5-§. Chiziqli fazolar

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushunchalardan hisoblanadi. Quyida C bilan kompleks sonlar, R bilan haqiqiy sonlar to‘plamini belgilaymiz.

5.1-ta’rif. *Agar elementlari* $x, y, z, \ldots$ *bo‘lgan* L *to‘plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo‘lsa:*

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ *elementlarga ularning yig‘indisi deb ataluvchi aniq bir* $x + y \in L$ *element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy* $x, y, z \in L$ *elementlar uchun*

1) $x + y = y + x$ *(kommutativlik),*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(assotsiativlik),*

3) *L da shunday* θ *element mavjud bo‘lib,* $x + \theta = x$ *(nolning mavjudligi),*

4) *shunday* $-x \in L$ *element mavjud bo‘lib,* $x + (-x) = \theta$ *(qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;*

II. ixtiyoriy $x \in L$ *element va ixtiyoriy* α *son (* $\alpha \in R$ *yoki* $\alpha \in C$ *) uchun* x *elementning* α *songa ko‘paytmasi deb ataluvchi aniq bir* $\alpha x \in L$ *element mos qo‘yilgan bo‘lib, ixtiyoriy* $x, y \in L$ *va ixtiyoriy* α, β *sonlar uchun*

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta) x,$

6) $1 \cdot x = x,$

7) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x,$

8) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

aksiomalar bajarilsa, u holda L *to‘plam chiziqli fazo deb ataladi.*

Ta’rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari deb ataladi.

Ta’rifda foydalanilgan sonlar zahirasiga (haqiqiy sonlar R yoki kompleks sonlar C) bog‘liq holda chiziqli fazo haqiqiy yoki kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

Chiziqli fazolarga misollar keltiramiz.

5.1-misol. $\mathrm{L} = R$ haqiqiy sonlar to‘plami odatdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi. $\mathrm{L} = \mathrm{C}$ kompleks sonlar to‘plami ham kompleks sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan kompleks chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.2. $L = R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in R, i = 1,2,\ldots,n\} - n$ ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlari to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi. Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ lar uchun

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{5.1}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \tag{5.2}$$

R^n - to‘plam (5.1) va (5.2) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u n - o‘lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataladi.

5.3. $L = C^n \equiv \{z = (z_1, z_2, ..., z_n),\ z_k \in C,\ k = 1,2,...,n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (5.1) va (5.2) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi. C^n - to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi va u n - o‘lchamli kompleks chiziqli fazo deb ataladi.

5.4. $L = C[a,b] - [a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to‘plami. Funksiyalarni qo‘shish va funksiyani songa ko‘paytirish amallari mos ravishda

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{5.3}$$

va

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \tag{5.4}$$

ko‘rinishda aniqlanadi. (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C[a,b]$ to‘plam chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.5. $\ell_2 \equiv \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ - kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu yerda elementlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots), \tag{5.5}$$

$$\alpha x = \alpha (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots), \quad \alpha \in C. \qquad (5.6)$$

Yig‘indi $x + y \in \ell_2$ ekanligi $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (5.5) va (5.6) tengliklar bilan aniqlangan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, ℓ_2 to‘plam kompleks chiziqli fazo bo‘ladi.

5.6. $c_0 \equiv \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots): \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \}$ - nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plamda ham qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (5.5) va (5.6) tengliklar ko‘rinishida aniqlanadi va ular chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, c_0 to‘plam chiziqli fazo bo‘ladi.

5.7. $c \equiv \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots): \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \}$ - yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 5.5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

5.8. $L = m$ - barcha chegaralangan ketma-ketliklar to‘plami. Bu to‘plam ham 5.5-misolda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

Endi haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanida xossalari o‘rganilgan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamini qaraymiz.

5.9. Berilgan $[a,b]$ kesmada Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar to‘plamini $\widetilde{L}_1[a,b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to‘plamda elementlarni qo‘shish va elementni songa ko‘paytirish amallari (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlanadi. $\widetilde{L}_1[a,b]$ to‘plam funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq. Chunki, integrallanuvchi f va g funksiyalar yig‘indisi $f+g$ ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\, dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

tenglik o‘rinli. Xuddi shunday integrallanuvchi funksiyaning songa ko‘paytmasi yana integrallanuvchi funksiyadir. Funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari esa chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $\widetilde{L}_1[a,b]$ to‘plam chiziqli fazo bo‘ladi.

5.10. Berilgan $[a,b]$ kesmada $p(p>1)$ -darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi funksiyalar to‘plamini $\widetilde{L}_p[a,b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to‘plamda ham qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari (5.3) va (5.4) tengliklar bilan aniqlanadi va $\widetilde{L}_p[a,b]$ to‘plam chiziqli fazo tashkil qiladi. Yig‘indi $f+g\in\widetilde{L}_p[a,b]$ ekanligi Minkovskiy tengsizligi

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

dan kelib chiqadi.

5.11. Berilgan $[a,b]$ kesmada aniqlangan va o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamini $V[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu to‘plamda ham funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari 5.4-misoldagidek kiritiladi. Ishonch hosil qilish mumkinki, $V[a,b]$ to‘plam funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Hosil qilingan fazo o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi deyiladi va $V[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.2-ta’rif. *Bizga L va L^* chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin. Agar bu fazolar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lib,*

$$x\leftrightarrow x^* \qquad \text{va} \qquad y\leftrightarrow y^*, \qquad (x,y\in L,\ x^*,y^*\in L^*)$$

ekanligidan

$$x+y\leftrightarrow x^*+y^* \qquad \text{va} \qquad \alpha x\leftrightarrow \alpha x^*, \qquad (\alpha-\text{ixtiyoriy son})$$

ekanligi kelib chiqsa, u holda L va L^* chiziqli fazolar o‘zaro izomorf fazolar deyiladi.

Izomorf fazolarni aynan bitta fazoning har xil ko‘rinishi deb qarash mumkin.

5.3-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar mavjud bo'lib,*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{5.7}$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (5.7) tenglikdan

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.

Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema chiziqli erkli deyiladi.

5.4-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoda n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy $n+1$ ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda L n - o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = n$ kabi yoziladi. n - o'lchamli L chiziqli fazoning ixtiyoriy n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.*

5.5-ta'rif. *Agar L chiziqli fazoda ixtiyoriy $n \in N$ uchun n elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda L cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va $\dim L = \infty$ ko'rinishda yoziladi.*

R^n va C^n fazolar n o'lchamli chiziqli fazolardir. $L = C[a,b]$ fazodan boshlab 5.4-5.11 misollarda keltirilgan barcha fazolar cheksiz o'lchamli fazolardir. Masalan, ℓ_2 fazoda

$$\{e_n = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n},0,\ldots)\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.8}$$

sistema cheksiz chiziqli erkli sistemaga misol bo'ladi.

5.1. Chiziqli fazoning qism fazosi

Bizga L chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan L' qism to'plami berilgan bo'lsin.

5.6-ta'rif. *Agar L' ning o'zi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' to'plam L ning qism fazosi deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a, b \in C(R)$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ bo'lsa, L' qism fazo deyiladi.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni o'zining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

5.7-ta'rif. *L chiziqli fazodan farqli va hech bo'lmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.*

5.12-misol. $\ell_2 \subset c_0 \subset c \subset m$ fazolarning har biri o'zidan keyingilari uchun xos qism fazo bo'ladi.

5.13. Endi $[a,b]$ kesmada $p(p \ge 1)$-darajasi bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi $\widetilde{L}_p[a,b]$ ni qaraymiz. Bu fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil bo'lgan qism to'plamni $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ ko'rinishda belgilaymiz. Ma'lumki, nolga ekvivalent funksiyalar yig'indisi yana nolga ekvivalent bo'lgan funksiya bo'ladi. Nolga ekvivalent funksiyaning songa ko'paytmasi ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Demak, $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ to'plam $\widetilde{L}_p[a,b]$ fazoning xos qism fazosi bo'ladi.

5.14. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq to'plam. Shuning uchun u $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $AC[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.15. $V[a,b]$ fazoda $f(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plam funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq to'plamdir. Shuning uchun u $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi va u $V_0[a,b]$ simvol bilan belgilanadi.

5.16. Yana o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Ammo ikki monoton funksiyaning yig'indisi har doim monoton funksiya bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin. $x(t)=t^2+1$, $y(t)=-2t$ funksiyalarning har biri $[0,2]$ kesmada monoton funksiya bo'ladi, ammo ularning yig'indisi $x(t)+y(t)=(t-1)^2$ funksiya $[0,2]$ kesmada monoton emas. Demak, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'la olmaydi. Demak, chiziqli fazoning har qanday qism to'plami qism fazo tashkil qilavermas ekan.

Bizga L fazoning bo'sh bo'lmagan $\{x_i\}$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal qism fazo mavjud.

Haqiqatan ham, $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi hech bo'lmaganda bitta qism fazo mavjud, bu L ning o'zi.

Ixtiyoriy sondagi qism fazolarning kesishmasi yana qism fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, agar

$$L^* = \bigcap_i L_i$$

bo'lib $x, y \in L^*$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy i uchun $x, y \in L_i$ bo'ladi. L_i qism fazo bo'lganligi uchun $\alpha x + \beta y \in L_i$ munosabat barcha α, β sonlar uchun o'rinli. Demak, $\alpha x + \beta y \in L^*$ bo'ladi.

Endi $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi L ning barcha qism fazolarini olamiz va ularning kesishmasini qaraymiz hamda uni $L(\{x_i\})$ orqali belgilaymiz. $L(\{x_i\})$ qism fazo $\{x_i\}$ sistemani saqlovchi minimal qism fazo bo'ladi. Bu $L(\{x_i\})$ minimal qism fazo $\{x_i\}$ «sistemadan hosil bo'lgan» qism fazo yoki $\{x_i\}$ sistemaning chiziqli qobig'i deyiladi.