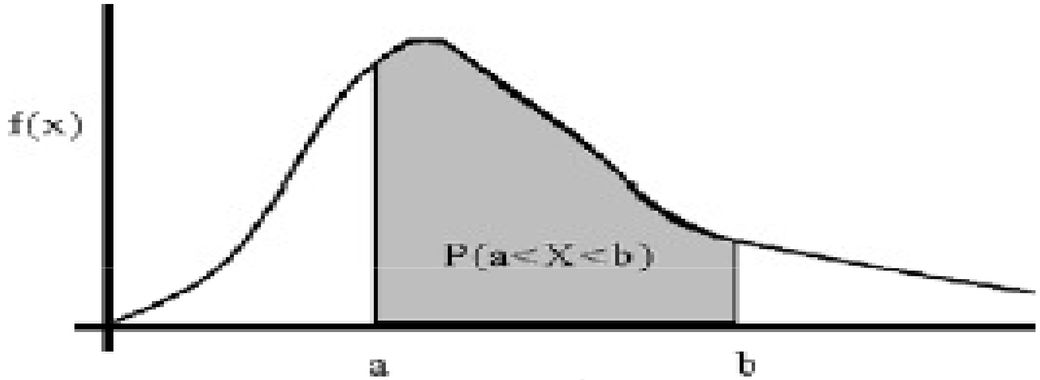
# SÜREKLİ( CONTINUOUS) OLASILIK DAĞILIMLARI

Sürekli bir random değişken (a,b) aralığındaki her değeri alabiliyorsa bu değişkene ait olasılık dağılım fonksiyonunun grafiğinde eğri altında kalan alan bize bu x değişkeninin olasılığını verir. Eğri altında kalan alandan bahsettiğimiz için x değişkeninin olasılığı P(x) integral yardımıyla bulunur.

f(x): x değişkeni için olasılık dağılım fonksiyonu(f(x)≥ 0)

(a,b): x 'in değişkenlik aralığı olmak üzere




$$P(a < X < b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$$

Ayrıca olasılık daima max. 1 değeri alabileceği için ;

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)\,dx = 1$$

# SÜREKLİ DEĞİŞKENLER İÇİN ORTALAMA ve VARYANS

- Sürekli random değişkenin ortalaması( beklenen değeri) E(x) olmak üzere

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

- Sürekli random değişken için varyans var(x) olmak üzere

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$$

........

!!!Sürekli değişkenler bir aralıkta kesin olarak belli değerler alamadığı için $x=a, x=b$, vs. şeklinde değişimler yerine $x<a$, $x>a$, $a \leq x \leq b$, vs. şeklinde aralıklardan söz edilebilir.

# Sürekli olasılık dağılımları 3'e ayrılır:

1)Uniform olasılık dağılımı

2)Üstel olasılık dağılımı

3)Normal olasılık dağılımı

***Standart normal dağılım

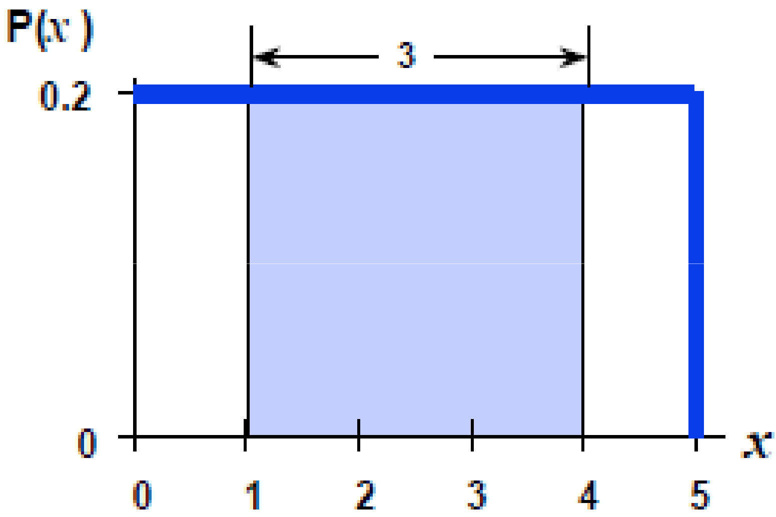
# 1) UNIFORM OLASILIK DAĞILIMLARI

- X Random değişkeninin değişkenlik aralığı (a,b) olsun. Yani a=X'in alabileceği min. değer ve b= X'in alabileceği max. değer olsun. Eğer (a,b) aralığı ile X'in olasılığı orantılı ise bu değişken uniform dağılıma sahiptir. $a \leq X \leq b$ olmak üzere

X'in olasılık fonksiyonu **f(X)=1 / (b-a)**
X'in ortalaması **E(X)= (a+b) / 2**
X'in varyansı **var(X)= (b-a)$^2$ / 12**

# örneğin;

- X sürekli rassal değişken, 1<x<4 ve f(x)=0.2 iken P(1<x<4) olasılığı




(1<x<4)=3.0,2=0,6

(taralı alan)

# 2) NORMAL OLASILIK DAĞILIMLARI

- Normal olasılık dağılımı [f(x)] çan şeklinde simetrik bir grafiğe sahip bir dağılımdır.
- Günlük hayatta, endüstride en çok normal dağılım ile karşı karşıya kalınır.
- Normal dağılım için ortalama(beklenen değer=E(x)) değeri μ ile gösterilir.
- Normal dağılım grafiği her zaman için μ değerine göre simetriktir. Hesaplamalar bu değer üzerinden yapılır.μ diyagramdaki en büyük değerdir.

.........

- X sürekli random değişkeni normal dağılım altında reel eksendeki tüm değerleri alabilir. Yani; -∞<x<+∞ aralığı değişkenlik aralığıdır.
- f(x) eğrisi altında kalan alan daima 1'dir.

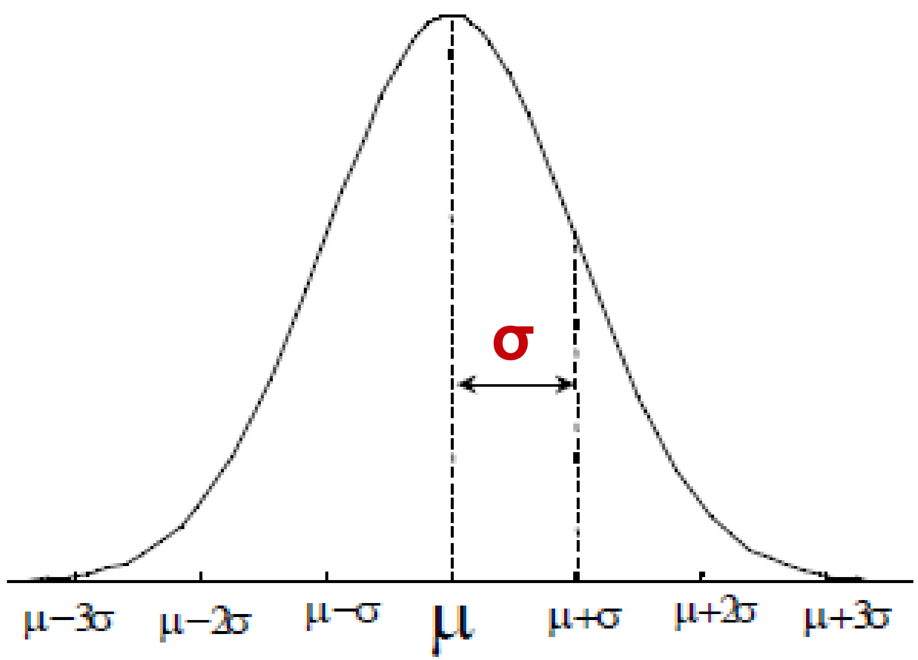
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Normal dağılım için μ=aritmetik ortalama=mod=medyan
- Standart sapmayı gösteren σ çan grafiği için genişlik(yayılma miktarı) göstergesidir.

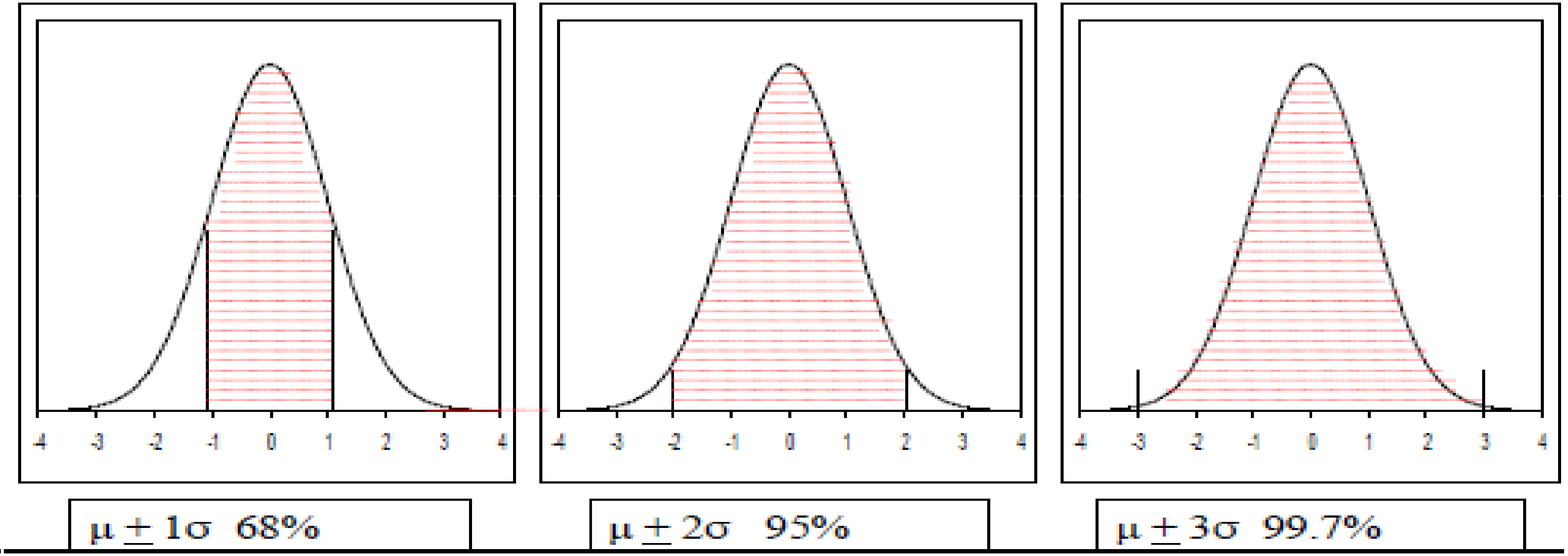
μ=arit. ort.
σ=standart sapma
л=3,14159
e=2,71828   olmak üzere olasılık dağılım fonk.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**$x \sim N(\mu,\sigma^2)$ gösterimine göre x ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2$ olan normal dağılıma sahiptir.**



# O halde;




** $\mu-\sigma<x<\mu+\sigma$ aralığı tüm dağılımın%68ini

** $\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma$ aralığı tüm dağılımın %95ini

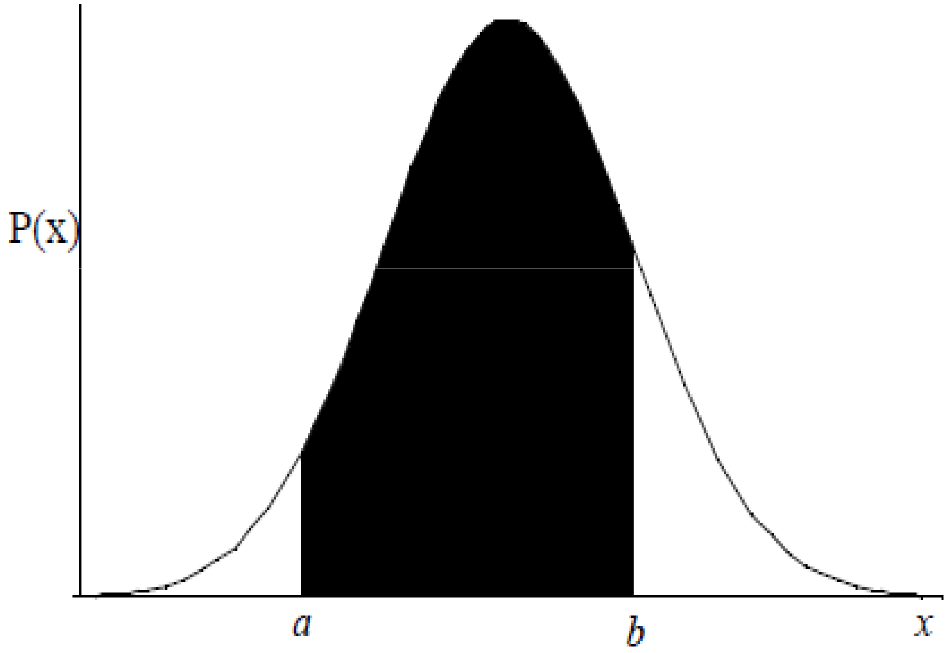
** $\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma$ aralığı tüm dağılımın %99.7sini

temsil etmektedir.

Prof.Dr.A.KARACABEY
Doç.Dr.F.GÖKGÖZ

## ........

- Normal dağılımlarda olasılıklar eşitsizlikler yardımıyla integrale dönüştürülerek hesaplanır: yani,




$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

# STANDART NORMAL DAĞILIM

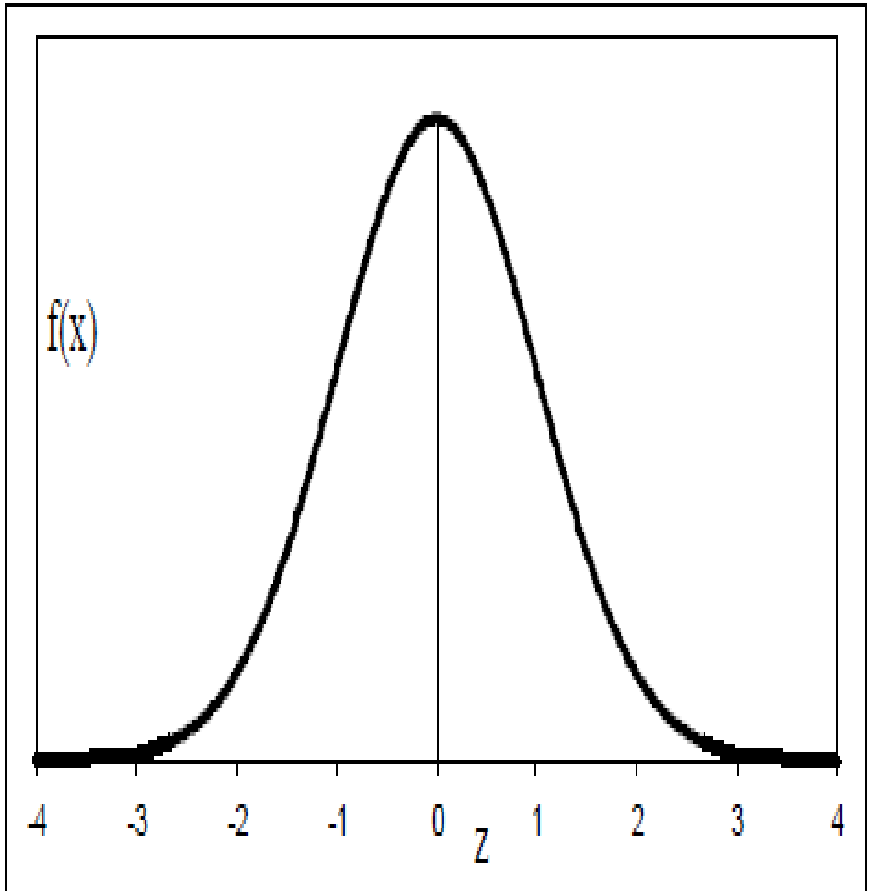
- Normal dağılımda olasılık hesaplamaları yapabilmek için değişkenin standartlaştırılması yani standart normal dağılımdan faydalanılması gerekmektedir.
- Normal dağılım için aritmetik ortalama $\mu=0$ ve varyans $\sigma^2=1$ alınıp diğer tüm şartlar aynı kaldığında oluşan dağılıma ***standart normal dağılım*** denir.

## ........

- Standart normal dağılımın değişkeni olan **z standart normal değişkeni** büyük önem teşkil etmektedir. Normal dağılım hesaplarındaki **x rastgele değişkeni** muhakkak aşağıdaki şekilde **z değişkenine dönüştürüldükten sonra** işlemler yapılmalıdır.

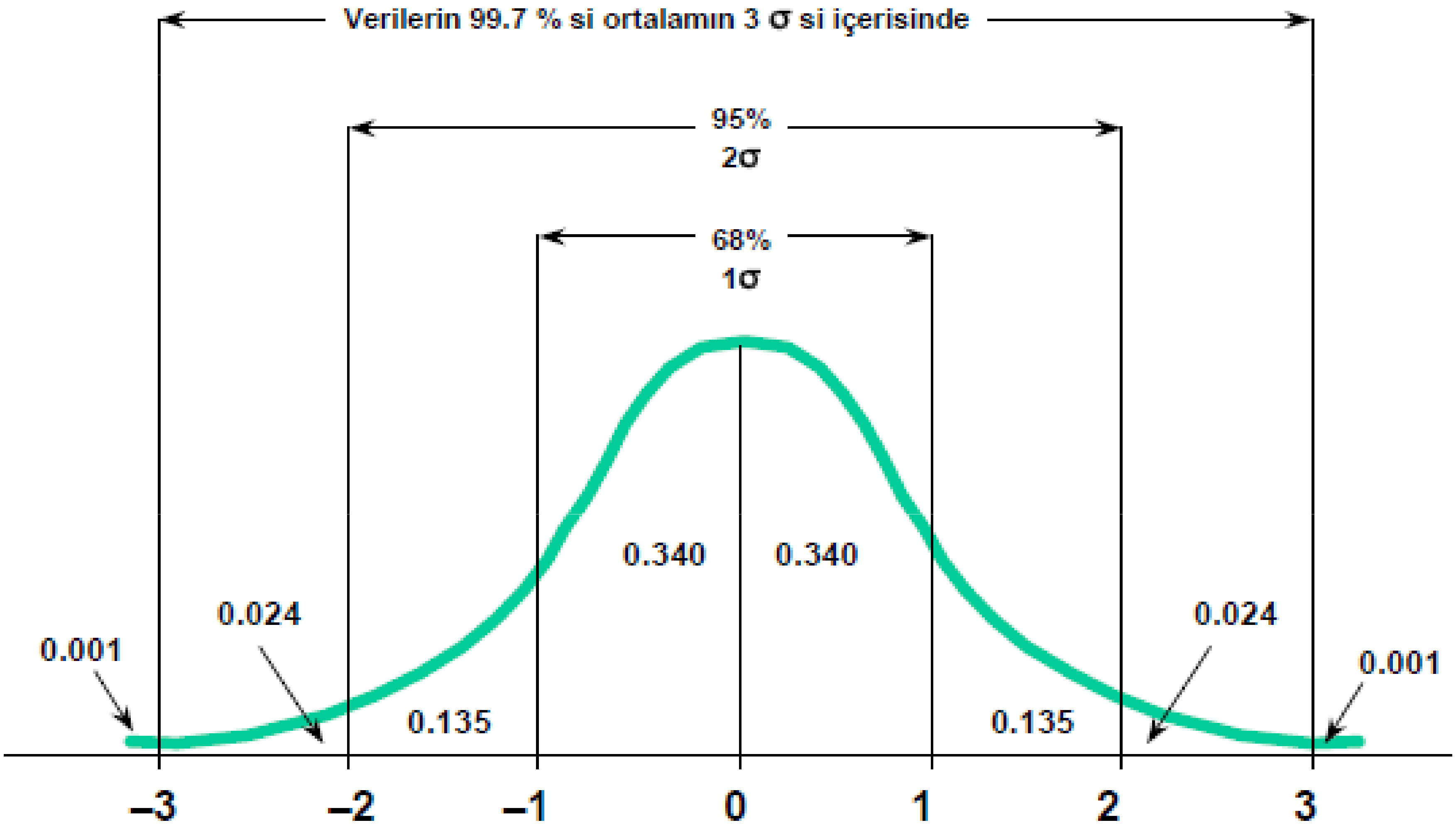
$$\boxed{z=(x-\mu)/\sigma}$$

- Standart normal dağılım grafiği μ=0 a göre simetriktir ve eğri yatay eksene asimptotik olarak gider.
- Eğri altındaki tüm alan 1 olduğundan o noktasının sağ ve solunda kalan alanlar 0,5 lik parçalar halindedir.




Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği;

# Standard Normal Dağılım : $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$



- X rasgele değişkeni z standart normal değişkenine dönüştürüldükten sonra z tablosu kullanılarak aranılan olasılık değeri kolaylıkla bulunabilir.
- Standart z tablosunun kullanımını şöyle özetleyebilrız:

- Tablodaki yatay bölüm z değeri için (yüzdebirler basamağını~~?,?*) virgülden sonraki ikinci basamağı, dikey bölüm ise tam kısım ve birinci ondalık kısmı (ondabirler basamağı~~*,*?) gösterir. Eldeki veriye göre ilgili satır ve sütunun kesiştiği yer aranan değerdir.
-

! ! !

- Z tablosu için aranan değer her zaman ilgili satır ve sütunun kesiştiği yer olmayabilir. Bu durum z değeri için geçerli olan eşitsizliğin durumuna göre belirlenir. Tablodaki bulunan değer her zaman 0 ile mevcut z değeri arasında kalan alanı verir.

**** a≥0 olmak üzere**

$$P(z<a)= 0,5+\text{tablo değeri}$$

$$P(z\leq a)=0,5+ \text{tablo değeri}$$

$$P(z>a)=1-P(z<a)$$

$$P(z\geq a)=1-P(z\leq a)$$

……

**a<0 olmak üzere**

P(z<a)=P(z>-a)=1-P(z<-a)

P(z≤a)=P(z≥-a)=1-P(z<-a)

P(z>a)=P(z<-a)=0,5+(-a)ya göre tablo değeri

P(z≥a)=P(z≤-a)=0,5+(-a)ya göre tablo değeri

# STANDART NORMAL DAĞILIM (Z) TABLOSU

| Z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |

# örneğin;

- $P(z<0.83)=0.2967$

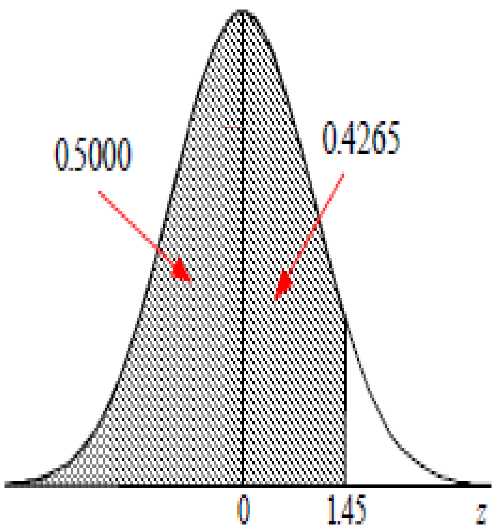
| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| .1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| .2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| .3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| .4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| .5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| .6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2518 | .2549 |
| .7 | .2580 | .2612 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| .8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| .9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |

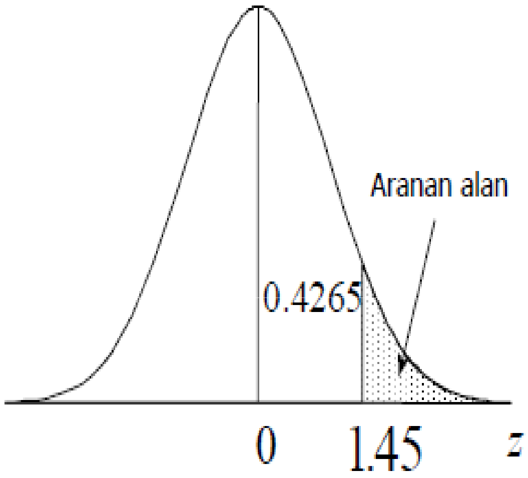
# ÖRNEKLER:

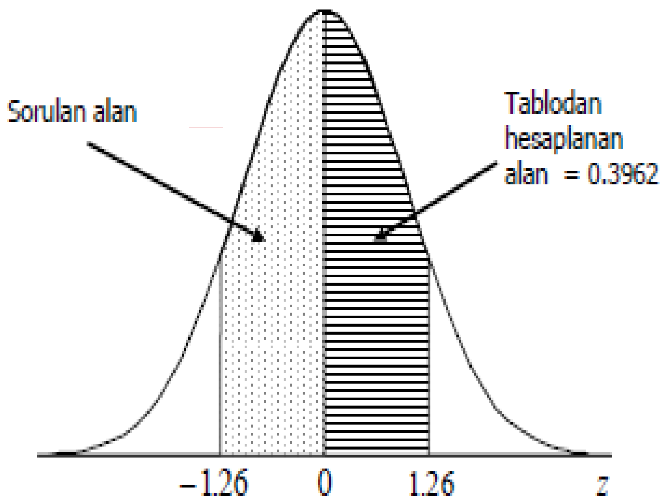
**1)** $P(z<1.45)=0,5+0,4265=0,9265$

**2)** $P(z>1.45)=1-P(z<1.45)=0.0735$

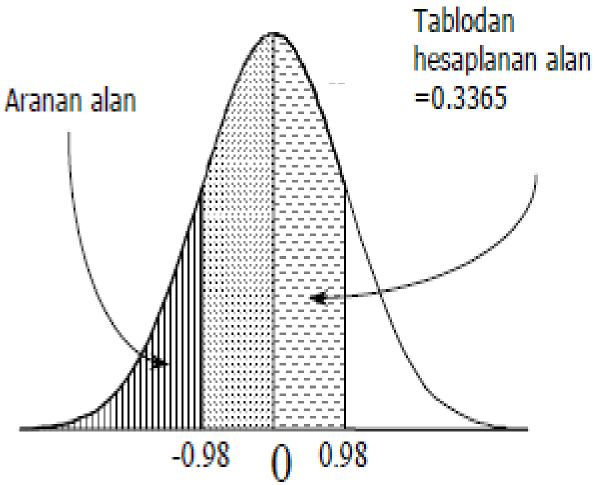
**3)** $P(-1.26<z<0)=P(0<z<1.26)=0.3962$

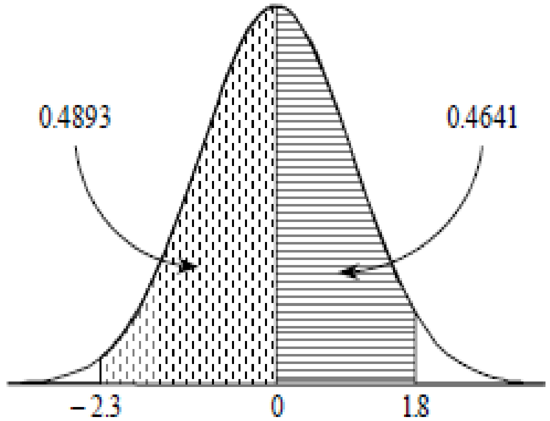


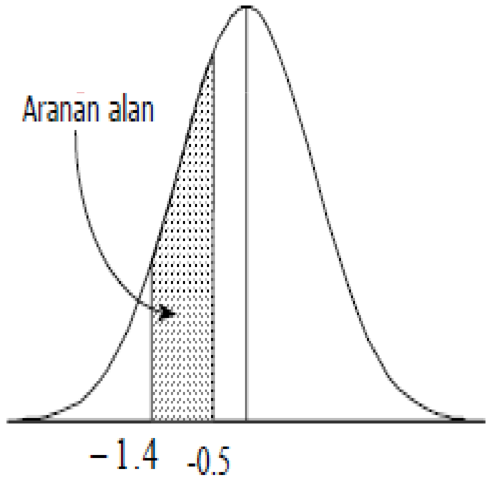



- **4)** $P(z<-0.98)=P(z>0.98)=1-P(z<0.98)=0.1635$
- **5)** $P(-2.3<z<1.8)=P(-2.3<z<0)+P(0<z<1.8)$
- $=0.9534$
- **6)** $P(-1.4<z<-0.5)=P(0<z<1.4)-P(0<z<0.5)$
- $=0.2277$



- Yukarıdaki örneklerin hepsinde z değerinden yola çıkarak olasılık hesapları yaptık. Fakat bazen bu işlemleri tersden yapmamız gerekebilir. Yani olasılık değerleri(eğri altındaki alan) bilinip z değerini hatta çoğu zaman $x=z\sigma+\mu$ eşitliğinden x değerini bulmamız gerekebilir. Böyle bir durumda olasılık değeri tablodan bulunup karşı gelen satır ve sütun birleştirilir ve z değerine ulaşılır.

# soru:

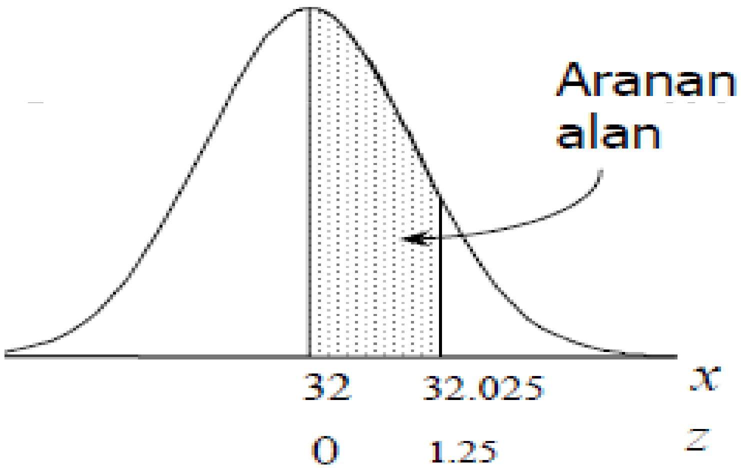
- Bir dolum makinası ortalama olarak 32ml suyu 0.02ml standart sapmayla su dolum işlemini gerçekleştirmektedir. Dolum miktarı normal dağılım sergiliyor ise rasgele seçilen bir şişenin 32 ile 32.025ml arasında su içerme olasılığı nedir?

$\mu$=32ml ve $\sigma$=0.02ml olmak üzere $P(32<x<32.025)=?$

- <u>ÇÖZÜM:</u>

- $z=(x-\mu)/\sigma$ eşitliğinden $x=32$ için $z=0$ ve $x=32.025$ için $z=1.25$ bulunur. O halde,

- $P(32<x<32.025)=P(0<z<1.25)$
- $=P(z<1.25)-P(z<0)$




5+0.3944]-0.5=0.3944

- Rasgele seçilen bir şişenin 31.97ml fazla su içerme olasılığı nedir?

- $P(x>31.97)=?$

- $z=(x-\mu)/\sigma$ eşitliğinden $x=31.97$ için $z=-1.5$ bulunur. O halde,
- $P(x>31.97)=P(z>-1.5)=P(z<1.5)=0.5+0.4332$
- $=0.9332$

# 3)EXPONENT (ÜSTEL) OLASILIK DAĞILIMI

- Uniform dağılıma benzer özellik gösterirler.
- μ=aritmetik ortalama (beklenen değer)

  f(x)= olasılık yoğunluk fonksiyonu

  μ>0 ve x≥0

  e=2.71828 olmak üzere

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}}$$

Ayrıca $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (min a=0 olabilir)

# soru:

- Bir polis radarı akşam trafiğinde araçların hızlarını denetlemektedir. Araçlar 62km/sa aritmetik ortalamalı normal dağılım sergilemektedirler. Araçların %3ü 72km/sa üzerinde hareket ediyorsa tüm araçlar için standart sapmayı hesaplayınız.

$P(x>72)=0.03$ ve $\mu=62$ ise $\sigma=?$

$P[(x-62)/\sigma > (72-62)/\sigma]=P(z>10/\sigma)$

$=1-P(z<10/\sigma)=0.03$

$P(z<10/\sigma)=0.97$ o halde tablodan bakılırsa 0.47 ye karşılık gelen $z=1.88$ dir. Yani $10/\sigma=1.88$ den $\sigma=5.32$ bulunur.

# ÖDEV :)

- X rastgele değişkeni (0,1) aralığında düzgün olarak dağılmaktadır. $P(x \leq 0,4)=0,4$ ve $y=x+1$ olmak üzere $P(y \geq k)=0,6$ ise k değerini bulunuz.

# ÖDEV :)

- Bir populasyondaki kişilerin ağırlıklarının ortalaması 60kg. Varyansı 25kg$^2$ olan normal dağılıma sahip olduğu varsayılıyor. Populasyondan rasgele bir kişi seçildiğinde;

a)50kg'dan hafif

b)55-60kg arasında

c)65kg'dan daha ağır olması olasılıkları nedir?

d)Rasgele 300 öğrenci alındığında ağırlıkları aşağıdaki aralıklarda olan kaç kişi vardır?

i)50kg'dan az    ii)50-55kg arası
iii)55-65kg arası    iv)65kg'dan fazla

# ÖDEV :)

- Bir standart normal dağılımda aşağıdaki koşulları sağlayan k değerlerini bulunuz.

(a) $P(z < k) = 0.1271$

(b) $P(z < k) = 0.9495$

(c) $P(z > k) = 0.8186$

(d) $P(z > k) = 0.0073$

(e) $P( 0.90 < z < k) = 0.1806$

(f) $P( k < z < 1.02) = 0.1464$

# ÖDEV :)

- Radyoaktif bir cisim tarafından yayınlanan ardışık iki parçacığın yayın anları arasında geçen süre $\mu=100$ parametreli üstel dağılımdır. Ardışık iki yayın arasında geçen sürenin;

a) Bir saniyeden az

b) 3 ile 4 saniye arasında

c) 4 saniyeden fazla olması olasılıkları nedir?

d) Ardışık iki yayın arasında geçen sürenin en fazla t kadar olması olasılığı ½ ise t=?