

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ÇEVRE MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = c_1x^3 + c_2x^2$ eğrisini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferansiyel denklemi elde ediniz. Elde ettiğiniz denklemi mertebe, derece ve lineerlik yönünden inceleyiniz.
2. $\left(e^x + \frac{2}{y}e^x + y\right)dx + \left(\frac{1}{y}e^x + 2x\right)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü uygun bir integrasyon çarpanı yardımıyla elde ediniz.
3. $y' = p$ olmak üzere $y = xp - p^2$ denkleminin çözümlərini bulunuz.
4. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = x^2 e^{2x}$ denklemi veriliyor. Bu denkleme ilişkin homojen kısma ait y_h çözümünü elde ediniz. Daha sonra ise y_p özel çözümünün belirsiz katsayılar metodu ile nasıl seçilmesi gerektiğini nedenleri ile belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.)

SÜRE: 70 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

Gevre

$$1) \quad y = c_1 x^3 + c_2 x^2$$

$$y' = 3c_1 x^2 + 2c_2 x$$

$$y'' = 6c_1 x + 2c_2$$

$$c_1 = \frac{xy'' - y'}{3x^2}$$

$$c_2 = \frac{2y' - xy''}{2x}$$

$$\boxed{x^2 y'' - 4xy' - 6y = 0}$$

2. mt, 1. derrce, linear

$$2) \quad \left(e^x + \underbrace{\frac{2}{y} e^x + y}_P \right) dx + \left(\underbrace{\frac{1}{y} e^x + 2x}_Q \right) dy = 0$$

$$P_y = -\frac{2}{y^2} e^x + 1 \quad Q_x = \frac{1}{y} e^x + 2 \quad \frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{1}{y}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$$\left(ye^x + 2e^x + y^2 \right) dx + \left(\underbrace{e^x + 2xy}_Q \right) dy = 0 \quad \begin{aligned} P'_y &= e^x + 2y \\ Q'_x &= e^x + 2y \end{aligned}$$

Tam.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + 2xy \Rightarrow f(x,y) = ye^x + xy^2 + h(x)$$

$$ye^x + 2e^x + y^2 = ye^x + y^2 + h'(x) \quad h'(x) = 2e^x + C$$

$$\boxed{f(x,y) = ye^x + xy^2 + 2e^x = C}$$

①

$$3) y = xp - p^2 \text{ (Clairaut)}$$

x' e göre tarev alalım

$$p = p + x \frac{dp}{dx} - 2p \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx - c^2} \quad \text{Genel çözüm}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2p = 0 \\ y = xp - p^2 \end{array} \right\} \quad p = \frac{x}{2} \quad y = x \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \\ y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2}} \quad \text{Aykiri çözüm}$$

$$4) y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = x^2 e^{2x}$$

$$y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0 \Rightarrow r^4 - 4r^3 + 4r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 - 4r + 4) = 0 \quad r_1 = r_2 = 0$$

$$r_3 = r_4 = 2$$

Temel çözüm kümeleri $\{1, x, e^{2x}, x e^{2x}\}$

$$y_h = c_1 + c_2 x + e^{2x} (c_3 + c_4 x)$$

$$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C) e^{2x}$$

$$\downarrow \\ r_3 = r_4 = 2$$