8-§. Chiziqli normalangan fazolar

Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo‘q. Ko‘plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga to‘g‘ri keladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi. Normalangan fazolar nazariyasi S.Banax va boshqa matematiklar tomonidan rivojlantirilgan.

8.1-ta’rif. *Bizga* L *chiziqli fazo va unda aniqlangan* p *funksional berilgan bo‘lsin. Agar* p *quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:*

1) $p(x) \geq 0, \ \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$

2) $p(ax) = |a| p(x), \ \forall a \in C, \ \forall x \in L$*;*

3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in L$.

8.2-ta’rif. *Norma kiritilgan* L *chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va* $x \in L$ *elementning normasi* $\|x\|$ *orqali belgilanadi.*

Agar L - normalangan fazoda $x, y \in L$ elementlar jufti uchun

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

sonni mos qo‘ysak, ρ funksional metrikaning 1-3 aksiomalarini qanoatlantiradi (1.1-ta’rifga qarang). Metrika aksiomalarining bajarilishi normaning 1-3 shartlaridan bevosita kelib chiqadi. Demak, har qanday chiziqli normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Metrik fazolarda o‘rinli bo‘lgan barcha tasdiqlar (ma’lumotlar) chiziqli normalangan fazolarda ham o‘rinli.

X chiziqli normalangan fazoda $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

8.3-ta’rif. *Biror* $x \in X$ *va ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ *mavjud bo‘lib, barcha* $n > n_0$ *larda* $\|x_n - x\| < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik* $x \in X$ *elementga yaqinlashadi deyiladi.*

8.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ *mavjud bo'lib, barcha* $n > n_0$ *va* $p \in N$ *larda* $\| x_{n+p} - x_n \| < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ *- fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

8.3 va 8.4 ta'riflarni 2.6 va 3.1 ta'riflar bilan taqqoslang.

8.5-ta'rif. *Agar* X *chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* X *to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha aytish mumkin: Agar (X,ρ) , $\rho(x,y) = \| x - y \|$ metrik fazo to'la bo'lsa, u holda X *to'la normalangan fazo* deyiladi.

Chiziqli normalangan fazolarga misollar keltiramiz.

8.1-misol. $L = R$ - haqiqiy sonlar to'plami. Agar ixtiyoriy $x \in R$ soni uchun $\| x \| = | x |$ sonni mos qo'ysak, R normalangan fazoga aylanadi.

8.2. $L = C$ - kompleks sonlar to'plami. Bu yerda ham norma yuqoridagidek kiritiladi: $\| z \| = | z |$.

8.3. $L = R^n$ - n - o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ , \quad \| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \| x \|_\infty = \max_{1 \le k \le n} | x_k |, \ \ x \in R^n$$

funksionallar norma shartlarini qanoatlantiradi. R^n chiziqli fazoda $\| \cdot \|_p$ norma kiritilgan bo'lsa, uni R_p^n, agar $\| \cdot \|_\infty$ norma kiritilgan bo'lsa uni R_∞^n deb belgilaymiz (1.3-1.5, 1.11-misollar bilan taqqoslang).

8.4. $L = C^n$ - n o'lchamli kompleks chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\| z \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | z_k |^2}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi.

8.5. $C[a,b]$ – $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f \in C[a,b]$ elementning normasi (1.6-misol bilan taqqoslang)

$$\| f \| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|,$$

tenglik bilan aniqlanadi. Xuddi 8.3-misoldagidek $C[a,b]$ chiziqli fazoda norma

$$\| f \|_1 = \int_a^b | f(t) | dt$$

formula vositasida kiritilgan bo‘lsa, uni $C_1[a,b]$ (1.9-misol), agar norma

$$\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b | f(t) |^2 \, dt}$$

tenglik orqali kiritilgan bo‘lsa uni $C_2[a,b]$ (1.8-misolga qarang) deb belgilaymiz.

Quyida biz chiziqli fazo va unda kiritilgan normalarni beramiz.

8.6. ℓ_2 fazoda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \; .$$

8.7. c_0, c, m fazolarda x elementning normasi quyidagicha kiritiladi:

$$\| x \| = \sup_{1 \le n < \infty} |x_n|.$$

ℓ_2, c_0, c va m fazolarning aniqlanishi 5.5-5.8 misollarda keltirilgan.

8.8. $M[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to‘plamini belgilaymiz. Bu to‘plam odatdagi funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x) = \sup_{a \le t \le b} | x(t) |, \quad x \in M[a,b] \tag{8.1}$$

funksional norma shartlarini qanoatlantiradi va $M[a,b]$ chiziqli normalangan fazo bo‘ladi.

8.9. $C^{(n)}[a,b]$ - bilan $[a,b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to‘plamini belgilaymiz. $C^{(n)}[a,b]$ to‘plam odatdagi funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoda aniqlangan

$$p(x)=\max_{a\le t\le b}|x(t)|+\sum_{k=1}^{n}\max_{a\le t\le b}\left|x^{(k)}(t)\right|,\quad x\in C^{(n)}[a,b] \qquad (8.2)$$

funksional normaning 1-3 shartlarini qanoatlantiradi.

8.10. $[a,b]$ kesmada aniqlangan o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ (5.11-misolga qarang) ni qaraymiz. Bu fazoda

$$p:V[a,b]\to R,\quad p(x)=|x(a)|+V_a^b[x] \qquad (8.3)$$

funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi va $V[a,b]$ chiziqli normalangan fazo bo‘ladi.

Endi Banax fazolariga misollar keltiramiz.

8.11. R^n, R_p^n, $C[a,b]$, $\ell_p, p\ge 1$, c, c_0 fazolarni to‘lalikka tekshiring.

Yechish. To‘la metrik fazolar (3-paragraf) mavzusidan ma’lumki R^n, R_p^n, $C[a,b]$, ℓ_p, $p\ge 1$, c, c_0 lar (3.3-3.7 misollarga qarang) to‘la metrik fazolar edi. Shuning uchun ular to‘la normalangan fazolar, ya’ni Banax fazolari bo‘ladi.

8.12. $C_2[a,b]$ to‘la bo‘lmagan (3.8-misolga qarang) metrik fazo edi. Shuning uchun $C_2[a,b]$ to‘la bo‘lmagan normalangan fazoga misol bo‘ladi.

8.1. Normalangan fazoning qism fazosi

Biz yuqorida chiziqli fazoning qism fazosi tushunchasini kiritgan edik, ya’ni agar ixtiyoriy $x,y\in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α,β sonlar uchun $\alpha x+\beta y\in L_0$ bo‘lsa, bo‘sh bo‘lmagan $L_0\subset L$ qism to‘plam, qism fazo deyilar edi.

Normalangan fazolarda yopiq qism fazolar, ya’ni barcha limitik nuqtalarini o‘zida saqlovchi qism fazolar muhim ahamiyatga ega. Chekli o‘lchamli normalangan fazolarda har qanday qism fazo yopiqdir. Cheksiz o‘lchamli normalangan fazolarda qism fazolar doim yopiq bo‘lavermaydi. Quyida keltiriladigan misol fikrimizni tasdiqlaydi.

8.13. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a,b]$ dagi barcha ko‘phadlar to‘plami qism fazo tashkil qiladi, lekin u yopiq emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$P_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \Lambda + \frac{t^n}{n!}$$

ko‘phadlar ketma-ketligini qaraymiz. Ravshanki, $\{P_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lib, uning limiti $x(t) = e^t$ ga teng. $x(t) = e^t$ funksiya esa ko‘phad emas.

Normalangan fazolarda asosan yopiq chiziqli qism fazolarni qaraymiz. Shuning uchun 5-§ da kiritilgan qism fazo atamasiga o‘zgartirish kiritish tabiiydir.

8.6-ta’rif. *Agar L normalangan fazoning $L_0 \subset L$ qism to‘plamida ixtiyoriy $x, y \in L_0$ elementlar va ixtiyoriy α, β sonlar uchun $\alpha x + \beta y \in L_0$ bo‘lsa L_0 chiziqli ko‘pxillilik deyiladi. Agar $L_0 \subset L$ qism to‘plam yopiq chiziqli ko‘pxillilik bo‘lsa, L_0 qism to‘plam L ning qism fazosi deyiladi.*

8.14. Uzluksiz funksiyalar fazosi $C[-1,1]$ dagi barcha toq funksiyalar to‘plami $C^-[-1,1]$ (5-§ ning 4-chi topshirig‘iga qarang) chiziqli ko‘pxillilik tashkil qiladi va u yopiq. Haqiqatan ham, $\{x_n\}$ toq funksiyalar ketma-ketligi biror $x \in C[-1,1]$ elementga yaqinlashsin. U holda

$$x(-t) = \lim_{n\to\infty} x_n(-t) = \lim_{n\to\infty}(-x_n(t)) = -\lim_{n\to\infty} x_n(t) = -x(t).$$

8.15. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $x(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi o‘zgarishi chegaralangan funksiyalar to‘plamini $V_0[a,b]$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki, $V_0[a,b]$ to‘plam $V[a,b]$ fazoning (5.15-misolga qarang) qism fazosi, ya’ni yopiq chiziqli ko‘pxillilik bo‘ladi. Bu fazoda ham x elementning normasi (8.3) tenglik bilan aniqlanadi. (8.3) tenglik $V_0[a,b]$ fazoda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\| x \| = V_a^b[x] \tag{8.4}$$

va u norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $V_0[a,b]$ to‘plam - chiziqli normalangan fazo bo‘ladi.

8.16. $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $x(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi absolyut uzluksiz funksiyalar to‘plamini $AC_0[a,b]$ bilan belgilaymiz. Ma’lumki,

$AC_0[a,b]$ to'plam $V_0[a,b]$ fazoning (8.15-misolga qarang) qism fazosi bo'ladi. Shuning uchun bu fazoda ham x elementning normasi (8.4) tenglik bilan aniqlanadi va $AC_0[a,b]$ to'plam - chiziqli normalangan fazo hosil qiladi.

8.2. Normalangan fazoning faktor fazosi

Bizga L normalangan fazo va uning $L_0 \subset L$ qism fazosi berilgan bo'lsin. $P = L / L_0$ faktor fazoni qaraymiz va unda normani quyidagicha aniqlaymiz. Har bir $\xi \in P$ qo'shni sinfga

$$\| \xi \| = \inf_{x \in \xi} \| x \| \tag{8.5}$$

sonni mos qo'ysak, bu funksional norma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, L / L_0 faktor fazo ham normalangan fazo bo'lar ekan.

Agar L to'la normalangan fazo bo'lsa, L / L_0 faktor fazo ham (8.5) normaga nisbatan to'la fazo bo'ladi [1].

8.17-misol. Faktor fazoga misol keltirishni tushunish nisbatan osonroq bo'lgan R^3 fazodan boshlaymiz. $L = R^3$ fazoning xos qism fazosi $L' = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 = 0\}$ ni qaraymiz va L / L' faktor fazoning elementlarini, ya'ni qo'shni sinflarning tavsifini beramiz. Ma'lumki, $x - y = (x_1 - x_2, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \in L'$ bo'lishi uchun $x_3 = y_3$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak, L / L' faktor fazoning elementlari Ox_1x_2 tekislikka parallel bo'lgan tekisliklardan iborat. Masalan, $(a, b, c) \in R^3$ nuqtani o'zida saqlovchi ξ qo'shni sinf Ox_1x_2 tekisligiga parallel bo'lgan $x_3 = c$ tekislikdan iborat. Bu faktor fazoda ξ elementning normasi

$$p(\xi) = \inf_{x \in \xi} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \inf_{x_1, x_2 \in R} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = | x_3 |$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu faktor fazoning o'lchami 1 ga teng va u to'la normalangan fazo.

8.18. $L_p[a,b]$ faktor fazoni (5.18-misolga qarang) qaraymiz. Agar $L_p[a,b]$ dan olingan har bir ξ qo‘shni sinfga uning ixtiyoriy $f \in \xi$ vakili yordamida aniqlanuvchi va vakilning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan

$$\| \xi \| = \inf_{f \in \xi} \left(\int_a^b | f(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \| f \| \tag{8.6}$$

sonni mos qo‘ysak, bu moslik $L_p[a,b]$ da norma aniqlaydi va $L_p[a,b]$, $p \ge 1$ chiziqli normalangan fazoga aylanadi. Bu fazo $[a,b]$ kesmada aniqlangan va p -chi darajasi bilan Lebeg ma’nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi deb ataladi. Barcha $p \ge 1$ larda $L_p[a,b]$ fazo to‘la normalangan fazo, ya’ni Banax fazosi bo‘ladi [1].

8.19. O‘zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni (8.10-misolga qarang) qaraymiz. Unda o‘zgarmas funksiyalardan iborat $L' = \{x \in V[a,b]: \ x(t) = const\}$ bir o‘lchamli qism fazoni olamiz. Endi $V[a,b]$ chiziqli fazoning L' qism fazo bo‘yicha faktor fazosini qaraymiz. Faktor fazo ta’rifiga ko‘ra $x, y \in V[a,b]$ elementlar bitta qo‘shni sinfda yotishi uchun $x(t) - y(t) \equiv const$ bo‘lishi zarur va yetarli. Boshqacha aytganda $y \in V[a,b]$ element x elementni saqlovchi ξ qo‘shni sinfda yotishi uchun $y(t) \equiv x(t) - C$, $C = const$ ko‘rinishda tasvirlanishi zarur va yetarli. Ma’lumki, har qanday faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\| \xi \| = \inf_{y \in \xi} \| y \| = \inf_{C \in R} \left(|x(a) - C| + V_a^b[x - C] \right). \tag{8.7}$$

O‘zgarishi chegaralangan funksiyalar xossalaridan ma’lumki, istalgan C o‘zgarmas uchun

$$V_a^b[x - C] = V_a^b[x]$$

tenglik o‘rinli. $| x(a) - C |$ ning aniq quyi chegarasi esa nolga teng. Bulardan foydalanib, (8.7) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\| \xi \| = V_a^b[x], \ \ x \in \xi \quad \text{va} \quad x(a) = 0. \tag{8.8}$$

Shunday qilib ξ qo‘shni sinfga, shu sinfning a nuqtada nolga aylanuvchi x elementini mos qo‘yish bilan $V[a,b]/L'$ faktor fazo va $V_0[a,b]$ (8.15-misolga qarang) fazolar o‘rtasida izomorfizm o‘rnatiladi. Demak, $V[a,b]/L'$ va $V_0[a,b]$ fazolar o‘zaro izomorf ekan.

8.20. 7.6-misolda keltirilgan $L_0 = \{x \in C[-1,1]:\ x(t) \equiv 0,\ t \in [-1,0]\}$ qism fazoni qaraymiz. L_0 yopiq qism fazo bo‘ladi (mustaqil isbotlang). $C[-1,1]/L_0$ faktor fazoda ξ elementning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| = \max_{t\in[-1,0]} |x(t)|. \tag{8.9}$$

$C[-1,1]$ Banax fazosi bo‘lganligi uchun, $C[-1,1]/L_0$ faktor fazo ham Banax fazosi bo‘ladi.

8.21. Shuni ta’kidlash lozimki, $L_p[a,b]$, $p \geq 1$ fazolar to‘la normalangan fazolar, ya’ni Banax fazolari bo‘ladi. Ma’lumki, har qanday normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Agar biz $C_p[a,b]$, $p \geq 1$ to‘la bo‘lmagan metrik fazoni to‘ldirsak, uning to‘ldirmasi $L_p[a,b]$, $p \geq 1$ fazo bo‘ladi.