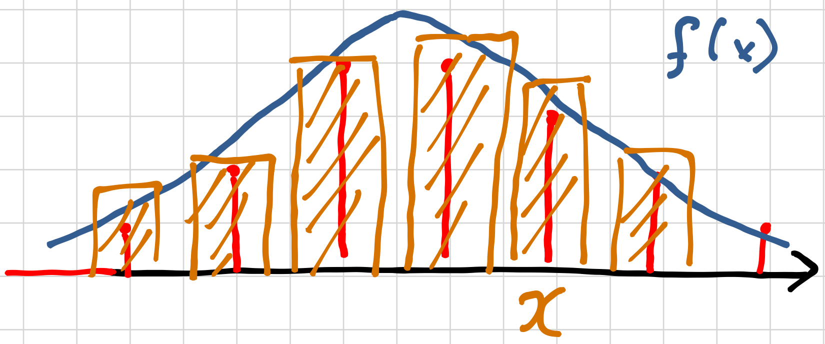


$np > 10$ ve

$n(1-p) > 10$

X binom dağılımlı bi R.D. olsun

$$P(X \geq x) = P(X \geq x - 0.5)$$

$$P(X \leq x) = P(X \leq x + 0.5)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 - 0.5 \leq X \leq x_2 + 0.5)$$

Buna süreklilik düzeltmesi deniyor.

Örnek

Önceki soruda $p = 10^{-5}$ ve $n = 16 \times 10^{6}$ idi

$n.p = 160$ $\quad n(1-p) \gg$ o yüzden normal dağılım kullanarak yaklaşık değerini bulabiliriz.

$$P(X \leq 150) = P(X \leq 150.5) = P\left(\frac{X - 160}{\sqrt{160 \times (1 - 10^{-5})}} \leq \frac{150.5 - 160}{\sqrt{160 \times (1 - 10^{-5})}}\right)$$

$$= P(Z \leq -0.75)$$

(tablodan) $\longrightarrow$ $= \underline{\underline{0.227}}$

Poisson Dağılımının Normal Dağılım ile Tahmini

Tanım X, parametresi λ olan Poisson dağılımlı bir R.D. ise ve $\lambda > 10$ ise

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$ yaklaşık olarak

Standart Normal dağılımlı bir rastgele degiskendir.

$\boxed{\text{Süreklilik düzeltmesi bu yaklaşıma da uygulanır } \nabla}$

Örnek

Bir yüzeydeki asbest parçacık sayısı Poisson dağılımı ile modelleniyor ve ortalamada m^2 başına 1000 parçacıktır. 1 m^2'de 950 veya daha az parçacık olma ihtimali nedir?

X: Poisson, $\lambda = 1000$ parç/m^2 $\times 1\ m^2 = 1000$

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000} \cdot 1000^x}{x!} \quad : \rightarrow \text{Zor!}$$

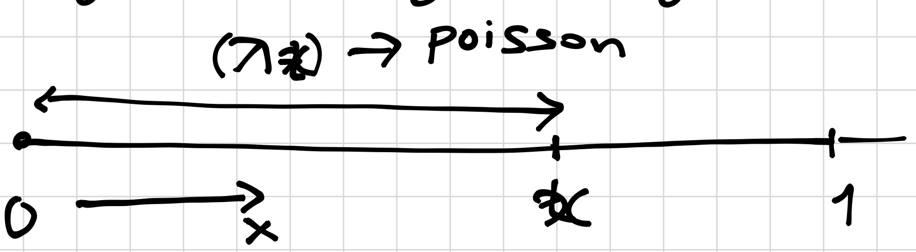
Normal dağılım ile yaklaşık sonucu bulalım.

$$P(X \leq 950) = P(X \leq 950.5) \cong P\left(Z \leq \frac{950.5 - 1000}{\sqrt{1000}}\right)$$

$$\cong P(Z \leq -1.57) = \underset{\text{'tablodan'}}{0.058}$$

Üstel Dağılım

Poisson dağılımında belirli bir aralıkta gerçekleşen olay sayısı ile gösteriyorduk.



ortalamada birim başına (λ) olay varsa

~~Olay~~ 0'dan başlayarak ilk olay oluşuncaya kadar geçen zaman/uzunluk/.. üssel dağılımlı bir R.D ile gösterilir.

N: 0 ile x arasındaki olay sayısı olsun.

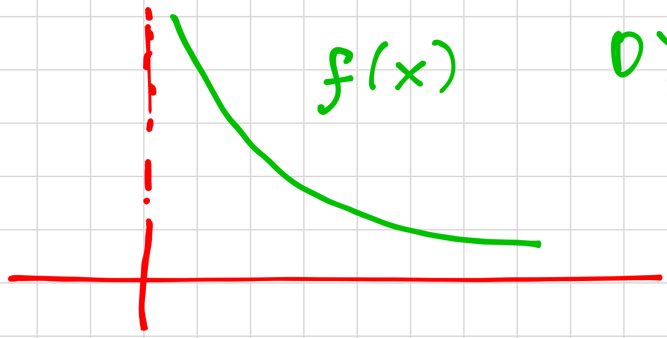
X: ilk olay oluşuncaya kadar x kadar süre/süreç geçmiş olsun.

N: poisson, λx

$$\underbrace{P(X > x)}_{1 - F(x)} = P(N = 0) = \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

$$\underline{\underline{F}}(x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}}$$



ÖYF

Ortalama ve Varyansı

önce $E(X^n)$ 'i inceleyelim.

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx \qquad (n>0)$$

$$dv = \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx \qquad u = x^n$$

$$v = -e^{-\lambda x} \qquad du = n \cdot x^{n-1}$$

/* $\lim_{x\to\infty} (x^n \cdot e^{-\lambda x}) = 0$ */

$$E(X^n) = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\, du$$

$$= -x^n \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} n \cdot x^{n-1} dx$$

$$= (0-0) + \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{n-1} dx$$

$$E(X^n) = \frac{n}{\lambda} \cdot E(X^{n-1}).$$

$$E(X^1) = \frac{1}{\lambda} E(1) = \frac{1}{\lambda} = \mu$$

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda} \cdot E(X) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

σ^2

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Örnek Bir benzin istosyonuna gelen araç sayısı Poisson süreciyle modellenmektedir. Buna göre 1 saatlik zaman aralığında gelen ortalama araç sayısı $\lambda = 25$'tir. Buna göre, 6 dakikalık bir zaman aralığında benzin istasyonuna hiç araç gelmeme olasılığı nedir?

Zaman aralığının başlangıcından itibaren ilk müşteri gelinceye kadar geçen zamana X diyelim. X: Bir üstel dağılımlı R.D ve $\lambda = 25$ araç/saat

o.y.f.

$$f(x) = 25 \cdot e^{-25x} \quad (x > 0)$$

$$6 \text{ dakika} = \frac{6}{60} = 0.1 \text{ saat}$$

$$P(X > 0.1) = \int_{0.1}^{\infty} 25 \cdot e^{-25x}\, dx = e^{-25 \cdot 0.1} = \underline{\underline{0.082}}$$

b) %90 olasılıkla hiçbir aracın gelmeyeceği en küçük zaman aralığı nedir?

$$P(X > t) = \int_{t}^{\infty} 25 \cdot e^{-25x}\, dx = e^{-25t} = 0.90$$

$$\ln\left(e^{-25t}\right) = \ln(0.90)$$

$$t = 0.00421 \text{ saat}$$

$\Rightarrow$ 0.25 dakika bulunur.

Üstel Dağılımın Hafızasızlık özelliği.

Örnek

Bir Geiger sayaci ile parçacık gözlemleri Poisson sürecini takip etmektedir. X parçacıklar gözlemleri arasında geçen süre olsun ve $E(X) = 1.4$ dakika olsun. X üstel dağılımlı bir R.D. dir $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1.4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1.4}$

Sayacı başlattıktan sonra 30 sn içerisinde parçacık gözlemleme ihtimali nedir?

$$P(X < 0.5) = F(0.5) = 1 - e^{-0.5/1.4} = 0.30$$

Diyelim ki sayacı başlattık ve 3 dk boyunca hiç parçacık gözlemlemedik. Bir sonraki 30 sn içerisinde parçacık gözlemleme ihtimali nedir? İlk başta bize bu ihtimalin 0.3'den daha büyük olması gerekiyormuş gibi gelebilir, ama öyle değildir, bakalım:

istenilen ihtimali şu şekilde yazabiliriz.

$$P(\underbrace{X < 3.5}_{A} \mid \underbrace{X > 3}_{B}) = \frac{P(3 < X < 3.5)}{P(X > 3)}$$

$$P(3 < X < 3.5) = F(3.5) - F(3)$$
$$= (1 - e^{-3.5/1.4}) - (1 - e^{-3/1.4})$$
$$= 0.035$$

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = e^{-3/1.4} = 0.117$$

$$P(X < 3.5 \mid P > 3) = \frac{0.035}{0.117} = 0.30 \text{ //.}$$

Buna biz hafızasızlık özelliği diyoruz.

Teorem X bir üstel dağılımlı R.D. ise

$$P(X < t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X < t_2)$$

Erlang ve Gamma Dağılımları

Üstel dağılımlı bir R.D. bir Poisson sürecinin herhangi bir noktasından "başarılı" bir sonuç elde edinceye kadarki sürecin uzunluğu diye tarif ettik.

Üstel dağılımı genelleştirirsek, sürecin bir noktasından itibaren $\underline{\underline{r}}$ adet başarılı sonuç elde edinceye kadarki uzunluğu Erlang dağılımlı bir R.D. ile modelleriz.

Örnek Büyük bilgisayar sistemlerindeki hatalar Poisson süreci ile modellenmektedir.

- Bozulan ünitelerin hemen tamir edildiğini
- Saatte ortalama 10^{-4} ~~hat~~ arıza sıklığını

varsayalım.

X : 4 adet arıza çıkıncaya kadar geçen süre olsun. $P(X > 4 \times 10^4)$ olma ihtimali nedir?

Çözüm

N : 40000 saatte çıkan arıza sayısı olsun. Poisson.

$$P(X > 4 \times 10^4) = P(N \leq 3)$$

$$E(N) = 40000 \times 0.0001 = 4 = \lambda$$

$$P(X > 40{,}000) = P(N \leq 3) = \sum_{n=0}^{3} \frac{e^{-4} \cdot \lambda^n}{n!} = 0.433$$