Özet

- Ayrık -

- Bernoulli denemeleri → Başarılı / Başarısız

- Binom dağılımı n tane bernoulli denemesindeki başarılı sonuç sayısı.

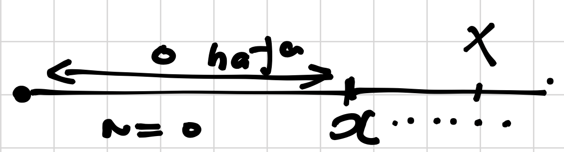
- Geometrik dağılım

  ~ Sırayla yapılan bernoulli denemelerinden başarılı sonuç bulununcaya kadar yapılan deneme sayısı.

- Negatif binom - Başarılı r tane sonuç bulununcaya kadar yapılan deneme sayısı.

- Poisson dağılım - Binom dağılımlı bir R.D 'de $n \gg$, $p \ll$ ve np sabitse kullanılan bir dağılımdır.

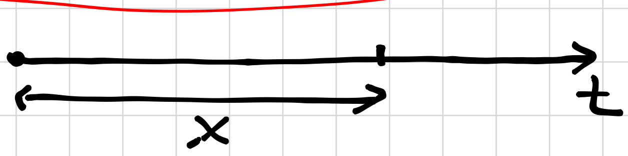
Sürekli R.D



- Normal Dağılım . . .

  ↳ Binom
  ↳ Poisson } modellemek için kullanılabilir.

- Üstel Dağılım.



ilk başarılı deneme görülünceye kadar geçen "süre", uzunluk vs.

Bu sürecin Poisson süreci olduğunu varsayalım. Parametresi birim başına λ olsun.

X: ilk başarılı deneme görülünceye kadar ~~yapılan~~ geçen süre* olsun. $f(x)$: ?

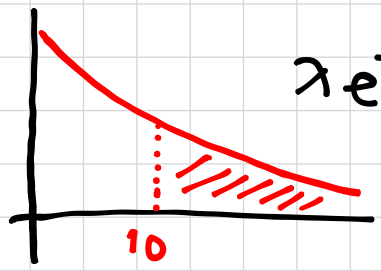
N: X süresi uzunluğu boyunca görülen başarılı deneme sayısı olsun, Poisson ~~λ~~ λ (birim başına)

$$P(N=0) = \underbrace{P(X>x)}_{1-F(x)} = \frac{e^{-\lambda x}\,(\lambda x)^0}{0!} = e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

Örnek Bir telefon konuşmasının süresi üstel dağılım ile modelleniyor ve parametresi $\lambda = \frac{1}{10}$'dur. Bir telefon kulübesine vardığınızda içeride bir telefonu kullanıyorsa a) $\underline{10}$ dakikadan fazla bekleme ihtimaliniz b) 10 ile 20 dakika arasında bekleme ihtimaliniz nedir?



$\lambda e^{-\lambda x}$

$f(x)$

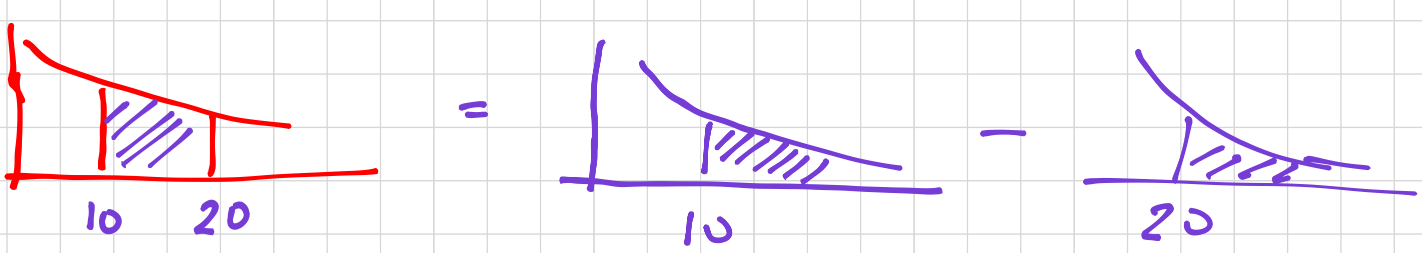
$1 - e^{-\lambda x} \quad x > 0$

$F(x)$

a) $$P(X>10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - \underbrace{\int_{0}^{10} f(x)\,dx}_{F(10)}$$

$$P(X>10) = 1 - F(10) = e^{-10 \cdot 1/10} = e^{-1} \approx 0.368$$

b)



$1 - F(10)$ $\quad$ $1 - F(20)$

$$P(10<X<20) = F(20) - F(10) = 0.233$$
$$e^{-1} - e^{-2} =$$

- **Gamma Dağılımı**

Bir Poisson sürecinde r tane olay oluşuncaya kadar geçen süre Erlang dağılımı ile gösterilir.

Ör Bir bilgisayar sisteminde hatalar Poisson dağılımı ile modellenmektedir ve ortalamada 10^{-4} hata/saat oluşmaktadır.

X 4 adet hata oluşuncaya kadar geçen süre olsun. X'in 4×10^{4}'den büyük olma ihtimali nedir?

N: 40000 saatte oluşan hata sayısı $\Rightarrow \lambda = 4 \times 10^{4} \times 1 . 10^{-4} = 4$

$$P(X > 40{,}000) = P(N \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-4} 4^{k}}{k!} = \underline{0.433}$$

Bunu genelleştirirsek, X, r. olay oluşuncaya kadar geçen süre

$$P(X > x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x} \cdot (\lambda x)^k}{k!} = 1 - F(x)$$

$F(x) = P(X \leq x)$ $\qquad f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \ldots$

Basitleştirilmiş haliyle

$$f(x) = \frac{\lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \qquad \begin{array}{l} x > 0 \\ r = 1, 2, \ldots \end{array}$$

bir Erlang R.D.'dir. $\underline{r = 1}$ için Erlang dağılımı üstel dağılıma dönüşür.

[Bazen $\underline{r}$'nin tamsayılar dışında sayılar alması beklenebilir.]

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \quad r > 0$$

Kısmi integral kullanarak bulmaya çalışalım:

$u = x^{r-1}$ $\qquad dv = e^{-x} dx$

$du = (r-1)\, x^{r-2} dx$ $\qquad v = -e^{-x}$

$$\int_0^{\infty} u\, dv = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v\, du$$

/* $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} x^{r-1} = 0$ */

$$\Gamma(r) = \underbrace{-e^{-x} x^{r-1} \Big|_0^{\infty}}_{0} + \int_0^{\infty} e^{-x} \underline{(r-1)}\, x^{r-2} dx$$

$\Gamma(r) = (r-1)\, \Gamma(r-1)$

$\Gamma(1) = 1$ $\qquad \Gamma(r) = (r-1)!$ (r tamsayı ise)

Gamma Dağılımı

Gamma dağılımlı bir R.D'nin OYF'si aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \frac{\lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \qquad \begin{matrix} x>0 \\ \lambda>0 \end{matrix} \quad r>0$$

Eğer $r \in \mathbb{Z}^+$ ise X bir Erlang R.D'dir.

Ortalama

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x \cdot \lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty \lambda^r \cdot x^r \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$\lambda x = y \qquad \lambda dx = dy \qquad dx = dy/\lambda$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty y^r \cdot e^{-y} \cdot dy/\lambda = \frac{1}{\Gamma(r) \cdot \lambda} \Gamma(r+1) = \frac{r!}{(r-1)!\,\lambda}$$

$$= r/\lambda.$$

Varyans

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty \lambda^r \cdot x^2 \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda\,\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty (\lambda \cdot x)^{r+1}\, e^{-(\lambda x)}\, dx$$

$\lambda x = y \qquad x \to 0 \quad y \to 0$

$\frac{1}{\lambda} dy = dx \qquad x \to \infty \quad y \to \infty$

$$E(X^2) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(r)} \cdot \int_0^\infty y^{r+1} \cdot e^{-y} \cdot dy$$

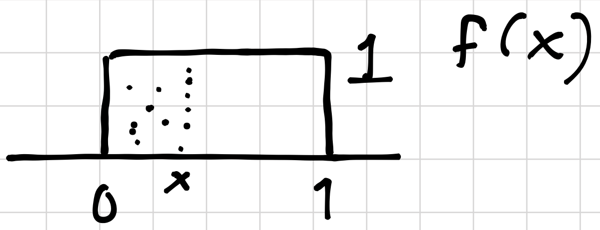
$$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)} = \frac{(r+1)\,r}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{r^2+r}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

Bir Rastgele Değişkenin Fonksiyonunun Dağılımı

X bir RD ise, $g(X)$ 'de X'in bir fonksiyonu ise $g(X)$'in OYF veya OKF'si istenebilir.

ÖRNEK X, $(0,1)$ aralığında birbiçimli dağılımı olan bir rastgele değişkendir.



X'in bir fonksiyonu olan $Y = g(X) = X^n$ için O.Y.F. nasıl bulunur?

$x=0 \quad x^n=0$
$x=1 \quad x^n=1$

Önce Y'nin Birikimli Dağılım fonksiyonuna bakalım. $0 \leq y \leq 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(X^n \leq y)$$
$$= P(X \leq y^{1/n})$$
$$= F_X(\underline{y^{1/n}}) = y^{1/n}$$

Burdan OYF'yi bulalım!

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{n} \cdot y^{(1/n)-1} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Örnek X, sürekli bir RD ve OYF f_X olsun.

$Y = X^2$'nin OYF = ? $\quad y \geq 0$
$x > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$
$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})\right]$$

Örnek X, f_X olsun $Y = |X|$ OYF=?

$y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(|X| \leq y)$$
$$= P(-y \leq X \leq y)$$
$$= F_X(y) - F_X(-y)$$

$$f_Y(y) = f_X(y) - f_X(-y) \quad (y \geq 0)$$

Örnek (Eski Sınav)

X R.D. Poisson dağılımına sahiptir. Bu R.D için $P(X=2) = \frac{2}{3} P(X=1)$ ise

a) $E(X) = ?$ b) X'in 0 veya 3 olma ihtimali nedir?

$$P(X=2) = \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = \frac{2}{3} \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}$$

$\rightarrow \lambda = ?$

b) $P(X=0) + P(X=3)$.