1

27/9

Diff. Eqn. dersi Cuma günü!

---

* Bizim dersimiz gelecek haftadan itibaren bu blokta olacak. (201, 301 ??)

Olasılığın Aksiyomları:

Bir rastgele deneyde, S örnek uzayı, E'de bu uzaydaki bir olay ise:

1. $P(S) = 1$
2. $0 \leq P(E) \leq 1$
3. $E_1 \cap E_2 = \phi$ (E_1 ve E_2 birbirini dışlayan olaylar ise $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$)

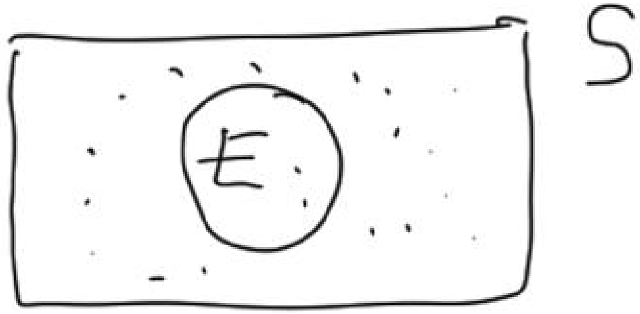
Bu aksiyomlardan aşağıdaki sonuçlar çıkar

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(E') = 1 - P(E)$
- $E_1 \subseteq E_2 \rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$

Axiom 3 - genelleştirilmiş hali

- $E_1, E_2, \ldots, \cancel{E}$ çifter çifter birbirini dışlayan olaylar dizisi ise yani $i \neq j$ iken $E_i \cap E_j = \emptyset$ ise

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$



Örnek Hilesiz bir zar atışında sonucun tek gelme olasılığı nedir?

$$E_{tek} = \{1, 3, 5\}$$

birleşim

$$E_i = \{i\} \qquad S = \bigcup_{i=1}^{6} E_i$$

$$P(E_i) = \frac{1}{6}$$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} E_i\right) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{6} E_i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(E_i)$$

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_6) = p$$

$$\sum_{i=1}^{6} p = 1 \rightarrow p = 1/6$$

$$E_{tek} = E_1 + E_3 + E_5$$

$$= p + p + p = \frac{1}{2}$$

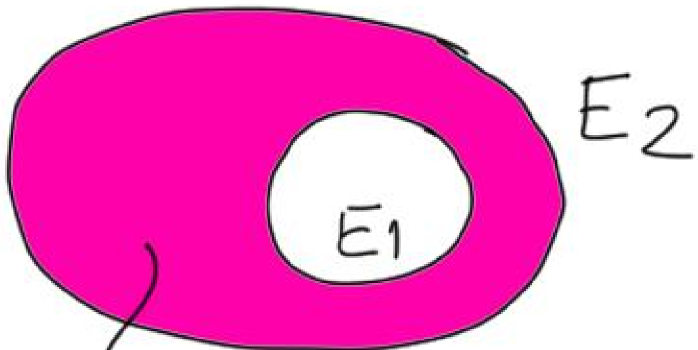
Toplam Kuralı

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

* ~~ispat~~

önce $E_1 \subseteq E_2 \rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$'yi

ispatlayalım.



$E_1' \cap E_2$

$$P(E_1) \leq P(E_2)$$

$$E_2 = \underbrace{E_1}\ \cup \underbrace{(E_1' \cap E_2)}$$

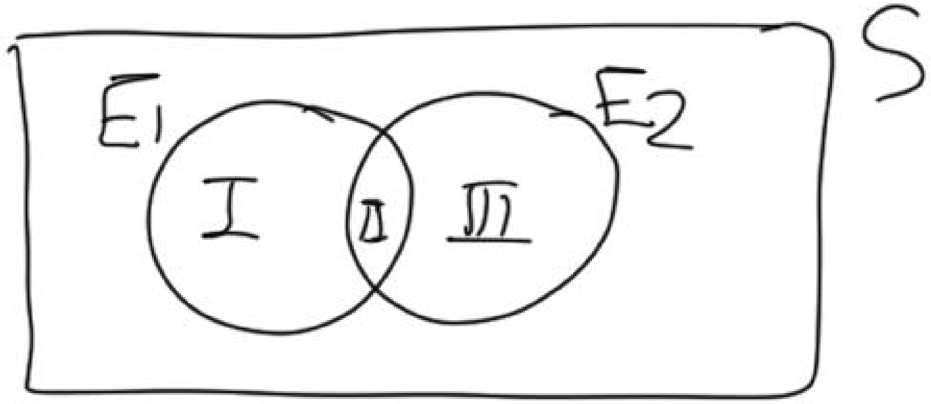
birbirini dışlayan olaylar

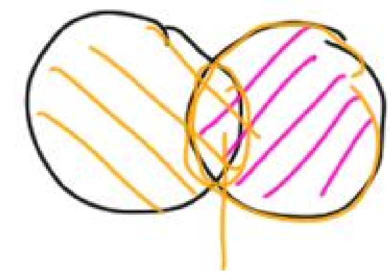
$$P(E_2) = P(E_1) + \underbrace{P(E_1' \cap E_2)}$$

$$> 0$$

$$P(E_2) - P(E_1) \geq 0$$

Toplam kuralını ispatlayalım





$$P(E_1 \cup E_2) = P[E_1 \cup (E_1' \cap E_2)]$$
$$= P(E_1) + \underline{P(E_1' \cap E_2)}$$

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1' \cap E_2)$$

$$P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1' \cap E_2)$$

$$\underline{P(E_1' \cap E_2)} = P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Örnek

Bir sınıfta 30 erkek, 10 bayan öğrenci vardır. Hem erkeklerin hem de bayanların yarısı gözlük kullanmaktadır. Bu sınıftan rastgele seçilen birinin bayan veya gözlüklü olma ihtimali nedir?

	B	E
G	5	15
G'	5	15

B : Bayan öğrenci olma olayı

G : Gözlüklü olma olaylı

$P(B) = \frac{10}{40}$ $\quad P(G) = \frac{1}{2}$

$P(B \cap G) = 5/40$

$P(B \cup G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \cancel{25}\ \boxed{0.625}$

Tanım

B olayının oluştuğu bilindiğinde, A olayının koşullu olma olasılığı, ya da A'nın B koşulu altında olma olasılığı $P(A|B)$ şeklinde yazılır ve

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

olmak şartıyla

Örnek Aşağıdaki tabloda 400 adet parça yüzey hatası durumuna ve bozuk olma durumuna göre sınıflandırılmış olsun.

		Yüzey Hatası Var mı? Evet	Hayır	
Bozuk mu?	E	10	18	28
	H	30	342	372
		40	360	400

F: Yüzey hatası var

D: Bozuk

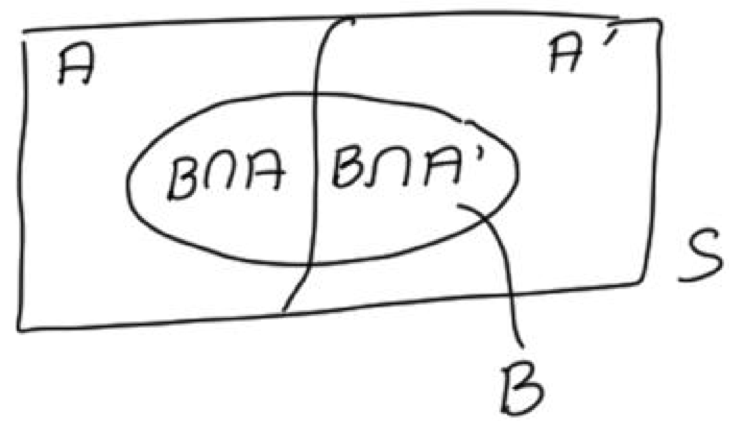
$$P(D|F) = \frac{10}{40} = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{10}{40} = 0.2500$$

<u>Çarpım Kuralı</u>

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

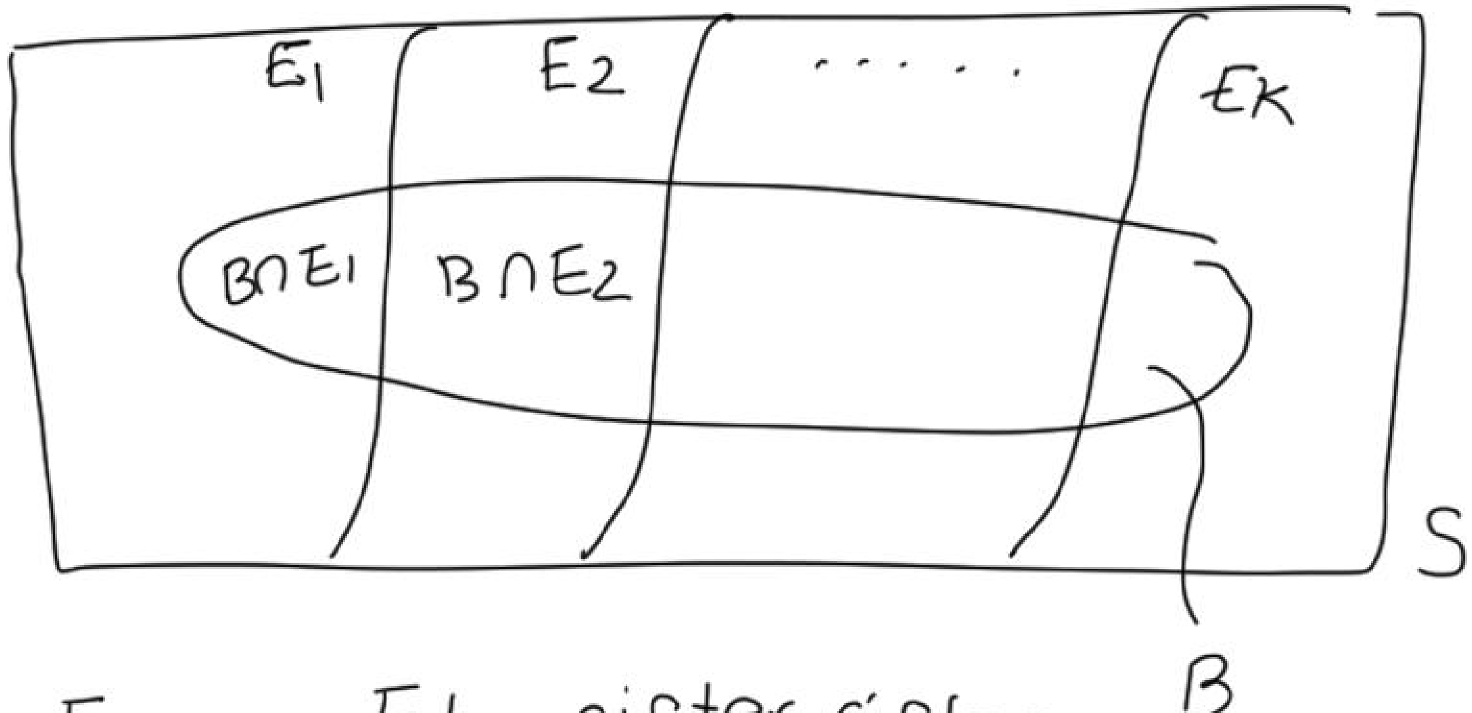
<u>Toplu olasılık kuralı</u>

$$\boxed{A' = \bar{A} = A^{c}}$$



$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$
$$= P(B|A)\,P(A) + P(B|A')\,P(A')$$

Genelleştirirsek



- $E_1, E_2, \ldots, E_k$ çifter çifter birbirini dışlayan ve birbirini tamamlayan olaylar olsun. O zaman

$$P(B) = P(B \cap E_1) + \ldots + P(B \cap E_k)$$

$$= P(B|E_1)P(E_1) + \ldots + P(B|E_k)P(E_k)$$

Bağımsızlık

Bir olay başka bir olayın oluşma ihtimalini etkilemiyorsa bu olaylar birbirinden bağımsızdır.

Tanım A ve B olayları aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlıyorsa bu olaylar birbirinden bağımsızdır.

1. $P(A|B) = P(A)$
2. $P(B|A) = P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Örnek Bir torbada 50 kırmızı, 800 beyaz top vardır. Torbadan 1 adet top çekiliyor ve tekrar torbaya konuluyor. 2. bir defa top çekiliyor. 1. top kırmızı ise 2. topun beyaz olma ihtimali nedir?

K_i: i. top Kırmızı B_i: i. top Beyaz

$P(B_2|K_1) = P(B_2) \rightarrow B_2$ ve K_1 birbirinden bağımsızdır.

$$P(B_2) = P(B_1) = \frac{800}{850} = \sim$$

Bayes Kuralı

Şartlı olasılığın tanımından

$$P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}, \quad (P(B) > 0)$$

Örnek

Bir çipin kirli olma olasılığı 0,2;

Kirli bir çipin bozuk olma olasılığı 0.1

Temiz " " " " " 0.005 tir.

Bozuk bir çipin kirli olma olasılığı nedir?

H: kirli olma olayı , H': temiz ..

F: bozuk " "

$P(H) = 0.2 \qquad P(F|H) = 0.1$

$P(F|H') = 0.005$

$$P(H/F) = \frac{P(F/H) \cdot P(H)}{P(F)}$$

$$P(F) = P(F|H) \cdot P(H) + P(F|H') \cdot P(H') = 0.024$$

$$P(H/F) = \frac{0.1 \times 0.2}{0.024} = 0.83$$

Bayes teoremini genelleştirirsek

$E_1, E_2, \ldots, E_k$ birbirini dışlayan ve birbirini tamamlayan olaylar ise, bir B olayı için

$$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)\,P(E_1)}{P(B)}$$

$P(B>0)$