Sınav

① Sürekli R.D X, O.Y.F.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^4, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^2 \alpha \cdot x^4\,dx = 1$$

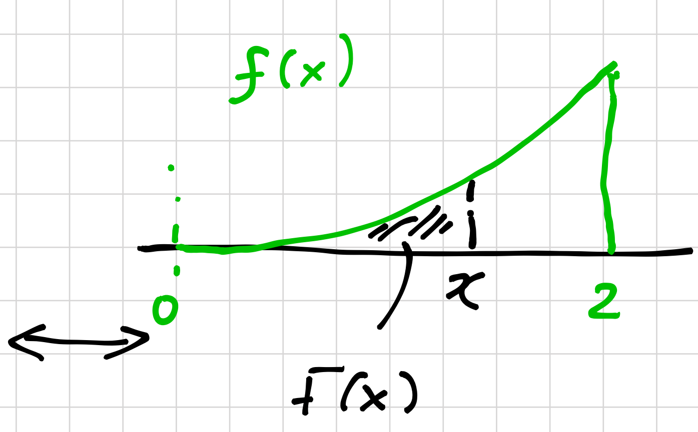
$$\alpha \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 1$$

$$\alpha \cdot \frac{32}{5} = 1$$

$$\alpha = \frac{5}{32} = \underline{0.15625}$$

ⓑ Birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$



OYF

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0 \quad (x < 0)$$

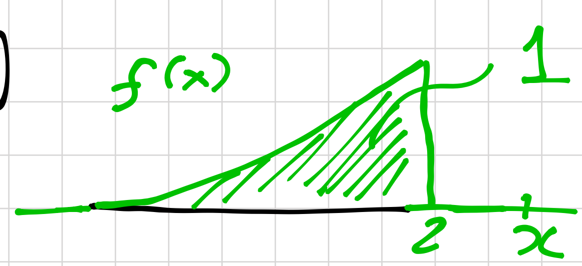
$\boxed{0 < x < 2}$ için

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_0^x \alpha \cdot u^4 \cdot du$$

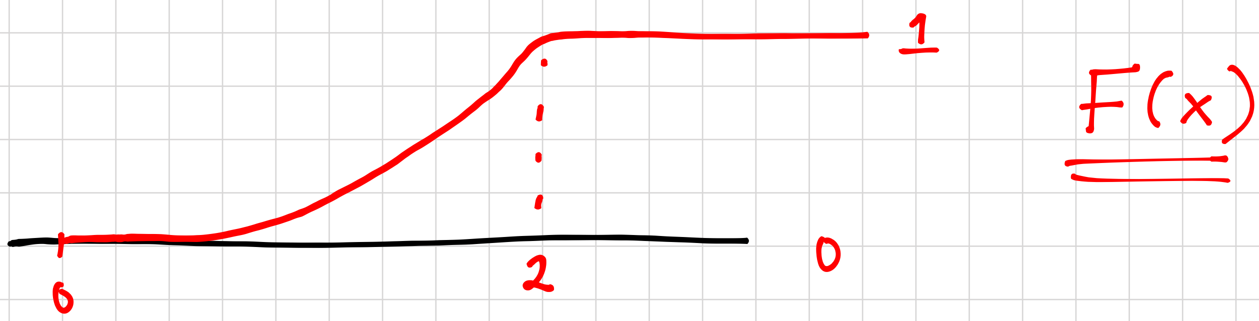
$$= \frac{\alpha}{5} \cdot u^5 \Big|_0^x = \frac{\alpha}{5} \cdot x^5$$

$$= 0.03125\, x^5$$

$\boxed{x > 2}$



$$\underline{F(x) = 1}$$



(c) $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$

$= \int_{0}^{2} x \cdot \alpha \cdot x^4 \cdot dx$

$= \alpha \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_0^2 = \underline{\underline{1.66667}}$

(2) 150 sayfa, Poissoin, sayfa başına 0.01 hata var.

a) Bu <u>KİTAPTA</u> en fazla 2 hata olma olasılığı

$\lambda = 150 \times 0.01 = 1.5$ hata

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

$P(X=0) = e^{-1.5} \cdot \frac{1.5^0}{0!} = e^{-1.5} = 0.2231$

$P(X=1) = e^{-1.5} \cdot \frac{1.5}{1} = 0.3347$

$P(X=2) = e^{-1.5} \cdot \frac{1.5^2}{2!} = 0.2510$

$P(X \leq 2) = 0.8088$

2b 3 adet hatalı kitap bulununcaya kadar seçilen kitap sayısının 10 olma ihtimali

Y: 3 adet hatalı kitap bulununcaya kadar seçilen kitap sayısı, Negatif binom $p=?$, $r=3$

Bir önceki sorudaki R.D. X,

$$p = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0.7769$$

$$P(Y=10) = \binom{10-1}{3-1} (1-0.7769)^7 \cdot 0.7769^3 = \underline{0.00046}$$

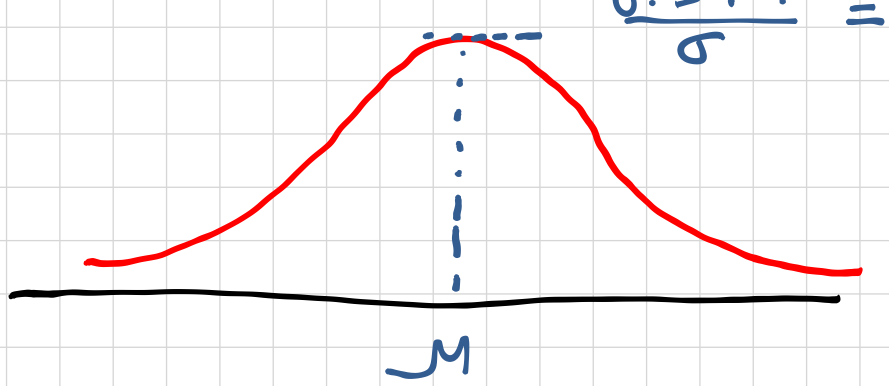
$$f(y) = \binom{y-1}{r-1} \cdot (1-p)^{x-r} \cdot p^r$$

Normal Dağılım (Gauss Dağılımı)

Tanım X, ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan Normal Dağılımlı bir R.D. ise, O.Y.F

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{0.399}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$



Tanım

Z, ortalaması $\mu=0$ ve varyansı $\sigma^2=1$ olan Normal dağılımlı bir rastgele değişken ise Z'ye "Standart Normal Rastgele Değişken" denir ve O.Y.F

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

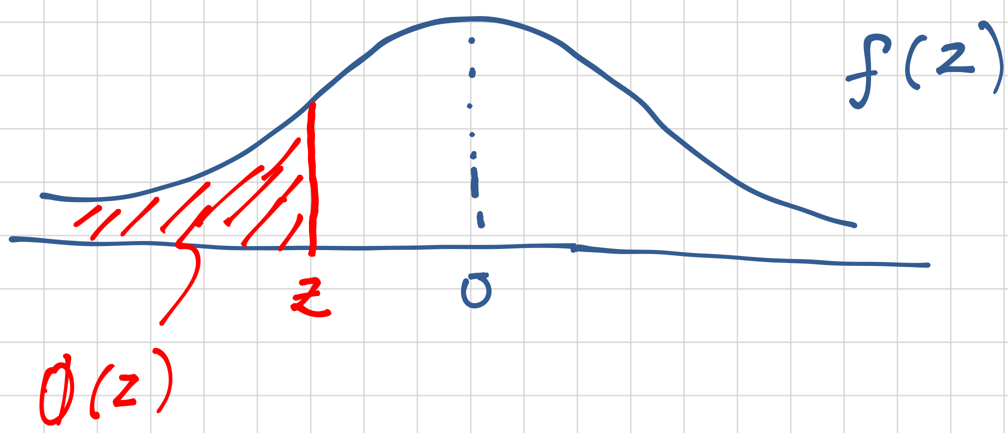
Ortalama $E(X) = \mu$

Varyans $V(X) = \sigma^2$ } X

Standart Normal Dağılımlı bir rastgele değişkenin

$\boxed{\text{Birikimli Dağılım fonksiyonu}}$

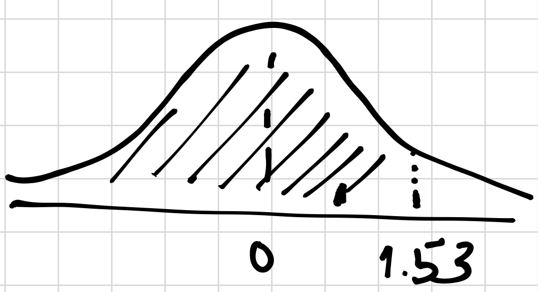
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$



Örnek

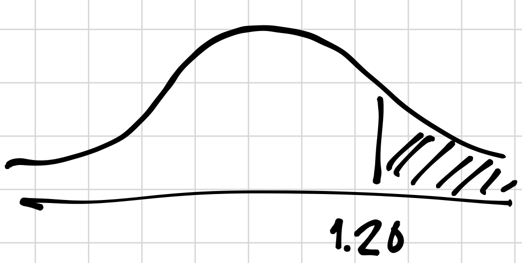
Z bir S.N.R.D olsun

- $P(Z \leq 1.53)$
  $= 0.93699$

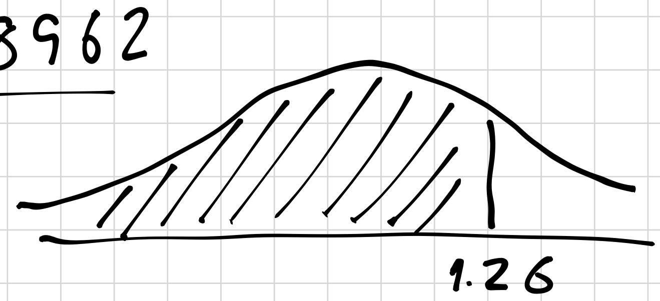


z	0.03
1.5	0.93699

- $P(Z \geq 1.26) = 1 - P(Z \leq 1.26)$
  $= \underline{\qquad\quad}\ \underline{0.8962}$

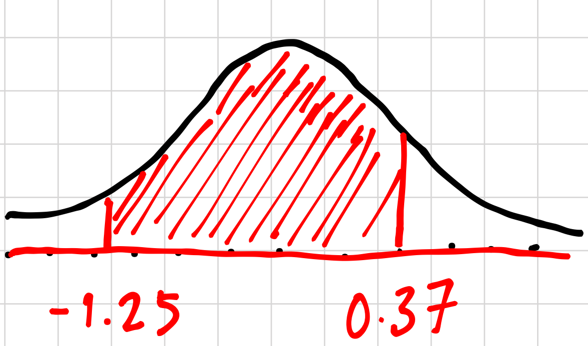


$= 1 -$

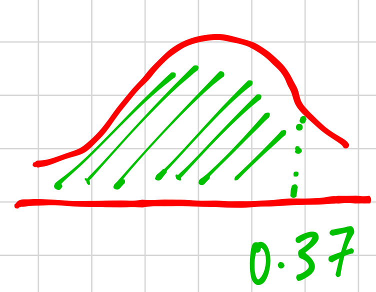


- $P(Z < -0.86) \cong 0.1949$

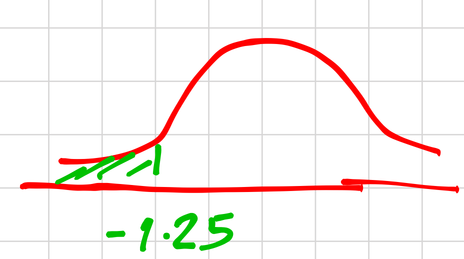
- $P(-1.25 < Z < 0.37) = P(Z < 0.37) - P(Z < -1.25)$



$=$



$-$



- $P(Z \leq -4.6) \cong 0$

• $P(Z > z) = 0.05 \Rightarrow z = ?$

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z) \Rightarrow P(Z < z) = 0.95$

	0.05
1.6	0.95~

$z \cong 1.65$

Tanım X, Normal Dağılımlı bir R.D ve $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ is

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ Standart normal Rastgele değişkendir.

Normal Dağılımlı bir R.D.'i Standart Normal bir Rastgele Değişken'e dönüştürmeye "standardizasyon" denir.

Örnek X: NRD ve $\sigma^2 = 4$, $\mu = 10$

$P(X > 13) = ?$ $\qquad Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 10}{2}$

$$P(X > 13) = P\left(Z > \frac{13 - 10}{2}\right) = P(Z > 1.5) = \ldots$$

Örnek Sentetik bir kumaşın kopma direnci ortalaması 600 Newton ve varyansı 64 olan normal dağılıma uymaktadır.

a) Kumaşın alıcısı kopma kuvvetinin minimum 585 newton olmasını istemektedir. Bu nedenle rastgele seçilen herhangi bir örnek kumaşın bu şartı sağlama olasılığı nedir?

X: kopma direnci $\qquad P(X \geq 585) = 1 - P(X < 585)$

$$P(X<585) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{585-600}{\sqrt{64}}\right)$$

$$= P(Z<-1.875) = \Phi(-1.875)$$

Tablodan $= 0.03$

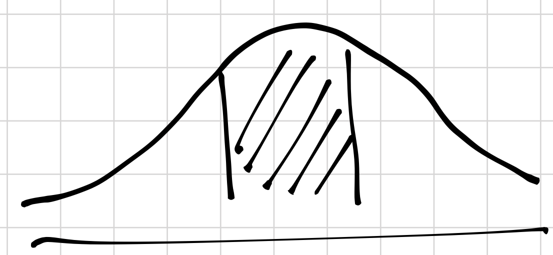
$$P(X>585) = 1-0.03 = \underline{0.97}$$

b) Rastgele seçilen bir örnek kumaşın kopma kuvvetinin dağılımın ortalama değeri etrafında $\mp$ %3'lük bir aralıkta olma olasılığı nedir?

$\mu = 600$ $\qquad 0.03 \times 600 = 18$

$$P(600-18 < X < 600+18)$$

$$= P(582<X<618)$$



$$= P\left(\frac{582-600}{\sqrt{64}} < Z < \frac{618-600}{\sqrt{64}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-18}{8} < Z < \frac{18}{8}\right) = P(-2.25 < Z < 2.25)$$

$$= P(Z<2.25) - P(Z<-2.25)$$

$$= \underline{0.974}$$

Binom ve Poisson Dağılımlarının Normal Dağılım İle tahmini

n'in büyük olduğu Binom ve λ'nın büyük olduğu Poisson dağılımları normal dağılımlara yaklaşık olarak benzemektedir. Bu özellik DeMoire/Laplace limit teoremi olarak da bilinir.

Örnek

X: Binom dağılımlı bir R.D.

$n = 16 \times 10^{6}$

$p = 1 \times 10^{-5}$

$$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16\,000\,000}{x} (10^{-5})^{x} (1-10^{-5})^{16000000-x}$$

Teorem

X, Binom dağılımlı bir rastgele değişken ve parametreleri n, p ise, ayrıca $np > 10$, ve $n(1-p) > 10$ ise

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{yaklaşık}$$

olarak standard normal rastgele değişkendir. Hesap sırasında ayrıca sürekllik düzeltmesi uygulanır.

$$P(X \leq x) = P(X \leq x + 0.5)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(x \leq X) = P(x - 0.5 \leq X)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$