vektorni yagona usul bilan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp \quad (1)$$

P operatorini

$$Px=y$$

tenglik orqali aniqlaymiz, ya'ni P operator har bir $x \in H$ ga uning L dagi proeksiyasini mos qo'yadi. Kiritilgan operator proektor ekanligini ko'rsatamiz.

a) P chiziqli operator. Haqiqatan, $x_1, x_2 \in H$ va

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + z_1, \quad y_1 \in L, \quad z_1 \in L^\perp \\ x_2 &= y_2 + z_2, \quad y_2 \in L, \quad z_2 \in L^\perp \end{aligned} \quad (2)$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ uchun

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),$$

bu yerda $\alpha y_1 + \beta y_2 \in L$, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in L^\perp$. Agar (1) yoyilmada y va z yagona usul bilan aniqlanishini hisobga olsak,

$$P(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Px_1 + \beta Px_2$$

ya'ni P - chiziqli operator.

b) $P^* = P$. Yuqoridagi (2) tengliklarda $y_1 \perp z_2$ va $y_2 \perp z_1$ bo'lgani uchun

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_1 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z, y_2) = (x_1, Px_2)$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in H$ uchun $(Px_1, x_2) = (x_1, Px_2)$, ya'ni $P = P^*$.

c) $P^2 = P$. Agar $x \in L$ bo'lsa, (1) yoyilmada $z = \theta$ Shuning uchun $Rx = x$. Ixtiyoriy $x' \in H$ uchun $Px' \in L$. Demak, $P^2 x' = P(Px') = Px'$, ya'ni $P^2 = P$.

a), b) va c) ga asosan P -proektor.

Yuqorida ko'rgan misolimiz umumiy xarakterga ega. Aniqrog'i, ushbu teorema o'rinli.

2-teorema. Har qanday P proektor uchun N ning shunday yopiq L qism fazosi mavjudki, Px vektor x vektoring L dagi proeksiyasiga teng.

Izboti. $Px = x$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lgan to'plamni L orqali belgilaylik. P chiziqli operator bo'lgani uchun L chiziqli qism fazoni tashkil qiladi. L ning yopiq ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{x_n\} \subset L$ va $x_n \rightarrow x_0$ bo'lsin. U holda $Px_n = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Demak,

$$Px_0 - x_n = Px_0 - Px_n = P(x_0 - x_n)$$

Agar $\|P\| \leq 1$ munosabatni hisobga olsak,
 $\|Px_0 - x_n\| \leq \|x_0 - x_n\|$
ya'ni $n \rightarrow \infty$ da

$$\|Px_0 - x_0\| = 0, \quad Px_0 = x_0$$

ni hosil qilamiz. Demak, L - yopiq qism fazo. $P^2 = P$ shartga ko'ra ixtiyoriy $x \in H$ uchun $P^2 x = P(Px) = Px$ tenglik o'rinni. Bundan $Px \in L$. Teoremaning isbotini yakunlash uchun $z = x - Px$ vektorning L ga ortogonal ekanligini ko'rsatish kifoya. Haqiqatan, ixtiyoriy $y \in L$ uchun $y = Py$, demak,

$$\begin{aligned} (x - Px, y) &= (x - Px, Py) = (P * (I - P)x, y) = \\ &= (P(I - P)x, y) = ((P - P^2)x, y) = (\theta, y) = 0 \end{aligned}$$

Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in H$ uchun $Px \in L$ va $x - Px \in L^\perp$, ya'ni P operator L ga ortogonal proeksiyalash operatori.

Endi proektorlar ustida amallarni ko'ramiz. Umuman aytganda, proektorlarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi proektor bo'lishi shart emas.

3-teorema. Agar P proektor bo'lsa, $I - P$ ham proektor.

Isboti. Haqiqatan, $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$ va

$$(I - P)^* = I^* - P^* = I - P.$$

Demak, $I - P$ - proektor.

Agar P proektor L qism fazoga proeksiyalash bo'lsa, uni P_L ko'rinishida yozamiz.

4-teorema. Ikkita P_{L_1} va P_{L_2} proektorning ko'paytmasi proektor bo'lishi uchun

$$P_{L_1} P_{L_2} = P_{L_2} P_{L_1} \tag{3}$$

tenglikning bajariliish zarur va kifoya. Agar (3) shart bajarilsa, u holda

$$P_{L_1} P_{L_2} = P_L, \tag{4}$$

bu yerda $L = L_1 \cap L_2$.

Isboti. 1) agar $P_{L_1} P_{L_2}$ proektor bo'lsa,

$$P_{L_1} P_{L_2} = (P_{L_1} P_{L_2})^* = P_{L_2}^* P_{L_1}^* = P_{L_2} P_{L_1},$$

ya'ni (3) o'rinni. Endi (4) ni tekshiramiz. Ushbu

$P_L x = P_{L_1}(P_{L_2} x) \in L_1$, $P_L x = P_{L_2}(P_{L_1} x) \in L_2$ munosabatlardan $P_L x \in L_1 \cap L_2$ kelib chiqadi, ya'ni $L \subset L_1 \cap L_2$.

Ikkinchini tomondan, agar $x \in L_1 \cap L_2$ bo'lsa, $P_L x = P_{L_1}(P_{L_2} x) = x$, ya'ni $L_1 \cap L_2 \subset L$.

Demak, $L = L_1 \cap L_2$.

2) (3) o'rinni bo'lsin. U holda

$$(P_{L_1} P_{L_2})^2 = (P_{L_1} P_{L_2})(P_{L_1} P_{L_2}) = P_{L_1}^2 P_{L_2}^2 = P_{L_1} P_{L_2}$$

va

$$(P_{L_1} P_{L_2})^* = P_{L_2}^* P_{L_1}^* = P_{L_2} P_{L_1} = P_{L_1} P_{L_2}.$$

Shunday qilib, $P_{L_1} P_{L_2}$ proektor. Yuqorida ko'rganimizdek, bundan $P_{L_1} P_{L_2} = P_L$ tenglik kelib chiqadi.

5-teorema. Chekli sondagi $P_{L_1}, P_{L_2}, \dots, P_{L_n}$ proektorlarning yig'indisi proektor bo'lishi uchun L_1, L_2, \dots, L_n qism fazolarning ixtiyoriy ikkitasi o'zaro ortogonal bo'lishi zarur va kifoya. Bu shart bajarilganda,

$$P_{L_1} + \dots + P_{L_n} = P_L$$

bo'ladi, bu yerda $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ - to'g'ri yig'indi.

Istboti. 1) $L_i \perp L_j, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$ bo'lsin. U holda 4-teoremaga asosan

$$P_{L_i} P_{L_j} = P_{L_j} P_{L_i} = 0.$$

Demak,

$$(P_{L_1} + \dots + P_{L_n})^2 = P_{L_1}^2 + \dots + P_{L_n}^2 = P_{L_1} + \dots + P_{L_n}.$$

So'ngra

$$(P_{L_1} + \dots + P_{L_n})^* = P_{L_1} + \dots + P_{L_n}$$

Shunday qilib, $P_{L_1} + \dots + P_{L_n} = P_L$ - proektor.

Endi $P_{L_1} + \dots + P_{L_n} = P_L$ tenglikni tekshiraylik.

Agar $x \in \bigoplus_{i=1}^n L_i$ bo'lsa, $x = x_1 + \dots + x_n$ va $x_i \perp x_j (i \neq j)$ $x_i \in L_i$.

U holda

$$P_L x = (P_{L_1} + \dots + P_{L_n})(x_1 + \dots + x_n) = P_{L_1} x_1 + \dots + P_{L_n} x_n, x_n = x,$$

ya'ni $\bigoplus_{i=1}^n L_i \subset L$. $L \neq \bigoplus_{i=1}^n L_i$ deb faraz qilaylik. U holda

shunday $z \neq \theta$ mavjudki, $z \in L$ va $z \perp \bigoplus_{i=1}^n L_i$. Endi $z \in L$ dan

$$P_L z = z \neq \theta \tag{5}$$

$z \perp \bigoplus_{i=1}^n L_i$ munosabatga asosan

$$z \perp L_i, i = \overline{1, n}$$

yoki

$$P_L z = P_{L_1} z + \dots + P_{L_n} z = \theta$$

kelib chiqadi. Bu esa (5) ga zid. Shunday qilib, $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$, ya'ni $P_{L_1} + \dots + P_{L_n} = P_L$

2) $P_{L_1} + \dots + P_{L_n}$ proektor bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in H$ uchun

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\geq \left\| \left(P_{L_1} + \dots + P_{L_n} \right) x \right\|^2 = \left(\left(P_{L_1} + \dots + P_{L_n} \right) x, \left(P_{L_1} + \dots + P_{L_n} \right) x \right) = \left(\left(P_{L_1} + \dots + P_{L_n} \right) x, x \right) = \\ &= \left(P_{L_1} x, x \right) + \dots + \left(P_{L_n} x, x \right) = \|P_{L_1} x\|^2 + \dots + \|P_{L_n} x\|^2\end{aligned}$$

Ixtiyoriy i va j ($i \neq j$) indekslar uchun

$$\|P_{L_i} x\|^2 + \|P_{L_j} x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad (6)$$

Bu tengsizlikda x ning o‘rniga $P_{L_i} y$ ni qo‘ysak,

$$\|P_{L_i}^2 y\|^2 + \|P_{L_j} P_{L_i} y\|^2 \leq \|P_{L_i} y\|^2,$$

ya’ni $\|P_{L_i} P_{L_j} y\| \leq 0$ kelib chiqadi.

Bu yerda y ixtiyoriy bo‘lgani uchun $P_{L_j} P_{L_i} = 0$.

Agar (6) tengsizlikda x o‘rniga $P_{L_j} y$ ni qo‘ysak,

$$\|P_{L_i} P_{L_j} y\|^2 + \|P_{L_j}^2 y\|^2 \leq \|P_{L_j} y\|^2.$$

Bundan $P_{L_i} P_{L_j} = 0$. Natijada $P_{L_j} P_{L_i} = P_{L_i} P_{L_j} = 0$ bo‘lgani uchun $L_i \perp L_j$ kelib chiqadi. Haqiqatan, ixtiyoriy $x \in L_i$, $y \in L_j$ uchun

$$(x, y) = (P_{L_i} x, P_{L_j} y) = (P_{L_j} P_{L_i} x, y) = (\theta, y) = 0.*$$

6-teorema. P_{L_1} va P_{L_2} proektorlarning ayirmasi proektor bo‘lishi uchun $L_2 \subset L_1$, bo‘lishi zarur va kifoya. Bu shart bajarilganda

$$P_{L_1} - P_{L_2} = P_{L_1}$$

bo‘ladi, bu yerda $L = L_1 \Theta L_2$ (L_2 ning L_1 gacha ortogonal to‘ldiruvchisi.)

Bu teoremaning isboti yuqoridagi teoremlarning isbotiga o‘xshash.

H Gilbert fazosidagi barcha proektorlardan iborat to‘plamni $P(H)$ orqali belgilaymiz. $P(H)$ to‘plamda qisman tartibni quyidagi usul bilan kiritamiz: agar $L_1 \subset L_2$ munosabat o‘rinli bo‘lsa $P_{L_1} \leq P_{L_2}$. Bu bilan $P(H)$ qisman tartiblangan to‘plamga aylanadi.

Lemma. $P_{L_1} \leq P_{L_2}$ bo‘lishi uchun $\|P_{L_1} x\| \leq \|P_{L_2} x\|$ tengsizlikning ixtiyoriy $x \in H$ uchun bajarilishi zarur va kifoya.

Isboti. 1) $P_{L_1} \leq P_{L_2}$ bo‘lsin. U holda $L_1 \subset L_2$ munosabatdan $P_{L_1} = P_{L_1} P_{L_2}$ kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy $x \in H$ uchun $P_{L_1} x = P_{L_1} P_{L_2} x$. Bundan

$$\|P_{L_1} x\| \leq \|P_{L_2}\| \cdot \|P_{L_2} x\| = \|P_{L_2} x\|.$$

2) aksincha, ya’ni ixtiyoriy $x \in H$ uchun

$$\|P_{L_1} x\| \leq \|P_{L_2} x\| \quad (7)$$

bajarilgan bo‘lsin. P_{L_2} proektor bo‘lgani uchun

$$P_{L_2} (I - P_{L_2}) x = \theta, \quad \forall x \in H.$$

Agar (7) tengsizlikni hisobga olsak,

$$\|P_{L_1}(I - P_{L_2})x\| \leq \|P_{L_2}(I - P_{L_2})x\| = 0$$

Demak, $P_{L_1}(I - P_{L_2})x = \theta$, $\forall x \in H$, ya'ni $P_{L_1} = P_{L_1}P_{L_2}$.

U holda 4- teoremaga ko'ra, $L_1 = L_1 \cap L_2$, ya'ni $L_1 \subset L_2$.

7-teorema. Har qanday monoton o'suvchi proektorlar ketma-ketligi $\{P_{L_k}\}_{k=1}^{\infty}$ biror P proektorga kuchli yaqinlashadi.

Isboti. Yuqoridagi lemmaga ko'ra, $P_{L_1} \leq P_{L_2} \leq \dots$ munosabatdan ixtiyoriy $x \in H$ uchun $\{\|P_{L_k}x\|\}_{k=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketlikning monoton o'suvchi ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchini tomondan, P_{L_n} ning proektorligidan

$$\|P_{L_n}x\| \leq \|x\|.$$

Demak, $\{\|P_{L_k}x\|\}_{k=1}^{\infty}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik. Bu faktdan foydalanib, ketma-ketlikning H da yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan,

$$\begin{aligned} \|P_{L_n}x - P_{L_m}x\|^2 &= (P_{L_n}x - P_{L_m}x, P_{L_n}x - P_{L_m}x) = \\ &= (P_{L_n}x, P_{L_n}x) - (P_{L_n}x, P_{L_m}x) - (P_{L_m}x, P_{L_n}x) + (P_{L_m}x, P_{L_m}x) \end{aligned}$$

Agar $m < n$ bo'lsa, u holda

$$(P_{L_n}x, P_{L_m}x) = (P_{L_m}P_{L_n}x, x) = (P_{L_m}x, x) = (P_{L_m}x, P_{L_m}x) = \|P_{L_m}x\|^2.$$

Shunday qilib,

$$\|P_{L_n}x - P_{L_m}x\|^2 = \|P_{L_n}x\|^2 - \|P_{L_m}x\|^2 \rightarrow 0.$$

Demak, $\{P_{L_k}x\}_{k=1}^{\infty}$ fundamental ketma-ketlik. Agar H ning to'laligini hisobga olsak, $\{P_{L_k}x\}$ ning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Har bir $x \in H$ ga $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{L_n}x \in H$ elementni mos qo'yuvchi akslantirishni P orqali belgilaymiz. U holda skalyar ko'paytmaning uzluksizligidan P ning proektor ekanligi kelib chiqadi, haqiqatan,

$$a) P(ax + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{L_n}(ax + \beta y) = \alpha Px + \beta Py,$$

ya'ni P chiziqli akslantirish;

$$b) (Px, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{L_n}x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, P_{L_n}y) = (x, Py),$$

ya'ni $P = P^*$;

$$c) (Px, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{L_n}x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{L_n}^2x, y) = (P^2x, y),$$

yoki $P = P^2$ Teorema isbot qilindi.*

Endi $[\alpha, \beta]$ biror chekli yoki cheksiz oraliq, $\{E_t\}$ esa $t \in [\alpha, \beta]$ parametriga bog'liq proektorlar oilasi bo'lsin.

Ta'rif. Birning yoyilmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{E_t\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ proektorlar oilasiga aytildi:

- 1) $E_\alpha = 0, E_\beta = I;$
- 2) $E_s E_t = E_{\min(t,s)};$
- 3) $(s) - \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} E_t = E_{t_0} (\alpha < t_0 < \beta).$

Izoh. Bu ta'rifda 2) shart $\{E_t\}$ proektorlar oilasi t parametrning funksiyasi sifatida monoton o'suvchi ekanligini anglatadi. 3) shartga kelsak, 3- teorema ko'ra $[\alpha, \beta]$ oraliqning ixtiyoriy t_0 ichki nuqtasida $(s) - \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} E_t$ mavjud (kuchli yaqinlashish ma'nosida). Shunday qilib, ta'rifdagi 3) shart E_t funksiyaning chapdan uzlusizligiga ekvivalent. Nihoyat, agar $\alpha = -\infty$ yoki $\beta = +\infty$ bo'lsa

$$E_{-\infty} = \lim_{t \rightarrow -\infty} E_t, \quad E_{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} E_t$$

deb olamiz. Bu limitlarning mavjudligi yana yuqoridagi 7- teoremadan kelib chiqadi.

Matematik analiz umumiylar kursidan ma'lum Stiltes integrali tushunchasidan foydalanib, quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$x = Ix = (E_\beta - E_\alpha)x = \int_{\alpha}^{\beta} dE_t x, \quad \forall x \in H, \quad (8)$$

bu yerda $\int_{\alpha}^{\beta} dE_t x$ ifoda $E_t x$ funksiya uchun $[\alpha, \beta]$ oraliqda tuzilgan Stiltes integral yig'indisining H fazodagi kuchli limitiga teng. Limitning mavjudligi proektorlarning yuqorida isbot qilingan xossalardan bevosita kelib chiqadi.

Shunday qilib, birlik operatorni birning yoyilmasi bo'yicha Stiltes integrali ko'rinishida ifodaladik:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} dE_t.$$

Umuman, chiziqli operatorni Stiltes integrali ko'rinishida ifodalash masalasi spektral teoremaning mazmunini tashkil qiladi. Bu masala ustida keyingi paragraflarda batafsilroq to'xtab o'tamiz.

9.3-§. Chekli o'lchamli Evklid fazosida o'z-o'ziga qo'shma operator uchun spektral teorema

Ushbu paragraf ko'proq metodik ahamiyatga ega.

1- teorema. Chekli o'lchamli Evklid fazosida har qanday o'z-o'ziga qo'shma A operator uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ haqiqiy sonlar va P_1, \dots, P_r proektorlar mavjud:

- 1) α_i lar bir-biridan farqli;
- 2) $P_i \neq 0$ va P_i lar o'zaro ortogonal, ya'ni $P_i P_j = 0 (i \neq j)$;
- 3) $P_1 + \dots + P_r = I$;
- 4) $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r = A$.

Istboti. Fazo chekli o'lchamli bo'lgani uchun A operatorning spektri chekli

va faqat xos qiymatlardan iborat. A operatorning xos qiymatlarini, karraligini e'tiborga olmay, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ orqali belgilaylik. P_i proektor sifatida

$$Ax = \alpha_i x$$

tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lgan L_i qism fazoga ortogonal proeksiyalash operatorini olamiz. Kiritilgan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sonlar va P_1, P_2, \dots, P_r proektorlar teoremaning shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

1) Aniqlanishiga ko'ra α_i lar bir-biridan farqli. Agar A operatorning o'z-o'ziga qo'shma ekanligini hisobga olsak, ushbu

$$\alpha_i(x_i, x_i) = (\alpha_i x_i, x_i) = (Ax_i, x_i) = (x_i, Ax_i) = \bar{\alpha}(x_i, x_i)$$

tengliklardan (bu yerda x_i vektor α_i ga mos keluvchi xos vektor) $x_i \neq \theta$ bo'lgani uchun $\alpha_i = \bar{\alpha}$ munosabat kelib chiqadi. Demak, α_i lar haqiqiy sonlar,

2) ni ko'rsatish uchun har xil xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlarning o'zaro ortogonal ekanligini ko'rsatish kifoya. Haqiqatan, agar x_i va x_j mos ravishda turli α_i hamda α_j xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar bo'lsa,

$$0 = (Ax_i, x_j) - (x_i, Ax_j) = (\alpha_i - \alpha_j)(x_i, x_j), \quad i \neq j.$$

Demak, $(x_i, x_j) = 0$, chunki $\alpha_i \neq \alpha_j$. Shunday qilib, $L_i \perp L_j$, $i \neq j$

$$3) L_i \perp L_j (i \neq j) bo'lgani uchun PP_j = P_j P_i = 0 (i \neq j).$$

Demak, 9.2- § dagi 5- teoremaga asosan $P_1 + \dots + P_r$ - proektor. $P = P_1 + \dots + P_r \neq I$ deb faraz qilaylik. U holda $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_r \neq C^n$. Ravshanki, L qism fazo A operatorga nisbatan invariant, ya'ni $x \in L$ munosabatdan $Ax \in L$ kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $x \in L$ bo'lsa, shunday $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sonlar mavjudki,

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i$$

bu yerda $x_i \in L_i$ operatorning α_i ga mos keluvchi xos vektori. U holda

$$Ax = \sum_{i=1}^r \lambda_i Ax_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i x_i \in L.$$

Farazimizga ko'ra $L \neq C^n$. Bundan $L^\perp \neq \{\theta\}$. Ikkinchini tomondan, L^\perp fazo A operatorning invariant qism fazosi, chunki ixtiyoriy $y \in L$ va $x \in L^\perp$ lar uchun $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$, ya'ni $Ax \in L^\perp$.

U holda $A: L^\perp \rightarrow L^\perp$ ekanligidan A operatorning $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ lardan farqli bo'lgan xos qiymatining mavjudligi kelib chiqadi. Bu esa $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ larning tanlab olinishiga zid.

Shunday qilib, $P_1 + \dots + P_r = I$.

4) Ixtiyoriy $x \in C^n$ uchun $P_i x = x_i$ deb belgilaylik. Ravshanki, $x_i \in L_i$ U holda $Ax_i = \alpha_i x_i (i = \overline{1, r})$. Agar $P_1 + \dots + P_r = I$ tenglikni hisobga olsak,

$$Ax = A(P_1x + \dots + P_r x) = \sum_{i=1}^r Ax_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i x,$$

ya'ni

$$A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r. \quad (1)$$

Teoremaning 1)-3) shartlarini qanoatlantiruvchi $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sonlar va P_1, \dots, P_r proektorlar uchun

$$A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$$

formula A operatorning *spektral yoyilmasi* deyiladi. Shunday qilib, isbot qilingan 1-teorema o'z-o'ziga qo'shma operatorning spektral yoyilmasining mayjudligi haqidagi teoremadir. Navbatdagi masala spektral yoyilmaning yagonaligini isbot qilishdan iborat.

Agar A operator va $p_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$, ($\alpha_i \in C, i = \overline{1, n}$) ko'phad bo'lsa, u holda

$$p_n(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n$$

ifoda *operator funksiya* (aniqrog'i, *operator ko'phad*) deyiladi. Ravshanki, agar A chiziqli bo'lsa, $p_n(A)$ ham chiziqli. Shu bilan birga $p_n(A)$ koeffitsientlari haqiqiy bo'lgan ko'phad va $A^* = A$ bo'lsa, $p_n(A)$ o'z-o'ziga qo'shma operatordir.

2-teorema. Agar $\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$ o'z-o'ziga qo'shma A operatorning spektral yoyilmasi bo'lsa, u holda:

- 1) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ to'plam A operatorning barcha xos qiymatlaridan iborat;
- 2) koeffitsientlari haqiqiy bo'lgan shunday $p_1(t), \dots, p_r(t)$ ko'phadlar mavjudki, ular uchun:

a) $p_k(\alpha_i) = \delta_{ki}$ (Kroneker simvoli);

b) $p_k(A) = P_k$, $k = 1, \dots, r$.

Isboti. 1) $\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$ spektral yoyilma bo'lgani uchun α_i sonlar va P_i

proektorlar 1-teoremaning 1) -4) shartlarini qanoatlantiradi. U holda $P_k \neq 0$, ya'ni $L_k \neq \{\theta\}$ bo'lgani uchun, ixtiyoriy $x \in L_k$, $x \neq 0$ vektor A operatorning α_i ga mos keluvchi xos vektori, chunki

$$Ax = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i x = \alpha_k P_k x = \alpha_k x.$$

Agar A operatorning $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sonlardan farqli xos qiymati yo'q ekanligini ko'rsatsak, 1) isbotlangan bo'ladi. Faraz qilaylik, λ son A operatorning xos qiymati va $x \neq \theta$ unga mos keluvchi xos vektor bo'lsin:

$$Ax = \lambda x = \lambda \sum_{i=1}^r P_i x.$$

Spektral yoyilmaga ko'ra,

$$Ax = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i x.$$

Oxirgi ikki tenglikdan

$$\sum_{i=1}^r (\lambda - \alpha_i) P_i x = \theta.$$

P_1, \dots, P_r proektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lgani uchun

$$\left\| \sum_{i=1}^r (\lambda - \alpha_i) P_i x \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|(\lambda - \alpha_i) P_i x\|^2 = 0. \quad (2)$$

Agar $x \neq \theta$ va $\sum_{i=1}^r P_i = I$ ekanligini hisobga olsak biror $k (1 \leq k \leq r)$ uchun $P_k x \neq \theta$, (2) ga asosan shu k uchun $\lambda = \alpha_k$.

2) P_1, \dots, P_r proektorlarning o‘zaro ortogonalligidan foydalansak,

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j P_i P_j = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 P_i$$

va, umuman,

$$A^n = \sum_{i=1}^r \alpha_i^n P_i (n = 1, 2, \dots)$$

ni hosil qilamiz. Demak, har qanday $p_n(t)$ ko‘phad uchun

$$p_n(A) = \sum_{i=1}^r p_n(\alpha_i) P_i. \quad (3)$$

Agar

$$p_k(t) = \prod_{i \neq k} \frac{t - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

deb olsak,

$$p_k(\alpha_j) = \delta_{kj}$$

va (3) ga ko‘ra $p_k(A) = P_k$

Natija. O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektral yoyilmasi yagona usul bilan aniqlanadi.

Ixtiyoriy Gilbert fazosida aniqlangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator uchun spektral teoremani keltirish maqsadida, chekli o‘lchamli fazoda isbot qilingan

$$A = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i$$

spektral yoyilmani umumlashtirish uchun qulay bo‘lgan formada yozamiz. Shu maqsadda quyidagi belgilash kiritaylik:

$$E_k = P_1 + \dots + P_k, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

P_1, \dots, P_r proektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lgani uchun E_1, \dots, E_r lar ham proektorlar bo‘ladi. Agar $E_0 = 0$ deb qabul qilsak,

$$0 = E_0 < E_1 < \dots < E_r = I$$

va

$$P_i = E_i - E_{i-1}, \quad i = \overline{1, r}.$$

U holda A operatorning spektral yoyilmasini ushbu

$$A = \sum_{i=1}^r \alpha_i [E_i - E_{i-1}]$$

ko‘rinishda yoki $E_i - E_{i-1} = \Delta_i E(\alpha)$ belgilashdan so‘ng,

$$A = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Delta E(\alpha) \quad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikka quyidagicha talqin berish mumkin. $\{1, 2, \dots, r\}$ chekli to‘plamda qiymatlari proektorlardan iborat bo‘lgan monoton o‘suvchi E_i funksiya berilgan, E_i funksiya yordamida

$$X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$$

to‘plamning bir elementli qism to‘plamlarida

$$\mu\{\alpha_i\} = \Delta_i E(\alpha) = E_i - E_{i-1}$$

tenglik orqali aniqlangan funksiyani additivlik bo‘yicha X dagi qiymatlari operator bo‘lgan o‘lchovgacha davom ettiramiz. U holda (4) tenglikni Stiltes integrali ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$A = \int_X \alpha dE(\alpha)$$

yoki $X = \sigma(A)$ ekanligini hisobga olsak,

$$A = \int_{\sigma(A)} \alpha dE(\alpha) \quad (5)$$

ko‘rinishda yoza olamiz. Demak, chekli o‘lchamli fazoda har qanday o‘z-o‘ziga qo‘shma A operator uchun birning shunday yoyilmasi mavjudki, (5) tenglik o‘rinli. (5) ko‘rinishdagi spektral yoyilmani ixtiyoriy Gilbert fazosida ham o‘rinli ekanligini 9.4- § da isbot qilamiz.

9.4-§. Spektral teorema

1-teorema. O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri haqiqiy sonlardan iborat.

Isboti. Agar $\beta \neq 0$ bo‘lsa, $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks sonning (α, β - haqiqiy sonlar) A operator uchun regulyar nuqta ekanligini ko‘rsatish kifoya.

A operatorning o‘z- o‘ziga qo‘shma ekanligiga asosan:

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = (A - \alpha I - i\beta I)x, (A - \alpha I - i\beta I)x = \|A - \alpha I)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2$$

Demak, $(A - \lambda I)$ operator quyidan chegaralangan:

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq \|\beta\| \cdot \|x\| \quad (1)$$

$A - \lambda I$ operatorning butun H da aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ teskarisi mavjudligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, L fazo $A - \lambda I$ operatorning qiymatlaridan iborat qism fazo bo‘lsin. Agar L qism fazo H ning hamma yerida zinch bo‘lsa, (1) tengsizlikka ko‘ra $(A - \lambda I)^{-1}$ mavjud bo‘lib, u butun H da

aniqlangan va chegaralangan operator, ya’ni λ regulyar nuqtadir.

Endi $\bar{L} \neq H$ deb faraz qilaylik. Ravshanki, L fazo $A - \lambda I$ operator uchun inzariant qism fazo. U holda ixtiyoriy $x \in L^\perp$ va $y \in L$ uchun o‘rinli bo‘lgan ushbu

$((A - \lambda I)x, y) = (Ax, y) - \lambda(x, y) = (x, Ay) - \bar{\lambda}(x, y) = (x, (A - \lambda I)y) = 0$ tenglikdan L^\perp ham $A - \lambda I$ operator uchun invariant qism fazo ekanligi kelib chiqadi. Farazimizga ko‘ra $\bar{L} \neq H$, ya’ni $L^\perp \neq \{\theta\}$. Agar, $z \in L^\perp$ va $z \neq \theta$ bo‘lsa, u holda

$$(A - \lambda I)z \in L^\perp \cap L = \{\theta\}.$$

Hosil bo‘lgan $(A - \lambda I)z = \theta$ tenglik (1) ga zid. Demak, $\bar{L} \neq H$ bo‘lishi mumkin emas. Shunday qilib, o‘z-o‘ziga qo‘shma A operator uchun $\sigma(A) \subset R$.

Faraz qilaylik, $\{E_\lambda\}$ biror $[a, b]$ segmentda aniqlangan birning yoyilmasi bo‘lsin. Ma’lumki, $[a, b]$ segmentda joylashgan $[\alpha, \beta)$ ko‘rinishdagi barcha oraliqlar to‘plami R yarim halqani (Kolmogorov, Fomin, [2], I bob, 5-§) tashkil qiladi. Agar $\Delta = [\alpha, \beta) \in R$ bo‘lsa ushbu

$$E(\Delta) = E_\beta - E_\alpha$$

tenglik bilan R yarim halqada aniqlangan operator qiymatli funksiyani hosil qilamiz. Kiritilgan funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) ixtiyoriy $\Delta \in R$ uchun $E(\Delta)$ proektor;

2) $E(\emptyset) = 0$;

3) agar $\Delta_1, \dots, \Delta_k \in R$, $\Delta = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i \in R$ va $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$

bo‘lsa, $E(\Delta) = \sum_{i=1}^k E(\Delta_i)$, ya’ni $E(\Delta)$ funksiya additiv.

Haqiqatan, 1) $E^*(\Delta) = E(\Delta)$ va $E^2(\Delta) = E(\Delta)$, chunki $E_\alpha E_\beta = E_\beta E_\alpha = E_\alpha$;

2) $E(\emptyset) = E([\alpha, \alpha)) = 0$;

3) $\Delta_1 = [\alpha_1, \beta_1)$, $\Delta_2 = [\alpha_2, \beta_2)$ va $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ bo‘lsin ($k=2$ holni qarayapmiz). Aniqlik uchun, Δ_1 oraliq Δ_2 dan chapda yotsin, ya’ni $\beta_1 \leq \alpha_2$. Ravshanki, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in R$ bo‘lishi uchun $\beta_1 = \alpha_2$ tenglikning bajarilishi zaruriy shart.

U holda

$$E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E_{\beta_2} - E_{\alpha_1} = E_{\beta_2} - E_{\alpha_1} + E_{\beta_1} - E_{\alpha_1} = E(\Delta_1) + E(\Delta_2).$$

Demak, R da aniqlangan $E(\Delta)$ funksiya additiv.

Hozirgacha biz $\{E_\lambda\}$ birning yoyilmasi λ parametr bo‘yicha chapdan uzluksiz ekanligidan foydalanmadik. Quyida shundan foydalanib, $E(\Delta)$ funksiya uchun 3) xossaning kengroq formada o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

1-lemma. $E(\Delta)$ sanoqli additiv (σ -additiv) funksiya.

Istboti. Darhaqiqat $\Delta_i = [\alpha_i, \beta_i], i=1, 2, \dots$ ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro kesishmaydigan oraliqlar sistemasi va $\Delta = [\alpha, \beta] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \in R$ bo‘lsin. Ixtiyoriy n

natural son uchun $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i \subset \Delta$ munosabatdan

$$\sum_{i=1}^n E(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (E_{\beta_i} - E_{\alpha_i}) \leq E_{\beta} - E_{\alpha} = E(\Delta) \quad (2)$$

kelib chiqadi (umuman aytganda, $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i \in R$ ya’ni $E\left(\bigcup_{i=1}^n \Delta_i\right)$ ifoda hozircha ma’noga ega emas). $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ oraliqlar o‘zaro kesishmaydi, demak, $\{E(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ proektorlarning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro ortogonal. U holda proektorlarning xossasiga ko‘ra (9.3- § dagi 5-teorema) $\sum_{i=1}^n E(\Delta_i)$ ham proektor. Shunday qilib, $n \rightarrow \infty$ da $\sum_{i=1}^n E(\Delta_i)$ monoton o‘suvchi proektorlar ketma-ketligi va, demak, u yaqinlashuvchidir.

Agar (2) tengsizlikda limitga ($n \rightarrow \infty$) o‘tsak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) \leq E(\Delta) \quad (3)$$

ni hosil qilamiz.

Agar teskari tengsizlik

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i) \geq E(\Delta) \quad (4)$$

o‘rinli ekanligini ko‘rsatsak, lemma isbotlangan bo‘ladi.

Ravshanki, $\Delta \neq \emptyset$ bo‘lsa, $E(\Delta) = 0$ va (4) tengsizlik bajariladi. $\Delta \neq \emptyset$ holni ko‘raylik. Agar $\Delta = [\alpha, \beta] \neq \emptyset$ bo‘lsa, $\alpha < \beta$ va $\alpha < \beta' < \beta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi β' son topiladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ berilgan bo‘lsin. H Gilbert fazosidan tayinlangan x_0 vektorni olamiz. E_{λ} birning yoyilmasi α_n nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lgani uchun $\alpha < \alpha'_n < \alpha_n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi shunday α'_n mavjudki,

$$\left\| (E_{\alpha_n} - E_{\alpha'_n}) x_0 \right\| < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

tengsizlik bajariladi. Agar ba’zi n lar uchun $\alpha_n = a$ bo‘lsa, $\alpha'_n = a$ deb olamiz va bu holda ham (5) tengsizlik saqlanib qoladi. Δ'_n orqali $\alpha'_n > a$ bo‘lgan holda $[\alpha'_n, \beta_n]$ intervalni va $\alpha'_n = a$ bo‘lgan holda $[a, \beta_n]$ oraliqni belgilaylik. U holda $\{\Delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ oraliqlar $[a, b]$ segmentga nisbatan ochiq to‘plamlar sistemasi va tuzilishiga ko‘ra ular $[\alpha, \beta']$ segmentni qoplaydi. Demak, $\{\Delta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemadan

$[\alpha, \beta']$ ni qoplovchi $\Delta'_{n_1}, \dots, \Delta'_{n_k}$, chekli qism qoplama ajratib olishimiz mumkin. Ravshanki, $[\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}]$, $i = \overline{1, k}$ oraliqlar $[\alpha, \beta']$ oraliqni qoplaydi. Har bir $i = \overline{1, k}$ uchun shunday $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}] \subset [\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}]$ oraliqlar tanlashimiz mumkinki, $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}] (i = \overline{1, k})$ oraliqlar sistemasi ham $[\alpha, \beta']$ ni qoplaydi va ularning ixtiyoriy ikkitasi o‘zaro kesishmaydi. $E(\Delta)$ funksiyaning chekli additivligi va monotonligini hisobga olsak,

$$E([\alpha, \beta']) \leq \sum_{i=1}^k ([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}]) \quad (6)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, $[\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}] \subset [\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}]$ munosabatdan $E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}])$ va $E([\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}])$ proektorlar uchun

$$E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}]) \leq E([\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}]) \quad (7)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. (diqqat: tengsizlikdan

$$\sum_{i=1}^k E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}]) \leq \sum_{i=1}^k ([\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}])$$

Chunki, $[\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}]$ oraliqlar o‘zaro kesishishi mumkin bo‘lgani uchun

$$\sum_{i=1}^k E([\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}])$$

ifoda proektor bo‘lmasligi mumkin. Biz „ \leq “ munosabatni faqat proektorlar uchun aniqlagan edik.

Agar ixtiyoriy ikkita P_1 va P_2 proektor uchun $P_1 \leq P_2$ ekanligidan barcha $x \in H$ uchun $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$ tengsizlik kelib chiqishini eslasak, (6) va (7) tengsizliklardan ushbu natijani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \|E([\alpha, \beta'])x_0\|^2 &\leq \left\| \sum_{i=1}^k E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}])x_0 \right\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|E([\alpha''_{n_i}, \beta'_{n_i}])x_0\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \|E([\alpha'_{n_i}, \beta'_{n_i}])x_0\|^2 \end{aligned}$$

Demak,

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \|(E_{\beta'_{n_i}} - E'_{\alpha'_{n_i}})x_0\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E_{\alpha'_n})x_0\|^2$$

Endi (5) tengsizlikdan foydalansak,

$$\begin{aligned} \|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (E_{\beta_n} - E_{\alpha_n} + E_{\alpha_n} - E_{\alpha'_n})x_0 \right\|^2 \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E_{\alpha_n})x_0\|^2 + \varepsilon \cdot M \end{aligned}$$

Bu yerda M - o‘zgarmas son, ε ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu munosabatdan

$$\|(E_{\beta'} - E_{\alpha})x_0\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(E_{\beta_n} - E_{\alpha_n})x_0\|^2 \quad (8)$$

kelib chiqadi. Agar (8) tengsizlikda $\beta' \rightarrow \beta$ (chapdan) bo'lsa, E_λ ning chapdan uzuksizligiga ko'ra

$$\left\| (E_{\beta'} - E_\alpha)x_0 \right\| \rightarrow \left\| (E_\beta - E_\alpha)x_0 \right\|^2.$$

$\{\Delta_i\}$ oraliqlar o'zaro kesishmagani uchun $\{E(\Delta_i)\}$ proektorlar bir-biriga ortogonal. Shuning uchun

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\| E(\Delta_i)x_0 \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i)x_0 \right\|^2.$$

Bundan va (8) dan

$$\left\| E(\Delta)x_0 \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)x_0 \right\|.$$

$x_0 \in H$ ixtiyoriy bo'lgani uchun oxirgi tengsizlikdan $E(\Delta)$ va $\sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i)$ proektorlar orasida quyidagi munosabat o'rinli:

$$E(\Delta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n). \quad (9)$$

(3) va (9) dan

$$E(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$$

kelib chiqadi.

Natija. $E(\Delta)$ funksiya R yarim halqada aniqlangan va qiymatlari proektorlardan iborat bo'lgan σ -additiv o'lchovdir. R yarim halqani o'z ichiga olgan minimal σ -halqani V orqali belgilaylik. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi kursidan ma'lumki, V halqa $[a,b]$ segmentda joylashgan barcha Borel to'plamlaridan iborat bo'lib, Borel algebrasini hosil qiladi. O'quvchiga ma'lum bo'lgan usul bilan R yarim halqada aniqlangan σ -additiv $E(\Delta)$ o'lchovni V dagi σ -additiv o'lchovgacha davom ettirish mumkin. Mana shu davom ettirish natijasida hosil bo'lgan $E(\Delta)$ o'lchov $\{E_\lambda\}_{\lambda \in [a,b]}$ birning yoyilmasiga mos keluvchi spektral o'lchov deyiladi.

Modomiki, spektral o'lchov tushunchasi kiritilgan ekan, tabiiy ravishda shu spektral o'lchov bo'yicha integral tushunchasini aniqlash mumkin. Darhaqihat, $f(\lambda)$ funksiya $[a,b]$ cegmentda chegaralangan va Borel sinfiga tegishli bo'lsin. Masalan, $[c,d]$ segment funksiyaning o'zgarish sohasini o'z ichiga olsin: $c \leq f(\lambda) \leq d$. $[c,d]$ segmentni $c = c_0 < c_1 < \dots < c_n = d$ nuqtalar yordamida bo'lakchalarga bo'lamiz. $f(\lambda)$ Borel sinfiga tegishli funksiya bo'lgani uchun

$$\Delta = \{\lambda : c_{i-1} \leq f(\lambda) < c_i\} \in B, i = \overline{1, n-1}$$

va

$$\Delta_n = \{\lambda : c_{n-1} \leq f(\lambda) \leq c_n\} \in B.$$

Endi $[c_0, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_{n-1}, c_n]$ bo'lakchalarining har biridan bittadan

c_1, c'_1, \dots, c'_n nuqtalarni olib, quyidagi

$$S_n = \sum_{i=1}^n c'_i E(\Delta_i) \quad (10)$$

yig‘indini tuzamiz.

Ta’rif. Agar $\max_{1 \leq i \leq n} |c_{i-1} - c_i| \rightarrow 0$ bo‘lganda S_n operatorlar ketma-ketligi c' nuqtalarning bog‘liq bo‘lмаган holda biror S operatoriga kuchli yaqinlashsa, S operator $f(\lambda)$ funksiyadan spektral o‘lchov bo‘yicha integral deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$S = \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda.$$

1-ibora. Tayinlangan $x, y \in H$ uchun $(E_\lambda x, y)$ skalyar ko‘paytma λ ning $[a, b]$ segmentda aniqlangan va o‘zgarishi chegaralangan (umuman aytganda, kompleks) funksiyasidir va $\int_a^b (E_\lambda x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Isboti. $[a, b]$ segmentni chekli sondagi bo‘lakchalarga bo‘lib, hosil bo‘lgan o‘zaro kesishmaydigan oraliqlarni $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ orqali belgilaymiz. U holda $(E_\lambda x, y)$ funksiyaning Δ_i oraliqdagi tebranishi $|(E(\Delta_i)x, y)|$ ga teng. Demak,

$$\int_a^b (E_\lambda x, y) = \sup \sum_{i=1}^n |(E(\Delta_i)x, y)| \leq \sup \sum_{i=1}^n \|E(\Delta_i)x\| \cdot \|y\|,$$

bu yerda superemum barcha chekli bo‘linishlar bo‘yicha olinadi $\{E(\Delta_i)\}$ proektorlar o‘zaro ortogonal bo‘lgani uchun

$$\sum_{i=1}^n \|E(\Delta_i)x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n E(\Delta_i)x \right\|^2 = \|x\|^2.$$

Shunday qilib,

$$\int_a^b (E_\lambda x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Natija. $[a, b]$ segmentda uzluksiz $f(\lambda)$ funksiya va $\{E_\lambda\}$ birning yoyilmasi uchun barcha tayinlangan $x, y \in H$ larda ushbu

$$\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$$

integral mavjud.

Darhaqiqat, $\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$ Stiltes integrali bo‘lib, uning mavjudligi o‘quvchiga haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi kursidan ma’lum ([HO‘FN], XI bob, 39- §).

Aslida $\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$ integralning mavjud bo‘lishi uchun funksiyaga yuqorida qo‘yilgan talabni susaytirish mumkin, lekin bizning maqsadimiz uchun yuqoridagi natijaning o‘zi kifoya.

Endi $\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$ ifodani $x \in H$ va $y \in H$ larning funksiyasi sifatida qaraymiz, ya'ni quyidagi

$$\int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda \cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow C$$

akslantirishni o'rganamiz. Agar $B(x, y) = \int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y)$ belgilash kiritsak, quyidagi munosabatlarning o'rinni ekanligi Stiltes integralining xossalaridan bevosita kelib chiqadi:

$$1) B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y);$$

$$2) B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y);$$

$$3) B(y, x) = \overline{B(x, y)};$$

$$4) \text{shunday } M > 0 \text{ mavjudki, } |B(x, y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in H.$$

Misol uchun 4) ni tekshiraylik. $f(\lambda)$ funksiya $[a, b]$ da uzlucksiz bo'lgani uchun albatta chegaralangan:

$$|f(\lambda)| \leq M.$$

U holda

$$\left| \int_a^b f(\lambda) d(E_\lambda x, y) \right| \leq M \cdot \int_a^b V(E_\lambda x, y),$$

demak, 1- iboraga ko'ra

$$|B(x, y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Ta'rif. 1) -4) shartlarni qanoatlantiruvchi ikki o'zgaruvchili $V(x, u)$ funksional Ermit formasi deyiladi.

2-ibora. Ixtiyoriy Ermit formasi uchun shunday yagona T o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator topiladiki, barcha $x, y \in H$ lar uchun

$$B(x, y) = (Tx, y) \tag{11}$$

tenglik bajariladi.

Izboti. Tayinlangan $y \in H$ uchun $B(x, y)$ ifoda x ga nisbatan chegaralangan chiziqli funksional. Chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasiga ko'ra yagona $z \in H$ topiladiki,

$$B(x, y) = (x, z), \forall x \in H.$$

Har bir $y \in H$ uchun mos qo'yilgan yagona $z \in H$ elementni $z = Ty$ orqali belgilaymiz. Ravshanki, $T : H \rightarrow H$ chiziqli operator. Agar

$$|B(x, y)| = |(x, Ty)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

tengsizlikda $x = Ty$ deb olsak,

$$\|Ty\|^2 \leq M \cdot \|Ty\| \cdot \|y\|,$$

ya'ni

$$\|Ty\| \leq M \cdot \|y\|,$$

demak, T- chegaralangan operator.

3) shartga ko‘ra

$$(x, ty) = B(x, y) = \overline{B(y, x)} = \overline{(y, Tx)} = (Tx, y) = (x, T^* y), \forall x, y \in H,$$

ya’ni T- o‘z-o‘ziga qo‘shma operator.

Nihoyat, (11) tenglikni qanoatlantiruvchi T operatorning yagonaligini ko‘rsatish uchun teskarisini faraz qilaylik:

$$B(x, y) = (T_2 x, y) = (T_1 x, y), \forall x, y \in H.$$

Demak,

$$((T_1 - T_2)x, y) = 0.$$

Agar $y = (T_1 - T_2)x$ deb olsak, barcha $x \in H$ uchun

$$\|(T_1 - T_2)x\| = 0,$$

yani $T_1 = T_2$

3-ibora. Ixtiyoriy $f(\lambda)$ haqiqiy uzluksiz funksiya

uchun $\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$ chegaralangan chiziqli va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator.

Izboti. Stiltes integralining mavjudligi haqidagi teoremaning isbotidan farq qilmaydi.

Natija. $\int_a^b \lambda dE_\lambda$ o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan chiziqli operatordir.

2-teorema (spektral teorema). Har qanday o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan $T: H \rightarrow H$ chiziqli operator uchun biror $[a, b]$ segmentda aniqlangan birning shunday $\{E_\lambda\}$ yoyilmasi mavjudki,

$$T = \int_a^b \lambda dE_\lambda$$

tenglik o‘rinli.

Izboti. 1-teorema va 9.1-§ dagi 1 va 2-teoremalarga ko‘ra $\sigma(T)$ haqiqiy sonlar o‘qida joylashgan kompakt to‘plam. $C(\sigma(T))$ orqali $\sigma(T)$ to‘plamda aniqlangan haqiqiy uzluksiz funksiyalar fazosini belgilaylik. Q esa barcha ko‘phadlar to‘plami bo‘lsin. Ixtiyoriy $p(t) \in Q$ uchun $p(T)$ operator ko‘phadni tuzib, ushbu $(p(T)x, y)$ skalyar ko‘paytmani ko‘ramiz. Agar

$$\|p(T)\| = \max_{t \in \sigma(T)} |p(t)| \tag{12}$$

formuladan (6-mashqqa qarang) foydalansak, tayinlangan $x, y \in H$ lar uchun $(p(T)x, y)$ ifoda Q da chiziqli chegaralangan funksional ekanligi kelib chiqadi. Veyershtrass teoremasiga ko‘ra Q to‘plam $C(\sigma(T))$ fazoning hamma yerida zich. Demak, Q to‘plamda aniqlangan

$$f(p) = (p(T)x, y)$$

chiziqli chegaralangan f funksionalni yagona usul bilan $C(\sigma(T))$ fazodagi

chiziqli chegaralangan funksionalgacha davom ettirish mumkin. Shunday qilib, $C(\sigma(T))$ fazodagi chiziqli chegaralangan funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss-Markov-Kakutani teoremasiga ko‘ra, (ushbu teoremani Kantorovich, Akilov [1] kitobining VI bob, 3-§ dan qarang) $\sigma(T)$ to‘plamning barcha Borel qism to‘plamlarida aniqlangan shunday $\mu(\cdot; x, y)$ o‘lchov mavjudki,

$$(p(T)x, y) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d\mu(\lambda; x, y)$$

tenglik o‘rinli. Agar $p(\lambda) \equiv 1$ deb olsak, oxirgi tenglikdan

$$\left| \int_{\sigma(T)} d\mu(\lambda; x, y) \right| = |\mu(\sigma(T); x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy $M \subset \sigma(T)$ Borel to‘plami uchun

$$|\mu(M; x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|; \quad (13)$$

tengsizlik o‘rinli ($|\mu|$ o‘lchovning monotonligiga asosan).

Endi M to‘plamni tayinlangan, $x, y \in H$ elementlarni esa o‘zgaruvchi hisoblab, ushbu $\mu(M; x, y)$ ifodani qaraymiz. $\mu(M; x, y)$ – Ermit formasi. Haqiqatan,

$$1) \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d\mu(\lambda; x_1 + x_2, y) =$$

$$\begin{aligned} &= (p(T)(x_1 + x_2), y) = (p(T)x_1, y) + (p(T)x_2, y) = \\ &= \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d[\mu(\lambda; x_1, y) + \mu(\lambda; x_2, y)] \end{aligned}$$

tenglikdan

$$\mu(\lambda; x_1 + x_2, y) = \mu(\lambda; x_1, y) + \mu(\lambda; x_2, y),$$

ya’ni

$$\mu(M; x_1 + x_2, y) = \mu(M; x_1, y) + \mu(M; x_2, y)$$

kelib chiqadi.

$$2) \mu(M; \alpha x, y) = \overline{\alpha \mu(M; x, y)}$$

$$3) \mu(M; x, y) = \overline{\mu(M; y, x)}$$

$(p(T)x, y) = (x, p(T)y)$ tenglikning natijasidir.

4) (13) tengsizlikka ko‘ra $\mu(M; x, y)$ chegaralangan. Demak, 2- iboraga ko‘ra Ermit formasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\mu(M; x, y) = (E(M)x, y).$$

Bu yerda $E(M)$ -o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan operator. Agar $p(\lambda) \equiv 1$ deb olsak,

$$(x, y) = \int_{\sigma(T)} d\mu(\lambda; x, y) = \mu(\sigma(T); x, y) = (E(\sigma(T))x, y),$$

ya’ni

$$E(\sigma(T)) = 1.$$

Endi $E(M)$ ning proektor ekanligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda ixtiyoriy $q(\lambda)$ haqiqiy ko'phadni olib, quyidagi yordamchi o'lchov tuzamiz:

$$\nu(M) = \int_M q(\lambda) d\mu(\lambda; x, y).$$

U holda, $p(T)$ va $q(T)$ operatorlarning o'zaro kommutativligidan

$$\begin{aligned} \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d\nu(\lambda) &= \int_{\sigma(T)} p(\lambda) q(\lambda) d\mu(\lambda; x, y) = \\ &= (p(T)q(T)x, y) = (q(T)p(T)x, y) = \\ &= (p(T)x, q(T)y) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d\mu(\lambda; x, q(T)y) \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Agar, $E(\lambda) = E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(T))$ belgitash kirlitsak,

$$\int_{\sigma(T)} p(\lambda) d\nu(\lambda) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda) d(E(\lambda)x, q(T)y).$$

O'lchov nazariyasidagi davom ettirish konstruksiyasidan oxirgi tenglikning faqat $q(\lambda)$ ko'phadlar uchungina emas, balki ixtiyoriy haqiqiy chegaralangan o'lchovli funksiyalar uchun o'rinali ekanligi kelib chiqadi. Xususan, $\chi_M(\lambda)$ funksiya M to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'lsa,

$$\begin{aligned} \nu(M) &= \int_{\sigma(T)} q(\lambda) \chi_M(\lambda) d(E(\lambda)x, y) = (E(M)x, q(T)y) = \\ &= (q(T)E(M)x, y) = \int_{\sigma(T)} q(\lambda) d(E(\lambda)E(M)x, y). \end{aligned}$$

Demak, ixtiyoriy M, N Borel to'plamlari uchun

$$\begin{aligned} (E(M \cap N)x, y) &= \int_{M \cap N} d(E(\lambda)x, y) = \\ &= \int_N \chi_M(\lambda) d(E(\lambda)x, y) = (E(N)E(M)x, y) \end{aligned}$$

ya'ni

$$E(M \cap N) = E(N)E(M).$$

Agar $M=N$ bo'lsa, $E(M)=(E(M))^2$. Shunday qilib, $E(M)$ proektor. Ushbu

$$(E(M)x, y) = \mu(M; x, y)$$

tenglikdan μ o'lchovning sanoqli additivligi va proektorlarning xossalariiga ko'ra $E(M)$ ning sanoqli additivligi kelib chiqadi.

Nixoyat, $E(\lambda)$ operator funksiya $\sigma(T)$ to'plamda birning yoyilmasi ekanligini ko'rsatsak, spektral teorema isbot qilingan bo'ladi, chunki

$$(Tx, y) = \int_{\sigma(T)} \lambda d\mu(\lambda; x, y) = \int_{\sigma(T)} \lambda d(E(\lambda)x, y).$$

Bu tenglikdan $E(\lambda)$ birning yoyilmasi va $f(\lambda)=\lambda$ uzluksiz bo'lgani uchun $\int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$ mavjud va

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$$

tenglik o'rinali.

$E(\lambda)$ birning yoyilmasi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $E(\lambda)$ ning chapdan uzlusiz ekanligini ko'rsatish kifoya. Ixtiyoriy $\lambda_0 \in \sigma(T)$ nuqtada $E(\lambda_0 - 0)$ mavjud, chunki $E(\lambda)$ monoton o'suvchi.

Agar $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ketma-ketlik λ_0 ga chapdan yaqinlashsa va $\lambda_n \in \sigma(T)$ bo'lsa,

$$[\lambda_1, \lambda_0) = \bigcup_{i=2}^{\infty} [\lambda_1, \lambda_i).$$

$E(M)$ ning sanoqli additivligiga ko'ra

$$E(\lambda_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\lambda_n) = E(\lambda_0 - 0).$$

Mashq uchun masalalar

(barcha operatorlar Gilbert fazosida aniqlangan).

1. Agar A va B operatorlarning kamida bittasi teskarilanuvchi bo'lsa, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ ekanligini ko'rsating.

2. T operatorning spektri $\sigma(T)$ bo'lsa, T^2 operatorling spektrini toping.

3. $T^{-1} = T^*$ munosabatni qanoatlantiruvchi T operator *unitar operator* deyiladi. Unitar operatorning spektri kompleks tekislikdagi $\{z : |z| = 1\}$ birlik aylanada yotishini ko'rsating.

4. Proekcion operatorning spektrini toping.

5. O'z-o'ziga qo'shma T operator uchun

$$\|T\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| = \rho(T)$$

tenglik o'rinali ekanligini isbot qiling.

6. Agar $\rho_n(\lambda)$ haqiqiy koeffitsientli ko'phad va T o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa,

$$\|p_n(T)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p_n(\lambda)|$$

munosabatni isbot qiling.

X BOB. TO'LA UZLUKSIZ OPERATORLAR VA INTEGRAL TENGLAMALAR

10.1-§. Banax fazolarida to'la uzluksiz operatorlar

Banax fazolaridagi chiziqli operatorlarning eng muhim sinflaridan biri to'la uzluksiz operatorlardir. Bunday operatorlarning xossalari chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlarning xossalariiga yaqin bo'lgani sababli ular yaxshi o'r ganilgan sinfdir. Shu bilan birga to'la uzluksiz operatorlar nazariyasi juda muhim tatbiqlarga ega. Bu bobda to'la uzluksiz operatorlar nazariyasini o'r ganish bilan birga uning integral tenglamalarga tatbiqlarini ham keltiramiz.

Ta'rif. E Banax fazosini E_1 Banax fazosiga akslantiruvchi T chiziqli operator E dagi birlik sharni E_1 dagi nisbiy kompakt to'plamga aks ettirsa, u holda T to'la uzluksiz (*yoki kompakt*) operator deyiladi.

Demak, $U_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ bo'lsa, u holda $\overline{T(U_1)}$ to'plam E_1 fazoning kompakt qismi bo'ladi.

Banax fazosida chegaralangan to'plamning ta'rifidan quyidagi natija bevosita kelib chiqadi:

$T : E \rightarrow E_1$ chiziqli operator to'la uzluksiz bo'lishi uchun ixtiyoriy chegaralangan $M \subset E$ to'plamning tasviri $T(M)$ nisbiy kompakt bo'lishi zarur va kifoya.

Misollar.

1. Chekli o'lchamli Banax fazosida ixtiyoriy chiziqli operator to'la uzluksizdir. Darhaqiqat, bu operator chegaralangan bo'lgani uchun u ixtiyoriy chegaralangan to'plamni chegaralangan to'plamga aks ettiradi. Chekli o'lchamli fazoda esa ixtiyoriy chegaralangan to'plam nisbiy kompaktdir.

2. Banax fazosi cheksiz o'lchamli bo'lsa, uzluksiz chiziqli operator to'la uzluksiz bo'lmashigi ham mumkin. Masalan, l_2 Gilbert fazosida $Ix = x$ birlik operatorni olamiz. Ravshanki, I - uzluksiz operator. Ammo I to'la uzluksiz emas. Haqiqatan, I operator U_1 birlik sharni o'zini-o'ziga aks ettiradi, U_1 esa nisbiy kompakt emas. Buni isbotlash uchun l_2 fazoda ortonormal bazis hosil qiluvchi $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistemani olamiz. Bu ketma-ketlik U_1 sharda joylashgan va $i \neq j$ uchun

$$\|e_i - e_j\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2(e_i, e_j) = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2$$

Demak, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi, ya'ni U_1 - nisbiy kompakt to'plam emas.

3. Chiziqli uzluksiz T operator E Banax fazosini uning chekli o'lchamli E_0 qism fazosiga aks ettirsa, u holda bunday operator to'la uzluksiz operatordir. Haqiqatan, T operator E ning ixtiyoriy chegaralangan M qism to'plamini E_0 ning chegaralangan va, demak, nisbiy kompakt (chunki E_0 chekli o'lchamli) qism to'plamiga aks ettiradi.

H Gilbert fazosida biron H_0 qism fazoga proektor to'la uzluksiz bo'lishi uchun H_0 ning chekli o'lchamli bo'lishi zarur va kifoya.

4. $C[a,b]$ Banax fazosida quyidagi chiziqli operatorni olamiz:

$$Tx = y(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

Agar $K(s,t)$ funksiya $[a,b] \times [a,b] = \{(s,t) : a \leq s \leq b, a \leq t \leq b\}$ kvadratda chegaralangan va uning uzilish nuqtalari ushbu

$$t = \phi_k(s), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

egri chiziqlarda joylashgan bo'lib, ϕ_k uzlusiz funksiyalar bo'lsa, u holda T operator to'la uzlusiz bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlaymiz. Yuqoridagi T operatorning ta'rifidan integralning mavjudligi, ya'ni $y(s)$ funksiyaning aniqlanganligi bevosita kelib chiqadi. $K(s,t)$ ning chegaralanganligiga asosan

$$M = \sup_{a \leq t, s \leq b} |K(s,t)| < \infty$$

$[a,b] \times [a,b]$ kvadratda G to'plamni quyidagicha aniqlaymiz: agar (s,t) nuqta uchun

$$|t - \phi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}$$

tengsizlik kamida bitta $k=1, 2, \dots, n$ uchun bajarilsa, (s,t) nuqtani G ning *elementi* deymiz. Ravshanki, G -ochiq to'plam. Endi ushbu

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^n \left\{ t : |t - \phi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn} \right\} \subset [a,b]$$

to'plamni olamiz.

G to'plamning $[a, b] \times [a, b]$ kvadratdagi to'ldiruvchisini F bilan belgilaymiz, ya'ni

$$F = [a,b] \times [a,b] \setminus G.$$

F to'plam yopiq (chunki G -ochiq to'plam) va chegaralangan, ya'ni F kompakt to'plam. $K(s,t)$ funksiya F to'plamda uzlusiz bo'lgani uchun $K(s,t)$ tekis uzlusiz (II-bobdag'i Kantor teoremasiga asosan). Demak, shunday $\delta > 0$ mavjudki,

$$|s' - s''| + |t' - t''| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $(s', t'), (s'', t'') \in F$ nuqtalar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$|K(s', t') - K(s'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

So'ng $|s' - s''| < \delta$ munosabat bajarilganda ushbu $|y(s') - y(s'')|$ qiymatni baholaymiz:

$$|y(s') - y(s'')| = \left| \int_a^b K(s', t)x(t)dt - \int_a^b K(s'', t)x(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt.$$

Endi P orqali $G(s') \cup G(s'')$ to‘plamni belgilaymiz. U holda

$$|y(s') - y(s'')| \leq \int_P |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt + \int_{[a,b] \setminus P} |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt$$

P to‘plam $G(s')$ va $G(s'')$ to‘plamlarning yig‘indisi bo‘lgani uchun P ning o‘lchovi $G(s')$ va $G(s'')$ to‘plamlarning o‘lchovlarining yigindisidan katta emas. $G(s)$ to‘plamning aniqlanishidan ko‘rinib turibdiki, uning o‘lchovi $l(G(s))$ uchun ushbu

$$l(G(s)) \leq n \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{12Mn} = \frac{\varepsilon}{6M}$$

tengsizlik o‘rinli. Demak, P ning o‘lchovi $\frac{\varepsilon}{3M}$ sondan katta emas. Shuning uchun

$$\int_P |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \cdot 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \|x\| \cdot [a,b] \setminus P$$

to‘plamda esa $|K(s',t) - K(s'',t)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ munosabat o‘rinli, demak,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \setminus P} |K(s',t) - K(s'',t)| \cdot |x(t)| dt &\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \int_{[a,b] \setminus P} |x(t)| dt \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \cdot \\ &\cdot \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Shunday qilib, $|s' - s''| < \delta$ tengsizlikdai

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon \|x\| \quad (1)$$

munosabat kelib chiqadi, ya’ni $y(s)$ funksiya uzlucksiz. Demak, T operator $C[a,b]$ fazoni o‘zini-o‘ziga aks ettiradi. So‘ng (1) tengsizlikdan ko‘rinib turibdiki, $C[a,b]$ fazoda

$$U_1 = \{x(t) : \|x\| \leq 1\}$$

birlik sharni olsak, u holda ixtiyoriy $x \in U_1$ uchun $|s' - s''| < \delta$ bo‘lganda ushbu

$$|Tx(s') - Tx(s'')| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli, ya’ni $\{Tx\}_{x \in U_1}$ tekis darajada uzlucksiz funksiyalar sistemasi.

Nihoyat, $x \in U_1$ uchun

$$\|y\| = \sup_{s \in [a,b]} |y(s)| \leq \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |K(s,t)| \cdot |x(t)| dt \leq M \cdot (b-a)$$

ya’ni $\{Tx\}_{x \in U_1}$ - tekis chegaralangan funksiyalar sistemasidir.

2.8-§ dagi Arsela teoremasiga asosan $\{Tx\}_{x \in U_1}$ - nisbiy kompakt to‘plamdir.

5. Yuqoridagi 4-misolda ko‘rilgan T operatoriga qaytib, $K(s,t)$ funksiyani

$t > s$ bo‘lganda nolga teng deb olamiz, $t < s$ bo‘lganda esa $K(s,t)$ uzluksiz deb hisoblaymiz. U holda 4-misolning shartlari $K(s,t)$ funksiya uchun bajariladi, chunki $K(s,t)$ ning uzilish nuqtalari faqat birgina $t = s$ to‘g‘ri chiziqda joylashgan bo‘lishi mumkin.

$t > s$ bo‘lganda $K(s,t) = 0$ munosabatni hisobga olsak,

$$Tx = y(s) = \int_a^s K(s,t)x(t)dt.$$

Bu operator *chiziqli Volterra operatori* deyiladi.

10.2- §. To‘la uzluksiz operatorlarning xossalari

E Banax fazosi bo‘lib, $\{T_n\}$ ketma-ketlik E ni o‘zini-o‘ziga aks ettiruvchi chiziqli operatorlar ketma-ketligi bo‘lsin.

1-teorema. Agar to‘la uzluksiz operatorlarning $\{T_n\}$ ketma-ketligi biror T operatorga norma bo‘yicha yaqinlashsa, u holda, T ham to‘la uzluksiz operatorordir.

Ishboti. E fazodagi birlik shardan ixtiyoriy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlikni olamiz. T operatorning to‘la uzluksizligini ko‘rsatish uchun $\{Tx_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi bo‘lgan qism ketma-ketlik ajratib olish mumkinligini ko‘rsatish kifoya.

T_1 operator to‘la uzluksiz, demak $\{T_1x_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $T_1x_1^{(1)}, T_1x_2^{(2)}, \dots, T_1x_n^{(1)}, \dots$

qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkin, bu yerda $\{x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qism ketma-ketligidir. Endi $\{T_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlikni olamiz. T_2 to‘la uzluksiz bo‘lgani sababli $\{x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlikdan shunday $\{x_n^{(2)}\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkinki, ushbu

$T_2x_1^{(2)}, T_2x_2^{(2)}, \dots, T_2x_n^{(2)}, \dots$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shu tarzda davom ettirib, quyidagi ketma-ketliklar sistemasini hosil qilamiz:

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$

$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$

.....

.....

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots$

.....

Bu yerda har bir ketma-ketlik o‘zidan oldingi ketma-ketlikning qism

ketma-ketligidir va ixtiyoriy k uchun $\left\{T_k x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir.

Yuqoridagi ketma-ketliklar sistemasidan diagonal elementlarni olib, ushbu

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Ixtiyoriy m natural son uchun yangi hosil bo‘lgan ketma-ketlik birinchi m ta hadni hisobga olmaganda

$$x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots$$

ketma-ketlikning qism ketma-ketligidir. Demak, ixtiyoriy m uchun $\left\{T_m x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi. Endi $\left\{Tx_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi

ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun $\left\{Tx_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini isbotlash kifoya (chunki E-to‘la fazo).

$\{x_n\}$ ketma-ketlik birlik shardan olinganligi tufayli $\|x_n\| \leq 1$ munosabat ixtiyoriy n uchun o‘rinli. $\{T_k\}$ ketma-ketlik T operatoriga norma bo‘yicha yaqinlashgani uchun shunday k_0 natural son mavjudki, ushbu $\|T - T_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$

tengsizlik barcha $k > k_0$ uchun o‘rinli. $\left\{T_k x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lgani tufayli, u fundamentaldir, ya’ni shunday N son mavjudki, ushbu $\|T_k x_n^{(n)} - T_k x_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik ixtiyoriy $n > N$ va $m > N$ sonlar uchun bajariladi.

Demak, $m, n > N$ uchun

$$\begin{aligned} \|Tx_n^{(n)} - Tx_m^{(m)}\| &\leq \|Tx_n^{(n)} - T_k x_n^{(n)}\| + \|T_k x_n^{(n)} - T_k x_m^{(m)}\| + \\ &+ \|T_k x_m^{(m)} - Tx_m^{(m)}\| \leq \|T - T_k\| \cdot \|x_n^{(n)}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_k\| \cdot \|x_m^{(m)}\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\left\{Tx_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik, ya’ni T -to‘la uzluksiz.

Natija. Normalangan $L(E)$ fazoda to‘la uzluksiz operatorlar yopiq qism fazo hosil qiladi.

Darhaqiqat, to‘la uzluksiz operatorlarning chiziqli kombinatsiyasi ham to‘la uzluksizligi bevosita tekshiriladi. Chunki, agar $A, B \subset E_1$ kompakt to‘plamlar bo‘lsa, u holda $(x, y) \rightarrow \lambda x + \mu y (\lambda, \mu \in R)$ aks ettirish uzluksiz bo‘lgani sababli, $\lambda A + \mu B$ to‘plam ham kompaktdir. Bu qism fazoning operator normasiga nisbatan yopiqligi 1-teoremadan kelib chiqadi.

2-teorema. *T operator E Banax fazosida to‘la uzluksiz, B esa shu fazoda chegaralangan operator bo‘lsa, u holda TB va BT operatorlar to‘la uzluksizdir.*

Izboti. $U_1 \subset E$ birlik shar bo‘lsa, u holda $B(U_1)$ chegaralangan to‘plamdir (chunki B - chegaralangan operator). Demak, $TB(U_1)$ -nisbiy kompakt to‘plam,

ya'ni TB -to'la uzlusiz. T to'la uzlusiz bo'lgani uchun $T(U_1)$ -nisbiy kompakt to'plam. B operator uzlusiz bo'lgani uchun ham $BT(U_1)$ nisbiy kompaktdir, ya'ni BT to'la uzlusiz operator.

Natija. Cheksiz o'lchamli normalangan fazoda to'la uzlusiz T operator chegaralangan teckari operatorga ega emas.

Darhaqiqat, aks holda birlik operator $I = T^{-1}T$ to'la uzlusiz bo'lar edi. Demak, cheksiz o'lchamli fazoda birlik shar nisbiy kompakt to'plam bo'lar edi. Bu esa quyidagi lemmaga zid.

Lemma. (F. Riss lemmas). Normalangan cheksiz o'lchamli E fazoda chiziqli erkli $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elementlarni olib, E_n orqali x_1, x_2, \dots, x_n elementlarning chiziqli qobig'ini belgilaymiz. U holda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ketma-ketlik mavjud:

$$1) \|y_n\|=1 \quad 2) y_n \in E_n \quad 3) \rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2} \text{ bu yerda } \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\|$$

Isboti. u_1 sifatida $\frac{x_1}{\|x_1\|}$ vektorni olamiz; $\{x_n\}$ sistema chiziqli erkli bo'lgani uchun $x_n \in E_{n-1}$ Ixtiyoriy chekli o'lchamli qism fazo yopiq bo'lgani tufayli $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$.

E_{n-1} fazodan $\|x_n - x_0\| < 2 \cdot \alpha$ shartni qanoatlantiruvchi x_0 vektorni tanlab olamiz (\inf ning xossalariiga asosan). Endi $y_n = \frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|} \in E_n$ vektorni olamiz.

Uning uchun 1) va 2) shartlarning bajarilishi ravshan. Ushbu

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho(x_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|x_n - x\| = \inf_{x \in E_{n-1}} \|(x_n - x_0) - (x - x_0)\| = \\ &= \rho(x_n - x_0, E_{n-1} - x_0) = \rho(x_n - x_0, E_{n-1}) \end{aligned}$$

munosabatga asosan

$$\rho(y_n, E_{n-1}) = \rho\left(\frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|}, E_{n-1}\right) = \frac{\rho(x_n - x_0, E_{n-1})}{\|x_n - x_0\|} > \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Demak, y_n vektor uchun 3) shart ham bajariladi.*

Lemmadan ko'rinish turibdiki, cheksiz o'lchamli normalangan fazaning birlik sharida $\rho(y_{n-1}, y_n) = \|y_{n-1} - y_n\| > \frac{1}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik mavjud, ya'ni birlik shar nisbiy kompakt to'plam emas.

3-teorema. E, F Banax fazolari bo'lsin. $T: E \rightarrow F$ chiziqli operator to'la uzlusiz bo'lishi uchun uning qoshma operatori $T^*: F' \rightarrow E'$ to'la uzlusiz bo'lishi zarur va kifoyadir.

Isboti. $T: E \rightarrow F$ to'la uzlusiz operator bo'lsin. F' fazoning birlik sharidan biror $\{y_n\}$ ketma-ketlikni olamiz. F fazoda f_n chiziqli funksionalni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n(x) = \langle x, y_n \rangle, x \in F$$

Ravshanki, $\{f_n\}$ to‘plam har bir $x \in f$ nuqtada chegaralangan: $|f_n(x)| \leq \|x\|$.

Ushbu $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \|x - x_0\|$ tengsizlikdan $\{f_n\}$ sistemaning tekis darajada uzluksizligi kelib chiqadi.

U_1 to‘plam E fazodagi birlik shar bo‘lsa, $T(U_1)$ to‘plam F fazoda nisbiy kompaktdir. Demak, $\{f_n\}$ funksionallar sistemasi $\overline{T(U_1)}$ kompakt to‘plamda tekis darajada uzluksiz va uning har bir nuqtasida bu sistema birqalikda chegaralangan. Askoli teoremasiga (4.1- §, 3-teorema) asosan $\overline{T(U_1)}$ to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lgan $\{f_{n_i}\}$ qism ketma-ketlik mavjud. Ushbu

$$\begin{aligned} \|T^* y_{n_j} - T^* y_{n_i}\| &= \|T^*(y_{n_j} - y_{n_i})\| = \sup_{x \in U_1} | \langle x, T^*(y_{n_j} - y_{n_i}) \rangle | = \\ &= \sup_{x \in U_1} | \langle Tx, y_{n_j} - y_{n_i} \rangle | = \sup_{x \in U_1} |f_{n_i}(Tx) - f_{n_j}(Tx)| \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

munosabatlardan $\{T^* y_{n_i}\}$ ketma-ketlikning fundamentalligi kelib chiqadi. E’ to‘la bo‘lgani uchun $\{T^* y_{n_i}\}$ yaqinlashuvchi, ya’ni T^* -to‘la uzluksiz.

T^* to‘la uzluksiz bo‘lsa, T ham to‘la uzluksiz bo‘lishi shunga o‘xshash isbotlanadi.

Paragrafni to‘la uzluksiz operatorlarning xos qiymatlarini o‘rganish bilan yakunlaymiz. $Tx = \lambda x$ tenglamani olamiz.

4-teorema. *E Banax fazosida aniqlangan to‘la o‘zluksiz T operator va ixtiyoriy musbat δ son berilgan bo‘lsin. T operatorning absolyut qiymati δ dan katta bo‘lgan xos qiymatlaridan iborat to‘plamni \wedge_δ bilan belgilaymiz. U holda \wedge_δ ning elementlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarning soni cheklidir.*

Ispoti. $\Lambda\delta$ to‘plamdan biror $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ketma-ketlik tanlab olamiz (ular orasida tenglari ham bo‘lishi mumkin), ya’ni har bir λ_n son T ning xos qiymati va $|\lambda_n| > \delta$. Endi ularga mos keluvchi x_1, x_2, \dots, x_n xos vektorlarning chiziqli erkilarining soni cheksiz deb faraz qilaylik. E_n orqali x_1, x_2, \dots, x_n vektorlarning chiziqli qobig‘ini belgilaymiz. Yuqoridagi F. Riss lemmasiga asosan ushbu

$$1) \|y_n\| = 1, 2) y_n \in E_n, 3) \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ketma-ketlik mavjud. Ixtiyoriy n natural son uchun ushbu

$$\left\| \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| = \frac{\|y_n\|}{|\lambda_n|} = \frac{1}{|\lambda_n|} < \frac{1}{\delta}$$

munosabatlar o‘rinli, ya’ni $\left\{ \frac{y_n}{\lambda_n} \right\}$ chegaralangan ketma-ketlik. T to‘la uzluksiz

bo‘lgani uchun $\left\{ T\left(\frac{y_n}{\lambda_n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkin.

So‘ngra $y_n \in E_n$ bo‘lgani uchun $\left\{ y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\}$. Bundan

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k T x_k}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \lambda_k x_k}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n.$$

Bu yerda

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1 \right) x_k \in E_{n-1}$$

Demak, ixtiyoriy $p, q (p > q)$ natural sonlar uchun ushbu

$$\left\| T\left(\frac{y_p}{\lambda_p} \right) - T\left(\frac{y_q}{\lambda_q} \right) \right\| = \| y_p + z_p - (y_q + z_q) \| = \| y_p - (y_q + z_q - z_p) \| > \frac{1}{2}$$

tengsizlik o‘rinli (chunki $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$). Ya’ni $\left\{ T\left(\frac{y_n}{\lambda_n} \right) \right\}$ ketma-ketlikdan

hech qanday yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkin emas. Bu esa ziddiyatga olib keladi. Shuning uchun $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ vektorlar sistemasining faqat chekli qismigina chiziqli erkli bo‘lishi mumkin.

1-natija. Banax fazosidagi to‘la uzluksiz operatorning noldan farqli xos qiymatiga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.

2-natija. Ixtiyoriy to‘la uzluksiz operator uchun Λ_{δ} to‘plam cheklidir.

Xususan, Banax fazosidagi to‘la uzluksiz operatorning xos qiymatlarining soni ko‘pi bilan sanoqlidir va ularning modullarini kamayish tartibida yozish mumkin:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$$

Agar bu ketma-ketlik cheksiz bo‘lsa, u nolga intiladi.

10.3- §. Gilbert fazosida to‘la uzluksiz operatorlar

Gilbert fazosidagi to‘la uzluksiz operatorlar ko‘pgina qo‘sishimcha xossalarga egadir. Bunda Gilbert fazosi o‘z-o‘ziga qo‘shma fazo ekanligi katta rol o‘ynaydi. Quyidagi teoremadan Gilbert fazosida to‘la uzluksiz operatorning boshqa teng kuchli ta’rifi kelib chiqadi. Bu paragrafda H separabel Gilbert fazosi deb faraz qilamiz.

1-teorema. *H* Gilbert fazosidagi T operator to‘la uzluksiz bo‘lishi uchun u ixtiyoriy sust yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka

aks ettirishi zarur va kifoyadir.

Izboti. Zarurligi. $T : H \rightarrow H$ to‘la uzlusiz operator bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in H$ elementga sust yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik norma bo‘yicha chegaralangan (8.3-§, 1- teorema), demak, $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik nisbiy kompaktdir, ya’ni uning ixtiyoriy cheksiz qismidan kuchli yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik tanlab olish mumkin.

T uzlusiz bo‘lgani uchun $\{Tx_n\}$ ketma-ketlnk Tx elementga sust yaqinlashuvchidir, ya’ni $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik faqatgina yagona limit nuqtaga ega. Demak, $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik Tx elementga kuchli yaqinlashuvchidir, aks holda Tx dan farqli nuqtaga kuchli (va demak, sust) yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik tanlab olish mumkin bo‘lar edi.

Kifoyaligi. T operator ixtiyoriy sust yaqinlashuvchi ketma-ketlikni kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka aks ettirsin deb faraz qilaylik. Biror cheksiz M to‘plam H fazoda chegaralangan bo‘lsa, 8.4-§ dagi 2-teoremaning natijasiga asosan undagi ixtiyoriy cheksiz to‘plamdan sust yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin. Farazimizga asosan bu sust yaqinlashuvchi ketma-ketlikni T operator kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikka aks ettiradi, ya’ni $T(M)$ -nisbiy kompakt to‘plam.

Natija. $T : H \rightarrow H$ operator to‘la uzlusiz, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x elementga sust yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda

$$(Tx_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Tx, x).$$

Izboti. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$\begin{aligned} |(Tx_n, x_n) - (Tx, x)| &\leq |(Tx_n, x_n) - (Tx, x_n)| + |(Tx, x_n) - (Tx, x)| = \\ &+ |(Tx, x_n - x)| \leq \|x_n\| \cdot \|Tx_n - Tx\| + |(Tx, x_n - x)| \end{aligned}$$

1-teoremaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga sust yaqinlashgani uchun $\{Tx_n\}$ ketma-ketlik Tx ga kuchli yaqinlashadi, ya’ni $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ va 8.3-§ dagi 1-teoremaga asosan $\|x_n\|$ chegaralanganligi sababli $\|x_n\| \cdot \|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ ketma-ketlik x ga sust yaqinlashishini hisobga olsak, ixtiyoriy $y \in H$ uchun $|(y, x_n - x)| \rightarrow 0$ xususan, $|Tx, x_n - x| \rightarrow 0$.

Demak,

$$|(Tx_n, x_n) - (Tx, x)| \rightarrow 0.$$

Endi biz o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan to‘la uzlusiz operatorlarni batafsilroq o‘rganamiz. Xususan, bunday operatorlar uchun chiziqli algebra kursidan ma’lum bo‘lgan matritsalarni diagonal ko‘rinishga keltirish teoremasiga o‘xshash teoremani isbotlaymiz. Avval quyidagi ikki lemmanni keltiramiz.

1-lemma. H kompleks Gilbert fazosi bo‘lib, T undagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lsin. U holda bu operatorning xos qiymatlari haqiqiy bo‘lib, har xil xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar ortogonaldir.

Izboti. $\lambda \in C$ son T operator uchun xos qiymat bo‘lsa, u holda

$$Tx = \lambda x, x \neq 0,$$

demak,

$$\lambda(x, x) = (Tx, x) = (x, Tx) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

bu yerda $(x, x) = \|x\|^2 \neq 0$ bo‘lgani uchun $\lambda = \bar{\lambda}$, ya’ni λ - haqiqiy son.

Endi $\lambda, \mu (\lambda \neq \mu)$ sonlar T operatorning xos qiymatlari bo‘lib, x va y mos ravishda ularning xos vektorlari bo‘lsin. Bu holda

$$\lambda(x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

$\lambda \neq \mu$ bo‘lgani uchun $(x, y) = 0$, ya’ni $x \perp y$.

2-lemma. T o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan chiziqli operator va $Q(x) = (Tx, x)$ bo‘lsin. Agar ushbu

$$|Q(x)| = |(Tx, x)|$$

funktional birlik sharning x_0 nuqtasida maksimumga ega bo‘lsa, u holda

$$(x_0, x) = 0$$

munosabatdan $(Tx_0, x) = (x_0, Tx) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

Ishboti. Ravshanki, $\|x_0\| = 1$. Darhaqiqat, agar $\|x_0\| < 1$ bo‘lsa, u holda

$$\left| Q\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \right| = \left| \left(T \frac{x_0}{\|x_0\|}, \frac{x_0}{\|x_0\|} \right) \right| = \frac{1}{\|x_0^2\|} \cdot |(T_0, x_0)| > |(Tx_0, x_0)| = |Q(x_0)|$$

munosabat $|Q(x_0)|$ maksimal qiymat ekanligiga zid bo‘lar edi

(chunki $\left\| \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\| = 1$).

a-ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin. Ushbu

$$y = \frac{x_0 + ax}{\sqrt{1 + a^2 \|x\|^2}}$$

elementni olsak, $\|x_0\| = 1$ va $(x_0, x) = 0$ bo‘lgani sababli $\|y\| = 1$. Endi

$$Q(y) = \frac{1}{1 + |a|^2 \|x\|^2} [Q(x_0) + 2a \operatorname{Re}(Tx_0, x) + a^2 Q(x)]$$

ekanligini hisoblash oson, bu yerda $\operatorname{Re}(Tx_0, x)$ son (Tx_0, x) ning haqiqiy qismi.

Olingan a son cheksiz kichik bo‘lganda

$$Q(y) = Q(x_0 + 2a \operatorname{Re}(Tx_0, x)) + O(a^2).$$

Bu munosabatdan ko‘rinib turibdiki, agar $(Tx_0, x) \neq 0$ bo‘lsa, u holda a sonning modulini o‘zgartirmagan holda ishorasini shunday tanlash mumkinki, $|Q(y)| > |Q(x_0)|$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $|Q(x_0)|$ ning maksimal ekanligiga zid. Demak, $(Tx_0, x) = 0$.*

2-teorema. (Gilbert-Shmidt teoremasi) *H Gil’bert fazosida to‘la uzlucksiz o‘z-o‘ziga qo‘shma chizikli T operator berilgan bo‘lib, $\{\lambda_n\}$ uning barcha xos qiymatlari bo‘lsin. H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan*

iborat shunday ortonormal $\{\phi_n\}$ sistema mavjudki, ixtiyoriy $x \in H$ element ushbu

$$x = \sum_k c_k \phi_k + x' \quad (1)$$

ko 'rinishda yagona usulda yoyiladi, bu yerda $x' \in \ker T$, ya 'ni $Tx' = 0$.

Agar shu bilan birga $\{\phi_n\}$ cheksiz sistema bo 'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Isboti. Xos qiymatlardan iborat $\{\lambda_n\}$ ketma-ketlikni absolyut qiymati kamayishi tartibida yozib: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$, bularga mos ravishda $\{\phi_n\}$ sistemani induksiya bo'yicha quyidagicha tuzamiz.

2- lemmadagi

$$|Q(x)| = |(Tx, x)|$$

funktionalni olib, uni birlik sharda maksimumga erishishini isbotlaymiz. Ushbu

$$\Lambda = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Tx, x)|$$

belgilashni kirlitsak, u holda supremumning xossasiga asosan shunday

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \|x_n\| \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

ketma-ketlik mavjudki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(Tx_n, x_n)| = \Lambda.$$

Birlik shar sust kompakt bo'lgani sababli (8.4-§ dagi 2- teorema) $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan biror $y \in H$ elementga sust yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlikni ajratish mumkin. 8.4-§, 2-teorema isbotining b) qismiga asosan $\|y\| \leq 1$. 1-teoremaning natijasiga asosan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(Tx_{n_k}, x_{n_k})| = |(Ty, y)|,$$

demak, $|(Ty, y)| = \Lambda$.

Ko'rinish turibdiki, $\|y\| = 1$, aks holda (ya 'ni $\|y\| < 1$ bo'lsa) $y' = \frac{y}{\|y\|}$,

element birlik sharning elementi bo'lib, $|(Ty', y')| > \Lambda$ ziddiyat hosil bo'lar edi.

Endi ϕ_1 , sifatida shu u elementni olib, uning T operator uchun xos vektor ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $T\phi_1$, elementning $\{\lambda\phi_1\}_{\lambda \in C}$ va $\{\lambda\phi_1\}_{\lambda}^{\perp} \in C$ fazolar bo'yicha ortogonal yoyilmasini olamiz, ya 'ni

$$T\phi_1 = \lambda\phi_1 + \Psi_1;$$

bu yerda $\Psi_1 \perp \phi_1$, 2- lemmaga asosan $\Psi_1 \perp T\phi_1$, demak, $\Psi_1 = \theta$.

Bundan

$$T\phi_1 = \lambda\phi_1$$

va

$$|T\phi_1, \phi_1| = |\lambda(\phi_1, \phi_1)| = |\lambda\|\phi_1\|^2| = |\lambda|$$

bo'lgani sababli $|\lambda| = \Lambda$; absolyut qiymat bo'yicha eng katta xos qiymat λ

bo‘lgani uchun $\lambda = \lambda_1$. Shunday qilib, $T\phi_1 = \lambda_1\phi_1$ va $|\lambda_1| = \Lambda$.

Endi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ xos qiymatlarga mos keluvchi $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ vektorlar topilgan deb faraz qilaylik. Bu vektorlarning chiziqli qobig‘ini M_n bilan belgilaymiz. Ushbu $|(Tx, x)|$ funksionalni M_n^\perp qism fazoning birlik sharida ko‘ramiz. M_n qism fazo o‘z-o‘ziga ko‘shma T operatorga nisbatan invariant bo‘lgani uchun M_n^\perp qism fazo ham invariantdir. Yuqoridagi mulohazani M_n^\perp qism fazoga qo‘llasak, M_n^\perp qism fazoda T operatorning ϕ_{n+1} xos vektori topiladi.

Endi ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) biror n_0 qadamdan so‘ng hosil bo‘lgan $M_{n_0}^\perp$ qism fazodagi ixtiyoriy x uchun

$$(Tx, x) = 0;$$

2) ixtiyoriy n uchun $(Tx, x) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in M_n^\perp$ element mavjud.

Birinchi holda 2-lemmaga asosan $(Tx, x) = 0$ munosabatdan $(Tx, Tx) = 0$ tenglik kelib chiqadi (chunki bu holda lemmadagi x_0 sifatida ixtiyoriy $x \in M_{n_0}^\perp$ elementni olish mumkin). Demak, ixtiyoriy $x \in M_n^\perp$ uchun $Tx = \theta$, ya’ni $M_{n_0}^\perp$ qism fazo $\lambda = 0$ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlardan iborat, ya’ni ϕ_n sistema cheklidir.

Ikkinchi holda cheksiz $\{\phi_n\}$ sistema hosil bo‘lib, ularga mos keluvchi λ_n sonlar noldan farqlidir. Endi ushbu $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ munosabatni isbotlaymiz. Ixtiyoriy x element uchun $c_n = (x, \phi_n)$ sonlar x elementning $\{\phi_n\}$ ortonormal sistemasi bo‘yicha Fure koeffitsientlari bo‘lgani sababli $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ yaqinlashuvchi qatordir.

Xususan, ixtiyoriy x element uchun $(x, \phi_n) \rightarrow 0$. Demak, $\{\phi_n\}$ ketma-ketlik θ elementga sust yaqinlashuvchidir. 1-teoremaga asosan $\{T\phi_n\}$ ketma-ketlik θ elementga norma bo‘yicha yaqinlashadi, ya’ni $\|T\phi_n\| = \|\lambda_n\phi_n\| = |\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Nihoyat,

(1) yoyilmani isbotlaymiz.

M orqali $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ vektorlarning chiziqli qobig‘ining yopilmasini belgilaymiz. Bunda $M^\perp = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\perp$.

Ravshanki, har qanday n uchun $M^\perp \subset M_n^\perp$. Demak, ixtiyoriy $x' \in M^\perp$ ($x' \neq 0$) va n uchun

$$|(Tx', x')| = \left| \left(T \frac{x'}{\|x'\|}, \frac{x'}{\|x'\|} \right) \cdot \|x'\|^2 \right| \leq \max_{\substack{\|y\| \leq 1 \\ y \in M_n^\perp}} |(Ty, y)| \cdot \|x'\|^2 = \lambda_{n+1} \|x'\|^2.$$

Bunda n ixtiyoriy bo‘lgani va $\lambda_n \rightarrow 0$ tufayli

$$(Tx', Tx') = 0.$$

So‘ng 2-lemmani M^\perp qism fazoga qo‘llasak, yuqoridagi munosabatdan $(Tx', Tx') = 0$ tenglik, ya’ni $Tx' = 0$ kelib chiqadi. Demak, $M^\perp \subset \ker T$.

Bundan, bevosita ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy x vektor ushbu

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k + x', x' \in \ker T$$

ko‘rinishga egadir. Bu yerda c_k koeffitsientlar yagona ravishda topilishi $\{\phi_k\}$ sistemaning M fazoda ortogonal bazisligidan kelib chiqadi, bundan esa x' ham yagonaligi ko‘rinib turibdi.

Isbotlangan teorema keyingi paragraflarda ko‘riladigan integral tenglamalar nazariyasida juda muhim rol o‘ynaydi.

10.4-§. Chiziqli integral tenglamalar

Funksional fazoda (masalan, $C[a,b]$, $L_2[a, b]$, $C_2[a,b]$) tenglama berilgan bo‘lib, noma’lum element funksiyadan iborat bo‘lsa, bunday tenglama funksional tenglama deyiladi. Agar funksional tenglamada noma’lum funksiya integral ostida bo‘lsa, u holda tenglama integral tenglama deyiladi. Masalan, ushbu

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t) g(\phi(t), t) dt$$

tenglama ϕ ga nisbatan integral tenglamadir, bu yerda $K(s,t)$, $g(s,t)$ -berilgan funksiyalar.

Integral tenglamadagi ifoda noma’lum funksiyaga nisbatan chiziqli bo‘lgan holda tenglama *chiziqli integral tenglama* deyiladi.

Quyidagi tenglamalar chiziqli integral tenglamalarga misoldir:

$$\int_a^b K(s,t) \phi(t) dt + f(s) = 0, \quad (1)$$

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t) \phi(t) dt + f(s), \quad (2)$$

bu yerda ϕ -noma’lum funksiya, $K(s,t)$ va $f(s)$ -ma’lum funksiyalar, (1) va (2) tenglamalar mos ravishda *birinchi va ikkinchi tur Fredgolm tenglamalari* deyiladi.

Xususan, $K(s,t)$ funksiya $t > s$ qiymatlar uchun ushbu

$$K(s,t) = 0$$

shartni qanoatlantirsa, u holda (1) va (2) tenglamalar mos ravishda ushbu

$$\int_a^s K(s,t) \phi(t) dt + f(s) = 0, \quad (3)$$

$$\phi(s) = \int_a^s K(s,t)\phi(t)dt + f(s) \quad (4)$$

ko‘rinishlarga ega bo‘ladi. Bunday tenglamalar *birinchi va ikkinchi tur Volterra tenglamalari* deyiladi. Volterra tenglamalari Fredgolm tenglamalarining xususiy holi bo‘lsa-da, ular alohida o‘rganiladi, chunki Volterra tenglamalari o‘ziga xos bo‘lgan xossalarga ega.

Agar (1), (2), (3), (4) tenglamalarda f funksiya nolga teng bo‘lsa, bu tenglamalar *bir jinsli* deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(s) = \int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1, f(0) = 0)$$

tenglama *Abel tenglamasi* deyiladi.

Bu tenglama Volterra tenglamasining xususiy holi bo‘lib, 1823 yilda N. Abel tomonidan ko‘rilgan.

Birinchi tur Fredgolm tenglamalarini o‘rganish ikkinchi tur tenglamalarga qaraganda ancha qiyinroq. Masalan, bunday tenglamalar har doim yechimga ega bo‘lavermaydi.

Misol sifatida ushbu

$$f(s) = \int_0^s \phi(t)dt$$

tenglamani $C[a,b]$ fazoda ko‘rsak, bu tenglama birinchi tur Fredgolm tenglamasi bo‘lib, unda

$$K(s,t) = \begin{cases} 1, & t \leq s \text{ uchun} \\ 0, & t > s \text{ uchun} \end{cases}.$$

Agar f funksiya hosilaga ega bo‘lsa, u holda, ravshanki, $\phi(s) = f'(s)$ funksiya tenglamaning yechimidir. Aks holda bu tenglama yechimga ega emas.

Ikkinchi tur Fredgolm tenglamalari kengroq o‘rganilgan.

Biz quyida Fredgolm tenglamalarini tekshirishga hozirgacha bayon qilingan funksional analiz elementlarini, xususan Gilbert-Shmidt nazariyasini tatbiq qilamiz.

$L_2[a,b]$ kompleks fazoda ikkinchi tur Fredgolm tenglamasi, ya’ni (2) tenglamani olamiz. Bu tenglamada $f(s)$ ma’lum va $\phi(s)$ noma’lum funksiyalar bo‘lib, ular $L_2[a,b]$ fazoning elementlaridir.

Bu tenglamaga $L_2[a,b]$ fazoda aniqlangan

$$\Psi = T\phi = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt \quad (5)$$

Fredgolm operatorini mos qo‘yamiz (7.3- §).

Agar $K(s,t)$ funksiya $[a,b] \times [a,b]$ to‘plamda kvadrati bilan jamlanuvchi, ya’ni

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt < \infty \quad (6)$$

bo‘lsa, u *Gilbert-Shmidt o‘zagi*, unga mos T operator esa *Gilbert-Shmidt operatori* deyiladi.

1-teorema. *Gilbert-Shmidt operatori $L_2[a,b]$ fazoda to‘la uzlusiz bo‘lib, uning normasi quyidagi tengsizlikni qanoatlanadiradi:*

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt}. \quad (7)$$

Ishboti. T operator $L_2[a,b]$ fazoda chegaralangan va uning normasi (7) shartni qanoatlanirishi 7.3- § dagi 7-misolda ko‘rsatilgan edi. Endi faqat uning to‘la uzlusiz ekanligini isbotlasak kifoya.

Biror $\{\Psi_n\}$ sistema $L_2[a,b]$ fazoda to‘la ortogonal bo‘lsin. U holda (4.5-§ dagi 4-misolga asosan) $\{\Psi_m(s)\Psi_n(t)\}$ ko‘paytmalar sistemasi $L_2(D)$ fazoda ortogonal sistema tashkil qiladi (eslatamiz: $D = [a,b] \times [a,b]$) Demak, ushbu

$$K(s,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{mn} \Psi_m(s) \Psi_n(t).$$

yoyilma o‘rinlidir. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini qaraylik:

$$K_n(s,t) = \sum_{m,n=1}^N a_{mn} \Psi_m(s) \Psi_n(t)$$

Bu o‘zakka mos Fredholm operatorini T_N bilan belgilaymiz. Ravshanki, T_N operator to‘la uzlusiz, chunki u $L_2[a,b]$ fazoni chekli o‘lchamli qism fazoga aks ettiradi.

Haqiqatan, ixtiyoriy $\phi \in L_2[a,b]$ uchun

$$\begin{aligned} T_N \phi &= \int_a^b K_N(s,t) \phi(t) dt = \sum_{m,n=1}^N a_{mn} \Psi_m(s) \int_a^b \phi(t) \Psi_n(t) dt = \\ &= \sum_{m=1}^N \phi_m(s) \sum_{n=1}^N a_{mn} b_n, \end{aligned}$$

$$\text{bu yerda } b_n = \int_a^b \phi(t) \Psi_n(t) dt.$$

Demak, T_N operator $L_2[a,b]$ fazoni $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$ funksiyalarning chiziqli qobig‘i bo‘lgan chekli o‘lchamli fazoga aks ettiradi.

Ta’rifga asosan, $K_N(s,t)$ funksiyalar $K(s,t)$ funksiyaning $\{\Psi_m(s)\Psi_n(t)\}$ sistema bo‘yicha Fure qatorining xususiy yig‘indilaridan iborat.

Shu tufayli $N \rightarrow \infty$ da

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t) - K_N(s,t)|^2 ds dt \rightarrow 0.$$

Endi (7) tengsizlikni $T-T_N$ operatoriga qo'llasak,

$$\|T - T_N\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_N(s, t)|^2 ds dt} \rightarrow 0$$

munosabatga kelamiz. Shunday qilib, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ to'la uzlusiz operatorlar ketma-ketligi norma bo'yicha T operatoriga yaqinlashadi. 10.2-§ dagi 1-teoremaga asosan T ham to'la uzlusiz.

Natija. Ixtiyoriy Gilbert-Shmidt operatori chekli o'lchamli operatorlarning norma bo'yicha limitidir.

Gilbert fazosida qo'shma operatorlarni o'rganganimizda $K(t, s)$ o'zakli Fredgolm operatori uchun qo'shma operatorning o'zagi $\overline{K(s, t)}$ bo'lishini ko'rsatgan edik. Xususan (5) formula bilan aniqlangan T operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s) \quad (8)$$

tenglik zarur va kifoyadir. (8) shartni qanoatlantiruvchi o'zaklar *simmetrik o'zaklar* deyiladi.

Endi (8) shartni qanoatlantiruvchi o'zakli tenglamani o'rganamiz. Yuqorida aytilganidek, bu holda

$$T\phi = \int_a^b K(s, t)\phi(t)dt$$

operator o'z-o'ziga qo'shma to'la uzlusiz operator. Demak, bu operatorga 10.3-§ dagi Gilbert-Shmidt teoremasini (2- teorema) qo'llash mumkin. (2) tenglamani qisqacha ushbu

$$\phi = T\phi + f \quad (9)$$

ko'rinishda yozamiz. Gilbert-Shmidt teoremasiga asosan $\{\lambda_n\}$ xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat bo'lgan shunday ortonormal $\{\phi_n\}$ sistema mavjudki, ixtiyoriy $\xi \in L_2[a, b]$ elementni

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n + \xi'$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\xi' \in \ker T$, ya'ni $T\xi' = 0$. Xususan,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n + f', f' \in \ker T \quad . \quad (10)$$

(9) tenglananing yechimini ushbu

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \phi_n + \phi', \phi' \in \ker T \quad (11)$$

ko'rinishda izlaymiz. (9) tenglamada f va ϕ funksiyalarning (10), (11) yoyilmalarini yozib, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \phi_n + \phi' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda_n \phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n + f'$$

tenglamaga kelamiz, ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (1 - \lambda_n) \phi_n + \phi' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n + f'.$$

Bunday yoyilma Gilbert-Shmidt teoremasiga asosan yagona bo'lgani sababli

$$x_n (1 - \lambda_n) = b_n, \\ \phi' = f';$$

bundan $\lambda_n \neq 1$ bo'lsa, $x_n = \frac{b_n}{1 - \lambda_n}$ va $\lambda_n = 1$ bo'lsa, $b_n = 0$.

Ko'rinish turibdiki, $\lambda_n = 1$ holda $b_n = 0$ shart (9) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun zarur va kifoyadir. Bunday $\lambda_n = 1$ uchun x_n ixtiyoriy.

Shuning bilan quyidagi teorema isbotlandi.

2-teorema. Agar 1 soni T operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u holda (9) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga ega. Agar 1 soni T operator uchun xos qiymat bo'lsa, u holda (9) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f funksiya 1 soniga mos keluvchi hamma xos funksiyalarga ortogonal bo'lishi zarur va kifoyadir. Bu holda (9) tenglama yechimlarining soni cheksizdir.

10.5- §. Fredgolm teoremlari

Bu yerda ham yuqorida ko'rilgan ushbu

$$\varphi = T\varphi + f \quad (1)$$

tenglamani o'rganishni davom ettiramiz. Navbatdagi mulohazalarda T operatorning integral ko'rinishi emas, balki faqat uning to'la uzlusizligi rol o'ynaydi. Shuning uchun H Gilbert fazosida biron T to'la uzlusiz operatorni olib, (1) ko'rinishdagi tenglamani o'rganamiz. Buning uchun $A = I - T$ operatorni kiritgan holda (I-birlik operator) (1) tenglamani ushbu

$$A\varphi = f \quad (2)$$

ko'rinishda yozamiz. (2) tenglama bilan bir qatorda bir jinsli bo'lgan

$$A\phi_0 = 0 \quad (3)$$

tenglamani va bularga qo'shma bo'lgan ushbu

$$A^* \Psi = g, \quad (2')$$

$$A^* \Psi_0 = \theta \quad (3')$$

tenglamalarni ko'ramiz (bu yerda A^* operator A operatoriga qo'shma, ya'ni $A^* = (I - T)^* = I - T^*$).

Quyida isbotlanadigan Fredgolm teoremlari shu to'rt tenglamaning yechimlari orasidagi bog'lanishni ko'rsatadi.

1-teorema. (2) tenglama yechimga ega bo'lishi uchun f vektor (3') tenglamaning har bir yechimiga ortogonal bo'lishi zarur va kifoyadir,

Izboti. kerA va ImA lar A operatorning mos ravishda yadrosi va qiymatlari sohasi, ya'ni

$$\ker A = \{x \in H : Ax = \theta\} = A^{-1}(\theta),$$

$$\text{Im } A = \{Ax : x \in H\} = A(H)$$

ekanligini eslatamiz. Ma'lumki, A uzluksiz bo'lgani uchun $\ker A$ to'plam H ning yopiq qism fazosi. $\text{Im } A$ ham H ning yopiq qism fazosi ekanligini isbotlaymiz.

$\{y_n\} \subset \text{Im } A$ ketma-ketlik biron $y \in H$ elementga yaqinlashuvchi bo'lsin, deb faraz qilaylik. Demak, ushbu

$$y_n = Ax_n = x_n - Tx_n \rightarrow y \quad (4)$$

shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. x_n vektorlarni $\ker A$ fazoga ortogonal deb hisoblash mumkin, aks holda x_n o'mniga $x'_n = x_n - prx_n$ vektorlarni olish mumkin; bu yerda prx_n element x_n vektoring $\ker A$ qism fazoga proeksiyasi. Bundan tashqari, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangandir. Darhaqiqat, aks holda $\|x_n\| \rightarrow \infty$ deb hisoblash mumkin, demak, (4) ga asosan

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{y_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0 \quad (5)$$

munosabat o'rinli.

So'ng $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ ketma-ketlik birlik sharga tegishli bo'lgani va T to'la uzluksiz ekanligi tufayli biror $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketlik uchun $T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right)$ biror z elementga yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan (5) ga asosan $\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ ketma-ketlik ham shu z limitga yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ravshanki, $\|z\|=1$ (chunki $\left\|\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right\|=1$) va

$$Az = z - Tz = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \right) - T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) \right] = \theta$$

ya'ni $z \in \ker A$. Ammo har bir x_n element $\ker A$ ga ortogonal edi, demak, $z \perp \ker A$ bundan va $z \in \ker A$ dan $z=0$ kelib chiqadi, bu esa $\|z\|=1$ tenglikka zid. Bu ziddiyat $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsatadi.

T operator to'la uzluksiz bo'lgani uchun $\{Tx_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi bo'lgan $\{Tx_{n_i}\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkin. (4) ga asosan $\{x_{n_i}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu limitni x bilan belgilasak, u holda

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{i \rightarrow \infty} Ax_{n_i} = A\left(\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i}\right) = Ax,$$

ya'ni $y \in \text{Im } A$, demak, $\text{Im } A$ yopiqdir. 10.2-§, 3-teoremaga asosan T^* operator

ham T bilan bir qatorda to'la uzlusiz bo'lgani sababli $\text{Im}A^*$ ham H ning yopiq qism fazosi.

Endi biz quyidagi munosabatlarni isbotlaymiz

$$\ker A \oplus \text{Im}A^* = H, \quad (6)$$

$$\ker A^* \oplus \text{Im}A = H. \quad (7)$$

Ravshanki, $\ker A$ va $\text{Im}A^*$ o'zaro ortogonal qism fazolar. Haqiqatan, ixtiyoriy $h \in \ker A$ va $x \in H$ uchun

$$(h, A^* x) = (Ah, x) = (\theta, x) = 0.$$

Demak, hech qanday ($\neq \theta$) vektor bir vaqtida $\ker A$ va $\text{Im}A^*$ qism fazolarga ortogonal emasligini ko'rsatsak bas. Agar biror z vektor $\text{Im}A^*$ ga ortogonal bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in H$ uchun

$$(Az, x) = (z, A^* x) = 0, \text{ ya'ni } Az = \theta,$$

demak, $z \in \ker A$.

Shunga o'xhash (7) tenglik ham isbotlanadi. (7) munosabatdan 1-teorema bevosita kelib chiqadi, ya'ni $f \in \text{Im}A$ bo'lishi uchun $f \perp \ker A^*$ zarur va kifoyadir.

2-teorema. (Fredholm alternativasi). Yoki (2) tenglama ixtiyoriy $f \in H$ uchun yagona yechimga ega, yoki (3) tenglamaning noldan farqli yechimi mavjud.

Isboti. k natural son uchun H^k orqali $\text{Im}(A^k)$ fazoni belgilaymiz, xususan $H^1 = \text{Im}A$ ning tuzilishidan ravshanki, $A(H^k) = H^{k+1}$ va

$$H \supseteq H^1 \supseteq H^2 \dots$$

1-teoremani isbotlash davomida ko'rsatilganidek, har bir H^k yopiqdir.

Lemma. Shunday j natural son madjudki, ushbu

$$H^{k+1} = H^k$$

tenglik ixtiyoriy $k \geq j$ uchun bajariladi.

Lemmaning isboti. Aksini faraz qilsak, hamma H^k fazolar har xil bo'ladi. Bu holda shunday $\{x_k\}$ ortonormal sistema mavjudki, $x_k \in H^k$ va $x_k \perp H^{k+1}$.

Demak, ixtiyoriy l, k ($l > k$) sonlar uchun

$$Tx_l - Tx_k = -x_k + (x_l + Ax_k - Ax_l).$$

Bu yerda $x_l + Ax_k - Ax_l \in H^{k+1}$ bo'lgani uchun

$$\|Tx_l - Tx_k\|^2 = \|x_k\|^2 + \|x_l + Ax_k - Ax_l\|^2 \geq 1,$$

ya'ni $\{Tx_k\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi bo'lgan qism ketma-ketlikni ajratish mumkin emas. Bu esa T operatorning to'la uzlusizligiga zid.*

Teoremaning isbotini davom ettiramiz. Agar $\ker A = \{\theta\}$ bo'lsa (ya'ni (3) tenglama noldan farqli yechimga ega bo'lmasa), u holda A monomorfizmdir. Shuning uchun, agar $H^1 = \text{Im}A \neq H$ deb faraz qilsak, u holda $H^2 \neq H^1, \dots, H^{kH} \neq H^k$ munosabatlar ixtiyoriy k uchun o'rnlidir.

Bu esa lemmaga zid. Demak, $\text{Im}A = H$, ya'ni (2) tenglama ixtiyoriy f uchun yagona yechimga egadir.

Agar (2) tenglama ixtiyoriy f uchun yechimga ega bo'lsa, u holda $\text{Im } A = H$ va 1-teoremadagi (7) munosabatga asosan $\ker A^* = \{\theta\}$. Bu tenglikdan, yuqoridagidek $\text{Im } A^* = H$ munosabat kelib chiqadi. Endi (6) munosabatdan foydalansak, $\ker A = \{\theta\}$, ya'ni (3) tenglama faqat nolga teng yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.*

3-teorema. (3) va (3') tenglamalarning chiziqli erkli bo'lgan yechimlari soni chekli va o'zaro tengdir. Boshqacha qilib aytganda,

$$\dim(\ker A) = \dim(\ker A^*) < \infty.$$

Ishboti. $\ker A$ fazoning o'lchami cheksiz deb faraz qilaylik. Bu holda $\ker A$ da cheksiz ortonormal $\{x_n\}$ sistema mavjud. $x_n \in \ker A$, ya'ni $Ax_n = x_n - Tx_n = \theta$ bo'lgani sababli $x_n = Tx_n$ va demak, $\|Tx_e - Tx_l\| = \sqrt{2}$. Ya'ni $\{T_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin emas. Bu esa T ning to'la uzluksizligiga zid. Shunday qilib, $\dim \ker A < \infty$ (shunga o'xshash $\dim \ker A^* < \infty$). Ushbu

$$\dim(\ker A) = \mu, \quad \dim(\ker A^*) = \nu$$

belgilash kiritamiz. Faraz qilaylik,

$$\mu < \nu$$

tengsizlik bajarilsin. So'ng $\ker A$ va $\ker A^*$ fazolarda mos ravishda

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\mu\} \text{ ñà } \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\nu\}$$

ortonormal bazislar tanlab olamiz va ushbu

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j) \Psi_j,$$

operatorni ko'ramiz. S operator A operatoriga chekli o'lchamli operatorni qo'shish natijasida hosil bo'lgani sababli S operator uchun hamma yuqorida isbotlangan faktlar o'rinnlidir. Bu operator uchun

$$Sx = \theta$$

tenglama faqat nol yechimga ega. Haqiqatan,

$$Sx = Ax + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \phi_j) \Psi_j = \theta$$

bo'lsa, 1-teoremadagi (7) munosabatga asosan $Ax \perp \Psi_j$; (ixtiyoriy j uchun) demak,

$$Ax = \theta \text{ va } (x, \phi_j) = 0 \quad (j = \overline{1, \mu}).$$

Shunday qilib, bir tomonidan $x \in \ker A$, ya'ni x vektor $\{\phi_i\}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidir, ikkinchi tomonidan, x bu vektorlarga ortogonal, bundan $x = \theta$. Demak $\ker S = \{\theta\}$ 2-teoremani S operatoriga qo'llagan holda $f = \Psi_{\mu+1}$ deb olsak, ushbu

$$Ay + \sum_{i=1}^{\mu} (y, \phi_i) \Psi_i = \Psi_{\mu+1}$$

tenglama biror y yechimga ega. Bu tenglikni $\Psi_{\mu+1}$ vektorga skalyar ko'paytirsak,

ushbu $0=1$ ziddiyat hosil bo‘ladi.

(chunki $\text{Im } A \perp \ker A^*$ va $Ay \in \text{Im } A$, $\Psi_{\mu+1} \in \ker A^*$). Demak, $\mu < \nu$ deb faraz qilganimiz ziddiyatga keltiradi, ya’ni $\mu \geq \nu$. Shunga o‘xhash, A o‘rniga A^* operator olinsa, $\mu \leq \nu$ tengsizlik isbotlanadi. Demak, $\mu = \nu$.^{*}

Yuqoridagi teoremlarda $T-I$ operatorning teskari operatori mavjudlik shartlarini ko‘rdik. Ravshanki, bu teoremlar $T - \lambda I (\lambda \neq 0)$ operatorlar uchun ham o‘rinlidir. Fredholm teoremlaridan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. To‘la uzlusiz operatorning spektridan olingan ixtiyoriy noldan farqli son bu operator uchun chekli karrali xos qiymatdir.

Misol sifatida o‘zagi “ajralgan” integral tenglamalarni ko‘ramiz. Ushbu

$$\phi(s) = \int_a^b K(s,t)\phi(t)dt + f(s) \quad (8)$$

Fredholm integral tenglamasining o‘zagi

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^n P_i(s)Q_i(t) \quad (9)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda $K(s,t)$ ajralgan o‘zak deyiladi. Bu yerda P_i, Q_i : funksiyalar $L_2[a,b]$ fazodan olingan. Ravshanki, P_1, P_2, \dots, P_n funksiyalarni chiziqli erkli deb hisoblasak bo‘ladi, aks holda $K(s,t)$ o‘zakni chiziqli erkli bo‘lgan $P_1, \dots, P_i (i < n)$ lar orqali ifodalash mumkin. (9) tenglikdan foydalanib, (8) tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^n P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt + f(s)$$

va ushbu

$$\int_a^b Q_i(t)\phi(t)dt = q_i, \quad i = \overline{1, n}$$

belgilashlarni kiritamiz. Natijada (8) tenglama ushbu

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s) \quad (10)$$

ko‘rinishga keladi. ϕ funksiyaning bu ifodasini berilgan integral tenglamaga qo‘ysak, ushbu

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(s) + f(s) = \sum_{i=1}^n P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(s)$$

ya’ni

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^n P_i(s) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_j \right] \quad (11)$$

ko‘rinishdagagi tenglikka kelamiz; bu yerda

$$a_{ij} = \int_a^b Q_i(t)P_j(t)dt, \quad b_i = \int_a^b Q_i(t)f(t)dt$$

Biz $P_i(s)$ funksiyalar chiziqli erkli deb faraz qilganimizni esga olsak, (11) munosabatdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Agar biz bu chiziqli tenglamalar sistemasini q_i larga nisbatan yechsak, u holda (10) tenglikdan $\phi(s)$ funksiya ham topiladi. Shunday qilib, ajralgan o'zakli integral tenglamani yechish masalasi (12) chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga teng kuchli. Bunday tenglamalar yechimlarining xossalari bizga chiziqli algebra kursidan ma'lum. Ularni eslatamiz.

1. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{aligned} Ax &= y \quad A = (a_{ij}) \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n} \\ x &= (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

yechimga ega bo'lishi uchun u vektor qo'shma bir jinsli ushbu

$$A^* z = 0 \quad (A^* = (\bar{a}_{ji}))$$

sistemaning har bir yechimiga ortogonal bo'lishi zarur va kifoyadir.

2. Yoki $Ax=y$ sistema ixtiyoriy y uchun yagona yechimga ega yoki (a_{ij}) matritsaning determinanti nolga teng (ya'ni $Ax=0$ sistemaning noldan farqli yechimi mavjud).

3. $A = (a_{ij})$ va $A^* = (\bar{a}_{ij})$ matritsalarning ranglari o'zaro teng, ya'ni $Ax=0$ va $A^* z = \theta$ sistemalarning chiziqli erkli yechimlari soni o'zaro teng.

Ko'rinish turibdiki, ajralgan yadroli Fredgolm tenglamalari uchun Fredgolm teoremlari yuqoridagi 1-3 iboralardan ham kelib chiqadi.

Mashq uchun masalalar

1. Agar E normalangan fazo va ixtiyoriy $T \in L(E)$ to‘la uzlucksiz operator bo‘lsa, $\dim E < +\infty$ ekanligini isbot qiling.

2. $T = (t_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$ matritsa $\sum_{i,j=1}^{\infty} t_{ij}^2 < +\infty$ shartni

qanoatlantirsa, $T : l_2 \rightarrow l_2$ operatorning to‘la uzlucksizligini ko‘rsating.

3. Agar $\{T_n\}$ to‘la uzlucksiz operatorlar ketma-ketligi T operatorga kuchli yaqinlashsa, ya’ni

$$T_n x \rightarrow Tx, \forall x \in E$$

bo‘lsa, u holda T operatorning to‘la uzlucksiz bo‘lishi shart emas. Misol keltiring.

4. $f : E \rightarrow R$ chiziqli funksional to‘la uzlucksiz operator bo‘ladimi?

5. Quyidagi integral tenglamalar yechilsin:

a) $\phi(x) = x = \int_0^x xt\phi(t) dt$

(Ko‘rsatma: differensial tenglamaga keltiring);

b) $\phi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \cos t} \phi(t) dt ;$

c) $\phi(x) - 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \phi(t) dt = 2x - \pi ;$

d) $\phi(x) - \lambda \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \phi(t) dt = \sin x ;$

e) $\phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t) \phi(t) dt = \cos \pi x ;$

bu yerda $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, & 0 \leq x \leq t \\ (t+1)x & t < x \leq 1 \end{cases}$.

XI BOB. BANAX ALGEBRALARI

11.1- §. Banax algebralaringin ta'rifi

C kompleks sonlar maydoni ustida X vektor fazo berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar X vektor fazoda yana bir amal - elementlarni ko'paytirish amali kiritilgan bo'lib, u quyidagi aksiomalarini qanoatlantirsa, X fazo kompleks algebra deyiladi:

- 1) $(xy)z = x(yz)$,
- 2) $x(y+z) = xy + xz$,
- 3) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

bu yerda $x, y, z \in X$, $\alpha \in C$.

Ushbu bobda faqat kompleks algebralardan ko'rilgani sababli kompleks algebralarni, qisqacha, *algebra* deymiz.

Agar ixtiyoriy $x, y \in X$ uchun $xy = yx$ tenglik bajarilsa, X kommutativ algebra deyiladi.

Agar X algebraning shunday e elementi mavjud bo'lsaki, $ex = xe = x$ tenglik ixtiyoriy $x \in X$ uchun o'rinali bo'lsa, e element *birlik* element, yoki qisqacha birlik, X esa *birli algebra* deyiladi. Ravshanki, algebrada birlik yagonadir, chunki e' ham birlik bo'lsa, u holda $e' = ee' = e$.

Agar X algebraning biror $A \subset X$ qismi to'plami X dagi amallarga nisbatan algebra hosil qilsa, u holda A *qism algebra* deyiladi.

Ta'rif. X birli algebrada norma kiritilib, bu normada X Banax fazosi bo'lsa va ushbu

- 4) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad x, y \in X$
- 5) $\|e\| = 1$

munosabatlar bajarilsa, X *Banax algebrasi* deyiladi.

Ba'zan Banax algebrasining ta'rifida birlik element mavjud ekanligi hamda 5) aksiomaning bajarilishi talab qilinmaydi. Bu holda algebrani kengaytirib birlik elementli algebra hosil qilish mumkin.

Darhaqiqat, X algebra 1) -4) shartlarni qanoatlantirsin va birlikka ega bo'lmasin. X_1 sifatida $(x, \alpha)(x \in X, \alpha \in C)$ juftliklar to'plamini olamiz va X_1 da algebraik amallar va normani quyidagicha kiritamiz:

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta), \quad \gamma(x, a) = (\gamma x, \gamma a),$$

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta), \quad \|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$$

Ravshanki, X_1 algebra va $e = (0, 1)$ element undagi birlik elementdir. Normaning 5) xossasi o'z-o'zidan ravshan 4) xossa esa ushbu munosabatlardan ko'rinish turibdi:

$$\begin{aligned} \|(x, a)(y, \beta)\| &= \|(xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)\| = \|xy + \alpha y + \beta x\| + |\alpha \beta| \leq \\ &\leq \|xy\| + \|\alpha y\| + \|\beta x\| + \|\alpha \beta\| \leq \|x\|\|y\| + |\alpha|\|y\| + |\beta|\|x\| + |\alpha||\beta| = (\|x\| + |\alpha|) \\ &\quad (\|y\| + |\beta|) = \|(x, a)\| \|(y, \beta)\|. \end{aligned}$$

Nihoyat X_1 algebraning to‘laligi X ning va C ning to‘laligidan kelib chiqadi. Demak, X_1 - Banax algebrası. Ravshanki, X algebrani X_1 algebraning $(x, 0)$ ko‘rinishdagi elementlaridan iborat qismi sifatida qarash mumkin.

X, Y algebraclar, $F: X \rightarrow Y$ chiziqli aks ettirish bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in X$ uchun $F(xy) = F(x)F(y)$ munosabat bajarilsa, F gomomorfizm deyiladi. O‘zaro bir qiymatli gomomorfizm izomorfizm deyiladi.

Agar F izomorfizm ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|F(x)\| = \|x\|$ tenglikni qanoatlantirsa, u izometrik izomorfizm deyiladi.

Banax algebrasiniag 4) aksiomasidan ko‘paytirish amalining uzlusizligi kelib chiqadi, ya’ni $x_n \rightarrow x$ va $y_n \rightarrow y$ bo‘lsa, u holda $x_n y_n \rightarrow xy$.

Darhaqiqat,

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n - x)y_n + x(y_n - y)\| \leq \\ &\leq \|y_n\| \|x_n - x\| + \|x\| \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

chunki $\|y_n\|$ chegaralangan ketma-ketlik. Xususan, ko‘paytirish amali o‘ngdan va chapdan uzlusiz, ya’ni $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ uchun

$$xy_n \rightarrow xy, \quad x_n y \rightarrow xy.$$

1-teorema. X kompleks Banax fazosi va shu bilan birga birli algebra bo‘lib, undagi ko‘paytirish amali o‘ngdan va chapdan uzlusiz bo‘lsin. U holda X dagi normaga ekvivalent bo‘lgan shunday norma mavjudki, bu normada X Banax algebrasidir.

Iloboti. X ning har bir x elementiga ushbu $M_x(z) = xz (z \in X)$ tenglik yordamida M_x operatorni mos qo‘yamiz. \bar{X} to‘plam X fazoda shu ko‘rinishdagi operatorlar to‘plami bo‘lsin.

X dagi ko‘paytirish amali o‘ngdan uzlusiz bo‘lgani uchun $\bar{X} \subset L(X)$ ($L(X)$ fazo X dagi chegaralangan operatorlarning Banax fazosi, 7.1-§). Ravshanki, $x \rightarrow M_x$ moslik chiziqli va ta’rifdagi 1) xossaga asosan $M_{xy} = M_x M_y$. Agar $x \neq y$ bo‘lsa, u holda $M_x e = xe = x \neq y = ye = M_y e$, ya’ni $M_x \neq M_y$. Demak, $x \rightarrow M_x$ moslik X ni \bar{X} ga aks ettiruvchi izomorfizmdir.

\bar{X} qism fazo $L(X)$ da yopiqligini va demak, to‘la ekanligini ko‘rsatamiz. $\{T_n\} \subset \bar{X}$ ña $T_n - T \in L(X)$ bo‘lsin deb faraz qilaylik, bu yerda $T_n y = x_n y, x_n \in X, n = 1, 2, \dots$ Bundan

$$T_n y = x_n y = (x_n e) y = T_n(e) y, \quad y \in X.$$

X dagi ko‘paytirish amalining chapdan uzlusizligidan foydalansak, yuqoridagi tenglikdan $n \rightarrow \infty$ da

$$Ty = T(e)y$$

tenglik hosil bo‘ladi. Endi $x = T(e)$ belgilash kiritamiz.

U holda $Ty = xy$, ya’ni $T \in \bar{X}$. Shunday qilib, X - Banax fazosidir. Ushbu

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \|e\|$$

tengsizlikka asosan $M_x \rightarrow x$ teskari moslik uzlusizdir. 7.4-§ dagi teskari

operator haqidagi teoremaga asosan $x \rightarrow M_x$ moslik ham uzlusiz. Demak, shunday $S > 0$ son mavjudki, $\|M_x\| \leq C\|x\|$ ya'ni

$$\frac{1}{\|e\|} \|x\| \leq \|M_x\| \leq C\|x\|. \quad (1)$$

Agar X da normani $\|x\|_1 = \|M_x\|$ tenglik bilan aniqlasak, (1) ga asosan bu norma X dagi asl normaga ekvivalent. Bu normada esa X Banax algebrasidir, chunki operator normasining xossalariiga asosan

$$\begin{aligned} \|xy\|_1 &= \|M_{xy}\| = \|M_x M_y\| \leq \|M_x\| \|M_y\| = \|x\|_1 \|y\|_1 \\ \|e\|_1 &= \|M_e\| = \|I\| = 1 \end{aligned} \quad .*$$

Misollar. 1. C kompleks sonlar maydoni Banax algebrasiga eng sodda misoldir, bunda

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy).$$

2. C^n fazoda algebraik amallarni koordinatalar bo'yicha, normani esa

$$\|x\| = \max_{j \leq i \leq n} |x_i| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ko'rinishda olsak, ravshanki, C Banax algebrasidir.

Bunda birlik $e = (1, 1, \dots, 1)$.

3. K kompakt Xausdorf topologik fazosida aniqlangan uzlusiz funksiyalar to'plami $C(K)$ da algebraik amallarni odatdagidek kiritib, normani esa ushbu

$$\|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|, \quad x \in C(K)$$

ko'rinishda olamiz. $C(K)$ Banax algebrasi ekanligini ko'rsatish oson. Bu algebrada birlik element aynan birga teng funksiyadir.

4. l_1 algebra. Bu algebraning elementlari absolyut jamlanuvchi ikki tomonga cheksiz $x = (..., x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklar bo'lib, norma quyidagichadir:

$$\|x\| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k| \quad (2)$$

Elementlarning yig'indisi va songa ko'paytirish amallari har bir koordinata bo'yicha aniqlanadi, x va y elementlarning $z = (x \times y)$ ko'paytmasining koordinatalari esa quyidagicha aniqlanadi:

$$z_n = (x \times y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k \quad (3)$$

Agar l_1 algebraning har bir x elementiga ushbu

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4)$$

trigonometrik qatorni mos qo'ysak, u holda (3) tenglik bilan aniqlangan z_n ketma-ketlik $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalarning ko'paytmasiga mos keladi. Absolyut yaqinlashuvchi (4) Fure qatoriga yoyiluvchi funksiyalar algebrasini W bilan belgilab, bu algebrada normani (2) formula yordamida kiritamiz. Bunda l_1 va W Banax algebralari ekanligi osonlikcha tekshiriladi. Masalan, (4) aksiomani

tekshiramiz:

$$\begin{aligned}\|x \times y\| &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{n-k} y_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n-k}| |y_k| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_{n-k}| \right) |y_k| = \|x\| \|y\|.\end{aligned}$$

Kiritilgan W va l_1 Banax algebralari o‘zaro izometrik izomorf algebralardir. W algebrada birlik element bu aynan birga teng $e(t)=1$ funksiyadir. Demak, l_1 algebrada $e = |e_k|_{k=-\infty}^{+\infty}$

$$e_k = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

birlik element.

Keltirilgan 1-4 misollardagi algebralalar kommutativ algebralarga misollardir. Endi kommutativ bo‘lmagan Banax algebrasiga misol keltiramiz.

5. Biror E Banax fazosida chegaralangan operatorlarning $L(E)$ fazosini olamiz. 7.1 §-da ko‘rsatilganidek, bu fazoda ko‘paytirish amalini kiritish mumkin. Norma ushbu

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad A \in L(E)$$

tenglik bilan aniqlangan edi. Bu norma 4), 5) aksiomalarni qanoatlantirishi va $L(E)$ ning bu normaga nisbatan to‘la ekanligi 7.3-§ da ko‘rsatilgan.

11.2- §. Spektr va rezolventa

X Banax algebrasi bo‘lsin. Agar biror $x \in X$ uchun ushbu

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x^{-1} element mavjud bo‘lsa, x^{-1} element x ga *teskari element, x esa teskarilanuvchi* deyiladi.

Agar λ kompleks son uchun $\lambda e - x$ element teskari elementga ega bo‘lsa, λ son x element uchun *regulyar nuqta* deyiladi. Regulyar bo‘lmagan nuqtalar to‘plami x elementning *spektri* deyiladi va $\sigma(x)$ bilan belgilanadi. Demak, $\sigma(x)$ shunday λ sonlar to‘plamiki, $\lambda e - x$ element teskari elementga ega emas. Regulyar nuqtalarda ushbu

$$R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

tenglik bilan aniqlangan $R_\lambda : C \setminus \sigma(x) \rightarrow X$ aks ettirish x elementning *rezolventasi* deyiladi. x elementning *spektral radiusi* deb quyidagi songa aytiladi:

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

Misollar. 1. $X=S$ Banax algebrasida noldan farqli har bir element teskarisiga ega. Demak, $\alpha \in C$ uchun $\sigma(\alpha) = \{\alpha\}$.

2. $X=C(K)$ Banax algebrasida (11.1-§, 3-misol) $x \in X$ teskari elementga ega bo‘lishi uchun $x(t)$ funksiya hamma yerda noldan farqli bo‘lishi zarur va

kifoyadir. Demak, $\sigma(x)$ to‘plam $x(t)$ funksiyaning qiymatlari to‘plami bilan ustma-ust tushadi, rezolventa va spektral radius esa quyidagicha:

$$R_\lambda x = \frac{1}{\lambda - x(t)},$$

$$r(x) = \|x\| = \max_{t \in K} |x(t)|$$

3. $X=L(E)$ Banax algebrasida (11.1-§. 5-misol) spektr, rezolventa va boshqa tushunchalar operatorlar uchun IX bobda kiritilgan mos tushunchalar bilan ustma-ust tushadi. Aniqrog‘i, Banax algebrałar uchun kiritilgan tushunchalar operatorlar algebrałaridagi mos tushunchalarni abstrakt holda umumlashtirilishidir. Bu izoh quyida keltiriladigan teoremlarga ham taalluqli.

1-teorema. *Banax algebrasidagi x elementning normasi birdan kichik bo‘lsa, u holda $e-x$ element teskari elementga ega va*

$$(e-x)^{-1} = e + x + \dots + x^n + \dots$$

Isboti. Ushbu $s_n = e + x + \dots + x^n$ ko‘rinishdagi elementlarni olamiz. Ravshanki,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_{n+k}\| &= \|x^{n+1} + \dots + x^{n+k}\| \leq \sum_{i=k}^k \|x\|^{n+i} = \\ &= \frac{\|x\|^{n+1} - \|x\|^{n+k+1}}{1 - \|x\|} \leq \frac{\|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Demak, $\{s_n\}$ ketma-ketlik X da fundamentaldir. X to‘la bo‘lgan sababli bu ketma-ketlik biror $s \in X$ elemenga yaqinlashadi, va

$$s(e-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(e-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e - x^{n+1}) = e.$$

Shunga o‘xhash $(e-x)s = e$.

Natija. Agar $x \rightarrow 0$ bo‘lsa $(e-x)^{-1} \rightarrow e$.

Darhaqiqat,

$$\|(e-x)^{-1} - e\| = \|s - e\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} \rightarrow 0$$

2-teorema. *X Banax algebrasidagi biror x_0 element uchun x_0^{-1} mavjud bo‘lsa, u holda $\|\Delta x\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy Δx element uchun $x_1 = x_0 + \Delta x$ elementning teskarisi mavjud va $x_1^{-1} = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1}$.*

Isboti. $\|x_0^{-1} \Delta x\| \leq \|x_0^{-1}\| \|\Delta x\| < \|x_0^{-1}\| \|x_0^{-1}\|^{-1} = 1$ tengsizlikdan 1-teoremaga asosan $(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1}$ ning mavjudligi kelib chiqadi. So‘ngra $(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} x_1 = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} (x_0 + \Delta x) = (e + x_0^{-1} \Delta x)(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} = e$ va $x_1 (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} = (x_0 + \Delta x)(e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} = (x_0 + \Delta x)[x_0 (e + x_0^{-1} \Delta x)]^{-1} = (x_0 + \Delta x)(x_0 + \Delta x)^{-1} = e$.

Demak, $x_0^{-1} = (e + x_0^{-1} \Delta x)^{-1} x_0^{-1} .*$

1-natija. Banax algebrasining teskarilanuvchi elementlari to‘plami ochiqdir.

2-natija. $x(\lambda)$ rezolventa $C \setminus \sigma(x)$ to‘plamda λ ga nisbatan uzluksizdir.

Darhaqiqat, 2-teoremada $\Delta x = \Delta \lambda \cdot e$, $x_0 = \lambda_0 e - x$ deb olsak,

$$x(\lambda_0 + \Delta \lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta \lambda e)^{-1} = (e + x(\lambda_0) \Delta \lambda)^{-1} x(\lambda_0)$$

Yuqoridagi 1-teoremaning natijasiga asosan, $\Delta \lambda \rightarrow 0$ bo‘lsa,

$$(e + x(\lambda_0) \Delta \lambda)^{-1} \rightarrow e,$$

ya’ni

$$\lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} x(\lambda_0 + \Delta \lambda) = x(\lambda_0)$$

3-teorema. Agar $\lambda, \mu, \lambda_0 \in C \setminus \sigma(x)$ bo‘lsa, u holda

a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$,

b) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$

c) $x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -x^2(\lambda_0).$

Isboti. a) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} = [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = R_\mu x \cdot R_\lambda x.$

b) $R_\lambda x = (\mu e - x)(\mu e - x)^{-1} R_\lambda x = (\mu e - x) R_\mu x R_\lambda x = (\mu e - x) R_\lambda x R_\mu x (a)$ ga asosan.

Shunga o‘xshash

$$R_\mu x = (\lambda e - z) R_\lambda x R_\mu x.$$

Demak,

$$R_\lambda x = \mu R_\lambda x R_\mu x - x R_\lambda x R_\mu x,$$

$$R_\mu x = \lambda R_\lambda x R_\mu x - x R_\lambda x R_\mu x,$$

bundan

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x R_\mu x,$$

b) xossaga asosan

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} x(\lambda) x(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0).*$$

Quyidagi teoremada spektrning asosiy xossalari keltirilgan.

4-teorema. 1. X Banax algebrasidagi ixtiyoriy uzluksiz chiziqliffunksional uchun $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ funksiya $C \setminus \sigma(x)$ sohada analitikdir va $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |F(\lambda)| = 0$.

2. X dagi ixtiyoriy x elementning spektri bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plamadir va $r(x) \leq \|x\|$.

Isboti. 1. Ixtiyoriy $f \in X'$ uchun $F(\lambda) = f(R_\lambda(x))$ deb olsak, u holda 3-teoremaga asosan har bir λ_0 regulyar nuqtada

$$\begin{aligned} F'(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = \\ &= f\left(\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = -f(x^2(\lambda_0)) \end{aligned}$$

mavjud va, demak, $f(\lambda)$ shu λ_0 nuqtada analitik.

So‘ngra

$$|F(\lambda)| = |f(x(\lambda))| \leq \|f\| \|x(\lambda)\| = \|f\| \|(\lambda e - x)^{-1}\| = \frac{\|f\|}{|\lambda|} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0$$

chunki

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left\| \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} \right\| = \|e\| = 1.$$

2. $\sigma(x) = \emptyset$ deb faraz qilaylik. U holda ixtiyoriy $f \in X'$ uchun $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ funksiya $C \setminus \sigma(x) = C$ da analitik va

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0.$$

Liuvill teoremasiga asosan $F(\lambda) \equiv 0$. Bu yerda $f \in X'$ ixtiyoriy bo‘lgani sababli Xan-Banax teoremasiga asosan $x(\lambda) \equiv \theta$. Bu esa $(\lambda e - x)x(\lambda) = e$ tenglikka zid.

Demak, $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Endi $\sigma(x)$ ning kompakt ekanligini isbotlaymiz. Agar $|\lambda| > \|x\|$ bo‘lsa, u holda 1-teoremaga asosan $\lambda e - x = \lambda \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)$ element uchun teskari element mavjud, chunki $\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| = \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$. Bundan $\lambda \in \sigma(x)$, ya’ni

$$\sigma(x) \subset \left\{ \lambda \in C : |\lambda| \leq \|x\| \right\}$$

xususan, $r(x) \leq \|x\|$. Spektrning yopiqligi 2-teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, λ_0 son x uchun regulyar nuqta bo‘lsa, u holda, ixtiyoriy $\Delta\lambda$ ($|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1}$) uchun $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ham regulyardir, chunki

$$(\lambda_0 + \Delta\lambda)e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e$$

va

$$\|\Delta\lambda e\| = |\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1} = \left\| (\lambda_0 e - x)^{-1} \right\|^{-1}$$

Regulyar nuqtalar to‘plami ochiq bo‘lgani sababli $\sigma(x)$ yopiq (va chegaralangan), demak, kompaktdir.*

1-natija. (Gelfand-Mazur teoremasi). Banax algebrasida noldan farqli har bir elementning teskarisi mavjud bo‘lsa, bu algebra C maydonga izometrik izomorfdir.

Istboti. Ixtiyoriy x elementni olaylik. 4-teoremaga asosan $\sigma(x) \neq \emptyset$, ya’ni shunday $\lambda \in C$ mavjudki, $\lambda e - x$ element uchun teskari element mavjud emas. Shartga asosan $\lambda e - x = \theta$, ya’ni $x = \lambda e$. Agar x elementga xuddi shu λ sonni mos qo‘ysak, $x \rightarrow \lambda$ moslik izomorfizmdir. So‘ngra $\|e\|=1$ bo‘lgani uchun $\|x\| = \|\lambda e\| = |\lambda|$, ya’ni $x \rightarrow \lambda$ izometrik izomorfizmdir.

2-natija. Ixtiyoriy $T \in L(E)$ operatorning spektri bo‘sh emas.

5-teorema (spektral radius haqidagi teorema). *Banax algebrasida ixtiyoriy x elementning spektral radiusi uchun quyidagi formula o‘rinli:*

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \quad (1)$$

Istboti. X fazodagi ixtiyoriy f uzluksiz chiziqli funksional uchun $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ funksiya 4-teoremaga asosan $C \setminus \sigma(x)$ sohada, xususan $\{\lambda : |\lambda| > r(x)\}$ sohada analitik. Demak, 1-teoremaga asosan $|\lambda| > \|x\|$ bo‘lganda

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

bundan

$$F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Analitik funksiyalarning yagonalik xossasiga asosan, bu yoyilma ixtiyoriy $|\lambda| > r(x)$ uchun ham o‘rinli, demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right) \right| = 0$, ya’ni $\left\{ \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\}$ ketma-ketlik nolga sust yaqinlashadi, demak, u norma bo‘yicha chegaralangan (8.3- §), ya’ni

$$\left\| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leq C(\lambda),$$

bu yerda $C(\lambda)$ -musbat son. Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda|^{n+1} C(\lambda)} = |\lambda| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda| C(\lambda)} = |\lambda|.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $\lambda(\|x\| > r(x))$ uchun o‘rinli bo‘lgani sababli

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x). \quad (2)$$

Agar $\lambda \in \sigma(x)$ bo‘lsa, u olda $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Darhaqiqat, agar $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$ mavjud bo‘lsa edi, u holda

$$(\lambda^n e - x^n)^{-1} = (\lambda^n e - x^n)^{-1} (\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} x + \dots + x^{n-1})$$

bo‘lar edi, bu esa $\lambda \in \sigma(x)$ munosabatga zid. Ixtiyoriy $\mu \in \sigma(x)$ uchun 4-teoremaga asosan $|\mu| \leq \|x\|$. Endi $\mu = \lambda^n$ deb olsak, $\lambda \in \sigma(x)$ munosabatdan $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, ya’ni $|\lambda|^n \leq \|x^n\|$ kelib chiqadi, demak, $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|}$ Bundan n ixtiyoriy

bo‘lgani sababli

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Bu tengsizlikni (2) tengsizlik bilan solishtirsak, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ limitning mavjudligi va (1) munosabat kelib chiqadi.*

11.3-§. Ideallar, faktor-algebraclar va kompleks gomomorfizmlar

Ushbu paragrafda X kommutativ Banax algebrasidir.

Ta’rif. I to‘plam X ning vektor qism-fazosi bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in I$ uchun $xy \in I$ bo‘lsa, I to‘plam ideal deyiladi.

Ravshanki, faqat θ elementdan yoki butun X dan iborat to‘plamlar ideallardir. Bunday ideallar *trivial ideallar* deyiladi. Biz trivial bo‘lmagan ideallarni o‘rganamiz.

Agar I_0 ideal X ning o‘zidan boshqa idealning xos qismi bo‘lmasa, I_0 maksimal ideal deyiladi.

- a) *idealning hech bir elementi teskari elementga ega emas;*
- b) *idealning yopilmasi ham trivial bo‘lmagan idealdir.*

Izboti. a) agar biror $a \in I$ uchun a^{-1} mavjud bo‘lsa, u holda $e = aa^{-1} \in I$, demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x = xe \in I$, ya’ni $X = I$. Bu esa I ning trivial emasligiga zid;

b) I ideal bo‘lsa, ma’lumki, uning yopilmasi \bar{I} qism fazodir. Endi ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in \bar{I}$ elementlarni olamiz. Agar $\{y_n\} \subset I$ va $y_n \rightarrow y$ bo‘lsa, u holda $x_n \in I$ va X da ko‘paytirish amali uzluksiz bo‘lgani sababli $xy_n \rightarrow xy$. Demak, $xy \in \bar{I}$, ya’ni \bar{I} ideal. Endi faqat $I \neq X$ ekanligini ko‘rsatish qoldi. 11.2-§ dagi 2-teoremaning 1-natijasiga asosan teskari elementga ega bo‘lgan elementlardan iborat G to‘plam ochiq va a) ga asosan $I \cap G = \emptyset$. Demak, $\bar{I} \cap G = \emptyset$, ya’ni $\bar{I} \neq X$

2-teorema. a) *Banax algebrasining har qanday ideali biror maksimal idealning qismidir; b) ixtiyoriy maksimal ideal yopiqdir.*

Izboti. a) I_0 biror ideal bo‘lsin. Uni o‘z ichiga oluvchi ideallar to‘plamini Q bilan belgilayliz. Q sistema “ \subset ” munosabat yordamida qisman tartiblangan.

Agar $P \subset Q$ biror chiziqli tartiblangan qismi bo‘lsa, ravshanki, $M = \bigcup_{I \in P} I$ idealdir. Ixtiyoriy $I \in P$ uchun $e \in I$

bo‘lgani sababli $e \in M$, ya’ni $M \neq X$. Demak, har qanday chiziqli tartiblangan sistema yuqori chegaraga ega.

Sorn lemmasiga asosan (6. 1-§) Q da I_1 maksimal element mavjud. Demak, I_1 maksimal ideal va $I_0 \subset I_1$;

b) agar I maksimal ideal bo‘lsa, u holda 1-teoremadagi b) ga asosan \bar{I} ham ideal va $I \subset \bar{I} \neq X$. Demak, $I = \bar{I}$.

Natija. Banax algebrasida teskari elementga ega bo‘lmagan har bir element

biror maksimal idealda joylashgan. Xususan, agar X maydon bo‘lmasa, maksimal ideallar to‘plami bo‘sh emas.

Darhaqiqat, agar $x_0 \in X$ uchun x_0^{-1} mavjud bo‘lmasa, u holda $I = x_0 X = \{x_0 x, x \in X\}$ to‘plam idealdir.

$x_0 \neq \theta$ bo‘lgani uchun $I \neq \{\theta\}$; so‘ngra $e \in I$ bo‘lgani sababli $I \neq X$.

2-teoremaga asosan shunday I_1 , maksimal ideal mavjudki,

$$I_1 \supseteq I \in x_0 .*$$

X Banax algebrasida biror I idealni olib, X/I faktor-fazoni ko‘ramiz (1. 5-§). Bu faktor-fazoda ko‘paytmani quyidagicha kiritamiz. \hat{x} va \hat{y} sinflardan x va y vakillar tanlab $\hat{x} \cdot \hat{y}$ ko‘paytma deb xy elementni o‘z ichiga oluvchi sinfni aytamiz. Bu ko‘paytma x va y vakillarga bog‘liq emas. Darhaqiqat, agar x_1, y_1 , boshqa vakillar, ya’ni $x - x_1 \in I, y - y_1 \in I$ bo‘lsa, u holda $xy - x_1 y_1 = xy - x_1 y + x_1 y - x_1 y_1 = x_1(y - y_1) + (x - x_1)y \in I$, chunki I -ideal. Ravshanki, kiritilgan amallarga nisbatan X/I kommutativ algebra. Bu algebra X ning I ga nisbatan *faktor-algebrasi* deyiladi.

3-teorema. X Banax algebrasida I yopiq ideal bo‘lsa, u holda X/I faktor-algebra ham Banax algebrasidir.

Istboti. Faktor-algebrada normani quyidagicha kiritamiz.

$$\|\hat{x}\| = \inf_{x \in \hat{x}} \|x\| = \inf_{y \in I} \|x_0 + y\| \quad (1)$$

bu yerda $x_0 \in \hat{x}$.

Dastavval (1) formula normani aniqlashini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy $\hat{x} \in X/I$ uchun $\|\hat{x}\| \geq 0$. Agar $\|\hat{x}\| = 0$ bo‘lsa, u holda $\inf_{y \in I} \|x_0 + y\| = 0$. Demak, shunday $\{y_n\} \subset I$ ketma-ketlik mavjudki, $\|x_0 + y_n\| \rightarrow 0$, ya’ni $-y_n \rightarrow x_0$. I yopiq bo‘lgani sababli $x_0 \in I$, ya’ni $\hat{x} = \hat{\theta}$. Shunday qilib, $\|\hat{x}\| \geq 0$ va $\|\hat{x}\| = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{\theta}$. Agar $\lambda \in C, \lambda \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\|\lambda \hat{x}\| = \inf_{y \in I} \|\lambda x_0 + y\| = |\lambda| \inf_{y \in I} \|x_0 + \frac{y}{\lambda}\| = |\lambda| \|\hat{x}\|$$

agar $\lambda = 0$ bo‘lsa, $\|\lambda \hat{x}\| = \|\lambda\| \|\hat{x}\|$ ekanligi o‘z-o‘zidan ravshan.

Ixtiyoriy $\hat{x}, \hat{y} \in X/I$ uchun

$$\begin{aligned} \|\hat{x} + \hat{y}\| &= \inf_{z \in I} \|x_0 + y_0 + z\| = \inf_{u, v \in I} \|x_0 + u + y_0 + v\| \leq \\ &\leq \inf_{u \in I} \|x_0 + u\| + \inf_{v \in I} \|y_0 + v\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\| \end{aligned}$$

va

$$\left\| \hat{x} \cdot \hat{y} \right\| = \inf_{z \in I} \|x_0 y_0 + z\| \leq \inf_{u, v \in I} \|(x_0 + u)(y_0 + v)\| \leq$$

$$\leq \inf_{u \in I} \|x_0 + u\| \cdot \inf_{v \in I} \|y_0 + v\| = \left\| \hat{x} \right\| \left\| \hat{y} \right\|.$$

Endi $\left\| \hat{e} \right\| = 1$ ekanligini ko'rsatamiz, $\hat{e} = e + I$ bo'lgani sababli

$\hat{e}^2 = e^2 + I = \hat{e}$. Demak, $\left\| \hat{e} \right\| = \left\| \hat{e}^2 \right\| \leq \left\| \hat{e} \right\|^2$, ya'ni $\left\| \hat{e} \right\| < 1$. Agar $\left\| \hat{e} \right\| < 1$ bo'lganda edi,

u holda ixtiyoriy n natural son uchun $\left\| \hat{e} \right\| = \left\| \hat{e}^n \right\| \leq \left\| \hat{e} \right\|^n \rightarrow 0$ bo'lgani sababli $\left\| \hat{e} \right\| = 0$

tenglik hosil bo'lar edi, bu esa $e \in \bar{I}$ munosabatga zid. Demak, $\left\| \hat{e} \right\| = 1$.

Nihoyat, X/I to'la ekanligini isbotlaymiz. $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \dots$ ketma-ketlik shu fazoda fundamental bo'lsin. Ixtiyoriy k natural son uchun shunday n_k topiladiki,

$$\left\| x_{n_{k+m}} - x_{n_k} \right\| \leq \frac{1}{2^k}$$

tengsizlik ixtiyoriy t natural son uchun bajariladi. Xususan, $\left\| \hat{x}_{n_2} - \hat{x}_{n_1} \right\| \leq \frac{1}{2}$ demak,

shunday x_{n_1}, x_{n_2} vakillar mavjudki, $\left\| x_{n_2} - x_{n_1} \right\| \leq 1$. Shunga o'xshash shunday $x_{n_3}, x_{n_4}, \dots, x_{n_k}, \dots$ vakillar topiladiki,

$$\left\| x_{n_k} - x_{n_{k-1}} \right\| \leq \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Demak, $\left\{ x_{n_k} \right\}$ ketma-ketlik X fazoda fundamental. Chunki ixtiyoriy k, t uchun

$$\begin{aligned} \left\| x_{n_{k+m}} - x_{n_k} \right\| &\leq \left\| x_{n_{k+m}} - x_{n_{k+m-1}} \right\| + \dots + \left\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{k+m-2}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{k-2}} \end{aligned}$$

X to'la bo'lgani sababli

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$$

mavjud va

$$\left\| \hat{x}_{n_k} - \hat{x}_0 \right\| = \inf_{y \in I} \|x_{n_k} - x_0 + y\| \leq \left\| x_{n_k} - x_0 \right\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

ya'ni $\hat{x}_{n_k} \rightarrow \hat{x}_0$. Olingan $\{\hat{x}_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lgani sababli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday p natural son topiladiki, har qanday $n_k \geq n$ uchun $\left\| x_n - x_{n_k} \right\| \leq \varepsilon$.

Demak, $\left\| x_n - x_0 \right\| \leq \left\| x - x_{n_k} \right\| + \left\| x_{n_k} - x_0 \right\| \leq \varepsilon + \left\| x_{n_k} - x_0 \right\|$. Bundan $x_{n_k} \rightarrow x_0$ bo'lgani uchun $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}_0$. Demak, X/I to'la.*

X Banax algebrasini kompleks sonlarning C Banax algebrasiga aks ettiruvchi noldan farqli gomomorfizm *kompleks gomomorfizm* deyiladi.

4-teorema. Agar $\varphi: \tilde{O} \rightarrow \tilde{N}$ kompleks gomomorfizm bo'lsa, u holda

- a) $\varphi(e)=1$ va x^{-1} mavjud bo'lsa, $\varphi(x) \neq 0$.
- b) agar $\|x\| \leq 1$ bo'lsa, u holda $|\varphi(x)| \leq 1$, xususan, ixtiyoriy kompleks gomomorfizm uzlucksizdir va; $\|\varphi\|=1$.

Ishboti. a) Biror $y \in X$ uchun $\varphi(y) \neq 0$ bo'lgani sababli

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$

demak, $\varphi(e)=1$. Agar $x \in X$ uchun x^{-1} mavjud bo'lsa, u holda

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1,$$

ya'ni $\varphi(x) \neq 0$;

b) ixtiyoriy $x \in X (\|x\| \leq 1)$ elementni olamiz. Agar $|\lambda| > 1$ bo'lsa, u holda $\left|\frac{x}{\lambda}\right| < 1$. 11.2-§, 1-teoremaga asosan $\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}$ element mavjud, a) ga asosan $\phi\left(e - \frac{x}{\lambda}\right) \neq 0$, ya'ni $1 - \frac{1}{\lambda}\varphi(x) \neq 0$ va $\varphi(x) \neq \lambda$ olingan $\lambda (|\lambda| > 1)$ ixtiyoriy bo'lgani sababli $|\varphi(x)| \leq 1$. Demak, $\|\varphi\| \leq 1$; $\varphi(e)=1$ bo'lgani uchun $\|\varphi\|=1$ xususan, φ chegaralangan, ya'ni uzlucksiz.

Izoh. 4-teoremaning isbotidan ravshanki, bu teoremda X kommutativ bo'lishi shart emas.

Quyidagi teoremda kompleks gomomorfizmlar va maksimal ideallar orasidagi bog'lanish ko'rsatiladi.

5-teorema. X kommutativ Banax algebrasi, Δ undagi barcha kompleks gomomorfizmlar to'plami bo'lsin.

a) har bir M maksimal ideal biror $h \in \Delta$ kompleks gomomorfizmning yadrosidir;

b) har bir kompleks gomomorfizmning yadrosoi maksimal ideadir;

c) $x \in X$ elementning teskarisi mavjud bo'lishi uchun, ixtiyoriy $h \in \Delta$ da $h(x) \neq 0$. bo'lishi zarur va kifoya;

d) $x \in X$ elementning teskarisi mavjud bo'lishi uchun x hech qanday idealga tegishli emasligi zarur va kifoya;

e) $\lambda \in \sigma(x)$ bo'lishi uchun $\lambda = h(x)$ tenglik biror $h \in \Delta$ uchun bajarilishi zarur va kifoya.

Ishboti. a) M biror maksimal ideal bo'lsin. M yopiq bo'lgani sababli X/M Banax algebrasidir (3-teorema). Biror $x \in X \setminus M$ elementni olamiz. Ravshanki, ushbu

$$I = \{ax + y : a \in X, y \in M\}$$

to'plam ideadir va $I \supset M$. Demak, $I=X$. Xususan, biror $a \in X$ va $y \in M$ uchun

$ax + y = e$, ya'ni $ax - e = y \in M$. Faktor algebraning ta'rifiga asosan $\hat{a} \hat{x} = \hat{e}$, ya'ni $\hat{a} = \hat{x}^{-1}$. Olingan $x \in M$ ixtiyoriy bo'lgani sababli X/M faktor algebrada har bir noldan farqli elementning teskarisi mavjud. Gelfand-Mazur teoremasiga asosan $X/M=C$ (aniqrog'i izometrik izomorf).

Endi X dan olingan x elementga x sinf bilan aniqlanuvchi $h(x)$ kompleks sonni mos qo'ysak, ravshanki, $h: X \rightarrow C$ kompleks gomomorfizm bo'ladi va $h^{-1}(0) = \theta = M$;

b) agar $h \in \Delta$ bo'lsa, ravshanki, $h^{-1}(0)$ ideal va uning o'lchami birga teng, demak, $h^{-1}(0)$ maksimal idealdir;

c) agar x^{-1} mavjud bo'lsa, u holda 4-teoremaning a) qismiga asosan ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $h(x) \neq 0$. Aksincha x_0^{-1} mavjud bo'lmasa, $I = x_0 X = \{x_0 x : x \in X\}$ to'plam idealdir va $e \in I$, demak, $I \neq X$ 2-teoremaga asosan, I biror M maksimal idealning qismi. Demak, $x_0 \in M$. a) ga asosan shunday $h \in \Delta$ mavjudki, $M = h^{-1}(0)$, ya'ni $h(x_0) = 0$;

d) Ravshanki, teskarisi mavjud bo'lgan har qanday element hech bir idealga tegishli bo'la olmaydi. Aksincha, agar x_0^{-1} mavjud bo'lmasa, x_0 biron idealning elementi ekanligi v) da ko'rsatildi;

e) agar biror $h \in \Delta$ uchun $\lambda = h(x)$ bo'lsa, u holda $h(\lambda e - x) = 0$, demak, v) ga asosan $(\lambda e - x)^{-1}$ mavjud emas, ya'ni $\lambda \in \sigma(x)$. Aksincha, $\lambda \in \sigma(x)$ bo'lsa, $(\lambda e - x)^{-1}$ mavjud emas. Demak, yana c) ga asosan biror $h \in \Delta$ uchun $h(\lambda e - x) = 0$, ya'ni $h(x) = \lambda$.

Misollar. 1. Kompakt Xausdorf K topologik fazosida uzluksiz funksiyalarning $C(K)$ Banax algebrasini ko'ramiz (11. 1-§, 3-misol) va shu algebradagi maksimal ideallarni o'rganamiz. K fazoning biron F qismini olsak, ravshanki, F to'plamning har bir nuqtasida nolga teng funksiyalardan iborat

$$M_F = \{x(t) \in C(K) : x(t) = 0 \forall t \in F\} \subset C(K)$$

to'plam idealdir.

Biz quyidagi tasdiqni isbotlaymiz: $C(K)$ algebrada biror to'plam maksimal ideal bo'lishi uchun, u biron tayinlangan $\tau_0 \in K$ nuqtada nolga aylanuvchi barcha funksiyalardan iborat bo'lishi zarur va kifoya.

a) $M = \{x(t) \in C(K) : x(\tau_0) = 0\}$ to'plam ideal ekanligi ravshan. Uning maksimal ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $y(t) \in C(K)$ uchun

$$z(t) = y(t) - y(\tau_0)$$

funksiya M_{τ_0} ning elementidir, chunki $z(\tau_0) = 0$. Demak, ixtiyoriy $y(t) \in C(K)$ ushbu

$$y(t) = z(t) + \alpha, \quad z(t) \in M_{\tau_0}, \quad \alpha \in C$$

ko'inishda yoyilar ekan, ya'ni $\text{codim } M_{\tau_0} = 1$. Demak, M_{τ_0} -maksimal ideal;

b) aksincha, $M \subset C(K)$ biror maksimal ideal bo'lsin. Shu idealga tegishli bo'lgan barcha funksiyalar biror tayinlangan nuqtada nolga teng ekanligini ko'rsatamiz. Agar bunday emas deb faraz qilsak, u holda ixtiyoriy $\tau \in K$ uchun shunday $x_\tau(t) \in M$ mavjudki, $x_\tau(t) \neq 0$. Bu funksiya uzluksiz bo'lgani sababli τ nuqtaning shunday $(U_\tau)_\tau$ -atrofi mavjudki, $x_\tau(t) \neq 0$ munosabat ixtiyoriy $t \in U_\tau$ uchun o'rinni. K fazoning $\{U_\tau\}_\tau \in K$ ochiq qoplamasidan, K kompakt bo'lgani uchun chekli $U_{\tau_1}, \dots, U_{\tau_n}$ qism qoplama ajratish mumkin. M ideal ekanligini hisobga olsak,

$$x_0(t) = x_{\tau_1}(t)\bar{x}_{\tau_1}(t) + \dots + x_{\tau_n}(t)\bar{x}_{\tau_n}(t) = \sum_{k=1}^n |x_{\tau_k}(t)|^2 \in M$$

Ravshanki, ixtiyoriy $t \in K$ uchun $x_0(t) > 0$, demak, $\frac{1}{x_0(t)}$ mavjud va uzluksiz, ya'ni $\frac{1}{x_0(t)} \in C(K)$. Bu esa 1-teoremaning a) qismiga zid. Demak, shunday $\tau_0 \in K$ mavjudki, $M \subset M_{\tau_0}$. Shartga ko'ra M maksimal bo'lgani sababli $M = M_{\tau_0}$.

2. Endi W (11. 1-§, 4-misol) algebradagi maksimal ideallarning umumiy ko'rinishini topamiz. Buning uchun 5-teoremaga asosan W algebradagi kompleks gomomorfizmlarning umumiy ko'rinishini aniqlash kifoya. Ravshanki, $t_0 \in [0, 2\pi]$ son $\varphi(x(t)) = x(t_0)$ formula orqali kompleks gomomorfizmni aniqlaydi. Aksincha ixtiyoriy kompleks gomomorfizm shu ko'rinishga ega ekanligini ko'rsatamiz.

Har bir $\phi: W \rightarrow C$ gomomorfizm o'zining e^{it} funksiyadagi qiymati bilan to'la aniqlanadi (chunki $\phi \in \Delta$ uchun $\phi(e^{kit}) = [\varphi(e^{it})]^k$ va φ chiziqli va uzluksiz bo'lgani sababli, u butun W ga yagona ravishda davom ettiriladi). $\varphi(e^{it}) = \xi$ bo'lsa, $\varphi(e^{it}) = \phi[(e^{it})^{-1}] = \xi^{-1}$. Demak,

4-teoremaning b) qismiga asosan

$$\begin{aligned} |\xi| &= |\varphi(e^{it})| \leq \|e^{it}\| = 1, \\ |\xi^{-1}| &= |\varphi(e^{-it})| \leq \|e^{-it}\| = 1. \end{aligned}$$

Bundan $|\xi| = 1$, ya'ni $\xi = e^{it_0}$, $0 \leq t_0 \leq 2\pi$.

Shunday qilib, $\varphi(e^{it}) = e^{it_0}$ ($0 \leq t_0 \leq 2\pi$), bundan $\phi\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{ikt}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e^{ikt_0}$.

Shunday qilib, har bir kompleks gomomorfizm va, demak, 5-teoremaga asosan har bir maksimal ideal $[0, 2\pi]$ oralig'idagi biror t_0 son bilan aniqlanadi. Bunda M maksimal ideal shu t_0 nuqtada nolga aylanuvchi barcha $x(t) \in W$ funksiyalardan iborat.

Endi biz olingan natijani quyidagi teoremani isbotlashga tatbiq qilamiz:

Viner teoremasi. $x(t)$ funksiya absolyut yaqinlashuvchi bo‘lgan $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$ Fure qatoriga yoyilib, hech bir nuqtada nolga teng bo‘lmashin. U holda $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ funksiya ham absolyut yaqinlashuvchi bo‘lgan Fure qatoriga yoyiladi.

Izboti. Teoremaning shartiga ko‘ra $x(t) \in W$ Ixtiyoriy $t \in [0, 2\pi]$ uchun $x(t) \neq 0$ bo‘lgani sababli har bir $\phi \in \Delta$ uchun $\phi(x) \neq 0$. 5-teoremaning c) iborasiga asosan $y = x^{-1} \in W$ mavjud. Demak,

$$\frac{1}{x(t)} = y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y e^{ikt} \in W$$

11.4-§. Kommutativ Banax algebralari ni ifodalash

Ushbu paragrafda ba’zi kommutativ Banax algebralari biror kompakt Xausdorf topologik fazosidagi uzluksiz funksiyalar algebrasi sifatida ifodalanishi mumkin ekanligini ko‘rsatamiz.

X kommutativ Banax algebrasi, Δ undagi kompleks gomomorfizmlar to‘plami bo‘lsin. X ning har bir x elementi Δ to‘plamda ushbu

$$\hat{x}(h) = h(x) \quad (h \in \Delta) \quad (1)$$

formula yordamida $\hat{x}: \Delta \rightarrow C$ funksiyani aniqlaydi.

Barcha \hat{x} ($x \in X$) funksiyalar to‘plamini \hat{X} bilan belgilaymiz.

11.3§, dagi 4-teoremaning b) iborasiga asosan ixtiyoriy $\phi \in \Delta$ uchun $\varphi \in X'$ va $\|\phi\| \leq 1$ (X' fazo X ga qo‘shma fazo). Agar X' dagi birlik sharni S bilan belgilasak, ravshanki, $\Delta \subset S$.

Endi Δ to‘plamda topologiya kiritamiz. Buning uchun X' fazodagi *-sust topologiyani, ya’ni $\sigma(X', X)$ topologiyani (8.4- §) Δ -to‘plamda ko‘ramiz. Bu topologiyada $f_0 \in X'$ elementning atroflari sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega edi:

$$U(x_1, \dots, x_m, \delta; f_0) = \left\{ f \in X' : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \delta, k = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (2)$$

1-teorema. Δ to‘plam $\sigma(X', X)$ topologiyada kompaktdir va (1) formula bilan aniqlangan har bir $\hat{x}(h)$ funksiya Δ to‘plamda shu topologiyaga nisbatan uzluksizdir.

Izboti. 8.4-§ da isbotlaganimizdek, agar X Banax fazosi separabel bo‘lsa, X' dagi S birlik shar $\sigma(X', X)$ topologiyada kompaktdir. Bu ibora ixtiyoriy X Banax fazosi uchun ham o‘rinli (bu yerda biz buning isbotiga to‘xtalmaymiz). Demak, Δ to‘plam kompakt S to‘plamning qismi to‘plamidir. Shuning uchun Δ to‘plam

$\sigma(X', X)$ topologiyada yopiq ekanligini ko'rsatish kifoya. $f_0 \in \bar{\Delta}$ deb faraz qilaylik. Demak, f_0 ning (2) ko'rinishdagi ixtiyoriy atrofida $h \in \Delta$ kompleks gomomorfizm mavjud. f_0 ning atrofini $U(x, y, xy, \delta; f_0)$ ko'rinishda olsak ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = xy, m = 3$), u holda

$$\begin{aligned} |h(x) - f_0(x)| &< \delta, \\ |h(y) - f_0(y)| &< \delta, \\ |h(xy) - f_0(xy)| &< \delta. \end{aligned}$$

Demak, $h(xy) = h(x)h(y)$ munosabatni nazarda tutgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |f_0(xy) - f_0(x)f_0(y)| &= |[f_0(xy) - h(xy)]| + \\ &+ |h(xy) - f_0(x)f_0(y)| \leq |f_0(xy) - h(xy)| + \\ &+ |h(y) - f_0(y)||h(x)| + |h(x) - f_0(x)||f_0(y)| < \\ &< \delta + \delta \|h\| \|x\| + \delta \|f_0\| \|y\| = \delta (1 + \|x\| + \|f_0\| \|y\|) \end{aligned}$$

Bundan δ ixtiyoriy kichik bo'lgani sababli

$$f_0(xy) = f_0(x)f_0(y).$$

Endi f_0 ning $U(e, \delta; f_0)$ atrofini olsak,

$$|h(e) - f_0(e)| < \delta, \text{ ya'ni } |1 - f_0(e)| < \delta.$$

Bundan $f_0(e) = 1$, ya'ni $f_0 \in \Delta$. Shunday qilib, Δ yopiq va, demak, kompakt.

Endi $\hat{x}(h)$ funksiya Δ da uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. $h_0 \in \Delta$ elementning $U(x, \varepsilon; h_0)$ atrofini olsak, bu atrofda

$$|\hat{x}(h) - \hat{x}(h_0)| = |h(x) - h_0(x)| < \varepsilon,$$

ya'ni \hat{x} funksiya h_0 nuqtada uzluksiz.

$x \in X$ elementga \hat{x} funksiyani mos qo'ysak, natijada $X \rightarrow \hat{X} \subset C(\Delta)$ aks ettirish hosil bo'ladi. Bu yerda $C(\Delta)$ Banax algebrasi kompakt Xausdorf topologik fazosidagi uzluksiz funksiyalar algebrasidir (11.1-§, 3- misol).

2-teorema. $x \rightarrow \hat{x}$ moslik gomomorfizmdir va

$$\|\hat{x}\| \leq \|x\|. \quad (3)$$

Istboti. Ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ uchun

$$(x_1 + x_2)(h) = h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2) = \hat{x}_1(h) + \hat{x}_2(h),$$

ya'ni $(x_1 + x_2) = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$. Shunga o'xshash $\hat{x}_1 \hat{x}_2 = \hat{x}_1 \hat{x}_2$,

$$\left(\hat{\alpha} \hat{x} \right) = \hat{\alpha} \hat{x} \text{ Demak, } x \rightarrow \hat{x} \text{ gomomorfizm.}$$

Endi (3) tengsizlikni isbotlaymiz. 11.3-§ dagi 5-teoremaning d) iborasiga ko‘ra $\lambda \in \sigma(x)$ bo‘lishi uchun $\lambda = h(x) = \hat{x}(h)$ tenglik biror $h \in \Delta$ uchun bajarilishi zarur va kifoya. Demak, $\sigma(x)$ to‘plam x funksiyaning qiymatlar to‘plami bilan mos tushadi. Bundan va 11.2-§ dagi 4-teoremadan

$$\|x\| = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) \leq \|x\|.*$$

Ta’rif. Banax algebrasining barcha maksimal ideallari kesishmasi $R = \bigcap M$ radikal deyiladi.

Ixtiyoriy M maksimal ideal uchun $\theta \in M$ bo‘lgani sababli $\theta \in R$. Agar radikal faqat θ elementdangina iborat bo‘lsa, algebra *yarimsodda algebra* deyiladi.

Ta’rif. Agar kommutativ X Banax algebrasida ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|x^2\| = \|x\|^2$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, X *regulyar algebra* deyiladi.

11.2-§ dagi 1, 3-misollardagi C va $C(K)$ algebraalar yarimsodda va regulyar algebra misol bo‘ladi. Bu 11.3-§, 1-misoldagi iboradan bevosita kelib chiqadi.

3-teorema. a) $x \rightarrow \hat{x}$ moslik monomorfizm bo‘lishi uchun X yarimsodda algebra bo‘lishi zarur va kifoya;
 b) agar X regulyar algebra bo‘lsa, u holda X o‘zining $C(\Delta)$ algebradagi aksi, ya’ni \hat{X} bilan izometrik izomorf, xususan, X yarimsodda algebraadir.

Iboti. a) X yarimsodda algebra bo‘lsin. Agar $x \in X$ uchun $\hat{x} \equiv 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $h(x) = \hat{x}(h) = 0$, ya’ni x har bir maksimal idealga tegishli, va demak, $x \in R$. X yarimsodda algebra bo‘lgani uchun $x = \theta$.

Aksincha, $x \rightarrow \hat{x}$ moslik monomorfizm bo‘lsin. Agar $x \in R$ elementni olsak, u har bir maksimal idealga tegishli. Demak, ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $h(x) = \hat{x}(h) = 0$, ya’ni $\hat{x} \equiv 0$. Bundan $x \rightarrow \hat{x}$ monomorfizm bo‘lgani uchun $x = \theta$, ya’ni $R = \{\theta\}$;

b) X regulyar algebra bo‘lsin. $\|x^2\| = \|x\|^2$ tenglikdan bevosita $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ tenglik kelib chiqadi, ya’ni $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|$. Spektral radius haqidagi teoremagaga asosan (11.2-§, 5-teorema)

$$r(x) = \|x\|. \quad (4)$$

Agar $x \in R$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $h(x) = 0$, demak, $\sigma(x) = \{0\}$, ya’ni $r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = 0$. (4) tenglikka asosan $\|x\| = r(x) = 0$ va demak, $x = \theta$, ya’ni X -yarimsodda algebra. a) ga asosan X o‘zining $C(\Delta)$ dagi \hat{X} aksi bilan izomorf. So‘ng 11.3-§ dagi 5-teoremagaga asosan

$$\|\hat{x}\| = \max_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)| = \max_{h \in \Delta} |h(x)| = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(x) = \|x\|.$$

Demak, $x \rightarrow \hat{x}$ izometrik izomorfizm.

11.3-§ da ko'rsatilganidek, kompleks gomomorfizmlar va maksimal ideallar orasida o'zaro bir qiyamatli moslik mavjud. Demak, Δ to'plam sifatida kompleks gomomorfizmlar to'plamini emas, balki maksimal ideallar to'plamini olish ham mumkin. Shuni nazarda tutib, yuqoridagi teoremlarni quyidagicha ifodalash ham mumkin.

4-teorema. *X Banax algebrasi, Δ undagi maksimal ideallar to'plami bo'lsin.*

a) Δ to'plam kompakt Xausdorf topologik fazosidir;

b) $x \rightarrow \hat{x}$ moslik X algebrani $C(\Delta)$ algebraning biror X qismiga aks ettiruvchi gomomorfizmdir; bu gomomorfizmning yadrosi X algebraning radikaliga teng. Xususan, bu moslik monomorfizm bo'lishi uchun X yarimsodda algebra bo'lishi zarur va kifoya,

c) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Agar X regulyar algebra bo'lsa,

$x \rightarrow \hat{x}$ moslik X bilan uning $C(\Delta)$ dagi \hat{X} aksi orasidagi izometrik izomorfizmdir.

Paragrafni yarimsodda algebralarning ba'zi xossalari keltirish bilan yakunlaymiz.

5-teorema. *X, Y kommutativ Banax algebralari, $\varphi: X \rightarrow Y$ ixtiyoriy gomomorfizm bo'lsin. Agar Y yarimsodda algebra bo'lsa, ψ uzluksizdir.*

Isboti. X, Y Banax fazolari bo'lgani sababli 7.2-§ dagi yopiq grafik haqidagi teoremaga asosan Ψ ning grafigi yopiqligini ko'rsatish kifoya. $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik uchun $x_n \rightarrow x \in X$ va $\Psi(x_n) \rightarrow y \in Y$ bo'lsa, $y \in \Psi(x)$ ekanligini isbotlash kerak. Δ_x, Δ_y mos ravishda X va Y dagi kompleks gomomorfizmlar to'plamlari bo'lsin. Ixtiyoriy $h \in \Delta_y$ ni olib, $\varphi = h_0 \Psi$ murakkab aks ettirishni ko'ramiz. Ravshanki, $\psi \in \Delta_x$

11.3-§ dagi 4-teoremaga asosan φ va h uzluksiz. Demak,

$$h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\Psi(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n) = \psi(x) = h(\psi(x))$$

ya'ni $h(y - \Psi(x)) = 0$. Bu yerda $h \in \Delta_y$ ixtiyoriy bo'lgani uchun $y - \Psi(x) \in R$. Endi Y yarimsodda ekanligini nazarga olsak, $y = \Psi(x)$.

Natija. Yarimsodda kommutativ Banax algebralari orasidagi har bir izomorfizm gomomorfizmdir.

11.5-§. Involutiv algebralalar

X biror kompleks algebra bo'lsin (kommutativ bo'lishi shart emas).

Ta'rif. X ning har bir x elementiga biror $x^* \in X$ elementni mos qo'yuvchi

aks ettirish quyidagi to'rt shartni qanoatlantirsa, u *involutsiya* deyiladi:

$$1) (x+y)^* = x^* + y^*,$$

$$2) (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*,$$

$$3) (xy)^* = y^* x^*,$$

$$4) x^{**} = x^*,$$

bu yerda $x, y \in X, \lambda \in C$.

Involutsiya bilan ta'minlangan algebra *involutiv algebra* deyiladi.

Masalan, $C(K)$ algebrada $f \rightarrow \bar{f}$ aks ettirish involutsiyadir (\bar{f} funksiya f ga kompleks qo'shma funksiya). Involutsiyaga eng muhim misollardan biri bu Gilbert fazosidagi chegaralangan operatordan unga qo'shma operatororga o'tish amalidir.

Agar $x \in X$ element uchun $x^* = x$ tenglik o'rinni bo'lsa, x o'z-o'ziga qo'shma yoki *Ermit elementi* deyiladi.

1-teorema. *X involutiv Banax algebrasi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x \in X$ uchun:*

a) $x + x^*$, $i(x - x^*)$, xx^* elementlar Ermit elementlaridir;

b) x yagona ravishda $x = u + iv$ ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda u, v Ermit elementlari;

c) e-Ermit elementi;

d) x^{-1} element mavjud bo'lishi uchun $(x^*)^{-1}$ mavjud bo'lishi zarur va kifoya; bu holda $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$;

e) $\lambda \in \sigma(x)$ bo'lishi uchun $\lambda \in \sigma(x^*)$ bo'lishi zarur va kifoya.

Isboti. a) $(x + x^*) = x^* + x^{**} = x^* + x = x + x^*$ Shunga o'xshash $[i(x - x^*)] = i(x - x^*)$ va $(xx^*) = xx^*$;

b) ravshanki, u, v sifatida mos ravishda $\frac{x + x^*}{2}$ va $\frac{x + x^*}{2i}$ elementlarni olish mumkin.

Endi x boshqa usul bilan yoyilgan bo'lsin $x = u' + iv'$. Agar $\omega = v' - v$ elementni olsak, $i\omega = (x - u') - (x - u) = u - u'$ bo'lgani uchun $(i\omega)^* = (u - u') = i\omega$. Ikkinci tomondan, $(i\omega)^* = \overline{i\omega}^* = -i\omega$, demak, $i\omega = -i\omega$. Bu tenglikdan $\omega = \theta$, $v = v'$, $u = u'$ kelib chiqadi;

c) $e^* = ee^*$ bo'lgani uchun a) ga asosan $(e^*)^* = e^*$ ya'ni $e = e^*$;

d) x^{-1} mavjud bo'lsa, u holda $x^* (x^{-1})^* = (x^{-1} x)^* = e^* = e$, ya'ni $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$. Aksincha, $(x^*)^{-1}$ mavjud bo'lsa, u holda $x[(x^*)^{-1}]^* = [(x^*)^{-1} x]^* = e^* = e$, ya'ni x^{-1} mavjud;

e) $\lambda \in \sigma(x)$ uchun $(\lambda e - x)^{-1}$ mavjud emas. Demak, c) ga asosan $[(\lambda e - x)^*]^{-1} = (\bar{\lambda} e - x^*)^{-1}$ mavjud emas, ya'ni $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$. Shunga o'xshash

$\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$ bo'lsa, bu holda $\lambda \in \sigma(x)$.

2-teorema. Agar X yarimsodda Banax algebrasida bo'lsa, u holda X dagi har qanday involyutsiya uzluksizdir.

Isboti. X dagi ixtiyoriy h ompleks gomomorfizmni olamiz. Ravshanki, $\varphi(x) = \overline{h(x^*)}$ ham X da kompleks gomomorfizmdir. Darhaqiqat,

$$\varphi(x+y) = \overline{h(x^*+y^*)} = \overline{h(x^*)+h(y^*)} = \overline{h(x^*)} + \overline{h(y^*)} = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\lambda x) = \overline{h(\bar{\lambda}x^*)} = \overline{\bar{\lambda}h(x^*)} = \lambda\overline{h(x^*)} = \lambda\varphi(x),$$

$$\varphi(xy) = \overline{h(y^*x^*)} = \overline{h(y^*)} \cdot \overline{h(x^*)} = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(y)$$

Demak, 11.3-§ dagi 4-teoremadagi asosan ϕ uzluksiz.

Endi $x_n \rightarrow x$, $x_n^* \rightarrow y$ bo'lsin. U holda

$$\overline{h(x^*)} = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{h(x_n^*)} = \overline{h(y)}$$

ya'ni $h(x^*-y)=0$. h ixtiyoriy bo'lgani sababli $x^*-y \in R$

X yarimsodda algebra bo'lgani uchun $x^*=y$. Demak, $x \rightarrow x^*$ aks ettirishning grafigi yopiq. Yopiq grafik haqidagi teoremaga asosan (bu teoremaning isboti qo'shma chiziqli operatorlar uchun ham o'zgarishsiz o'tadi) bu aks ettirish uzluksizdir.

Ta'rif. X involyutiv Banax algebrasida ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \tag{1}$$

tenglik o'rini bo'lsa, X algebra B^* -algebra (yoki C^* -algebra) deyiladi.

Ushbu $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|$ tengsizlikdan ravshanki, $\|x\| \leq \|x^*\|$. Shu bilan birga $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$, demak,

$$\|x^*\| = \|x\| \tag{2}$$

va

$$\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|. \tag{3}$$

Aksincha, agar (2) va (3) tengliklar o'rini bo'lsa, ravshanki,

$$\|xx^*\| = \|x\|^2.$$

Quyidagi teorema B^* -algebraalar nazariyasining eng muhim teoremlaridan biri.

3-teorema. (Gelfand-Naymark teoremasi). X ixtiyoriy kommutativ B^* -algebra, Δ undagi maksimal ideallardan iborat kompakt Xausdorf topologik fazosi bo'lsin. Bu holda, $x \rightarrow \hat{x}$ moslik (11. 4- §, 4-teorema) X ni butun $C(\Delta)$ ga aks ettiruvchi izometrik izomorfizmdir va ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$\left(\hat{x}^* \right) = \overline{\hat{x}}. \tag{4}$$

Xususan x Ermit elementi bo'lshii uchun $\hat{x} \in C(\Delta)$ haqiqiy funksiya bo'lishi zarur va kifoya.

Isboti. Agar $u \in X$ Ermit elementi bo'lsa, ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $h(u)$ haqiqiy son ekanligini ko'rsatamiz. t haqiqiy son uchun ushbu $z = u + ite$ ko'rinishdagi elementlarni olamiz.

Agar $h(u) = \alpha + i\beta$ (α, β – haqiqiy sonlar) bo'lsa, u holda

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t), \quad zz^* = u^2 + t^2 e.$$

Demak,

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq \|h\|^2 \|z\|^2 = \|z\|^2 = \|zz^*\| \leq \|u\|^2 + t^2 e,$$

ya'ni ixtiyoriy t haqiqiy son uchun

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2.$$

Bu yerda $\|u\|^2$ chekli, t ixtiyoriy bo'lgani sababli $\beta = 0$, ya'ni $h(u)$ – haqiqiy son. Shunday qilib, agar u Ermit elementi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $h \in \Delta$ uchun $\hat{u}(h) = h(u)$ - haqiqiy son, ya'ni \hat{u} haqiqiy funksiya. Endi $x \in X$ ixtiyoriy bo'lsa, u holda $x = u + iv$ va $u = u^*$, $v = v^*$. Demak,

$$\left(\hat{x}^* \right) = (u + iv)^* = (u^* - iv^*) = \hat{u} - i\hat{v} = (\hat{u} + i\hat{v}) = \bar{\hat{x}},$$

shu bilan (4) isbotlandi.

Biror $x \in X$ elementni olsak, $y = xx^*$ element Ermit elementidir, demak, $\|y^2\| = \|y\|^2$. Induksiya bo'yicha $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ tenglik isbotlanadi. Spektral radius haqidagi teoremagaga asosan

$$\|\hat{y}\| = \max_{h \in \Delta} |\hat{y}(h)| = \max_{h \in \Delta} |h(y)| = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| = r(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|y^m\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|y^{2^n}\|} = \|y\|,$$

ya'ni $\|\hat{y}\| = \|y\|$. Endi $y = xx^*$ tenglikdan va (4) munosabatdan $\hat{y} = \left| \hat{x} \right|^2$ tenglikni hosil qilamiz. Demak,

$$\|\hat{x}\|^2 = \|\hat{y}\| = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

ya'ni $\|\hat{x}\| = \|x\|$. Shunday qilib, $x \rightarrow \hat{x}$ moslik X ni \hat{X} ga aks ettiruvchi izometrik izomorfizmdir. X fazo to'la bo'lgani sababli \hat{X} algebra $C(\Delta)$ algebrada yopiq $\hat{X} = C(\Delta)$ tenglikni isbotlash uchun \hat{X} to'plam $C(\Delta)$ da zinch ekanligini isbotlash kifoya. Buning uchun quyidagi isbotsiz keltirilgan teoremadan foydalananamiz.

Stoun-Veyershtrass teoremasi. C(K) algebraning (11.1-§, 3-misol.) A qism algebrasiga quyidagi shartlarni qanoatlantirsin::

a) birlik funksiya ($e(t) = 1$) A ga tegishli;

b) ixtiyoriy $t_1, t_2 \in K$ ($t_1 \neq t_2$) uchun shunday $x(t) \in A$ mavjudki,

$x(t_1) \neq x(t_2)$;

c) ixtiyoriy $x(t) \in A$ uchun $\overline{x(t)} \in A$.

U holda A qism algebra $C(K)$ ning hamma yerida zich.

Endi 3-teoremaning isbotini yakunlash uchun $\hat{X} \subset C(\Delta)$ qism algebra uchun a)-c) shartlar bajarilishini tekshirish kerak. a) o‘z-o‘zidan ravshan, chunki $e \in X$ va $\hat{e}(h) \in \hat{X}$;

b) ixtiyoriy $h_1, h_2 \in \Delta$ ($h_1 \neq h_2$) uchun shunday $x \in X$ mavjudki $h_1(x) \neq h_2(x)$, ya’ni $x(h_1) \neq x(h_2)$;

c) ixtiyoriy $\hat{x} \in \hat{X}$ uchun (4) ga asosan $\bar{\hat{x}} = \hat{x}^*$, ya’ni $\bar{\hat{x}} \in \hat{X}$.

Stoun-Veyershtrass teoremasining hamma shartlari bajariladi. Demak,

$$\hat{X} = C(\Delta).*$$

Mashq uchun masalalar

1. $K = \{z : |z| \leq 1\} \subset C$ birlik doirada uzluksiz va K ning ichki nuqtalarida analitik bo‘lgan funksiyalardan iborat to‘plamni A bilan belgilaymiz. A da algebraik amallarni odatdagidek, normani esa quyidagicha kiritamiz:

$$\|x\| = \max_{|z| \leq 1} |x(z)|, \quad x \in A$$

A kommutativ Banax algebrasini ekanligini isbotlang.

2. A Banax algebrasining maksimal ideallari bilan $K = \{z : |z| \leq 1\}$ birlik doira nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik borligini ko‘rsating.

3. A algebra regulyar va yarimsodda ekanligini isbotlang.

4. $[a, b]$ oraliqda n -tartibli hosilasi mavjud va uzluksiz kompleks funksiyalar fazosini $C^n[a, b]$ bilan belgilaymiz. Algebraik amallar odatdagidek, norma esa ushbu

$$\|x\| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|, \quad x \in C^n[a, b]$$

formula bilan kiritiladi. $C^n[a, b]$ Banax algebrasini ekanligini isbotlang.

5. $C^n[a, b]$ algebraning barcha maksimal ideallarini toping.

6. $C^n[a, b]$ algebrada involyutsiyani $x^*(t) = \overline{x(t)}$ deb olsak, $C^n[a, b]$ -yarimsodda B^* -algebra ekanligini isbotlang.

7. $C^n[a, b]$ Banax algebrasining barcha yopiq ideallarini toping.

8. Yarimsodda bo‘lmagan Banax algebrasiga misol keltiring.

9. H Gilbert fazosidagi chegaralangan operatorlarning $L(H)$ algebrasini olamiz. Bu algebradagi biror o‘z-o‘ziga qo‘shma T_0 operatorning barcha darajalarining chiziqli yopilmasini $B(T_0)$ bilan belgilaymiz. $B(T_0)$ yarimsodda B^* -algebra ekanligini isbotlang.

10. $L(N)$ algebra B^* - algebra ekanligini isbotlang.

11. X Banax algebrasining x elementi uchun $x^2 = x$ tenglik bajarilsa, x *idempotent* deyiladi. Agar $x, y \in X$ ($x \neq y$) idempotentlar uchun $xy = yx$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\|x - y\| > 1$ ekanligini isbotlang.

12. X Banax algebrasining x, y elementlari uchun $xy = yx$ bo‘lsa, u holda

$$r(x+y) \leq r(x) + r(y), r(xy) \leq r(x)r(y)$$

tengsizliklar o‘rinli ekanligini ko‘rsating.

13. X Banax algebrasi, x, y uning elementlari bo‘lsin.

a) x^{-1} va $(xy)^{-1}$ elementlar mavjud bo‘lsa, y^{-1} element ham mavjudligini isbotlang;

b) $(xy)^{-1}$ va $(yx)^{-1}$ mavjud bo‘lsa, x^{-1} va y^{-1} elementlar ham mavjudligini isbotlang;

c) agar $(e - xy)^{-1}$ mavjud bo‘lsa, $(e - yx)^{-1}$ element ham mavjud bo‘lishini ko‘rsating.

14. Umumiyl holda $xy = e \neq yx$ munosabat o‘rinli bo‘lishi mumkinligini misolda ko‘rsating.

15. Agar $xy = e$ bo‘lsa, yx element noldan farqli idempotent ekanligini isbotlang.

16. Agar x^{-1} mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $y \in X$ uchun $\sigma(xy) = \sigma(yx)$ tenglikni isbotlang.

17. Banax algebrasida ixtiyoriy x, y elementlar uchun $r(xy) = r(yx)$ tenglikni isbotlang $((xy)^n = x(yx)^{n-1}y)$ tenglikdan foydalaning).

XII BOB. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR. FURYE ALMASHTIRISHLARI

12.1-§. Umumlashgan funksiya tushunchasi

1. Umumlashgan funksiyalar dastlab fizikaga doir ilmiy ishlarda uchragan. Mashhur fizik P. Dirak delta-funksiya deb ataluvchi va quyidagicha ta’riflanuvchi $\delta(x - x_0)$ funksiyani kiritgan: butun to‘g‘ri chiziqda aniqlangan $\delta(x - x_0)$ funksiya x_0 dan boshqa har bir nuqtada nolga teng va x_0 nuqtada esa qiymati cheksiz bo‘lib, butun to‘g‘ri chiziq bo‘yicha integrali mavjud va birga teng, ya’ni

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ +\infty, & x = x_0 \end{cases}$$

va

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

Ravshanki, matematik analiz kursida ko‘rilgan funksiya va integral ta’riflari nuqtai nazaridan delta-funksiyaning xossalari o‘zaro ziddir.

Matematikada umumlashgan funksiyalarni birinchi marta mashhur rus matematigi S.L. Sobolev 1936 yilda kiritgan. Fransuz matematigi L. Shvarts 1950-1951 yillarda “Taqsimotlar nazariyasi” kitobida umumlashgan funksiyalarni o‘rganishga topologik vektor fazolar nazariyasini tatbiq qilib, qator muhim natijalar oldi. Hozirgi kunda umumlashgan funksiyalar nazariyasi matematikaning tez sur’atlar bilan rivojlanayotgan sohalaridan biri bo‘lib, matematikaning boshqa sohalarida va fizikada ko‘pgina muhim tatbiqlarga ega.

Ma’lumki, uzlusiz funksiya differensiallanuvchi bo‘lmasisligi mumkin. Birorta ham nuqtada hosilaga ega bo‘lmasligi uzlusiz funksiyalarni birinchi marta K. Veyershtrass tuzgan. Bunday funksiyalarga doir misol, masalan, [HO‘FN] kitobining 25-§ ida keltirilgan.

Umumlashgan funksiyalar tushunchasi funksiya tushunchasining shunday kengaytirilishi, bunda har qanday uzlusiz funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi umumlashgan funksiya bo‘ladi. Shu bilan bir qatorda har qanday umumlashgan funksiyaning o‘zi ham differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi ham umumlashgan funksiyadir. Undan tashqari, umumlashgan funksiyalar sohasida klassik matematik analizda faqat og‘ir shartlarda bajariladigan boshqa ko‘p amallarni ham bajarish mumkin (masalan, umumlashgan funksiyalarning yaqinlashuvchi qatorini hadma-had differensiallash mumkin).

2. Asosiy funksiyalar. Finit funksiya deb, $R = (-\infty, \infty)$ oraliqda aniqlangan va biror segmentdan tashqarida nolga teng bo‘lgan funksiyaga aytildi.

Asosiy funksiya deb $R = (-\infty, \infty)$ oraliqda hamma hosilalari mavjud bo‘lgan finit funksiyaga aytildi, asosiy funksiyaga misol keltiramiz.

$$\varphi(t, a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^3}{a^2 - t^2}}, & \text{agar } |t| < a \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |t| \geq a \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Ravshanki, barcha asosiy funksiyalar to‘plami funksiyalarning qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazodir.

Endi bu fazoda yaqinlashish tushunchasini kiritamiz.

Agar asosiy funksiyalardan iborat $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa, u $\varphi(t)$ asosiy funksiyaga yaqinlashuvchi deyiladi:

1) shunday $a > 0$ son mavjudki, har bir n natural son va t ($|t| > a$) uchun $\varphi_n(t) = 0$.

2) $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlik $\varphi(t)$ funksiyaga va har bir m natural son uchun $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlikning m -tartibli hosilalaridan iborat $\{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ ketma-ketlik $\varphi^{(m)}(t)$ funksiyaga $R = (-\infty, +\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi.

Asosiy funksiyalarning vektor fazosini kiritilgan yaqinlashish bilan birga ko‘rilganda E bilan belgilaymiz.

Misollar. 1. Yuqorida ko‘rilgan $\varphi(t, a)$ asosiy funksiyani olib,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \varphi(t, a) \text{ ketma-ketlikni ko‘ramiz.}$$

Ravshanki, bu ketma-ketlikning o‘zi va har qanday m natural son uchun $\{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ ketma-ketlik aynan nolga teng funksiyaga $(-\infty, +\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi. Demak, $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik E fazoda nolga yaqinlashadi.

2. Endi yana o‘sha $\varphi(t, a)$ asosiy funksiya yordamida tuzilgan $\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{t}{n}, a\right)$ funksiyalardan iborat $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlikni olsak, bu ketma-ketlik va har bir m natural son uchun uning m -tartibli hosilalaridan iborat $\{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ ketma-ketlik $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aynan nolga teng funksiyaga tekis yaqinlashadi.

Ammo $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik aynan nolga teng funksiyaga E fazoda yaqinlashmaydi, chunki bu ketma-ketlik uchun E fazoda yaqinlashishning birinchi sharti bajarilmaydi.

E fazoda aniqlangan haqiqiy chiziqli f funksionalni olamiz. Agar E fazoda φ ga yaqinlashuvchi har qanday $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik uchun $f(\varphi_n)$ sonlar ketma-ketligi $f(\varphi)$ songa yaqinlashsa, bu funksional uzlusiz chizikli funksional deyiladi.

Qulaylik maqsadida f funksionalning φ dagi ($\varphi \in E$) qiymatini $(f(t), \varphi(t))$ bilan belgilaymiz.

E dagi uzlusiz chiziqli funksionallarga misollar keltiramiz.

1) $R = (-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan va bu oraliqning har qanday chekli oralig‘ida Lebeg integrali mavjud bo‘lgan biror funksiyani qaraylik (bunday

funksiyalar lokal integrallanuvchi deyiladi). U holda har qanday $\varphi \in E$ uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad (1)$$

integral mavjud, chunki $\varphi(t)$ aslida finit funksiya bo‘lgani sababli integral chekli oraliq bo‘yicha olingan. Integral ostidagi funksiyalar tekis yaqinlashganda integral ostida limitga o‘tish mumkinligi uchun ko‘rilayotgan funksional E da uzluksizdir.

Bu bobda barcha integrallar $(-\infty, +\infty)$ oraliq bo‘yicha olingani uchun bundan buyon integrallash chegaralarini ko‘pincha yozmaymiz.

2) E fazoda ushbu

$$(\delta(t), \varphi(t)) = \varphi(0)$$

chiziqli funksionalni ko‘ramiz. Bu funksionalning uzluksizligi ravshan.

Shunisi qiziqki, bu funksionalni (1) ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydi. Haqiqatan, biror lokal integrallanuvchi $f(t)$ funksiya uchun

$$\int f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

o‘rinli bo‘lsin. Xususan, yuqorida ko‘rilgan $\varphi(t, a)$ asosiy funksiya uchun

$$\int f(t) \varphi(t, a) dt = \varphi(0, a) = e^{-1} \quad (2)$$

Ammo $a \rightarrow 0$ da chapdagi integral nolga intiladi, bu esa (2) tenglikka zid.

Bu funksionalni delta-funksiya deb atash va $\delta(t)$ orqali belgilash qabul qilingan (vaholanki, hozir ko‘rganimizdek, (1) tenglikni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emas).

Ta’rif. E fazodagi uzluksiz chiziqli funksional umumlashgan funksiya deb ataladi.

Umumlashgan funksiyalar fazosini E' bilan belgilaymiz.

(1) ko‘rinishdagi umumlashgan funksiyalar regulyar funksiyalar, qolganlari esa singulyar funksiyalar deb ataladi.

Ushbu

$$(f(t), \varphi(t)) = c \int \varphi(t) dt = \int c \varphi(t) dt$$

tenglik bilan aniqlangan umumlashgan funksiyani qiymati c ga teng o‘zgarmas umumlashgan funksiya deyiladi. Xususan,

$$(1, \varphi(t)) = \int \varphi(t) dt$$

3. Endi har bir lokal integrallanuvchi $f(t)$ funksiyaga (1) formula bilan aniqlangan umumlashgan funksiyani mos qo‘yamiz. Bu moslikda turli lokal integrallanuvchi $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalarga turli funksionallarning mos kelishini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik. U holda har qanday $\varphi \in E$ uchun

$$\int f(t) \varphi(t) dt = \int g(t) \varphi(t) dt$$

yoki

$$\int (f(t) - g(t)) \varphi(t) dt = 0.$$

So‘ng $f(t) - g(t) = h(t)$ belgilash kiritamiz va har qanday $\varphi \in E$ uchun

o‘rinli bo‘lgan

$$\int h(t) \varphi(t) dt = 0 \quad (3)$$

tenglikdan foydalaniib, $h(t)$ ning deyarli hamma nuqtalarda nol ekanligini ko‘rsatamiz.

φ finit funksiya bo‘lgani sababli shunday $[a, b]$ oraliq mavjudki, t ning $t \leq a$ va $t \geq b$ qiymatlarida $\varphi(t) = 0$. Shunga binoan

$$\int h(t) \varphi(t) dt = \int_a^b h(t) \varphi(t) dt \quad (4)$$

Ushbu

$$\int_a^t h(s) ds = H(t)$$

belgilash kiritib, (4) integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int_a^b h(t) \varphi(t) dt = H(t) \cdot \varphi(t) \Big|_a^b - \int_a^b H(t) \varphi'(t) dt \quad (5)$$

Bundan $\varphi(a) = 0$ va $\varphi(b) = 0$ ekanligini hisobga olgan holda (3) ga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b H(t) \varphi'(t) dt = 0$$

Endi $\varphi'(t)$ funksiya ham $[a, b]$ dan tashqarida nol ekanligini hisobga olsak, har bir $\varphi \in E$ uchun

$$\int H(t) \varphi'(t) dt = 0 \quad (6)$$

Agar bu munosabatdan $H(t)$ funksianing o‘zgarmas ekanligi kelib chiqishini ko‘rsatsak ibora isbotlanadi. Chunki bu holda $H(t)$ funksiya jamlanuvchi funksianing aniqmas integrali sifatida [HO‘FN] kitobining 43.6-natijasiga binoan deyarli har bir $t \in (-\infty, +\infty)$ uchun hosilaga ega va $H'(t) = h(t) = 0$.

Shunday qilib, tasdiqni isbotlash uchun quyidagi lemmanni isbotlash kifoya.

Lemma (Dyu-Bua-Reyemon lemmasi). Agar biror uzluksiz $H(t)$ funksiya va $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\varphi \in E$ uchun

$$\int_a^b H(t) \varphi'(t) dt = 0 \quad (7)$$

bo‘lsa, $H(t)$ funksiya $[a, b]$ da o‘zgarmasdir.

Isboti. $[a, b]$ funksiya o‘zgarmas bo‘lmisin. Bu holda E fazoda (7) tenglik bajarilmasligini ko‘rsatamiz.

$H(t)$ o‘zgarmas bo‘lmasani uchun shunday $t_1, t_2 \in [a, b]$ nuqtalar mavjudki, $H(t_1) \neq H(t_2)$. Aniqlik uchun, masalan, $H(t_1) < H(t_2)$ bo‘lsin. Bu sonlar orasidagi biror C sonni olamiz. $H(t)$ uzluksiz bo‘lgani uchun o‘zaro kesishmaydigan shunday (a_1, b_1) va (a_2, b_2) oraliqlar mavjudki, har qanday

$t' \in [a_1, b_1]$, $t'' \in [a_2, b_2]$ nuqtalar uchun

$$H(t') < C < H(t'').$$

Endi $\varphi'(t)$ sifatida quyidagi to‘rtta shartni qanoatlantiruvchi barcha hosilalari mavjud bo‘lgan funksiyani olamiz;

- 1) (a_1, b_1) da musbat;
- 2) (a_2, b_2) da manfiy;
- 3) (a_1, b_1) va (a_2, b_2) oraliqlardan tashqarida nol;
- 4) ushbu

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} \varphi'(t) dt + \int_{a_2}^{b_2} \varphi'(t) dt = 0$$

tenglik o‘rinli.

Bunday $\varphi'(t)$ funksiyani, masalan, yuqorida ko‘rilgan $\varphi(t, a)$ asosiy funksiya yordamida ham tuzish mumkin.

Ushbu

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s) ds$$

funksiyani olsak, ravshanki, $\varphi \in E$ va $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Endi

$$\int_a^b (H(t) - C)\varphi'(t) dt = \int_{a_1}^{b_1} (H(t) - C)\varphi'(t) dt + \int_{a_2}^{b_2} (H(t) - C)\varphi'(t) dt < 0$$

chunki ikkala had ham manfiy. Bundan 4) shartga binoan

$$\int_a^b H(t)\varphi'(t) dt = \int_a^b (H(t) - C)\varphi'(t) dt + C \int_a^b \varphi'(t) dt = \int_a^b (H(t) - C)\varphi'(t) dt < 0.$$

Demak, topilgan $\varphi \in E$ uchun (7) tenglik o‘rinli emas. Lemma isbotlandi.

Shunday qilib, har bir lokal integrallanuvchi $f(t)$ funksiyaga (1) formula bilan aniqlangan umumlashgan funksiya mos qo‘yildi. Bu moslikda, yuqorida ko‘rsatilganidek, turli lokal integrallanuvchi funksiyalarga turli umumlashgan funksiyalar mos keladi. Demak, barcha lokal integrallanuvchi funksiyalar to‘plamini barcha umumlashgan funksiyalar to‘plamining qismi deb qarash mumkin. Shu sababli umumlashgan funksiyalar uchun ham $f(t)$ belgini ishlatish qulay. Ammo bunda $f(t)$ umumlashgan funksiyaning ayrim nuqtalardagi qiymati ma’noga ega emas. Undan tashqari, ba’zan $(f, \varphi) = (f(t), \varphi(t))$ belgining o‘rniga

$$\int f(t)\varphi(t) dt$$

belgini ham ishlatamiz, vaholanki, klassik analiz nuqtai nazaridan bu integral ma’noga ega emas.

12.2-§. Umumlashgan funksiyalar ustida amallar

1. $f(t)$ umumlashgan funksiyaning α songa ko‘paytmasi deb ushbu
 $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$

uzluksiz chiziqli funksionalga aytildi. Regulyar f funksional uchun bu amal lokal integrallanuvchi $f(t)$ funksiyani α songa ko‘paytirishdan iborat.

2. Ikki $f(t)$ va $g(t)$ umumlashgan funksiyaning yig‘indisi deb, ushbu
 $(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$

tenglik bilan aniqlangan $f + g$ funksionalga aytildi. Agar f va g lar regulyar bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi ham regulyar bo‘lib, lokal integrallanuvchi $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalarining yig‘indisiga teng.

3. f umumlashgan funksiya va umumlashgan funksiyalarining $\{f_n\}$ ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Agar har bir $\varphi \in E$ uchun (f_n, φ) sonlar ketma-ketligi $n \rightarrow \infty$ da (f, φ) songa intilsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik f ga yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar f_n funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo‘lib, $\{f_n\}$ ketma-ketlik f uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda bu $\{f_n\}$ ketma-ketlik umumlashgan funksiyalar ketma-ketligi sifatida ham f ga yaqinlashadi. Haqiqatan, $\{f_n\}$ ketma-ketlik sifatida f ga tekis yaqinlashgani sababli har qanday $\varphi \in E$ uchun ushbu

$$\int f_n(t) \varphi(t) dt$$

integral ostida limitga o‘tish mumkin.

Kiritilgan yaqinlashish ma’lum yaqinlashishlarga nisbatan kengroq ma’noda yaqinlashish ekanligini misolda ko‘ramiz.

Ushbu $f_n(t) = \sin nt$ funksiyalar ketma-ketligi biror funksiyaga na tekis yaqinlashadi va na har bir nuqtada yaqinlashadi. Ammo bu ketma-ketlik umumlashgan funksiyalar sifatida esa nolga yaqinlashadi. Haqiqatdan, ushbu

$$(\sin nt, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin nt \varphi(t) dt$$

son φ funksiyaning Furye koeffitsenti sifatida $n \rightarrow \infty$ da nolga yaqinlashishi matematik analiz kursidan ma’lum.

4. $f(t)$ umumlashgan funksiya hosilasining ta’rifini berishdan oldin $f(t)$ regulyar, uning hosilasi mavjud va $f'(t)$ uzluksiz bo‘lgan holni ko‘raylik. Bu holda ushbu

$$(f', \varphi) = \int f'(t) \varphi(t) dt$$

funksionalni olishimiz mumkin. Bu integralni bo‘laklab integrallab, $\varphi(t)$ funksiyaning biror $[a, b]$ oraliqning tashqarisida nol ekanligini hisobga olsak,

$$(f', \varphi) = f(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = (f, -\varphi') \quad (1)$$

Bu tenglikni umumlashgan funksiya hosilasining ta’rifi sifatida qabul qilamiz. Shunday qilib, ushbu

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi') \quad (2)$$

tenglik bilan aniqlangan g umumlashgan funksiya f ning hosilasi deb ataladi va

f' yoki $\frac{df}{dt}$ kabi belgilanadi.

1-teorema. Har qanday umumlashgan funksiyaning hosilasi mavjud.

Ishboti. Har bir $\varphi \in E$ uchun $\varphi' \in E$ bo‘lgani sababli g funksional butun E da aniqlangan. Uning chiziqli ekanligi ravshan. Uzluksizligini ko‘rsatamiz.

E da nolga yaqinlashuvchi biror $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik olamiz. E dagi yaqinlashish ta’rifiga muvofiq, bu holda $\{-\varphi'_n\}$ ketma-ketlik ham nolga intiladi. Bundan va f funksionalning uzluksizligidan

$$(g, \varphi_n) = (f, -\varphi'_n) \rightarrow 0$$

ya’ni g ham uzluksiz.*

Natija. Har qanday umumlashgan funksiyaning hamma tartibli hosilalari mavjud.

Ushbu

$$(f_1 + f_2)' = f'_1 + f'_2, \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

qoidalar o‘rinli ekanligi ravshan.

Agar $f(t)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, soni chekli nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda oddiy ma’nodagi hosilasi mavjud va $f'(t)$ integrallanuvchi bo‘lsa, $f(t)$ funksiyaning umumlashgan ma’nodagi hosilasi oddiy ma’nodagi $f'(t)$ funksiyaga mos keluvchi regulyar funksiyaga tengligi bevosita ko‘rsatiladi.

5. Ixtiyoriy ikkita umumlashgan funksiyaning ko‘paytmasi tushunchasi umumiy holda kiritilmagan.

Ammo ixtiyoriy umumlashgan funksiyaning barcha hosilalari mavjud $h(t)$ funksiyaga ko‘paytmasini ta’riflash mumkin. Barcha hosilalari mavjud $h(t)$ funksiyaning $f(t)$ umumlashgan funksiyaga ko‘paytmasi deb, ushbu

$$(h \cdot f, \varphi) = (f, h\varphi)$$

tenglik bilan aniqlangan $h \cdot f$ funksionalga aytildi. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi funksional ma’noga ega, chunki har qanday $\varphi(t)$ finit funksiyaning $h(t)$ funksiyaga ko‘paytmasi yana finit funksiyadir. Undan tashqari, E fazoda φ_n ketma-ketlik nolga intilsa, shu fazoda $h\varphi_n$ ham nolga intiladi. Bundan ta’rifdagи $f(t)$ funksionalning uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, barcha tartibli hosilalari mavjud bo‘lgan $h(t)$ funksiyaning $f(t)$ umumlashgan funksiyaga ko‘paytmasi aniqlandi. Agar $f(t)$ regulyar bo‘lsa, uning $h(t)$ ga ko‘paytmasi bu funksiyalarning odatdagi ko‘paytmasiga teng. Ushbu

$$(h \cdot f)' = hf' + h'f$$

qoida o‘rinli ekanligi oson tekshiriladi.

Misollar. 1. Ushbu Xevisayd funksiyasi

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{agar } t \geq 0, \\ 0, & \text{agar } t < 0 \end{cases}$$

ning hosilasini hisoblaymiz. Hosilaning ta’rifiga ko‘ra

$$(\theta(t), \varphi(t)) = (\theta(t), -\varphi'(t)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(0)$$

12.1-§ da berilgan delta-funksiyaning ta’rifiga muvofiq
 $\theta'(t) = \delta(t)$.

Endi $\theta''(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\theta''(t) = \delta'(t), (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

Shunga o‘xhash

$$(\delta^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (\delta, \varphi^{(m)}) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

munosabatlar isbotlanadi.

Tayinlangan t_0 uchun $\theta(t - t_0)$ funksiyaning hosilasi yuqoridagiga o‘xhash hisoblanadi:

$$\theta'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

2. Endi biror $f(t)$ funksiya birgina t_0 nuqtada uzilishga ega bo‘lib, bu uzilish birinchi turdag'i uzilish bo‘lsin. Qolgan barcha nuqtalarda uning odatdag'i $f'(t)$ hosilasi mavjud bo‘lsin. $f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi sakrashini p_0 bilan belgilaymiz, bunda p_0 sonning ishorasi quyidagicha olinadi: agar $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) < \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ bo‘lsa, p_0 musbat va aks holda manfiy, ya’ni

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t).$$

Ushbu

$$g(t) = f(t) - p_0 \theta(t - t_0)$$

funksiyani olsak, u hamma yerda uzlusiz bo‘lib, t_0 dan boshqa barcha nuqtalarda hosilasi mavjud. Bu holda

$$g'(t) = f'(t) - p_0 \theta'(t - t_0),$$

ya’ni

$$g'(t) = f'(t) - p_0 \delta(t - t_0)$$

yoki

$$f'(t) = g'(t) + p_0 \delta(t - t_0)$$

Agar $f(t)$ ning uzilishlari bitta emas, balki bir nechta t_1, t_2, \dots, t_n nuqtalarda bo‘lsa, u holda

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{i=1}^n p_i \delta(t - t_i).$$

6. Har bir umumlashgan funksiyaga uning hosilasini mos qo‘yuvchi aks ettirish E' fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi chiziqli operator ekanligi ravshan. Bu operator differentiellash operatori deyiladi.

2-teorema. E' fazoda differentiellash operatori uzlusizdir.

Izboti. Umumlashgan funksiyalar ketma-ketligi $\{f_n\}$ umumlashgan f funksiyaga yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varphi \in E$ uchun

$$(f'_n, \varphi) = (f_n, -\varphi') \rightarrow (f, -\varphi') = (f', \varphi)$$

ya’ni $f'_n \rightarrow f'$.*

Matematik analiz kursidan ma'lumki, oddiy funksiyalardan tuzilgan tekis yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bunday xossaga ega emas. Masalan, $f_n(t) = \frac{1}{n} \sin nt$ ketma-ketlik nolga tekis yaqinlashadi-yu, ammo $f'_n(t) = \cos nt$ hosilalardan iborat ketma-ketlik hech qanday funksiyaga tekis yaqinlashmaydi. Umumlashgan funksiyalar fazosida esa 2-teoremaga asosan $f'_n(t)$ ketma-ketlik nolga yaqinlashadi; buni bevosita hisoblab ko'rish mumkin:

$$(f'_n, \varphi) = \int_a^b \cos nt \varphi(t) dt = -\frac{1}{n} \int_a^b \sin nt \varphi'(t) dt \rightarrow 0$$

bunda $[a, b]$ shunday oraliqki, undan tashqarida $\varphi(t)$ aynan nolga teng.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natija olinadi.

Natija. Agar g_n umumlashgan funksiyalardan tuzilgan $g_1 + g_2 + \dots + g_n + \dots$ qator g umumlashgan funksiyaga yaqinlashsa, u holda $g'_1 + g'_2 + \dots + g'_n + \dots = g'$.

Demak, umumlashgan funksiyalardan iborat yaqinlashuvchi qatorni hadma-had differensiallash mumkin.

2-teoremaning tatbiqiga bir nechta misol ko'ramiz. Davri 2π bo'lgan lokal integrallanuvchi $f(t)$ funksiyani olib, uning

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Furye koeffitsientlari yordamida tuzilgan

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int} \quad (3)$$

Furye qatorini ko'ramiz.

Matematik analiz kursidan ma'lumki, (3) qator $f(t)$ funksiyaga tekis yoki har bir nuqtada yaqinlashmasligi ham mumkin. Ammo umumlashgan funksiyalar uchun ahvol boshqacha.

3-teorema. (3) qator umumlashgan funksiyalar fazosida $f(t)$ ga yaqinlashadi.

Ishboti. Ushbu

$$f_1(t) = \int_0^t [f(t) - a_0] dt$$

funksiyani olib, uning uchun $f_1(2\pi)$ ni hisoblaymiz:

$$f_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t) dt - 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

f ning davri 2π bo'lgani uchun $f_1(t)$ ham davri 2π bo'lgan funksiya. Bu funksiyaning Furye koeffitsientlarini ko'ramiz:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f_1(t) dt.$$

Endi

$$u = f_1(t), e^{-\text{int}} dt = dv, v = \frac{e^{-\text{int}}}{-in}$$

deb, oxirgi integralni bo‘laklab integrallasak,

$$b_n = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} [f(t) - a_0] e^{-\text{int}} dt,$$

ya’ni $b_0 = 0$ va $n \neq 0$ da

$$b_n = \frac{a_n}{in} \quad (4)$$

Endi ushbu

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t) dt$$

funksiyani olsak, u ham davriy bo‘lib, differensiallanuvchi funksiyadir, chunki $f_1(t)$ funksiya jamlanuvchi $f(t)$ funksiyaning aniqmas integrali sifatida uzluksizdir. So‘ng $f_2(t)$ ning Furye koeffitsientlarini c_n bilan belgilab, $f_1(t)$ ning koeffitsientlari orqali (4) formula yordamida ifodalasak,

$$c_n = \frac{b_n}{in}$$

bo‘ladi. Bu yerga (4) dan b_n ning qiymatlarini qo‘ysak,

$$c_n = \frac{a_n}{-n^2}. \quad (5)$$

Endi $f_2(t)$ differensiallanuvchi bo‘lgani uchun matematik analiz kursidan ma’lumki, uning

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\text{int}}$$

Furye qatori $f_2(t)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi:

$$f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\text{int}}.$$

U holda bu qator f_2 ga umumlashgan funksiyalar fazosida ham yaqinlashadi.

Bu qatorni umumlashgan funksiyalar qatori sifatida qarab, uni differensiallaymiz:

$$f'_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (e^{\text{int}})'$$

Bundan

$$f'_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n c_n e^{\text{int}}.$$

Bu qatorni yana umumlashgan funksiyalar qatori sifatida differensiallasak,

$$f_1'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in)^2 c_n e^{\int t}.$$

Bundan va (5) dan $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\int t} .*$

7. Umumlashgan funksiyalar uchun yuqorida kiritilgan amallar har bir umumlashgan $y(t)$ funksiya uchun ushbu

$$-b(t) + a_0(t)y(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t)$$

ko‘rinishdagi ifodalarni qarashga imkon beradi. Agar bunday ifodani nolga tenglasak, umumlashgan funksiyalar fazosidagi ushbu

$$a_0(t)y(t) + \dots + a_n(t)y^{(n)}(t) = b(t)$$

differensial tenglamaga kelamiz. Dastlab eng sodda ko‘rinishdagi ushbu

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad (6)$$

tenglamani umumlashgan funksiyalar fazosida yechamiz.

4-teorema. (6) tenglamaning umumlashgan funksiyalar fazosidagi umumiyligi yechimi $y = C (= const)$, ya’ni $(y, \varphi) = \int C\varphi(t)dt$ bo‘ladi.

Ishboti. (6) tenglama ushbu

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \quad (7)$$

tenglamaga ekvivalent. Bu yerda $\varphi \in E$ ixtiyoriy bo‘lgani sababli $y(t)$ umumlashgan funksiya biror asosiy funksiyaning hosilasiga teng bo‘lgan har bir $\psi(t)$ funksiyada nolga teng. Bunday $\psi(t)$ funksiyalar to‘plamini E_0 bilan belgilaymiz. Endi $y(t)$ funksionalni E_0 qism fazodan butun E fazoga qanday davom ettirish mumkinligini tekshiramiz. Buning uchun biror asosiy $\psi(t)$ funksiyaning boshqa bir $\psi(t)$ asosiy funksiyaning hosilasi bo‘lishi shartlarini topamiz. Biror $\varphi \in E$ uchun $\psi(t) = \varphi'(t)$ faraz qilaylik. Bundan va φ ning finitligidan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

ya’ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (8)$$

Aksincha, biror $\varphi \in E$ uchun (8) shart bajarilsa, u holda ushbu

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(s) ds$$

funksiya finit va $\varphi'(t) = \psi(t)$. Endi ushbu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi biror $\varphi_1 \in E$ funksiyani olamiz. Ixtiyoriy $\varphi \in E$

funksiyani ushbu

$$\varphi = \alpha\varphi_1 + \varphi_0, \varphi_0 \in E_0 \quad (9)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Darhaqiqat,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \quad (10)$$

deb olsak, u holda $\varphi - \alpha\varphi_1 \in E_0$ va φ_0 sifatida $\varphi - \alpha\varphi_1$ funksiyani olish kifoya.

Endi bevosita (6) tenglamani yechishga o‘tamiz. f umumlashgan funksiya (6) tenglananing ixtiyoriy yechimi bo‘lsin. U holda (9) dan foydalansak,

$(f, \varphi) = (f, \alpha\varphi_1 + \varphi_0) = \alpha(f, \varphi_1) + (f, \varphi_0) = \alpha(f, \varphi_1)$
bo‘ladi, chunki $(f, \varphi_0) = 0$. Bu yerda (f, φ) -o‘zgarmas. Uni S bilan belgilasak, (10) ga binoan

$$(f, \varphi) = \int C\varphi(t) dt.$$

Ko‘ramizki, (6) tenglananing umumlashgan funksiyalar fazosidagi har bir yechimi oddiy ma’nodagi funksiyadir, ya’ni regulyardir.*

Yechimi singulyar funksiya bo‘lgan tenglamaga misol keltiramiz.

Ushbu

$$t \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

tenglamani ko‘ramiz. Ravshanki, bu tenglananing ikkita chiziqli erkli yechimi mavjud:

$$y_1 = 1, y_2 = \theta(t),$$

bu yerda $\theta(t)$ funksiya 1-misolda ko‘rilgan Xevisayd funksiyasi. Umumiylar yechim bu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Endi bir jinsli bo‘lmagan eng sodda ushbu

$$\frac{dy}{dt} = f \quad (11)$$

tenglamani ko‘ramiz.

5-teorema. Har qanday f umumlashgan funksiya uchun (11) tenglama umumlashgan funksiyalar fazosida yechimiga ega.

Bu teoremaning isboti 4-teoremaning isbotiga o‘xshash. Agar umumlashgan u_0 funksiya (11) tenglananing biror yechimi bo‘lsa, u holda 4-teoremaga asosan bu tenglananing umumiylar yechimi $u = u_0 + S$ bo‘ladi.

12.3-§. Furye almashtirishi

1. Matematik analiz kursida davri 2π bo‘lgan funksiyalarni ushbu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad (1)$$

ko‘rinishda tasvirlash, ya’ni Furye qatoriga yoyish masalasi ko‘rilgan edi, bunda

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (2)$$

Agar $f(t)$ funksiyaning davri boshqacha, masalan, $2\pi l$ bo'lsa, u holda (1) va (2) formulalar mos ravishda ushbu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{in}{l}t}, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{-is\frac{n}{l}} ds \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qulaylik uchun (3) ifodada $e^{\frac{in}{l}t}$ funksiya oldidagi a_n koeffitsient o'rniga $a_{\frac{n}{l}}$ yozamiz:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\frac{n}{l}} e^{\frac{in}{l}t} \quad (5)$$

u holda (4) ifoda

$$a_{\frac{n}{l}} = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{-is\frac{n}{l}} ds \quad (6)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (5) va (6) dan

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{is\frac{n}{l}(t-s)} ds. \quad (7)$$

Bundan

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n-(n-1)}{l} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{-is\frac{n}{l}(t-s)} ds \right) \quad (8)$$

Endi $\sigma_n = \frac{n}{l}$ va $\Delta\sigma_n = \frac{n}{l} - \frac{n-1}{l}$ belgilashlarni kiritsak, (8) dan ushbu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\sigma_n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(s) e^{\sigma_n(t-s)} ds \right) \quad (9)$$

ifodaga kelamiz. (9) da l ni cheksizga intiltirsak va undagi mos ifodalarning limiti mavjud deb faraz qilsak, u holda (9) ko'rinishdagi integral yig'indilar

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\sigma(t-s)} ds \right) \quad (10)$$

integralga yaqinlashadi.

Shunga o'xshash, (3) va (4) ifodalar mos ravishda quyidagi ifodalarga intiladi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma, \quad (11)$$

$$\varphi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\sigma t} dt \quad (12)$$

Oxirgi ifoda bilan aniqlangan $\varphi(\sigma)$ funksiya $f(t)$ funksiyaning Furye

almashtirishi (Furye integrali) deyiladi. (11) formula Furye almashtirishning teskarilash formulasi yoki Furyening teskari almashtirishi deyiladi. Qulaylik uchun $f(t)$ funksiyaning Furye almashtirishini $\hat{f}(\sigma)$ bilan va $f \rightarrow \hat{f}$ aks ettirishni F bilan belgilaymiz. Demak,

$$\hat{f} \rightarrow Ff.$$

F aks ettirish *Furye almashtirishi* deb ataladi.

2. Endi (10), (11) va (12) integrallarning mavjudligi va F aks ettirishning xossalariiga to‘xtalamiz.

Dastavval, ikki yordamchi normalangan fazoni kiritamiz. $L_1(-\infty, \infty)$ fazo butun $(-\infty, \infty)$ oraliqda integrallanuvchi funksiyalardan iborat bo‘lib, undagi norma

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

ga teng.

$C_0(-\infty, +\infty)$ fazo butun $(-\infty, \infty)$ oraliqda uzlucksiz va $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intiluvchi $\varphi(\sigma)$ funksiyalardan iborat bo‘lib, undagi norma

$$\|\varphi\| = \max_{-\infty < \sigma < \infty} |\varphi(\sigma)|.$$

Agar $f(t)$ funksiyani integrallanuvchi deb faraz qilsak, u holda har bir $\sigma \in (-\infty, \infty)$ uchun (12) integral mavjud. Bunga asosan F akslanadirishni $L_1(-\infty, \infty)$ fazoda aniqlangan deb hisoblaymiz.

Bevosita ko‘rinadiki, F akslanadirish $L_1(-\infty, \infty)$ da aniqlangan chiziqli operatorordir.

1-teorema. F Furye almashtirishi $L_1(-\infty, \infty)$ normalangan fazoni $C_0(-\infty, \infty)$ normalangan fazoga aks ettiruvchi uzlucksiz chiziqli operatorordir.

Izboti. Dastavval, har bir $f \in L_1(-\infty, \infty)$ uchun $F(t) \in C_0(-\infty, \infty)$ ekanligini ko‘rsatamiz. $f(t)$ funksiyaning integrallanuvchanligidan va (12) dan ushbu

$$\left| \hat{f}(\sigma) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (13)$$

tengsizlikni olamiz. (13) tengsizlikdan $\hat{f}(\sigma)$ fuknsiyaning chegaralanganligi hamda

$$\sup_{-\infty < \sigma < \infty} \left| \hat{f}(\sigma) \right| \leq \|f\| \quad (14)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Endi $\hat{f}(\sigma)$ funksiyaning uzlucksizligini va $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intilishini dastavval pog‘onali funksiyalar uchun ko‘rsatamiz.

Agar $f(t)$ funksiya (a, b) intervalning xarakteristik funksiyasi, ya’ni

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (a, b) \\ 0, & t \notin (a, b) \end{cases}$$

bo'lsa, uning uchun

$$\hat{f}(\sigma) = \int_a^b e^{-i\sigma t} dt = \frac{e^{-i\sigma a} - e^{-i\sigma b}}{i\sigma}.$$

Bu ifodadan $\hat{f}(\sigma)$ funksiyaning butun $(-\infty, \infty)$ oraliqda uzluksizligi va $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $f(t)$ pog'onali funksiya xarakteristik funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi sababli, F aks ettirishning chiziqli operatorligidan $\hat{f}(\sigma)$ funksiyaning butun $(-\infty, \infty)$ oraliqda uzluksizligi hamda $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi.

Endi ixtiyoriy $f(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ funksiyani olsak, u holda norma ma'nosida $f(t)$ funksiyaga yaqinlashuvchi pog'onali funksiyalarning $\{f_n(t)\}$ ketma-ketligi mavjud.

(14) tengsizlikdan foydalanib, bu $\{f_n\}$ ketma-ketlik uchun ushbu

$$\sup_{-\infty < \sigma < \infty} \left| \hat{f}(\sigma) - \hat{f}_n(\sigma) \right| \leq \|f - f_n\| \quad (15)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. (15) dan ko'rindaniki, $\hat{f}_n(\sigma)$ funksiyalar ketma-ketligi butun $(-\infty, \infty)$ oraliqda $\hat{f}(\sigma)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Bundan $\hat{f}(\sigma)$ funksiyaning $(-\infty, \infty)$ oraliqda uzluksizligi va $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intilishi kelib chiqadi. Demak, agar $f \in L_1(-\infty, \infty)$ bo'lsa, $F(t) \in C_0(-\infty, \infty)$.

Nihoyat, F chiziqli operatorning uzluksizligi (15) tengsizlikdan kelib chiqadi.*

(1) qator $f(t)$ funksiyaga yaqinlashmasligi mumkin bo'lganidek, (11) munosabat ham o'rinli bo'lmasligi mumkin. Furye qatorlari nazariyasida (1) qatorning $f(t)$ ga yaqinlashish sharti (Dini sharti) ko'rilgan. Bu shartga o'xshash shart Furye integrallari uchun ham mavjud.

Dastlab yordamchi tushunchalar kiritamiz. Agar biror $\delta > 0$ uchun

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t+s) - f(s)|}{|s|} ds < \infty$$

o'rinli bo'lsa, u holda $f(t)$ funksiya uchun t nuqtada Dini sharti bajarilgan deyiladi.

Har bir $f \in L_1(-\infty, \infty)$ uchun $\hat{f}(\sigma) \in C_0(-\infty, \infty)$ bo'lgani tufayli, har qanday N uchun ushbu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \hat{f}(\sigma) e^{i\sigma t} dt \quad (16)$$

integral mavjud. Bu integralni $f_N(t)$ orqali belgilaymiz. Agar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t)$$

mavjud bo'lsa, uni

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) e^{i\sigma t} dt$$

bilan belgilaymiz.

2-teorema. Agar $f \in L_1(-\infty, \infty)$ funksiya t nuqtada Dini shartini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t)$$

mavjud va

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) e^{i\sigma t} dt$$

bo'ladı.

Ishboti. Dastlab (16) integralni $f(t)$ funksiya orqali ifodalaymiz:

$$f_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \hat{f}(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-N}^N f(s) e^{i\sigma(t-s)} ds \right\} d\sigma \quad (17)$$

Qavs ichidagi integral σ parametrga nisbatan tekis yaqinlashuvchiligidan (17) ifoda σ va s bo'yicha integrallarning o'rmini almashtirish mumkin:

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left\{ \int_{-N}^N e^{i\sigma(t-s)} d\sigma \right\} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{e^{iN(t-s)} - e^{-iN(t-s)}}{i(t-s)} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{\sin N(t-s)}{t-s} ds \end{aligned}$$

Oxirgi integralda $t-s=-h$ almashtirish bajarilib ushbu

$$f_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+h) \frac{\sin Nh}{h} dh \quad (18)$$

integralga kelamiz.

(18) integralni baholashda ixtiyoriy N uchun ushbu

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nh}{h} dh = 1$$

tenglikdan foydalanamiz (bu tenglik, masalan, Fixtengolts G.M. "Matematik analiz asoslari", 2-tom, XVII bob. 3-§, 132-betda isbotlangan).

Endi $f_N(t) - f(t)$ ayirmani quyidagicha yozib olamiz.

$$f_N(t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t+h) - f(t)] \frac{\sin Nh}{h} dh$$

Biror tayin $h_1 > 0$ son olib, bu integralni quyidagi ikki integralning yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$f_N(t) - f(t) = \int_{|h| \leq h_1} [f(t+h) - f(t)] \frac{\sin Nh}{h} dh + \int_{|h| \geq h_1} [f(t+h) - f(t)] \frac{\sin Nh}{h} dh.$$

(19)

Endi ikkinchi integralni quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$\int_{|h| \geq h_1} f(t+h) \frac{\sin Nh}{h} dh - f(t) \int_{|h| \geq h_1} \frac{\sin \overline{Nh}}{h} dh.$$

f integrallanuvchi bo‘lgani uchun berilgan t da va yetarli katta h_1 da oxirgi ifoda $N \geq 1$ ning qandayligidan qat’iy nazar istalgancha kichik qilinishi mumkin.

(19) ifodaning birinchi hadi ushbu

$$\int_{-h_1}^{h_1} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \sin Nh dh$$

(20)

ko‘rinishga ega.

1-teoremada (12) ko‘rinishdagi integralning $|\sigma| \rightarrow \infty$ da nolga intilishi ko‘rsatgan edik. Shunga o‘xshash, har bir integrallanuvchi $g(t)$ funksiya uchun ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(h) \sin Nh dh$$

integralning $N \rightarrow \infty$ da nolga intilishi ko‘rsatiladi.

Xususan, (20) integral ham nolga intiladi, chunki,

$$g(h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

funksiya integrallanuvchi (Dini sharti).

Shunday qilib, (19) ifodaning ikkala hadi ham nolga intiladi. Demak,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(t) = f(t).*$$

Misol. Ushbu

$$f(t) = e^{-at^2} (a > 0)$$

funksiyaning Furye almashtirishini topamiz. Ta’rifga muvofiq

$$\hat{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\sigma t} dt.$$

(21)

Bu ifodani $e^{-az^2-i\sigma z}$, $z = x + iy$ analitik funksiyadan Ox o‘q bo‘yicha olingan integral deb qarash mumkin. Ushbu

$$\left| e^{-a(x+iy)^2-i\sigma(x+iy)} \right| = e^{-ax^2+ay^2+\sigma y}$$

tenglikka muvofiq har bir $A_{y_0} = \{y : |y| \leq y_0\}$ to‘plamda ushbu

$$e^{-az^2-i\sigma z}$$

(22)

funksiya $x \rightarrow \pm\infty$ da y ga nisbatan tekis nolga intiladi. Shuning uchun analitik funksiyalar nazariyasidagi Koshi teoremasiga asosan hisoblanayotgan (21) integral Ox o‘qqa parallel bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq bo‘yicha (22)

funksiyadan olingan integralga teng:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} e^{-i\sigma(x+iy)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ay^2+\sigma y-2aixy-i\sigma x} dx = \\ &= e^{-ay^2+\sigma y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(a2y+\sigma)} dx\end{aligned}$$

Endi $y = -\frac{\sigma}{2a}$ deb olamiz. U holda $ay^2 + \sigma y = -\frac{\sigma^2}{4a}$ va

$$\hat{f}(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

Matematik analiz kursidan Ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

tenglik ma'lum. Bunga asosan

$$\hat{f}(\sigma) = e^{-\frac{\sigma^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3. Endi Furye almashtirishlarining differensiallash operatori bilan bog'lanishini o'rGANAMIZ. $f(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

2) $f(t)$ funksiya $(-\infty: \infty)$ oraliqning har bir nuqtasi atrofida absolyut uzluksiz;

3) $f(t)$ funksiyaning $f'(t)$ hosilasi mavjud va

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt < \infty.$$

Oxirgi shartga muvofiq ushbu

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t) dt$$

funksiyaning $t \rightarrow \infty$ da limiti mavjud. Bu limit nolga teng, chunki aks holda $f(t)$ funksiya integrallanuvchi bo'lmas edi. Xuddi shunday holat $t \rightarrow -\infty$ da ham o'rinni.

Endi $f'(t)$ funksiyaning Furye almashtirishini hisoblaymiz:

$$F(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-it\sigma} dt = f(t) e^{-it\sigma} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\sigma} dt \quad (23)$$

bu yerda bo'laklab integrallash qo'llaniladi. (23) ifodadagi birinchi had yuqorida ko'rsatilganiga binoan nolga teng. Bunga asosan (23) dan

$$F(f') = i\sigma F(f) \quad (24)$$

Shunday qilib, $f(t)$ funksiyadan hosila olishga $\hat{f}(t)$ funksiyani $i\sigma$ ga ko‘paytirish mos kelar ekan. Agar $f(t)$ funksiyaning m -tartibgacha hosilalari mavjud bo‘lsa, u holda (24) ga binoan

$$F(f^{(k)}) = (i\sigma)^k F(f). \quad (25)$$

Umuman, agar $P(x)$ bir argumentli biror ko‘phad bo‘lsa va bu argument o‘rniga $\frac{d}{dt}$ differensiallash operatorini qo‘ysak, u holda $P(\frac{d}{dt})$ ko‘rinishdagi operator hosil bo‘ladi. (25) formuladan foydalanib, ushbu

$$F(P(\frac{d}{dt})f) = P(i\sigma)F(f)$$

umumiyl formulani topamiz.

4. Endi Furye almashtirishi bilan o‘rama amali orasidagi munosabatni topamiz.

Absolyut integrallanuvchi $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin. Ushbu $\hat{f}_1(\sigma) \cdot \hat{f}_2(\sigma)$ ko‘paytmaning shaklini o‘zgartiramiz:

$$\hat{f}_1(\sigma) \cdot \hat{f}_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-i\sigma t} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)e^{-i\sigma s} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(s)e^{-i\sigma(t+s)} dt ds,$$

bu yerda, oxirgi karrali integral Fubini teoremasiga ([HO‘FN], 61-§) asosan yaqinlashuvchi. Oxirgi integralda $s=h-t$ almashtirish bajarsak,

$$\hat{f}_1(\sigma) \cdot \hat{f}_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(h-t)e^{-i\sigma h} dh \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\sigma h} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(h-t) dt \right\} dh$$

(25')

bu yerdan Fubini teoremasiga asosan integrallarning o‘rnini almashtirish mumkin. Oxirgi ifodada qavs ichidagi integral, ya’ni

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(h)f_2(t-h) dh \quad (26)$$

Fubini teoremasining tasdig‘iga asosan mavjud bo‘lib, Fubini teoremasining boshqa tasdig‘iga asosan absolyut integrallanuvchi. (26) ifoda bilan aniqlangan $f(t)$ funksiya f_1 va f_2 funksiyalarning o‘ramasi deyiladi. (25') formula ko‘rsatadiki, $\hat{f}_1(\sigma) \cdot \hat{f}_2(\sigma)$ ko‘paytma $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar o‘ramasining Furye almashtirishiga teng ekan.

f_1 va f_2 funksiyalarning o‘ramasi odatda $f_1 * f_2$ orqali belgilanadi.

Hozirgina olingan natijani ushbu

$$F(f_1 * f_2) = F(f_1) \cdot F(f_2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bundan, xususan, o‘rama amalining kommutativ va assotsiativ ekanligi kelib chiqadi.

5. Endi Furye almashtirishini issiqlik o‘tkazish tenglamasini yechishga

qo‘llaymiz. $u(x,t)$ funksiya ($-\infty < x < \infty, t \geq 0$) sohada aniqlangan bo‘lsin. Ushbu

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

ya’ni

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (27)$$

differensial tenglama issiqlik o‘tkazish tenglamasi deyiladi. Odatta (27) tenglamaning $t=0$ da berilgan $u_0(x)$ funksiyaga teng bo‘lgan yechimi izlanadi. Bu masalaning ma’nosini quyidagicha: bir jinsli cheksiz uzun sterjenning $t=0$ vaqt dagi temperaturasini bilgan holda ixtiyoriy $t>0$ vaqt dagi temperaturasi topilsin. Bu masalani yechishda $u(x,t)$ funksiyaga quyidagi shartlarni qo‘yamiz:

a) $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t)$ funksiyalar har bir $t \geq 0$ nuqtada x ga nisbatan $(-\infty : \infty)$ oraliq bo‘yicha integrallanuvchi;

b) shunday $\Phi(x)$ funksiya mavjudki, har bir $0 \leq t \leq T$ oraliqda

$$|u_t(x,t)| \leq \Phi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx < \infty$$

Endi (27) tenglamaning ikki tomoniga x ga nisbatan Furye almashtirishini tatbiq qilamiz. U holda b) shartga asosan ushbu

$$F\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) \cdot e^{-i\sigma x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\sigma x} dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $u(x,t)$ ning x ga nisbatan Furye almashtirishini $v(\sigma, t)$ bilan belgilasak,

$$F\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(u(x,t)) = v_t(x,t)$$

Endi a) shartga muvofiq

$$F(u_{xx}(x,t)) = (i\sigma)^2 F(u(x,t)) = -\sigma^2 F(u(x,t)) = -\sigma^2 v(\sigma, t).$$

Natijada (27) tenglama ushbu

$$v_1(\sigma, t) = -\sigma^2 v(\sigma, t) \quad (28)$$

oddiy differensial tenglamaga keladi.

(27) tenglama uchun masalaning qo‘yilishiga muvofiq (28) tenglamaning shunday yechimi topilishi kerakki, u $t=0$ da ushbu

$$v_0(\sigma) = F(u_0(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\sigma x} dx$$

funksiyaga teng bo‘lishi kerak. Ravshanki, bunday yechim ushbu

$$v(\sigma, t) = e^{-\sigma^2 t} v_0(\sigma)$$

ko‘rinishga ega. Yuqorida ko‘rgan misolimizga muvofiq

$$e^{-\sigma^2 t} = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

(2-teoremadan keyin ko‘rilgan misolda a parametrni $\frac{1}{4t}$ ga teng deb olish kerak).

O‘rama amali formulasiga muvofiq,

$$v(\sigma, t) = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) F(u_0) = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right).$$

Endi $v(\sigma, t) = F(u(x, t))$ ekanligini eslasak,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u_0(x-s) ds.$$

Topilgan bu yechim Puasson integrali deyiladi.

6. Endi $L_2(-\infty, \infty)$ fazoda Furye almashtirishi bilan shug‘ullanamiz.

Kvadrati $(-\infty, \infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo‘lgan funksiyalar to‘plamini $L_2(-\infty, \infty)$ bilan belgilaymiz. Bu fazoni ushbu

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt}$$

norma bilan birga ko‘ramiz.

Agar $(-\infty, \infty)$ oraliqda aniqlangan $f(t)$ funksianing kvadrati bu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsa ham, lekin uning o‘zi bu oraliqda integrallanuvchi bo‘lishi shart bo‘lib, o‘zi esa integrallanuvchi emas.

Masalan, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ funksianing kvadrati $(-\infty, \infty)$ oraliqda integrallanuvchi bo‘lib, o‘zi esa integralanuvchi emas.

Shuning uchun $f \in L_2(-\infty, \infty)$ funksianing shu vaqtgacha ko‘rilgan ma’nodagi Furye almashtirishi mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Quyidagi isbotsiz berilgan teorema $L_2(-\infty, \infty)$ fazoda ham Furye almashtirishi kiritish mumkinligini ko‘rsatadi.

Teorema. (Plansherel teoremasi). *Har bir $f(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ funksiya uchun ushbu*

$$\varphi_N(\sigma) = \int_{-N}^N f(t) e^{-it\sigma} dt$$

integral σ argumentga nisbatan $L_2(-\infty, \infty)$ fazoning elementi bo‘lib, $N \rightarrow \infty$ da $L_2(-\infty, \infty)$ metrikasida biror $\varphi(\sigma) \in L_2(-\infty, \infty)$ funksiyaga intiladi. Bunda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Agar $f(t) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ bo‘lsa, u holda $\varphi(\sigma) = \hat{f}(\sigma)$.

Mashq uchun masalalar

1. Agar har qanday $\varphi(t)$ asosiy funksiya uchun $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ bo'lsa, $f(t)$ va $g(t)$ umumlashgan funksiyalar teng deyiladi. Xususan, agar har qanday $\varphi(t)$ asosiy funksiya uchun

$$(f, \varphi) = 0$$

bo'lsa, $f(t)$ umulashgan funksiya nolga teng deyiladi.

a) Ushbu

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } t \neq 1, 2, t \in R \\ 1, & \text{agar } t = 1 \\ 2, & \text{agar } t = 2 \end{cases} \text{ bo'lsa,}$$

funksiya nolga teng umumlashgan funksiya ekanini ko'rsating.

b) Ushbu

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } t < 0 \\ 1, & \text{agar } t \geq 0 \end{cases} \text{ bo'lsa,}$$

va

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{agar } t < 0 \\ 2, & \text{agar } t = 1 \\ 1, & \text{agar } t > 1 \end{cases} \text{ bo'lsa,}$$

funksiyalar umumlashgan funksiya sifatida o'zaro teng ekanligini ko'rsating.

2. Ushbu

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots$$

3. Agar har qanday manfiy bo'limgan $\varphi(t)$ asosiy funksiya uchun

$$(f, \varphi) \geq 0$$

bo'lsa, $f(t)$ umulashgan funksiya musbat deyiladi.

Agar har qanday manfiy bo'limgan $\varphi(t)$ asosiy funksiya uchun

$$(f - g, \varphi) \geq 0$$

bo'lsa, f umulashgan funksiya g umulashgan funksiyadan katta deyiladi va $f \geq g$ kabi yoziladi.

a) $\delta(t)$ funksiyaning musbat ekanligini ko'rsating.

b) Ushbu

$$\delta(t) \geq \delta(2t)$$

tengsizlikni isbotlang.

4. Quyidagi funksiyalarning Furye integralini toping:

$$a) f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}, \quad b) f(t) = \frac{\sin^2 at}{t^2}.$$

$$5. \text{ Biror } f(t) \text{ funksiyaning Furye almashtirishi } \varphi(\sigma) = \frac{1}{\sigma + \sigma_0 + i\tau_0} \text{ bo'lsa,}$$

funksiyaning o‘zini toping.

6. Quyidagi funksiyalar uchun Furyening teskari almashtirishini toping.

$$a) \varphi(\sigma) = \frac{\sin a\sigma}{\sigma}, \quad b) \varphi(\sigma) = \frac{\sin^2 a\sigma}{\sigma}.$$

7. To‘g‘ri chiziqdagi $(0, a)$ integralning xarakteristik funksiyasini χ_a bilan belgilaymiz, ya’ni

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, a) \text{ uchun,} \\ 0, & x \in [0, a] \text{ uchun} \end{cases}.$$

Quyidagi o‘ramani hisoblang:

$$\chi_b(x) * \frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h}.$$

8. Ixtiyoriy $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ funksiya uchun quyidagi munosabatni isbotlang:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x) * \frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h} = \varphi(x-a)$$

(bu yerda yaqinlashish $L_1(-\infty, \infty)$ dagi norma ma’nosida).

9. $L_1(-\infty, \infty)$ fazoning biron E yopiq qism fazosi har bir $\varphi(x)$ funksiya bilan birga ixtiyoriy $h \in R$ uchun $\varphi(x-h)$ funksiyani ham o‘z ichiga olsin. Bu holda har qanday $\varphi \in E$ va $\psi \in L_1(-\infty, \infty)$ uchun $\varphi * \psi \in E$ munosabatni isbotlang.

XIII BOB. NORMALANGAN FAZOLARDA DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB ELEMENTLARI

13.1-§. Kuchli va sust differensiallar

Biror normalangan X fazoning U ochiq to‘plamida aniqlangan va qiyatlari normalangan Y fazoga tegishli bo‘lgan $F: X \rightarrow Y$ aks ettirish berilgan bo‘lsin. Ta’rif. U to‘plamning biron x nuqtasi uchun quyidagi ikki shartni qanoatlanuvchi chegaralangan $L_x \in L(X, Y)$ chiziqli operator mavjud bo‘lsa, u holda F aks ettirish $x \in U$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi:

$$F(x+h) - F(x) = L_x h + \alpha(x, h), \quad x, h \in X, \quad \alpha(x, h) \in Y; \quad (1)$$

$$\|h\| \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Har bir $h \in X$ uchun $L_x h$ element F aks ettirishning x nuqtadagi kuchli differensiali yoki Freshe differensiali deyiladi. L_x chiziqli operator esa F aks ettirishning x nuqtadagi kuchli hosilasi yoki Freshe hosilasi deyiladi va $F'(x)$ bilan belgilanadi.

1-teorema. Agar $F: X \rightarrow Y$ aks ettirish biror x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u yagona kuchli hosilaga egadir.

Izboti. $L_x^{(1)}$ va $L_x^{(2)}$ chiziqli operatorlar F ning x nuqtadagi kuchli hosilalari bo‘lsin.

U holda

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)} h + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)} h + \alpha_2(x, h),$$

ya’ni

$$L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h = \alpha_2(x, h) - \alpha_1(x, h).$$

Ta’rifdagi (2) shartga asosan

$$\|h\| \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\|L_x^{(1)} h - L_x^{(2)} h\|}{\|h\|} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Agar $L_x^{(1)} \neq L_x^{(2)}$ bo‘lsa, u holda biron $h_0 \in X$ uchun

$$\frac{\|L_x^{(1)} h_0 - L_x^{(2)} h_0\|}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0.$$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h_0) - L_x^{(2)}(\varepsilon h_0)\|}{\|\varepsilon h_0\|} = \lambda$$

Olingan ε sonni ixtiyoriy kichik qilish mumkin bo‘lgani sababli (3) munosabat o‘rinli bo‘lmaydi. Demak, $L_x^{(1)} = L_x^{(2)} *$

Hosilaning ta’rifidan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi.

1⁰. Agar $F(x) = y_0 = \text{const}$ bo‘lsa, u holda $F'(x) \equiv 0$ (nol operator).

2⁰. Agar $F(x)$ uzlusiz chiziqli operator bo‘lsa, uning hosilasi o‘ziga teng.

Darhaqiqat,

$$F(x+h) - F(x) = F(h).$$

2-teorema (murakkab funksiyaning hosilasi). X, Y, Z normalangan fazolar bo‘lib, $U(x_0)$ to‘plam biror $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi, $F: U(x_0) \rightarrow Y$ uzluksiz aks ettirish bo‘lsin. So‘ng $y_0 = F(x_0)$ va $V(y_0)$ to‘plam $y_0 \in Y$ nuqtaning atrofi, $G: V(y_0) \rightarrow Z$ ham uzluksiz aks ettirish bo‘lsin. Agar F aks ettirish x_0 nuqtada, G aks ettirish y_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan $H = GF$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchidir va

$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0). \quad (4)$$

I sboti. Normalangan Y fazoning elementi bo‘lgan $\alpha(h) (h \in X)$ ifoda ushbu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|a(h)\|}{\|h\|} = 0$$

shartni qanoatlantirsa, uni $O(h)$ bilan belgilaymiz. Shuni nazarda tutgan holda quyidagilarni yozamiz:

$$F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\xi + O(\xi), \quad \xi \in X$$

$$F(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\eta + O(\eta), \quad \eta \in Y$$

Endi $F'(x_0)$ va $G'(y_0)$ chegaralangan chiziqli operatorlar ekanligidan foydalansak,

$$\begin{aligned} H(x_0 + \xi) &= G(F(x_0 + \xi)) = G(y_0 + F'(x_0)\xi + O(\xi)) = G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\xi + O(\xi)) + \\ &+ (F'(x_0)\xi + O(\xi)) = G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + [G'(y_0)(O(\xi)) + O(F'(x_0)\xi + O(\xi))] = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + O(\xi). \end{aligned}$$

Chunki

$$\begin{aligned} \frac{\|G'(y_0)(O(\xi)) + O(F'(x_0)\xi + O(\xi))\|}{\|\xi\|} &\leq \|G'(y_0)\| \frac{\|O(\xi)\|}{\|\xi\|} + \\ &+ \frac{\|O(F'(x_0))\xi + O(\xi)\|}{\|F'(x_0)\xi + O(\xi)\|} \cdot \frac{\|F'(x_0)\xi + O(\xi)\|}{\|\xi\|} \leq \|G'(y_0)\| \frac{\|O(\xi)\|}{\|\xi\|} + \\ &+ \left(\|F'(x_0)\| + \frac{\|O(\xi)\|}{\|\xi\|} \right) \frac{\|O(F'(x_0)\xi + O(\xi))\|}{\|F'(x_0)\xi + O(\xi)\|} \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

(bu yerda biz $\|F'(x_0)\xi + O(\xi)\| \leq \|F'(x_0)\| \|\xi\| + \|O(\xi)\| \rightarrow 0$ munosabatdan foydalandik). Demak, $H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$.

3-teorema. X fazoni Y fazoga akslantiruvchi F va G uzluksiz aks ettirishlar berilgan bo‘lsin. Agar F va G biron $x_0 \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $F+G$ va aF (a -son) aks ettirishlar ham shu nuqtada differensiallanuvchi va

$$\begin{aligned} (F+G)'(x_0) &= F'(x_0) + G'(x_0) \\ (aF)'(x_0) &= aF'(x_0). \end{aligned}$$

I sboti. Aks ettirishlarning yig‘indisi va songa ko‘paytmasining ta’rifiga binoan

$$\begin{aligned} (F+G)(x_0 + h) &= F(x_0 + h) + G(x_0 + h) = F(x_0) + \\ &+ G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + O_1(h) \end{aligned}$$

va

$$aF(x_0 + h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + O_2(h).$$

Endi sust differential tushunchasiga o'tamiz. X fazoni Y fazoga akslantruvchi $F : X \rightarrow Y$ aks ettirish berilgan bo'lsin. Norma ma'nosida ushbu

$$DF(x, h) = \frac{d}{dt} F(x + th) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit F aks ettirishning sust differentiali yoki Gato differentiali deyiladi.

Umumiy holda, $DF(x, h)$ sust differential h ga nisbatan chiziqli bo'lishi shart emas. Agar u chiziqli bo'lsa, ya'ni biror T chegaralangan chiziqli operator uchun $DF(x, h) = Th$

tenglik o'rinnli bo'lsa, u holda T sust hosila yoki Gato hosilasi deyiladi va $F'_c(x)$ bilan belgilanadi. Sust va kuchli hosilalar orasidagi bog'lanishni o'rganadigan bo'lsak, bu tushunchalar hatto chekli o'lchamli fazolarda ham turli tushunchalardir.

4-teorema. Agar F aks ettirish kuchli hosilaga ega bo'lsa, u sust hosilaga ham ega va bu hosilalar o'zaro tengdir.

Izboti. F aks ettirish kuchli hosilaga ega bo'lgani sababli

$$F(x + th) - F(x) = F'(x)(th) + o(th) = tF'(x)h + o(th)$$

Demak,

$$\frac{F(x + th) - F(x)}{t} = F'(x)h + \frac{o(th)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} F'(x)h$$

ya'ni bu limit mavjud va h ga nisbatan chiziqli. Demak, kuchli hosila bir vaqtida sust hosila hamdir.

Umumiy holda bu teoremaning aksi o'rinnli emas, ya'ni sust hosila mavjudligidan kuchli hosilaning mavjudligi kelib chiqmaydi.

Misol. Ikki o'lchamli R^2 fazoni R to'g'ri chiziqqa aks ettiruvchi ushbu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{agar } (x_1, x_2) \neq (0, 0) = \theta \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } (x_1, x_2) = (0, 0) = \theta \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani olamiz. Bu funksiya R^2 fazoning hamma yerida uzlusiz. $(0, 0) \in R^2$ nuqtada uning sust differentiali mavjud va nolga teng. Darhaqiqat, $h = (h_1, h_2)$ uchun

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\theta + th) - f(\theta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^5 h_1^4 + t^3 h_2^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t h_1^3 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0$$

Demak, aks ettirishning $(0, 0)$ nuqtada sust hosilasi nolga teng.

Kuchli hosila esa mavjud emas. Haqiqatan agar $(0, 0)$ -nuqtada kuchli $f'(\theta)$ hosila mavjud bo'lsa, 4-teoremaga asosan $f'(\theta) = 0$, ya'ni

$$f(h) - f(\theta) = f'(\theta)h + \alpha(\theta h) = \alpha(\theta, h)$$

Bundan

$$\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Ammo $h = (h_1, h_2)$ vektorni $h = (h_1, h_1^2)$ ko‘rinishda olsak,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Bu ziddiyat faks ettirish $(0,0)$ nuqtada kuchli hosilaga ega emasligini ko‘rsatadi. Sust hosila mavjudligidan kuchli hosila mavjudligi kelib chiqishi uchun qo‘shimcha shartlar talab qilinadi.

5-teorema. Agar F aks ettirishning $F_c'(x)$ sust hosilasi x_0 nuqtaning biror U atrofida mavjud bo‘lib, x ga nisbatan x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa (operator qiymatli funksiya sifatida), u holda x_0 nuqtada $F'(x_0)$ kuchli hosila mavjud va sust hosilaga teng.

Ishboti. F aks ettirish sust hosilaga ega bo‘lgani sababli

$$DF(x_0, h) = F_c'(x_0)h$$

Umumiyatni chegaralamagan holda

$$U = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

deb hisoblash mumkin. Agar $\|h\| < \varepsilon$ bo‘lsa, u holda, ravshanki, ixtiyoriy $t \in [0,1]$ uchun $x_0 + th \in U$. Shunday h ni olib, quyidagi ifodani ko‘ramiz:

$$\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - F_c'(x_0)h \quad (5)$$

Y fazoga qo‘shma bo‘lgan Y' fazodan biror y' element olinsa, u holda (5) ga asosan

$$\langle \omega(x_0, h), y' \rangle = \langle F(x_0 + h) - F(x_0), y' \rangle - \langle F_c'(x_0)h, y' \rangle. \quad (6)$$

t son argumentli ushbu

$$f(t) = \langle F(x_0 + th), y' \rangle$$

funksiya t ra nisbatan differensiallanuvchi va

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \frac{F(x_0 + th + \Delta t) - F(x_0 + th)}{\Delta t} y' \rangle = \langle F_c'(x_0 + th)h, y' \rangle$$

Demak, $f(t)$ sonli funksiyaga matematik analizdan ma’lum bo‘lgan chekli orttirmalar formulasini qo‘llasak,

$$\langle F(x_0 + h) - F(x_0), y' \rangle = f(1) - f(0) = \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} \cdot 1 = \langle F_c'(x_0 + \tau h)h, y' \rangle,$$

bu yerda $0 \leq \tau \leq 1$. Bunga asosan (6) formulani quyidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

$$\langle \omega(x_0, h), y' \rangle = \langle [F_c'(x_0 + \tau h) - F_c'(x_0)]h, y' \rangle. \quad (7)$$

8.2-§ dan ma’lumki, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun

$$\|y\| = \sup_{\|y'\|=1} |\langle y, y' \rangle|,$$

xususan

$$\|\omega(x_0, h)\| = \sup_{\|y'\|=1} |\langle \omega(x_0, h), y' \rangle|.$$

Demak, shunday $y' \in Y$ ($\|y'\|=1$) mavjudki,

$$\frac{1}{2} \|\omega(x_0, h)\| \leq |\langle \omega(x_0, h), y' \rangle|$$

Bu tengsizlikdan va (7) munosabatdan

$$|\omega(x_0, h)| \leq 2 |\langle \omega(x_0, h), y' \rangle| = 2 \langle F_c'(x_0 + \tau h) - F_c'(x_0)]h, y' \rangle \leq 2 \|F_c'(x_0 + \tau h) - F'(x_0)\| \cdot \|h\|$$

Teoremaning shartiga ko‘ra $F_c'(x)$ hosila x ra nisbatan x_0 nuqtada uzluksiz bundan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|F_c'(x_0 + th) - F_c'(x_0)\| = 0.$$

Demak, $\omega(x_0, h) = o(h)$ va

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F_c'(x_0)h + o(h),$$

ya’ni

$$F_c'(x_0) = F'(x_0).$$

Agar ko‘rilayotgan normalangan fazolarning ikkinchisi, ya’ni Y sonlar maydoni bo‘lsa, u holda $F: X \rightarrow Y$ funksional bo‘lib, biz differensiallanuvchi funksional tushunchasiga kelamiz. Bunda F ning x_0 nuqtadagi hosilasi $F'(x_0)$ -chiziqli funksionaldir, ya’ni $F'(x_0) \in X'$.

Misol. H haqiqiy Gilbert fazosida $F(x) = \|x\|^2$ funksionalni olamiz va uning Freshe hosilasini topamiz. Ravshanki,

$$\|x + h\|^2 - \|x\|^2 = 2(x, h) + \|h\|^2 = (2x, h) + o(h).$$

Demak,

$$F'(x) = F_c'(x) = 2x, \text{ ya’ni } F_c'(x)(h) = (2x, h).$$

Chekli orttirmalar formularsi

X vektor fazoda ushbu

$$[x_1, x_2] = \{x : x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

to‘plam kesma deyiladi.

Biror $[x_0, x]$ kesmani o‘z ichiga oluvchi U ochiq to‘plamda aniqlangan va $[x_0, x]$ kesmaning har bir nuqtasida F_c' sust hosilaga ega bo‘lgan $F: U \rightarrow Y$ aks ettirish berilgan bo‘lsin. So‘ng $\Delta x = x - x_0$ belgilash kiritib, ixtiyoriy $\varphi \in Y'$ uchun quyidagi sonli funksiyani tuzamiz:

$$f(t) = \varphi(F(x_0 + t\Delta x)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Bu funksiya $[0, 1]$ oraliqda differensiallanuvchi. Darhaqiqat, u chiziqli bo‘lgani sababli

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \varphi \left(\frac{F(x_0 + t\Delta x + \Delta t\Delta x) - F(x_0 + t\Delta x)}{\Delta t} \right).$$

Endi φ ning uzluksizligini hisobga olgan holda $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o‘tsak,

$$f'(t) = \varphi(F_c'(x_0 + t\Delta x)\Delta x).$$

Endi f funksiyaga $[0, 1]$ oraliqda chekli orttirmalar formulasini qo‘llasak,

$$f(t) - f(0) = f'(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

ya’ni

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \varphi(F'_c(x_0 + \tau\Delta x)\Delta x) \quad (8)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda τ son φ ra bog‘liq. Shunday qilib, (8) tenglik ixtiyoriy $\varphi \in Y'$ uchun o‘rinli. Bundan

$$|\varphi(F(x) - F(x_0))| \leq \|\varphi\| \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'_c(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (9)$$

Xan - Banax teoremasiga asosan quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi noldan farqli $\varphi_0 \in Y'$ funksional mavjud:

$$|\varphi_0(F(x) - F(x_0))| = \|\varphi_0\| \|F(x) - F(x_0)\|.$$

Bu munosabatni (9) ga qo‘llasak, ushbu

$$\|F(x) - F(x_0)\| = \frac{|\varphi_0(F(x) - F(x_0))|}{\|\varphi_0\|} \leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'_c(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|$$

tengsizlik, ya’ni

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'_c(x_0 + \tau\Delta x)\| \cdot \|x - x_0\| \quad (10)$$

munosabat kelib chiqadi. (10) munosabatga chekli orttirmalar formulasi deb qarash mumkin. Agar (10) formulada $F(x)$ aks ettirish o‘rniga $F(x) - F'_c(x_0)\Delta x$ aks ettirishni olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo‘lamiz:

$$\|F(x) - F(x_0) - F'_c(x_0)\Delta x\| \leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'_c(x_0 + \tau\Delta x) - F'_c(x_0)\| \|\Delta x\|. \quad (11)$$

Bu munosabat bizga keyinchalik kerak bo‘ladi.

13. 2-§. Vektor funksiyalardan olingan integral

Haqiqiy sonlardan iborat biror X to‘plamda aniqlangan va qiymatlari Y Banax fazosiga tegishli bo‘lgan $F : X \rightarrow Y$ aks ettirish vektor funksiya deyiladi.

Agar F vektor funksiya biror $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo‘lsa, u xolda F funksiyaning $[a, b]$ oraliq bo‘yicha olingan integrali tushunchasini kiritish mumkin. Bu integral sonli funksiyadan olingan integralga o‘xshash kiritiladi. $[a, b]$ oraliqni

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

nuqtalar bilan bo‘lib, har bir $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqdan biror ξ son tanlaymiz va ushbu

$$\sigma_F = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) \in Y$$

integral yig‘indini hosil qilamiz. Agar bu integral yig‘indilarning $\lambda = \max[(t_{k+1} - t_k)]$ nolga intilganda $[a, b]$ ni bo‘lishga va ξ_k larni tanlashga bog‘liq bo‘lmagan limiti mavjud bo‘lsa, u F funksiyaning $[a, b]$ oraliqdagi integrali deyiladi va $\int_a^b F(t)dt$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$\int_a^b F(t)dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Bunda $F(t)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi deyiladi. Ravshanki, $\int_a^b F(t)dt$ integral Y fazoning elementi. Ko‘rinib turibdiki, bu ta’rifning sonli funksiyalardan olingan Riman integrali ta’rifidan deyarli farqi yo‘q. Xususan, arap $F(t)$ uzluksiz vektor funksiya bo‘lsa, u holda $\int_a^b F(t)dt$ doim mavjud. Bu tasdiq xuddi sonli funksiyalarnikiga o‘xhash isbotlanadi.

Bu integralning xossalari Riman integrali xossalariiga o‘xhash. Integralning ba’zi xossalarni keltiramiz.

1-teorema. Agar Z biror Banax fazosi, $T:Y \rightarrow Z$ uzluksiz chiziqli operator bo‘lsa, hamda $F: [a,b] \rightarrow Y$ vektor funksiya uchun $\int_a^b F(t)dt$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b T(F(t))dt = T\left(\int_a^b F(t)dt\right).$$

Isboti. T operatorning chiziqli ekanligiga asosan

$$\sigma_{TF} = \sum_{k=0}^{n-1} T(F(\xi_k))(t_{k+1} - t_k) = T\left(\sum_{k=0}^{n-1} T(F(\xi_k))(t_{k+1} - t_k)\right) = T(\sigma_F).$$

Bu tenglikda $\lambda = \max[(t_{k+1} - t_k)] \rightarrow 0$ da limitga o‘tsak, T ning uzluksizligi tufayli $\lim_{\lambda \rightarrow 0} T(\sigma_F) = T\left(\int_a^b F(t)dt\right)$ mavjud, va demak, $\lim \sigma_{TF}$ ham mavjud va ushbu

$$\int_a^b T(F(t))dt = T\left(\int_a^b F(t)dt\right)$$

tenglik o‘rinli.

2-teorema. Agar $F(t)$ vektor funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\left\| \int_a^b F(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt.$$

Isboti. $F(t)$ funksiya uzluksiz bo‘lgani sababli $\|F(t)\|$ uzluksiz sonli funksiyadir, va demak, teoremadagi ikkala integral ham mavjud. Shu bilan birga

$$\|\sigma_F\| = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k) \right\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|F(\xi_k)\| \cdot (t_{k+1} - t_k) = \sigma_{\|F\|}.$$

Bu tengsizlikda $\lambda \rightarrow 0$ da limitga o‘tsak, talab qilingan tengsizlik hosil bo‘ladi. Ta’rif. X, Y normalangan fazolar, $F: X \rightarrow Y$ biror aks ettirish bo‘lsin. Agar X fazoda ixtiyoriy chegaralangan M to‘plam uchun $F(M)$ to‘plam Y fazoda chegaralangan bo‘lsa, u holda F aks ettirish chegaralangan deyiladi.

Chiziqli bo‘lmagan chegaralangan, aks ettirish uzluksiz bo‘lishi shart emas, buni sonli funksiyalar misolida ham ko‘rish mumkin. Masalan, $\text{sgn}: R \rightarrow R$.

X fazoni Y fazoga akslantiruvchi chegaralangan aks ettirishlar to‘plamini $A(X, Y)$ bilan belgilaymiz. Aks ettirishlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan $A(X, Y)$ vektor fazodir. Bu fazoda nolning atroflari bazisi sifatida ushu

$$U_{n,\varepsilon} = \left\{ F : \sup_{\|x\| \leq n} \|F(x)\| < \varepsilon \right\}$$

to‘plamlarni olib, topologiya kiritamiz. Ravshanki, bu topologiya $A(X, Y)$ ning $L(X, Y)$ qism fazosida ko‘rilsa, u operatorning normasi bilan aniqlangan topologiyaga teng.

X fazodagi biron $I = [x_0, x_0 + \Delta x]$ kesmada aniqlangan va qiymatlari $A(X, Y)$ fazoda bo‘lgan uzlusiz F aks ettirish berilgan bo‘lsin. Ya’ni har bir $x \in I$ nuqtaga biror $F_x = F(x) : X \rightarrow Y$ aks ettirish mos qo‘yilib, bu moslik x parametrga nisbatan uzlusiz bo‘lsin. Ravshanki, $F(x_0 + t\Delta x) \in A(X, Y)$ aks ettirishning $\Delta x \in X$ elementdagi $F(x_0 + t\Delta x)\Delta x$ qiymati Y fazoning elementidir, ya’ni t ga nisbatan $F(x_0 + t\Delta x)\Delta x$ funksiya qiymatlari Y ga tegishli vektor funksiyadir. Bundan foydalanib, $F(x)$ ning kesma bo‘yicha olingan integralini quyidagi formula bilan aniqlash mumkin:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F(x) dx = \int_0^1 F(x_0 + t\Delta x) \Delta x dt \quad (1)$$

Bu integralning mavjudligi $F(x_0 + t\Delta x)\Delta x$ vektor funksiyaning uzlusizligidan kelib chiqadi, va ravshanki, bu integral Y fazoning elementidir.

Endi aks ettirishni uning hosilasi yordamida tiklash masalasini ko‘ramiz.

3-teorema. (Nyuton-Leybnits formulasi).

$F : X \rightarrow Y$ aks ettpirish $[x_0, x_0 + \Delta x]$ kesmada x ga nisbatan uzlusiz kuchli $F'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda quyidagi formula o‘rinli:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F'(x) dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0). \quad (2)$$

Isboti. Integralning ta’rifiga asosan

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F'(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0 + t_k \Delta x) \Delta x (t_{k+1} - t_k) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k) (\Delta x_k),$$

bu yerda $x_k = x_0 + t_k \Delta x$, $\Delta x_k = (t_{k+1} - t_k) \Delta x$, $\lambda = \max_k (t_{k+1} - t_k)$.

Shu bilan birga, ravshanki,

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_0 + t_{k+1} \Delta x) - F(x_0 + t_k \Delta x)] = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

Demak, 13.1- § dagi (11) tengsizlikka asosan

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k) \Delta x_k] \right\| \leq \| \Delta x \| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \| F'(x_k + \tau \Delta x_k) - F'(x_k) \|$$

.

Teoremaning shartiga ko‘ra $F'(x)$ aks ettirish $[x_0, x_0 + \Delta x]$ kesmada uzlucksiz, va demak, tekis uzlucksiz. Bundan $\lambda \rightarrow 0$ da (3) tengsizlikning o‘ng tomonidagi ifoda nolga intiladi, chunki

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'(x_k + \tau \Delta x_k) - F'(x_k)\| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|F'(x_k + \tau \Delta x_k) - F'(x_k)\| \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0.$$

Demak,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k) \Delta x_k\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k) \Delta x_k] \right\| = 0$$

,

ya’ni

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k) \Delta x_k = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F(x) dx.$$

13.3- §. Yuqori tartibli hosilalar

Normalangan X fazoni normalangan Y fazoga akslantiruvchi $F: X \rightarrow Y$ aks ettirish har bir $x \in X$ nuqtada $F'(x)$ kuchli hosilaga ega bo‘lsin. Ma’lumki, $F'(x)$ har bir x uchun X fazoni Y fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operatorordir, ya’ni $F'(x) \in L(X, Y)$. Demak, F' aks ettirish X fazoning x elementiga $L(X, Y)$ fazoning biror $F'(x)$ elementini mos qo‘yadi. Natijada $F': X \rightarrow L(X, Y)$ aks ettirish hosil bo‘ladi. Agar F' aks ettirish ham differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda uning hosilasi F aks ettirishning inkinci hosilasi deyiladi va F'' bilan belgilanadi. Bunda, ravshanki, $F''(x)$ operator $L(X, L(X, Y))$ fazoning elementidir.

Ikkinci hosila tushunchasini boshqa yo‘l bilan, bichiziqli aks ettirishlar orqali ham kiritish mumkin. Shu masalaga to‘xtalib o‘tamiz.

Ta’rif. X fazoning tartib bilan olingan har bir juft (x, x') elementiga Y fazoning biron $V(x, x')$ elementi mos qo‘yilgan bo‘lib, quyidagi ikki shart bajarilsa, $V(x, x')$ bichiziqli aks ettirish deyiladi:

1) ixtiyoriy $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in X$ va α, β sonlar uchun

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x'_1) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_2, x'_1);$$

$$B(x_1, \alpha x'_1 + \beta x'_2) = \alpha B(x_1, x'_1) + \beta B(x_1, x'_2).$$

2) shunday M musbat son mavjudki, ixtiyoriy $x, x \in X$ uchun

$$\|B(x, x')\| \leq M \|x\| \cdot \|x'\|. \quad (1)$$

Demak, 1.6-§ dan ma’lum bo‘lgan 1) shartdan tashqari $V(x, x')$ aks ettirishning har bir argumenti bo‘yicha chegaralangan bo‘lishi talab qilinadi. Xususan, (1) tengsizlikdan, ravshanki, $B: X \times X \rightarrow Y$ aks ettirish ikkala argumentga nisbatan birlgilikda uzlucksiz. $V(x, x')$ bichiziqli aks ettirishning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\|B\| = \inf\{M : \|B(x, x')\| \leq M \|x\| \cdot \|x'\|\}$$

Bichiziqli aks ettirishlarning yig‘indisi va songa ko‘paytmasi ham bichiziqli ekanligi bevosita ko‘rinib turibdi. Demak, bichizikli aks ettirishlar normalangan vektor fazo hosil qiladi. By fazo $B(X^2, Y)$ bilan belgilanadi. Ravshanki, Y Banax fazosi bo‘lsa, $B(X^2, Y)$ ham Banax fazosidir.

$L(X, L(X, Y))$ fazoning har bir A elementiga ushbu

$$V(x, x') = (Ax)(x')$$

tenglik yordamida $V(X^2, Y)$ fazoning biror V elementini mos qo‘yamiz. Ravshanki, $A \rightarrow B$ aks ettirish chiziqlidir. Aksincha, $V(X^2, Y)$ fazoning har bir V elementi uchun $V(x, x')$ aks ettirish x element tayinlab olinganda x' ga nisbatan chegaralangan chiziqli operatordir: $(Ax)(x') = V(x, x')$. Demak, $A \rightarrow B$ moslik $L(X, L(X, Y))$ va $V(X^2, Y)$ fazolar orasidagi chiziqli izomorfizmdir. Biz uning izometrik izomorfizm ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x, x' \in X$ uchun

$$\|B(x, x')\| = \|(Ax)(x')\| \leq \|Ax\| \|x'\| \leq \|A\| \|x\| \|x'\|,$$

demak, $\|B\| \leq \|A\|$. Shu bilan birga

$$\|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(Ax)(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|B(x, x')\| \leq \|B\| \cdot \|x\|,$$

ya’ni $\|A\| \leq \|B\|$. Bundan $\|A\| = \|B\|$.

Shunday qilib, $V(X^2, Y)$ va $L(X, L(X, Y))$ o‘zaro izometrik izomorf normalangan fazolardir. Demak, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning ikkinchi hosilasini $V(X^2, Y)$ fazoning elementi deb hisoblash mumkin.

Shunga o‘xshash, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning uchinchi, to‘rtinchi va hokazo tartibli hosilalari tushunchasini kiritish mumkin, Bunda n-tartibli hosila ($n-1$)-tartibli hosilaning hosilasi deb olinadi. Ravshanki, n- hosila

$L(X, L(X, \dots, L(X, Y) \dots))$

fazoning elementi bo‘ladi. Bu hosilaga n- chiziqli aks ettirish deb qaralsa bo‘ladi. *Ta’rif.* X fazoning elementlaridan tuzilgan tartib bilan yozilgan har bir n elementli (x_1, x_2, \dots, x_n) sistemaga Y fazoning $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementi mos qo‘yilib, quyidagi ikki shart bajarilsa, N aks ettirish n- chiziqli deyiladi.

1) $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$ har bir argumentga nisbatan chiziqli;

2) shunday M musbat son mavjudki, ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ uchun

$$\|N(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Shunday qilib, F aks ettirishning n-hosilasini n-chiziqli aks ettirishlar $B(X^n, Y)$ fazosining elementi deb olish mumkin.

Misol. $X = R^m$, $Y = R^n$ chekli o‘lchamli Yevklid fazolari uchun har bir chiziqli $T: X \rightarrow Y$ operator $(n \times m)$ matritsadir. Demak, $F: X \rightarrow Y$ aks ettirishning $x \in X$ nuqtadagi $F'(x)$ hosilasi x ga bog‘liq bo‘lgan T matritsadir. Agar X va Y fazolarda mos ravishda

e_1, e_2, \dots, e_m va f_1, f_2, \dots, f_n

bazislar bo‘lsa, u holda $x \in X, y \in Y$ uchun

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_m e_m,$$

$$y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n$$

Demak, $y = F(x)$ aks ettirishni ushbu

$$y_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$y_2 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

.....

$$y_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, Bunda

$$F'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

$F''(x)$ ikkinchi hosila esa quyidagi $n \times m \times m$ ta son bilan aniqlanadi:

$$a_{k,i,j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bu sonlar yordamida ushbu

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^n a_{k,i,j} x_i$$

formula orqali $X \rightarrow L(X, Y)$ chiziqli aks ettirishni

$$y_k = \sum_{i,j=1}^m a_{k,i,j} x_i x_j$$

formula orqali esa $X \times X \rightarrow Y$ bichiziqli aks ettirishni aniqlash mumkin.

13.1-§ da $F : X \rightarrow Y$ aks ettirishning x nuqtadagi kuchli differensiali deb $F'(x)$ chiziqli operatorning $h \in X$ elementdagi $dF = F'(x)h$ qiymatiga aytgan edik. F aks ettirishning ikkinchi tartibli differensiali deb $F''(x) \in B(X^2, Y)$ bichiziqli aks ettirishning (h, h) elementdagi qiymatiga aytildi, ya’ni $d^2F = F''(x)(h, h)$. Shunga o‘xshash n -tartibli differensial deb ushbu

$$d^n F = F^{(n)}(x)(h, h, \dots, h) \in Y$$

elementga aytamiz ($F^{(n)}(x) \in B(X^n, Y)$).

Endi 13.1-§ dagi (1) tenglikni umumlashtiradigan Teylor formulasini keltiramiz.

1-teorema. *X fazoning U ochiq to‘plamida aniqlangan $F : U \rightarrow Y$ aks ettirishning n -tartibli $F^{(n)}(x)$ hosilasi ixtiyoriy $x \in U$ uchun mavjud bo‘lsin. Agar $F^{(n)}(x)$ aks ettirish U to‘plamda x ga nisbatan tekis uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,h,\dots,h) + \omega(x,h)$$

(2)

bu yerda $\|\omega(x,h)\| = o(\|h\|^n)$.

Izboti. Teoremani induksiya yordamida izbotlaymiz $n=1$ uchun (2) tenglik 13. 1-§ dagi (1) munosabat bilan ustma-ust tushadi. Endi $(n-1)$ uchun (2) tenglik o‘rinli deb faraz qilaylik. U holda (2) tenglikni F' aks ettirishga $(n-1)$ uchun qo‘llasak, ushbu

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)h + \frac{1}{2!}F'''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,h,\dots,h) + \omega_1(x,h)$$

(3)

tenglik kelib chiqadi, bu yerda $\|\omega_1(x,h)\| = o(\|h\|^{n-1})$. Hosil bo‘lgan (3) munosabatni $[x, x+h]$ kesma bo‘yicha integrallab, Nyuton-Leybnits formulasidan foydalansak (13.2-§ 3-teorema), u holda

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_0^1 F'(x+th)h dt = \int_0^1 \{F'(x) + tF''(x)(h) + \frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h,h) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h,h,\dots,h)\}h dt + R_n \end{aligned}$$

bu yerda $R_n = \int_0^1 \omega_1(x,th)h dt$. Bundan

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h,h) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,h,\dots,h) + R_n$$

Shu bilan birga

$$\|R_n\| \leq \int_0^1 \|\omega_1(x,th)\| \cdot \|h\| dt = o(\|h\|^n). *$$

Teoremadagi (2) tenglik Teylor formulasi deyiladi.

Mashq uchun masalalar

1. Sust hosilalar uchun murakkab funksiyani differensiallash qoidasi o‘rinli emasligini ko‘rsatuvchi misol keltiring.

2. Gilbert fazosida $\|x\|$ funksionalning hosilasini toping.

3. Vektor funksiya sust differerensiyallanuvchi bo‘lsa, u kuchli differensiallanuvchi bo‘lishini isbotlang.

4. $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lgan F vektor funksiya uchun $\int_a^b F(t)dt$

integral doim mavjudligini isbotlang.

5. $[a,b]$ oraliqdagi F vektor funksiya uchun $\|F(t)\|$ integrallanuvchi bo‘lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\left\| \int_a^b F(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| dt$$

6. Chegaralangan, ammo uzlukli aks ettirishga misol keltiring.
7. Agar Y Banax fazosi bo'lsa, $B(X^2, Y)$ fazo to'la ekanligini isbotlang.

XIV BOB. VARIATSION HISOB ELEMENTLARI

14.1- §. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari

Variatsion hisobning asosiy masalasi - funksionallarning ekstremumlarini topishdir. Bu paragrafda variatsion hisobning boshlang‘ich masalalariga to‘xtalib o‘tamiz.

1. Ekstremumning zaruriy shartlari.

F haqiqiy funksional X Banax fazosida aniqlangan bo‘lsin. Agar $x_0 \in X$ nuqtaning biror atrofidagi ixtiyoriy x uchun $F(x) - F(x_0) \geq 0$ (≤ 0) tengsizlik bajarilsa, F funksional x_0 nuqtada *minimumga* (*maksimumga*) ega deyiladi, x_0 nuqta esa *minimum* (*maksimum*) *nuqtasi* deyiladi. Maksimum va minimum nuqtalari F uchun *ekstremum nuqtalari* deyiladi.

Matematik analizdan ma’lumki, n o‘zgaruvchili f funksiya $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lib, differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $df=0$, ya’ni

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Ekstremumning bu zaruriy sharti ixtiyoriy normalangan fazolar uchun ham o‘rinli.

1-teorema. *Differensiallanuvchi F funksional x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lishi uchun uning x_0 nuqtadagi differensiali har bir h da nolga teng bo‘lishi zarur, yani*

$$F'(x_0)h \equiv 0.$$

Ishoti. F differensiallanuvchi bo‘lgani sababli

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + o(h).$$

Agar $F'(x_0)h$ biror $h \in X$ uchun noldan farqli bo‘lsa, yetarli darajada kichik λ haqiqiy son uchun $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ ifodaning ishorasi $F'(x_0)(\lambda h)$ ning ishorasi bilan bir xil. $F'(x_0)$ chiziqli funksional bo‘lgani sababli $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$. Demak, agar $F'(x_0)h \neq 0$ bo‘lsa, $F(x_0 + h) - F(x_0)$ ayirma h yetarli kichik bo‘lganda musbat ham, manfiy ham bo‘lishi mumkin, ya’ni x_0 nuqtada F ekstremumga ega emas.

Misollar. 1. $C[a, b]$ fazoda ushbu

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t))dt$$

funksionalni ko‘ramiz. Agar f funksiya birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, F funksional $C[a, b]$ fazoda differensiallanuvchi. Haqiqatan,

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x + h) - f(t, x)]dt = \int_a^b f'_x(t, x)h(t)dt + o(h).$$

Bundan

$$dF = \int_a^b f'_x(t, x(t))h(t)dt$$

Agar ixtiyoriy $h \in C[a, b]$ uchun $dF=0$ bo'lsa, u holda $f'_x(t, x)=0$. Haqiqatan, ixtiyoriy $x(t) \in C[a, b]$ uchun $f'_x(t, x)$ funksiya t ga nisbatan uzlucksiz. Agar u biror $t_0 \in [a, b]$ uchun noldan farqli bo'lsa, ya'ni masalan, $f'_x(t, x(t_0)) > 0$ bo'lsa, u holda t_0 ning biror (α, β) atrofining har bir t nuqtasida ham $f(t, x(t)) > 0$.

Demak, ushbu

$$h(t) = \begin{cases} (t - \alpha)(\beta - t), & \alpha \leq t \leq \beta, \\ 0, & \text{qolgan } t \in [a, b] \text{ uchun} \end{cases}$$

funksiyani olsak, u holda

$$\int_a^b f'_x(t, x(t))h(t)dt > 0.$$

Bu ziddiyat $f'_x(t, x)=0$ ekanligini ko'rsatadi. Demak, $f'_x(t, x(t))=0$ tenglama F funksional ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan $x(t)$ egri chiziqning tenglamasidir.

2. $C[a, b]$ fazoda boshqa funksionalni olamiz:

$$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_1)x(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2,$$

bu yerda $K(\xi_1, \xi_2)$ funksiya $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$ shartni qanoatlantiruvchi uzlucksiz funksiya. So'ngra

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)[(x(\xi_1) + h(\xi_1))(x(\xi_2) + h(\xi_2)) - x(\xi_1)x(\xi_2)]d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)[x(\xi_1)h(\xi_2) + x(\xi_2)h(\xi_1)]d\xi_1 d\xi_2 + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_2)h(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 + \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 + \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

$$\text{bundan } dF = 2 \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.$$

Demak, $x \in C[a, b]$ ekstremum nuqtasi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $h \in C[a, b]$ uchun

$$\int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)x(\xi_1)h(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = 0$$

Bundan 1-misoldagidek, ixtiyoriy $\xi_2 \in [a, b]$ uchun

$$\int_a^b K(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) d\xi_1 = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

x ga nisbatan bu tenglamaning yechimlaridan biri $x=0$. Boshqa yechimlar boryo‘qligi $K(\xi_1, \xi_2)$ funksiyaga bog‘liq va u qo‘shimcha tekshirishlarni talab qiladi.

2. Ekstremumming yetarli shartlari.

Yana n o‘zgaruvchili funksiyalarga qaytsak, $df=0$ shartni qanoatlantruvchi $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ekstremum mavjudligi ikkinchi differensialga bog‘liq. Aniqrog‘i, quyidagi iboralar o‘rinli:

- Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada minimumga (maksimumga) ega bo‘lsa va $d^2 f$ mavjud bo‘lsa, u holda bu nuqtada

$$d^2 f \geq 0 \quad (d^2 f \leq 0).$$

- Agar $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada ushbu $df=0$,

$$d^2 f = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{dx_i dx_k} dx_i dx_k > 0 \quad (< 0) \quad (\exists' : dx_i \neq 0)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu nuqtada minimumga (maksimumga) ega.

Boshqacha qilib aytganda, $df=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtada minimum (maksimum) bo‘lishi uchun $d^2 f \geq 0$ (≤ 0) bo‘lishi zaruriy shart, $d^2 f > 0$ (< 0) bo‘lishi esa yetarli shart.

Endi shu masalalarni ixtiyoriy Banax fazosidagi funksionallar uchun ko‘ramiz.

2-teorema. X Banax fazosida aniqlangan F haqiqiy funksional $x_0 \in X$ nuqtaning biron atrofida uzlusiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsin. Agar shu funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $h \in X$ uchun

$$F''(x_0)(h, h) \geq 0.$$

Izboti. 13.3- § dagi Teylor formulasiga asosan

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \frac{1}{2!}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo‘lgani sababli 1-teoremaga asosan $F(x_0)h = 0$, ya’ni

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2). \quad (1)$$

Agar biror $h \in X$ uchun $F''(x_0)(h, h) < 0$ bo‘lsa, u holda $F''(x_0)(\varepsilon h, \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)(h, h)$ tenglikka asosan $F''(x_0)(h, h) < 0$ shartni qanoatlantiruvchi h vektorning normasini ixtiyoriy kichik qilib tanlash mumkin.

Ammo $\|h\|$ kichik bo‘lganda $\frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2)$ ifodaning ishorasi

$F''(x_0)(h, h)$ ning ishorasiga teng, ya’ni

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < 0.$$

Bu esa x_0 ning minimum nuqtasi ekanligiga zid.

Maksimum nuqtasi uchun ham shunga o‘xshash teorema o‘rinli.

Ekstremum mavjudligining yetarli shartini Banax fazolariga to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘tkazish mumkin emas. Ya’ni agar $F''(x_0)(h,h) > 0$ ($h \neq 0$) bo‘lsa, x_0 nuqtada minimum bo‘lishi shart emas.

Misol. l_2 fazoda funksionalni quyidagicha kiritamiz:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4, \quad x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2.$$

θ nuqtada birinchi differensial nolga teng, chunki

$$F(\theta + h) - F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4$$

va

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} h_n^4 \right|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|h\|^2 + \|h\|^4}{\|h\|} = 0$$

Ikkinci differensial esa $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3}$ qatorga teng, ya’ni ixtiyoriy h uchun musbat.

Ammo θ nuqtada funksional minimumga ega emas.

Haqiqatan,

$$F(\theta) = 0, \quad F(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots) = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^4} < 0,$$

ya’ni nolning ixtiyoriy atrofida shunday x nuqta mavjudki,

$$F(x) < F(\theta).$$

Keltirilgan misoldan ravshanki, funksional biror nuqtada ekstremumga ega bo‘lishi uchun kuchliroq shartlar kerak.

Agar $B(x,y)$ bichiziqli funksional bo‘lsa, $B(x,x)$ funksional x ra nisbatan *kvadratik funksional* deyiladi. Agar shunday $s > 0$ son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $B(x,x) \geq c \|x\|^2$ tengsizlik bajarilsa, $B(x,x)$ kvadratik funksional *kuchli musbat* deyiladi.

3-teorema. *X fazodagi F funksional x_0 nuqtada minimumga ega bo‘lishi uchun quyidagi shartlar kifoyadir:*

1) $dF(x_0) = 0$;

2) $d^2F(x_0)$ kuchli musbat kvadratik funksional.

Izboti. Haqiqatan, $d^2F(x_0)(h,h) \geq c \|h\|^2$ va $c > 0$ bo‘lsin. ε musbat sonni shunday tanlaymizki, $\|h\| < \varepsilon$ bo‘lganda (1) formuladagi $O(\|h\|^2)$ son uchun $O(\|h\|^2) < \frac{c}{4} \|h\|^2$ tengsizlik bajarilsin. Bu holda (1) formulaga asosan $\|h\| < \varepsilon$ uchun

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h,h) + O(\|h\|^2) > \frac{1}{2} c \|h\|^2 - \frac{1}{4} c \|h\|^2 = \frac{1}{4} c \|h\|^2 > 0,$$

ya'ni x_0 , minimum nuqtasi.

14. 2-§. $\int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt$ ko'riishdagi funksionallarni eksteremumga tekshirish

Matematika va mexanikaning turli masalalari

$$F(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \quad (1)$$

funktionalning $C^1[a, b]$ Banax fazosida ekstremumini hisoblashga keltiriladi. Agar integral ostidagi $f(t, x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud va uzlusiz deb hisoblasak, $F(x(t))$ funksional Freshe ma'nosida differensialanuvchi bo'ladi. Avvalgi paragrafdagi ekstremumning zaruriy shartiga binoan $F(x(t))$ funktionalning ekstremumi (agar u mavjud bo'lsa)

$$F'(x_0(t)) = 0 \quad (2)$$

tenglamani qanoatlantiradi. Demak, funktionalning ekstremal qiymatini beruvchi $x_0(t)$ funksiyani faqat (2) tenglamaning yechimlari orasida izlashimiz kerak. Xususan, agar (2) tenglama yechimga ega bo'lmasa, ekstremum mavjud emas. $F(x(t))$ funktionalning kuchli differensialini hisoblab, ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$F'(x(t))h(t) = \int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)] dt,$$

bu yerda $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ va $f_{x'} = \frac{\partial f}{\partial x'}$.

Demak, (2) ga ko'ra ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a, b]$ uchun

$$\int_a^b [f_x h(t) + f_{x'} h'(t)] dt = 0 \quad (3)$$

munosabat bajarilishi zarur. Arap $\frac{d}{dt} f_{x'}$ mavjud va uzlusiz deb faraz qilsak (aslida bu talab ortiqcha ekanligini keyinroq ko'rsatamiz), bo'laklab integrallash yordamida ushbu

$$\int_a^b [f_x h'(t)] dt = f_{x'} h(t) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{x'} h(t) dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, (3) quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_a^b \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} \right] h(t) dt + f_{x'}(b, x(b), x'(b))h(b) - f_{x'}(a, x(a), x'(a))h(a) = 0.$$

Bu yerda $h(t) \in C[a, b]$ ixtiyoriy bo'lgani uchun:

$$f_{x'}(a, x(a), x'(a)) = 0; \quad f_{x'}(b, x(b), x'(b)) = 0, \quad (4)$$

$$\int_a^b [f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}] h(t) dt = 0 \quad (5)$$

shartlarni hosil qilamiz.

Lemma (Lagranj lemması) Agar $\varphi(t)$ uzluksiz funksiya bo‘lib, ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a, b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b \varphi(t) h(t) dt = 0$$

tenglik bajarilsa, $\varphi(t) \equiv 0$ bo‘ladi.

Lemmaning isboti sodda bo‘lgani uchun buni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz. Demak, lemmaga ko‘ra (5) shartni quyidagicha yozish mumkin:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0. \quad (6)$$

Shunday qilib, $x(t)$ funksiya (1) funksionalning ekstremumini berishi uchun (4) va (6) shartlar bajarilishi zarur. Ravshanki, (6) shart $x(t)$ ra nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Odatda (6) tenglama *Eyler tenglamasi* deyiladi, tenglamaning har qanday yechimi F funksionalning ekstremali deyiladi.

Misol.

$$F(x(t)) = \int \{x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t\} dt$$

funksionalni ekstremumga tekshiraylik.

Bu yerda

$$f(t, x(t), x'(t)) = x^2(t) - 2tx(t) + [x'(t)]^2 - 2x'(t) + t.$$

Eyler tenglamasi (6) quyidagi ko‘rinishga ega:

$$2x(t) - 2t - \frac{d}{dt}[2x'(t) - 2] = 0,$$

ya’ni $x''(t) - x(t) + t = 0$.

Bu tenglamaning umumiyl yechimi

$$x(t) = t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

O‘zgarmas c_1 va c_2 larni topish uchun (4) shartlardan foydalanamiz:

$$f_{x'} = 2x'(t) - 2,$$

ya’ni

$$2 \cdot x'(0) - 2 = 2x'(1) - 2 = 0,$$

demak,

$$x'(0) = x'(1) = 0; \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Shunday qilib, $F(x(t))$ funksional faqat $x(t)=t$ funksiyadagina ekstremumga erishishi mumkin. Topilgan yechim haqiqatan ham $F(x(t))$ funksionalning minimumini berishi ushbu tengsizlikdan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned}
F(x(t)) &= \int_0^1 \{[x(t) - t]^2 + [x'(t) - 1]^2 + t - t^2 - 1\} dt \geq \\
&\geq \int_0^1 (t - t^2 - 1) dt = F(t); \quad \forall x(t) \in C^1[0,1]
\end{aligned}$$

Yuqorida biz (1) funksionalni $C^1[a,b]$ fazoda hech qanday qo'shimcha shartlar qo'yagan holda ekstremumini topish masalasini ko'rdik. Lekin ko'pgina amaliy masalalar ekstremumni butun $C^1[a, b]$ fazoda emas, balki ba'zi qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi to'plam ostida izlashni taqozo qiladi. Masalan, (1) funksionalning ekstremumini

$$M = \{x(t) \in C^1[a,b] : x(a) = A; x(b) = B\}$$

funksiyalar sinfida topish masalasi variatsion hisobning asosiy masalasi deyiladi. Bu holda $h(t)$ orttirmani shunday tanlashimiz kerakki, natijada $x(t) \in M$ 6o'lsa, $x(t) + h(t) \in M$ bajarilishi zarur. Demak, $h(a) = h(b) = 0$. Bu tenglikni hisobga olsak (3) dan

$$F'(x(t))h(t) = \int_a^b [f_x - \frac{d}{dt} f_{x'}] h(t) dt$$

ni hosil qilamiz. Ya'ni asosiy masala uchun ekstremumning zaruriy sharti (Eyler tenglamasi) quyidagidan iborat:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0; \quad x(a) = A; \quad x(b) = B. \quad (7)$$

Misol. Tekislikda (a,A) va (b,B) nuqtalarni birlashtiruvchi va uzunligi eng qisqa bo'lgan silliq chiziqni toping. Ravshanki, analitik formada masala quyidagicha yoziladi:

$$x(a) = A; \quad x(b) = B, \quad x(t) \in C^1[a,b] \quad \text{funksiyalar ichida} \quad \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt$$

integralning eng kichik qiymatini beruvchi funksiyani toping. Bu yerda $f(t, x(t), x'(t)) = \sqrt{1 + [x'(t)]^2}$. Demak, (7) ra ko'ra:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} \right) = 0; \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

ya'ni

$$\begin{aligned}
\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} &= c, \\
x'(t) &= c_1 \quad \left(c_1 = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \right).
\end{aligned}$$

Demak, $x(t) = c_1 t + c_2$. O'zgarmas c_1 va c_2 larni $x(a) = A$ va $x(b) = B$ shartlardan topamiz. Javob:

$$x(t) = \frac{A - B}{a - b} t + \frac{aB - bA}{a - b}.$$

Yuqorida Eyler tenglamasini keltirib chiqarishda biz $\frac{d}{dt} f_x$ ni mavjud va uzluksiz deb hisoblagan edik.

Ravshanki, $\frac{d}{dt} f_x$ mavjud bo‘lishi uchun $x''(t)$ mavjud bo‘lishi zarur, ya’ni izlanayotgan yechim $x(t) \in C^2[a, b]$ bo‘lishi kerak. Haqiqatan, agar $f(t, x, y)$ funksiya t, x, y lar bo‘yicha yetarlicha silliq bo‘lsa (masalan $f \in C^2$), yechim, $x(t) \in C^2[a, b]$ ekanligini isbotlaylik.

Lemma (*Dybua-Reymon lemma*.) Agar $\varphi(t), \psi(t) \in C[a, b]$ bo‘lsa va $x(a)=x(b)=0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x(t) \in C[a, b]$ funksiya uchun

$$\int_a^b [\varphi(t)x'(t) + \psi(t)x(t)] dt = 0 \quad (8)$$

tenglik bajarilsa, u holda $\varphi(t) \in C^1[a, b]$ va $\varphi'(t) = \psi(t)$ bo‘ladi.

Isboti. (8) tenglikning chap tomonidagi integral ostidagi ikkinchi qo‘shiluvchini bo‘laklab integrallasak:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [\varphi(t) - \int_a^t \psi(s) ds] x'(t) dt + x(t) \int_a^t \psi(s) ds \Big|_a^b \\ &= \int_a^b [\varphi(t) - \int_{-a}^t \psi(s) ds] x'(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Endi $g(t) = \varphi(t) - \int_{-a}^t \psi(s) ds$ belgilash kiritib, $g(t) = const$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan, aks holda shunday $\alpha, \beta \in [a; b]$ topiladiki, u holda $g(\alpha) \neq g(\beta)$. Aniqlik uchun $g(\alpha) > g(\beta)$ bo‘lsin. Shartga ko‘ra, $g(t)$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun α va β ni $[a, b]$ segmentning ichki nuqtalari deb hisoblashimiz mumkin. So‘ngra $\delta > 0$ sonni shunday tanlab olaylikki, natijada $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [a, b]$; $[\beta - \delta, \beta + \delta] \subset [a, b]$ va ixtiyoriy $|s| \leq \delta$ uchun $g(s + \alpha) - g(s + \beta) \geq \varepsilon > 0$ shartlar bajarilsin.

Endi $x_0(t)$ funksiyani quyidagicha olamiz:

$$x_0'(t) = \begin{cases} -(t - \alpha + \delta)(t - \alpha - \delta), & \text{agar } t \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \\ (t - \beta + \delta)(t - \beta - \delta), & \text{agar } t \in [\beta - \delta, \beta + \delta] \\ 0, & \text{t ning boshqa qiymatlarida} \end{cases} \quad (10)$$

hamda $x_0(t)$ funksiya $x_0(a) = 0$ shartni qanoatlantirsin. Tuzilishiga ko‘ra $x_0(t) \in C^1[a, b]$ va

$$x_0(b) = \int_a^b x_0'(t) dt = 0,$$

demak, $x_0(t)$ funksiya lemmanning shartlarini qanoatlantiradi.
Lekin,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(t) \dot{x}_0(t) dt &= \int_{a-\delta}^{b+\delta} g(t) \dot{x}_0(t) dt + \int_{\beta-\delta}^{\beta+\delta} g(t) \dot{x}_0(t) dt = \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} [g(\alpha+s) - g(\beta+s)] (\delta-s)(\delta+s) ds \geq \\
&\geq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} (\delta-s)(\delta+s) ds > 0
\end{aligned}$$

Oxirgi munosabat esa (9) ga zid. Demak, $g(t) \neq \text{const}$ ziddiyatga olib keladi. Shunday qilib:

$$g(t) = \varphi(t) - \int_a^t \psi(s) ds = \text{const},$$

ya'ni

$$g(t) = \int_a^t \psi(s) ds + \text{const} \in C^1[a, b],$$

va $\varphi'(t) = \psi(t)$. Lemma isbotlandi.*

1-teorema. (Gilbert teoremasi). Agar $x_0(t)$ funksiya Eyler tenglamasi (7) ning yechimi bo'lib, $x_0(t)$ bo'ylab

$$\frac{\partial^2 f(t, x, y)}{\partial y^2} \neq 0; x = x_0(t); \quad y = x'_0(t); \quad \forall t \in [a, b]$$

shart bajarilsa, $x_0(t)$ funksiya $C^1[a, b]$ ga tegishli bo'ladi.

Isboti. Oshkormas funksiyani differensiallash haqidagi teoremaga ko'ra:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = f_x - \frac{\partial^2 f(t, x, x')}{\partial x'^2} \cdot x'' - \frac{\partial^2 f(t, x, x')}{\partial x \partial x'} \cdot x' - \frac{\partial^2 f(t, x, x')}{\partial t \partial x} = 0,$$

ya'ni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cdot x'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} \cdot x' + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Bu yerda $\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \neq 0$ va $f(t, x, y)$ funksiya C^2 sinfga tegishli bo'lgani uchun (11) tenglamaning yechimi $x_0(t) \in C^2[a, b]$ bo'ladi.

Asosiy masala uchun ekstremumning qo'shimcha zaruriy shartlaridan yana biri quyidagi teoremada keltirilgan.

2-teorema. (Lejandr teoremasi). Eyler tenglamasi (7) ning yechimi $x_0(t)$ funksiya (1) funksionalning minimumini berishi uchun ixtiyoriy $t \in [a, b]$ da

$$f_{x'x'}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \geq 0 \quad (12)$$

tengsizlikning bajarilishi zaruriy shart.

Isboti.(1) funksionalning Freshe ma'nosidagi ikkinchi tartibli differensialini hisoblab ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$d^2F = \frac{1}{2} \int_a^b [f_{xx} h^2(t) + 2f_{xx'} \cdot h(t)h'(t) + f_{x'x'}(h'(t))^2] dt.$$

O‘rtadagi qo‘shiluvchini $h(a)=h(b)=0$ ekanligini hisobga olgan holda bo‘laklab integrallasak:

$$2 \int_a^b f_{xx} h(t)h'(t) dt = \int_a^b f_{xx} dh^2(t) = - \int_a^b h^2(t) \cdot \frac{d}{dt} f_{xx} dt.$$

Demak,

$$d^2F = \int_a^b [P(t)h^2(t) + \frac{1}{2} f_{x'x'}(h'(t))^2] dt,$$

$$\text{bu yerda } P(t) = \frac{1}{2} \left(f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{xx'} \right)$$

Endi $x_0(t)$ - Eyler tenglamasining yechimi bo‘lib, (12) shart bajarilmagan deb faraz qilaylik. Demak, biror $t_0 \in [a,b]$ uchun $f_{x'x'}(t_0, x_0(t_0), x'(t_0)) < 0$ bo‘lsin. U holda t_0 ning yetarli kichik atrofi U da ham $f_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) < 0$ bo‘ladi. Tanlab olingan U atrofning tashqarisida nolga teng bo‘lgan $h_0(t) \in C[a,b]$ funksiyani shunday olaylikki, bunda

$$\int_a^b [P(t)h_0^2(t) + \frac{1}{2} f_{x'x'}(h_0'(t))^2] dt < 0$$

tengsizlik bajarilsin. U holda $h_n(t) = \frac{1}{n} \cdot h_0(t)$, $n = 2, 3, \dots$ orttirma uchun Teylor formulasiga ko‘ra:

$$F(x_0(t) + h_n(t)) = F(x_0(t)) - F'(x_0(t))h_n(t) + \frac{1}{2!} F''(x_0(t))(h_n(t), h_n(t)) + R_2$$

bu yerda $\|R_2\| = 0(\|h_n\|^2)$. Ikkinchchi tomonidan $\|h_n(t)\| = \frac{1}{n} \|h_0(t)\| \rightarrow 0$ va $x_0(t)$ - Eyler tenglamasining yechimi bo‘lgani uchun $F'(x_0(t))h_n(t) = 0$. Demak, yetarli katta n natural son uchun

$$F(x_0(t) + h_n(t)) - F(x_0(t)) = \frac{1}{2!} d^2F + R_2 < 0,$$

ya’ni $x_0(t)$ funksiya $F(x(t))$ funksionalning minimum nuqtasi bo‘la olmaydi.

Yuqoridagi (12) tengsizlik *Lejandr - Klebsh sharti* deyiladi. Ravshanki, maksimum nuqtasi uchun Lejandr-Klebsh sharti quyidagicha yoziladi:

$$f_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Adabiyotlarda (1) funksionaldagи integral ostidagi $f(t, x(t), x'(t))$ funksiya *lagranjian* deyiladi. Lagranjianning ba’zi xususiy hollari uchun Eyler tenglamasining birinchi integrali osonlikcha topiladi. Misol tariqasida quyidagi ikki holni ko‘raylik.

1) Lagranjian faqat t va $x'(t)$ ra bog‘liq, ya’ni $f(t, x'(t))$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda Eyler tenglamasiga ko‘ra:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = -\frac{d}{dt} f_{x'} = 0,$$

ya'ni birinchi tartibli

$$f_{x'} = \text{const} \quad (13)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. Mexanikada $f_{x'}$ impuls integrali deyiladi va $p(t)$ orqali belgilanadi.

2) Lagranjian faqat $x(t)$ va $x'(t)$ ga bog'liq, ya'ni $f(x(t), x'(t))$ ko'rinishda bo'lsin. U holda Eyler tenglamasining birinchi integrali quyidagicha yoziladi:

$$x' \cdot f_{x'} - f = \text{const}$$

Haqiqatan, $H(t) = x' \cdot f_{x'} - f$ belgilash kiritib $\frac{dH}{dt}$ hosilani hisoblaylik. Murakkab funksiyani differensiallash formulasiga ko'ra:

$$\frac{dH}{dt} = x'' \cdot f_{x'} + x' \frac{d}{dt} f_{x'} - f_x \cdot x' - f_{x'} \cdot x'' = \left(\frac{d}{dt} f_{x'} - f_x \right) \cdot x'.$$

Eyler tenglamasiga binoan $f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0$. Demak,

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

ya'ni

$$H(t) = x' \cdot f_{x'} - f = \text{const}$$

Mexanikada $H(t)$ funksiya energiya integrali deyiladi.

14.3- §. Izoperimetrik masala. Shartli ekstremum

$$C^1[a, b] \text{ fazoda } F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t), (x'(t))) dt \text{ funksionalning}$$

$$F_i(x(t)) = \int_a^b f_i(t, x(t), x'(t)) dt = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ va } x(a) = A; x(b) = B$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfida ekstremumini topish masalasi izoperimetrik masala deyiladi. Odatda izoperimetrik masala quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

$$F_i(x(t)) = \int_a^b f_i(t, x(t), x'(t)) dt = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

$$x(a) = A; x(b) = B \quad (2)$$

Integrallar ostidagi $f_0(t, x, y), f_1(t, x, y), \dots, f_m(t, x, y)$ funksiyalarni t, x, y argumentlar bo'yicha birgalikda yetarlicha silliq (masalan, C' sinfga tegishli) deb hisoblaymiz.

Ravshanki, $C^1[a,b]$ fazoda (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi birorta ham funksiya topilmasa, izoperimetrik masala ma'noga ega emas (xususan, yechimi mavjud emas). Agar (1) va (2) shartlarni faqat birgina $x_0(t) \in C^1[a,b]$ funksiya qanoatlantirsa, shu $x_0(t)$ funksiya izoperimetrik masalaning yechimi bo'ladi. Tegishli misollarni keltiraylik.

$$1. \begin{cases} \int_0^1 f_0(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \text{extr} \\ \int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = 2; x(0) = 0, x(1) = 2 \end{cases} \quad \text{masala } f_0 \text{ funksiya qanday bo'lishidan}$$

qat'iy nazar yechimga ega emas. Haqiqatan, $x(0) = 0$; $x(1) = 2$ va $x(t) \in C^1[0,1]$ bo'lgani uchun $x(t)$ funksiyaning grafigi $(0,0)$ va $(1,2)$ nuqtalarni birlashtiruvchi yoydan iborat. Demak, yoy uzunligi

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt \geq \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} > 2,$$

ya'ni

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = 2; \quad x(0) = 0$$

va

$$x(1) = 2$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud emas.

$$2. \begin{cases} \int_0^1 f_0(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \text{extr} \\ \int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = \sqrt{5}; x(0) = 0, x(1) = 2 \end{cases} \quad \text{masalaning yechimi } x_0(t) = 2t \text{ bo'lib,}$$

f_0 funksiyaning ko'rinishiga bog'liq emas. Chunki, $C^1[0, 1]$ fazoda

$$\int_0^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = \sqrt{5}; \quad x(0) = 0; \quad x(1) = 2$$

shartlarni faqatgina bitta funksiya qanoatlantiradi.

Yuqoridaagi (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar cheksiz ko'p bo'lgan holi izoperimetrik masalaning qo'yilishi uchun xarakterli hol bo'lib, mazmunli nazariyaga olib keladi.

Endi izoperimetrik masala uchun ekstremumning zaruriy shartini hosil qilish bilan shug'ullanamiz. Soddalik uchun $m=1$ hol bilan cheklanamiz. Bu holda masalaning qo'yilishi quyidagicha bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(x(t)) = \int_a^b f_0(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \text{extr} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0(x(t)) = \int_a^b f_1(t, x(t), x'(t)) dt = \alpha_1 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(a) = A, \quad x(b) = B \end{array} \right. \quad (5)$$

1-teorema. (*Ekstremumning zaruriy sharti*). Biror $x_0(t)$ funksiya (3)–(5) masalaning $C^1[a,b]$ fazodagi yechimi bo‘lishi uchun shunday λ_0 va λ_1 sonlarning topilishi zarurki:

1) λ_0 va λ_1 larning kamida bittasi noldan farqli;

$$2) \quad \lambda_0 f_0(t, x_0(t), x'_0(t)) + \lambda_1 f_1(t, x_0(t), x'_0(t)) = L(t, x_0(t), x'_0(t)) \quad \text{funksiya}$$

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0 \quad \text{Eyler tenglamasini qanoatlanadiradi.}$$

Isboti. $F_0(x(t))$ va $F_1(x(t))$ funksionallarning $x_0(t)$ nuqtadagi birinchi tartibli kuchli differensialini hisoblaylik:

$$dF_0(x_0(t)) = \int_a^b [f_{0x}(t, x_0(t), x'_0(t))h(t) + f_{0x'}(t, x_0(t), x'_0(t))h'(t)] dt,$$

$$dF_1(x_0(t)) = \int_a^b [f_{1x}(t, x_0(t), x'_0(t))h(t) + f_{1x'}(t, x_0(t), x'_0(t))h'(t)] dt,$$

bu yerda $h(t)$ orttirma $C^1[a,b]$ sinfga tegishli va $h(a)=h(b)=0$ shartni qanoatlaniruvchi funksiya.

Quyidagi ikki holni ko‘raylik:

1) Barcha $h(t) \in C[a,b]$ va $h(a)=h(b)=0$ bo‘lgan funksiyalar uchun $dF_1(x_0(t)) \equiv 0$ bo‘lsin. U holda $\lambda_0 = 0$ va $\lambda_1 = 1$ deb olsak, teoremada keltirilgan 1) va 2) shartlar bajariladi. Demak, bu holda teorema isbot qilindi.

2) Bironta $h_0(t) \in C[a,b]$ va $h_0(a)=h_0(b)=0$ funksiya uchun $dF_1(x_0(t)) \neq 0$ bo‘lsin. Ikkita yordamchi funksiya kiritamiz:

$$\varphi_0(\alpha, \beta) = F_0(x_0(t) + \alpha h(t)) + \beta h_0(t),$$

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = F_1(x_0(t) + \alpha h(t)) + \beta h_0(t),$$

so‘ngra ushbu akslantirishni ko‘ramiz:

$$(\alpha, \beta) \rightarrow (\varphi_0(\alpha, \beta), \varphi_1(\alpha, \beta)).(6)$$

Ravshanki, (6) akslantirish (0,0) nuqtaning atrofida uzlucksiz differensiallanuvchi va quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

$$\frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \alpha} = F'_0(x_0(t))h(t), \quad \frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \beta} = F'_0(x_0(t))h_0(t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \alpha} = F'_1(x_0(t))h(t), \quad \frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \beta} = F'_1(x_0(t))h_0(t).$$

Endi ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a,b]$ va $h(a)=h(b)=0$ funksiya uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi_0(0,0)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi_1(0,0)}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini isbotlaylik. Haqiqatan, agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, teskari akslantirish haqidagi teoremaga ko'ra $(0,0)$ nuqtaning yetarli kichik atrofida (6) akslantirishning teskarisi mavjud. Xususan, yetarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\bar{\alpha}$ va $\bar{\beta}$ topiladi:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= F_0(x_0(t)) + \bar{\alpha}h(t) + \bar{\beta}h_0(t) = F_0(x_0(t) - \varepsilon), \\ \varphi_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \varphi_1(0,0) = F_1(x_0(t)) = \alpha_1\end{aligned},$$

ya'ni $x_0(t)$ funksiya $F_0(x(t))$ funksional uchun (4) va (5) shartlar bajarilganda minimum nuqtasi bo'lishi mumkin emas. Xuddi shunday, agar $\varepsilon < 0$ deb tanlab olsak, $x_0(t)$ maksimum nuqtasi ham bo'la olmasligi kelib chiqadi.

Demak, $x_0(t)$ ekstremum nuqtasi bo'lsa, albatta $\Delta = 0$ bo'ladi. Ya'ni:

$$\begin{vmatrix} F'_0(x_0(t))h(t) & F'_0(x_0(t))h_0(t) \\ F'_1(x_0(t))h(t) & F'_1(x_0(t))h_0(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Agar $F'_1(x_0(t))h(t) \neq 0$ ekanligini hisobga olsak, (7) dan

$$F'_0(x_0(t))h(t) - \frac{F'_0(x_0(t))h_0(t)}{F'_1(x_0(t))h_0(t)} F'_1(x_0(t))h(t) = 0$$

kelib chiqadi. Demak, $\lambda_0 = 1$ va $\lambda_1 = -\frac{F'_0(x_0(t))h_0(t)}{F'_1(x_0(t))h_0(t)}$ deb olsak:

$$\lambda_0 F'_0(x_0(t))h(t) + \lambda_1 F'_1(x_0(t))h(t) = 0 \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz. (8) tenglik ixtiyoriy $h(t) \in C^1[a,b]$ va $h(a) = h(b) = 0$ funksiya uchun bajarilishidan

$$\lambda_0 f'_0(t, x_0(t), x'_0(t)) + \lambda_1 f'_1(t, x_0(t), x'_0(t))$$

funksiya Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kelib chiqadi. Demak, teoremadagi 1) va 2) shartlar bajarilgan.*

14.4-§. Ekstremumni topishga doir misollar

1. *Didona masalasi.* Qadimgi yunon afsonalaridan biriga ko'ra Finikiya malikasi Didona o'z qo'shinlari bilan kemada dushmanidan qochib kelayotib O'rtayer dengizining g'arbiy qirg'og'ida to'xtaydi. Malika qirg'oqda shahar qurish niyatida mahalliy aholidan yer berishni so'raydi. Mahalliy aholi Didonaga faqat bitta buqa terisi bilan chegaralay oladigan yer berishga rozi bo'ladi. Ayyor Didona esa buqa terisidan ingichka tasmalar qirqib, ulardan uzun arqon yasaydi va bu arqon bilan qirg'oqda juda katta territoriyani chegaralab olib, Karfagen shahriga asos soladi.

Matematik tilga ko'chirsak, Didona masalasi quyidagicha bayon qilinadi. Tekislikda $(-1,0)$ va $(1,0)$ nuqtalarni birlashtiruvchi hamda uzunligi π ra teng

bo‘lgan barcha silliq chiziqlar ichida shu chiziq va abssissa o‘qi bilan chegaralangan figura yuzasining eng katta qiymatini beruvchi chiziqni toping.

Yechimi. Matematik analiz kursidan ma’lumki, agar izlanayotgan chiziqning tenglamasi $x(t)$ bo‘lsa, yuza $s = \int_{-1}^1 x(t)dt$ va uzunlik $l = \int_{-1}^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2} dt$

formulalar yordamida hisoblanadi. Demak, biz quyidagi variatsion masalani yechishimiz kerak:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 x(t)dt \rightarrow \max \\ \int_{-1}^1 \sqrt{1+[x'(t)]^2} dt = \pi \\ x(-1) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(t) \in C^1[a,b] \end{array} \right.$$

Biror $x_0(t) \in C^1[a,b]$ funksiya masalaning yechimi deb faraz qilaylik. U holda:

$$dF_0(x_0(t)) = \int_{-1}^1 x_0(t)h dt \not\equiv 0,$$

chunki $x_0(t) \not\equiv 0$. Demak, 14. 3-§ dagi teoremaga ko‘ra $\lambda_0 = 1$ deb olishimiz mumkin va $x_0(t) + \lambda_1 \cdot \sqrt{1+[x'(t)]^2}$ funksiya Eyler tenglamasini qanoatlantirishi kerak. 14. 2-§ dagi (14) formulaga asosan Eyler tenglamasining birinchi integrali mavjud:

$$\lambda_1 \frac{[x_0'(t)]^2}{\sqrt{1+[x_0'(t)]^2}} - x_0(t) - \lambda_1 \cdot \sqrt{1+[x_0'(t)]^2} = c \quad (const).$$

Shu differensial tenglamani $x_0(t)$ ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{aligned} \lambda_1 [x_0'(t)]^2 - x_0(t) \sqrt{1+[x_0'(t)]^2} - \lambda_1 - \lambda_1 [x_0'(t)]^2 &= \\ = c \sqrt{1+[x'(t)]^2} \sqrt{1+[x'(t)]^2} \cdot (c + x_0(t)) &= -\lambda_1 \end{aligned}$$

bu yerda $c + x_0(t) = y(t)$ deb belgilasak:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1^2 - y^2}{y^2}}$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. O‘zgaruvchilarni ajratib:

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{\lambda_1^2 - y^2}} = \pm t + c_1$$

yoki

$$\lambda_1^2 - y^2 = (c_1 \pm t)^2$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$y(t) = \pm \sqrt{\lambda_1^2 - (c_1 \pm t)^2},$$

ya'ni

$$x_0(t) = \pm \sqrt{\lambda_1^2 - (c_1 \pm t)^2} - c.$$

O'zgarmas c_1 va c larni $x_0(-1) = x_0(1) = 0$ shartdan topamiz:

$$c_1 = 0; \quad c = \pm \sqrt{\lambda_1^2 - 1}$$

Demak,

$$x_0(t) = \pm \sqrt{\lambda_1^2 - t^2} \mp \sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Agar $x_0(t) \geq 0$ ekanligini hisobga olsak:

$$x_0(t) = \sqrt{\lambda_1^2 - t^2} - \sqrt{\lambda_1^2 - 1}.$$

Endi

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = \pi$$

shartdan noma'lum λ_1 ni hisoblaymiz:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - t^2}} dt = \pi$$

yoki

$$2 \arcsin |\lambda_1| = \pi.$$

bu yerdan

$$\arcsin |\lambda_1| = \frac{\pi}{2},$$

yoki

$$|\lambda_1| = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

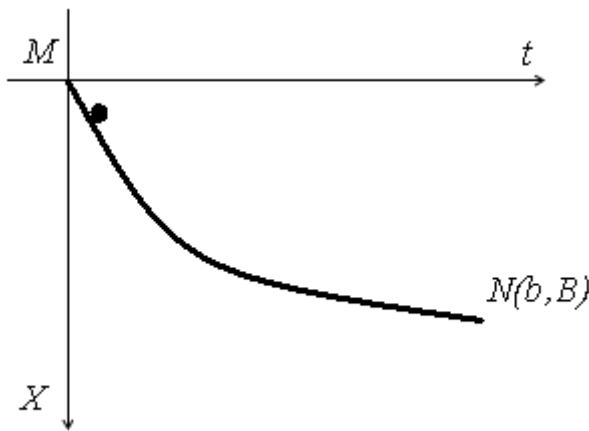
Demak $\lambda_1^2 = 1$ va

$$x_0(t) = \sqrt{1 - t^2},$$

ya'ni Didona masalasining yechimi yarim doira bo'ladi.

2. Braxistoxrona haqida masala (I. Bernulli masalasi).

Vertikal joylashgan tekislikda berilgan M va N nuqtalarni birlashtiruvchi barcha silliq chiziqlar orasida shunday chiziqni topingki, shu chiziq bo'ylab moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida eng qisqa vaqtida M nuqtatadan N nuqtaga yetib kelsin (albatta, masalaning mohiyatiga ko'ra M nuqta N nuqtadan yuqoriroqda joylashgan).



3-rasm

Masalani yechish uchun uni matematik tilga ko‘chiraylik. Tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz: koordinata boshi M nuqtada, t - abstsissa o‘qi odatdagicha, x - ordinata o‘qi esa vertikal ravishda pastga yo‘nalgan bo‘lsin (3-rasm).

Endi $M(0,0)$ va $N(b, B)$ nuqtalarni birlashtiruvchi birorta $x(t)$ silliq chiziq olib, shu chiziq bo‘ylab moddiy nuqtaning $M(0,0)$ dan $N(b, B)$ gacha yetib kelishi uchun ketgan vaqtni hisoblaylik. Agar boshlang‘ich tezlik $v_0 = 0$ ekanligini hisobga olsak, elementar fizika kursidan ma’lumki, moddiy nuqtaning $(t, x(t))$ nuqtadagi tezligi

$$v = \sqrt{2gx(t)} \quad (v = \sqrt{2gh}, \quad h = x(t))$$

formuladan topiladi. Bu yerda $g=9,8\text{m/sek}^2$ -erkin tushish tezlanishi.

Vaqtni τ orqali belgilasak,

$$d\tau = \frac{ds}{v}$$

tenglikni hosil qilamiz, ya’ni moddiy nuqtaning $ds = \sqrt{1+[x'(t)]^2}dt$ yoy differensialini bosib o‘tish uchun ketgan vaqtni topamiz. Demak,

$$d\tau = \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{2gx(t)}} dt.$$

Oxirgi tenglikni integrallab izlanayotgan vaqtni topamiz:

$$\tau = \int_0^b \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{2gx(t)}} dt.$$

Shunday qilib, braxistoxrona haqidagi masala

$$\tau = F(x(t)) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{2g \cdot \sqrt{x(t)}}} dt$$

funksionalning $x(0)=0$ va $x(b)=B$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz differensialanuvchi funksiyalar sinfida minimumini topishga keltiriladi. Agar

$\frac{1}{\sqrt{2g}}$ o‘zgarmas koeffitsient ekanligini hisobga olsak, masala quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{x(t)} dt \rightarrow \min; \quad x(0)=0 \quad \text{va} \quad x(b)=B.$$

Bu yerda $x(0)=0$ bo‘lgani uchun $\int_0^b \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{x(t)} dt$ xosmas integral ekanligiga e’tibor qiling.

Integral ostidagi ifoda t ga oshkor holda bog‘liq bo‘lmasani uchun Eyler tenglamasining birinchi integrali quyidagicha bo‘ladi:

$$f - x' f_{x'} = \frac{\sqrt{1+[x'(t)]^2}}{\sqrt{x(t)}} - \frac{[x'(t)]^2}{\sqrt{x(t)} \sqrt{1+[x'(t)]^2}} = C$$

Bu yerdan $x(t)$ ni topsak:

$$x(t) = \frac{C^2}{1+[x'(t)]^2}.$$

Oxirgi differensial tenglamaning umumi yechimi parametrik ko‘rinishda

$$\begin{cases} t = c_1(\varphi - \sin \varphi) + c_2 \\ x = c_1(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

bo‘lib, tsikloidalar oilasini tashkil qilishini tekshirishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz. $x(0)=0$ va $x(b)=B$ shartdan c_1 va c_2 o‘zgarmaslarni topamiz.

Demak, Braxistoxrona haqidagi masalaning yechimi faqatgina sikloida (aniqrog‘i sikloidaning bir qismi) bo‘lishi mumkin.

3. *Minimal aylanma sirt haqidagi masala.* Tekislikda (a,A) va (b,B) nuqtalarni birlashtiruvchi shunday silliq chiziq topingki, shu chiziqni abssissa o‘qi atrofida aylanishi natijasida hosil bo‘lgan jismning sirti eng kichik bo‘lsin.

Ma’lumki, $x(t)$ chiziqning abssissa o‘qi atrofida aylanishi natijasida hosil bo‘lgan jismning sirti

$$F(x(t)) = 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{1+[x'(t)]^2} dt$$

formula yordamida hisoblanadi. Demak, yuqorida qo‘yilgan masala ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{1+[x'(t)]^2} dt \rightarrow \min; \quad x(a)=A; \quad x(b)=B.$$

Eyler tenglamasining birinchi integrali quyidagicha:

$$f - x' f_{x'} = x(t) \sqrt{1+[x'(t)]^2} - \frac{x(t)[x'(t)]^2}{\sqrt{1+[x'(t)]^2}} = c$$

Sodda almashtirishlardan so‘ng:

$$x'(t) = \sqrt{\left(\frac{x(t)}{c}\right)^2 - 1}.$$

Bu differensial tenglamaning yechimi:

$$x(t) = c \cdot ch\left(\frac{t}{c} + c_1\right).$$

bu yerda $cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ giperbolik kosinus.

s va c_1 o‘zgarmaslarni $x(a)=A$ va $x(b)=B$ shartdan topamiz. Odatda $x(t) = c \cdot ch\left(\frac{t}{c} + c_1\right)$ funksiyaning grafigi *zanjir chiziq* deyiladi. Demak, minimal sirt haqidagi masalaning yechimi faqatgina zanjir chiziq bo‘lishi mumkin.

Mashq uchun masalalar

1 . Geodezik chiziq haqidagi masala (xususiy holi) $z = x^2 + y^2$ sirtda joylashgan va $(0, 0, 0)$ nuqta bilan $(1, 0, 1)$ nuqtani birlashtiruvchi eng qisqa silliq chiziqni toping.

2. Quyidagi masalani yeching:

$$\int_a^b \frac{1 + [x(t)]^2}{[x'(t)]^2} dt \rightarrow \min : x(a) = A; \quad x(b) = B.$$

3. Ushbu ekstremal masala α -parametrning qaysi qiymatlarida yagona yechimga ega:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x(t)(1 + [x'(t)]^2)} dt \rightarrow \min; \quad x(-1) = x(1) = \alpha > 0.$$

4. Uzunligi l ga teng bo‘lgan bir jinsli elektr simi vertikal tekislikning M N nuqtalarida mahkamlangan. Shu simning og‘irlik kuchi ta’sirida olgan formasini toping.

Ko‘rsatma. Agar sim formasining tenglamasini $x(t)$ va $M(a, A); N(b, B)$ deb olsak, simning potensial energiyasi

$$V(x(t)) = \int_a^b mgx(t) ds = mg \int_a^b x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt$$

formula bo‘yicha hisoblanadi. Sim muvozanatda bo‘lgani uchun uning potensial energiyasi minimal qiymatni qabul qiladi. Demak, ushbu variatsion masalani yechish kerak:

$$\int_a^b x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt \rightarrow \min; \quad \int_a^b \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt = l,$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B \text{ va } x(t) = C^1 \quad [a, b].$$

5. Ushbu masala:

$$B(x(t)) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt + \varphi(x(a), x(b)) \rightarrow \min$$

Bolsa masalasi deyiladi. Berilgan $f(t, x, y)$ va $\varphi(x, y)$ funksiyalar C^1 sinfga tegishli bo'lsa, Bolsa masalasi uchun minimumning zaruriy shartini toping.

6. $\int_a^b f(t, x(t), x'(t), x''(t)) dt \rightarrow \min; x(a) = A_0, x'(a) = A_1, x(b) = B_0, x'(b) = B_1.$

masala uchun ekstremumning zaruriy shartini toping.

7. $\int_0^1 (x(t) + [x'(t)]^2) dt \rightarrow \min; x(0) = 0, x(1) = 1$ variatsion masalani yeching.

8. $\int_1^2 (t[x'(t)]^2 - x(t)) dt \rightarrow \min; x(1) = 0, x(2) = 1$ variatsion masalani yeching.

9. $\int_1^2 x'(t) \cdot [1 + t^2 x'(t)] dt \rightarrow \min, x(1) = 3, x(2) = 1$ variatsion masalani yeching.

10. $\int_0^1 x'(t) dt \rightarrow \min; x(0) = 0, x(1) = 1$ variatsion masalani yeching.

ADABIYOT

ASOSIY ADABIYOT

1. Канторович Л. В., Акилов Г.П., Функциональный анализ. М. «Наука», 1977.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука», 1968.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа. М. «Наука», 1965.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М. «Мир», 1975.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М. «Мир», 1969.
6. Саримсоқов Т.А., Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси. Т. “Ўқитувчи”, 1982.
7. Қобулов В.К. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. Т. “Ўқитувчи”, 1976.

QO'SHIMCHA ADABIYOT

1. Александров П.С., Введение в общую теорию множеств и функций. М. Гостехиздат. 1948.
2. Антоновский М.Я., Болтянский В.Г., Саримсаков Т.А., Топологические алгебры Буля. Т. Фан. 1963.
3. Ахиезер Н.И., Глазман И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. «Наука». 1966.
4. Биркгоф Г., Теория решеток. М. «Наука». 1984.
5. Бурбаки Н., Теория множеств. М. «Мир». 1965.
6. Бурбаки Н., Общая топология, Основные структуры. «Наука», М., 1968.
7. Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер. «Наука», М., 1967
8. Бурбаки Н., Спектральная теория. М. «Мир», 1972.
9. Владимиров Д.А., Булевы алгебры. М. «Наука», 1969.
10. Вулих Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М. Физматгиз. 1961.
11. Вулих Б.З., Введение в функциональный анализ. М. «Наука» 1967.
12. Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественой переменной. М. «Наука». 1973.
13. Гельфанд И.М., Райков Д. А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормировочные кольца. М. Физматгиз. 1960.
14. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Обобщенные функции. Вып.1. обобщенные функции и действия над ними. М.1958.
15. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 2.

Пространства основных и обобщенных функций.

16. Глазман И.М., Любич Ю И. Конечномерный линейный анализ. М. «Наука», 1969.
17. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория, М. ИЛ, , 1962.
18. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М. «Мир», 1966.
19. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. «Мир», М., 1974.
20. Дьюденнне Ж. Основы современного анализа. М. Мир. 1964.
- 21.Дэй М.М. Линейные нормированные пространства. М. ИЛ. 1961.
- 22.Иосида К. Функциональный анализ. М. «Мир», 1967.
- 23.Канторович Л. В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
- 24.Келли Дж. Л. Общая топология. М. «Наука», 1968.
- 25.Наймарк М.А. Нормированные кольца. М. «Наука», 1968.
- 26.Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.Гостехиздат. 1949.
27. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, М. «Наука», 1974.
28. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу. М. ИЛ, 1954.
29. Робертсон А. П., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М. «Мир», 1967.
30. Халмош П. Теория меры. М. «Мир», 1953.
31. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М. Гостехиздат, 1937.
32. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М. ИЛ, 1962.

ASOSIY BELGILASHLAR

K – skalyarlar maydoni	$\chi_A - A$ - to‘plamning xarakteristik funksiyasi
R – haqiqiy sonlar to‘plami	$\geq >$ -tartib (qisman tartib) belgisi
C – kompleks sonlar to‘plami	\sup, \vee - supremum
\forall - umumiylilik kvantori	\inf, \wedge - infimum
\exists - mavjudlik kvantori	$\{x_n\}$ - ketma-ketlik
$a \in A$ - a element A to‘plamga tegishli	θ - vektor fazoning nol elementi
$a \in A$ - a element A to‘plamga tegishli emas	$L[A]$, - A to‘plamning chiziqli qobig‘i
$B \subset A - B$ to‘plam A to‘plamning qism to‘plami	E/E_0 - faktor fazo
\emptyset - bo‘sh to‘plam	$Z(E,F)$ - chiziqli operatorlar fazosi
\cup - to‘plamlarning yig‘indisi (birlashmasi)	$L(E,F)$ - uzluksiz chiziqli operatorlar
\cap - to‘plamlarning ko‘paytmasi (kesishmasi)	E^* -algebraik qo‘shma vektor fazo
$\Pi \times$ - to‘plamlarning to‘g‘ri (Dekart) ko‘paytmasi	E' - topologik qo‘shma vektor fazo
$A \setminus B - A$ - to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi	\oplus -to‘g‘ri yig‘indi ortogonal to‘g‘ri yig‘indi
\Leftrightarrow - ekvivalentlik belgisi	$f : A \rightarrow B$ -aks ettirish
\Rightarrow - mantiqiy xulosa	f^{-1} - teskari aks ettirish
	* - teorema isbotining tugaganligi

MUNDARIJA

BIRINCHI NASHRIGA SUZ BOSHI.....	2
IKKINCHI NASHRIGA SUZ BOSHI	3
I QISM. ASOSIY FAZOLAR.....	4
I BOB . VEKTOR FAZOLAR.....	4
1.1-§. n o‘lchamli vektor fazo	4
1.2-§. Vektor fazoning ta’rifi va misollar	5
1.3-§. Chiziqli bog‘lanish. O‘lcham.....	7
1.4-§. Vektor qism fazo. Qavariq to‘plamlar	8
1.5-§. Faktor fazolar va fazolarning ko‘paytmasi	10
1.6-§. Chiziqli aks ettirishlar.....	12
Mashq uchun misollar	15
II BOB. METRIK FAZOLAR	18
2.1-§. Metrik fazolar.....	18
2.2-§. Metrik fazoda yaqinlashish tushunchasi	22
2.3-§. Metrik fazolarda uzluksiz aks ettirishlar va funksionallar.....	25
2.4- §. Metrik fazoda ochiq va yopiq to‘plamlar	27
2.5-§. Separabel metrik fazolar	30
2.6- §. To‘la metrik fazolar	31
2.7-§. To‘ldiruvchi fazo haqidagi teorema.....	37
2.8-§. Metrik fazoda kompakt to‘plamlar	39
2.9-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tatbiqlari	47
Mashq uchun masalalar	50
III BOB. TOPOLOGIK FAZOLAR	53
3.1-§. Topologik fazolarning ta’rifi va misollar	53
3.2- §. Atroflar. Yopiq to‘plamlar	54
3. 3- §. Topologik fazolarni uzluksiz aks ettirish.....	58
3.4- §. Kompaktlilik	59
3.5-§. Fazolarning topologik ko‘paytmalari	61
Mashq uchun masalalar.....	63
IV BOB. NORMALANGAN FAZOLAR	65
4.1- §. Normalangan fazo ta’rifi va uning ba’zi xossalari	65
4.2-§ Evklid fazolari.....	71
4.3- §. Gilbert fazolari	77

4.4- §. Qism fazolar. Ortogonal to‘ldiruvchilar	80
4.5- §. Kompleks Evklid fazolari	83
Mashq uchun masalalar.....	86
V BOB. TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLAR	88
5.1-§. Topologik vektor fazoning ta’rifi va ba’zi xossalari	88
5.2-§. Yarimnormalar	92
5.3-§. Xan-Banax teoremasi.....	96
5.4-§. Topologik vektor fazolarni metrikalashtirish va normalashtirish	99
Mashq uchun masalalar.....	103
VI BOB. QISMAN TARTIBLANGAN FAZOLAR.....	105
6.1-§. Qisman tartiblangan to‘plamlar	105
6.2-§. Panjaralar	108
6.3- §. Bul algebralari.....	111
6.4-§. Vektor panjaralar	113
6.5- §. Qisman tartiblangan topologik vektor fazolar	119
Mashq uchun masalalar.....	122
II QISM. OPERATORLAR NAZARIYASI	123
VII BOB. TOPOLOGIK VEKTOR FAZOLARDA UZLUKSIZ OPERATORLAR.....	123
7.1- §. Uzluksiz chiziqli operatorlar.....	123
7.2- §. Tekis chegaralanganlik prinsipi. Ochiq aks ettirish va yopiq grafik haqidagi teoremlar	129
7.3-§. Normalangan fazoda chiziqli operatorning normasi	134
7.4-§. Normalangan fazolarda funksional analizning asosiy prinsiplari	140
7. 5-§. Chiziqli operatorlar fazosida topologiyalar	145
Mashq uchun masalalar.....	150
VIII BOB. CHIZIQLI FUNKSIONALLAR VA QO‘SHMA FAZO.....	153
8.1 -§. Normalangan fazolarda chiziqli funksionallar va gipertekisliklar	153
8.2-§ Ikkinci qo‘shma fazo va refleksivlik	162
8.3-§. Sust topologiya va sust yaqinlashish	165
8.5-§. Qo‘shma operatorlar	170
Mashq uchun masalalar.....	176
IX BOB. SPEKTRAL ANALIZ ELEMENTLARI.....	178
9.1-§. Spektr va rezolventa.....	178
9.2-§. Proeksion operatorlar	187

9.3-§. Chekli o'lchamli Evklid fazosida o'z-o'ziga qo'shma operator uchun spektral teorema	193
9.4-§. Spektral teorema	197
Mashq uchun masalalar	207
X BOB. TO'LA UZLUKSIZ OPERATORLAR VA INTEGRAL TENGLAMALAR	208
10.1-§. Banax fazolarida to'la uzluksiz operatorlar	208
10.2- §. To'la uzluksiz operatorlarning xossalari	211
10.3- §. Gilbert fazosida to'la uzluksiz operatorlar	215
10.4-§. Chiziqli integral tenglamalar	220
10.5- §. Fredgolm teoremlari.....	224
Mashq uchun masalalar	230
XI BOB. BANAX ALGEBRALARI.....	231
11.1- §. Banax algebralaring ta'rifi.....	231
11.2- §. Spektr va rezolventa.....	234
11.3-§. Ideallar, faktor-algebralalar va kompleks gomomorfizmlar.....	239
11.4-§. Kommutativ Banax algebralarni ifodalash	245
11.5-§. Involutiv algebralar.....	248
Mashq uchun masalalar	252
XII BOB. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR.....	254
FURYE ALMASHTIRISHLARI.....	254
12.1-§. Umumlashgan funksiya tushunchasi	254
12.2-§. Umumlashgan funksiyalar ustida amallar	258
12.3-§. Furye almashtirishi	265
Mashq uchun masalalar	275
XIII BOB. NORMALANGAN FAZOLARDADA DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB ELEMENTLARI.....	277
13.1-§. Kuchli va sust differensiallar	277
Chekli orttirmalar formulasi.....	281
13. 2-§. Vektor funksiyalardan olingan integral	282
13.3- §. Yuqori tartibli hosilalar.....	285
Mashq uchun masalalar	288
XIV BOB. VARIATSION HISOB ELEMENTLARI.....	290
14.1- §. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari	290

14. 2-§. $\int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt$ ko‘riishdagi funksionallarni eksteremumga tekshirish	294
14.3- §. Izoperimetrik masala. Shartli ekstremum	300
14.4-§. Ekstremumni topishga doir misollar.....	303
Mashq uchun masalalar	308
ADABIYOT	310
ASOSIY ADABIYOT.....	310
QO‘SHIMCHA ADABIYOT	310
ASOSIY BELGILASHLAR	312