Olasılık Teorisi ve İstatistik CE209
Güz 2009 – Final Çözümleri

1 $\boxed{\text{a) } \underline{\underline{15}}}$

T : Test sonucunun kanser tanısı verme olayı
K: Kişinin gerçekten kanserli olma olayı

olsun.

Önce bilinenleri yazalım.

$P(K) = 0.001 \qquad P(K') = 0.999$

$P(T|K)$: kanserli birinin testte de kanserli görünmesi

$P(T|K) = 0.98$

$P(T|K')$: kanserli olmayan birinin testte kanserli görünmesi

$P(T|K') = 0.02$

Bizden istenen $P(K|T)$: kanser testi pozitif çıkan birinin gerçekten kanserli olma ihtimali

Bayes Teoremi'nden

$$P(K|T) = \frac{P(T|K) \cdot P(K)}{P(T)}$$

/* Burda dikkat edilmesi gereken şey test yapılan kişinin rasgele seçilmesi. Eğer bu seçimde rasgelelik yoksa bu hesaplar da doğru olmaz. */

Toplu olasılık kuralından

$$P(T) = P(T|K)P(K) + P(T|K)P(K')$$
$$= 0.98 \times 0.001 + 0.02 \times 0.999$$
$$= 0.02096$$

$$P(K|T) = \frac{0.98 \times 0.001}{0.02096} = 0.04676 = \%4.68$$

⇒ Yani test sonucunda kanserli görünen birinin gerçekten kanserli olma ihtimali %4.68! (Şaşırtıcı, ama doğru.)

b) 15p $P(T|K) = p$ olsun

$P(T|K') = 1-p$ olur

$P(K|T) = 0.9$ olması için $P(T|K) = p = ?$

Önceki örnekten

$$P(K|T) = \frac{p \cdot P(K)}{p \cdot P(K) + (1-p)(1-P(K))}$$

$$0.9 = \frac{p \cdot 0.001}{p \cdot 0.001 + (1-p) \cdot 0.999}$$

$$\Rightarrow \quad 0.9 = \frac{0.001p}{0.999 - 0.998p}$$

$$\Rightarrow \quad 0.8991 - 0.8982p = 0.001p$$

$$\Rightarrow \quad 0.8991 = 0.8992p$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{0.8991}{0.8992} = \boxed{0.9998887}$$

2 $\boxed{a)\ 15p}$

Makinaları %84'üne 1. grup
%16'sına 2. grup diyelim

Makina 1. grupta ise

X: 13 günde bozulma sayısı, $\lambda = 4.7 \times \frac{13}{30} = 2.0367$

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$P(X=0) = e^{-2.0367} = 0.1305$

$P(X=1) = 0.1305 \times 2.0367 = 0.2657$

$P(X=2) = \frac{0.1305 \times 2.0367^2}{2} = 0.2706$

$+$

$P(X \leq 2) = 0.668$

Makina 2. grupta ise

Y: 13 günde bozulma sayısı, $\lambda = 10.9 \times \frac{13}{30} = 4.7233$

$P(Y=0) = e^{-4.7233} = 0.0089$

$P(Y=1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda = 0.042$

$P(Y=2) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2/2 = 0.0991$

$+$

$P(Y \leq 2) = \underline{\underline{0.15}}$

Makina 2 gruptan birinde olabileceğinden

$p = 0.84 \times 0.668 + 0.16 \times 0.15 = \boxed{0.5851}$

b) 20p

Yeni parametrenin aşağıdaki şartı sağlaması gerekir.

30 gün için

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = 0.84 \cdot e^{-4.7} \cdot \frac{4.7^x}{x!} + 0.16 \cdot e^{-10.9} \cdot \frac{10.9^x}{x!}$$

$$e^{-\lambda} \cdot \lambda^x = 0.00764 \times 4.7^x + 2.9 \times 10^{-6} \cdot 10.9^x$$

Bu eşitlikten bulunacak λ he x için aynı olmalı.

$x=0 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0.00764 + 2.9 \times 10^{-6} \Rightarrow \lambda = 4.87$

$x=1$ için yerine koyalım $e^{-\lambda} \cdot \lambda = 0.0373$ } Birbirine eşit değiller

$0.00764 \cdot 4.7 + 2.9 \times 10^{-6} \times 10.9 = 0.036$

Öyleyse her x için değişik bir λ bulunacağından, bütün x'ler için yukardaki eşitliği sağlayacak bir lambda yoktur!

3.) a) 15p

* O.Y.F. için $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ olmalıdır.

Önce $[-k, k]$ aralığına bakalım. X değişkenini standardize edelim.

$$P(-17 < X < 17) = P(X < 17) - P(X < -17)$$

$$= P\left(Z < \frac{17-10}{7}\right) - P\left(Z < \frac{-17-10}{7}\right)$$

$$= P(Z < 1) - P(-3.86)$$

$$= 0.841345 - 0.000057$$

$$= 0.8411288$$

Toplam alan 1 olacağı için $x < -k$ ve $x < k$ 'nın altında kalan alan $1 - 0.8411288 = 0.158712$ 'dir.

Burdan

$$\int_{-\infty}^{-k} g(-x)\,dx + \int_{k}^{\infty} g(x)\,dx = 0.158712 \quad \text{çıkar}$$

$$\int_{-\infty}^{-17} a.\, e^{+x}\,dx + \int_{17}^{\infty} a.\, e^{-x}\,dx = 0.158712$$

$$a\left[e^{-17} \cancel{+1} + (\cancel{-1} + e^{-17}) \right] = 0.158712$$

$$\Rightarrow \quad a \cdot 8,2799 \times 10^{-8} = 0.158712$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 1916840}$$

b) 25p Önce birkaç gözlem yapalım

$$\int_{-\infty}^{-k} g(-x)\,dx = \int_{k}^{\infty} g(x)\,dx \quad ✓$$

Normal dağılım O.Y.F 'na $n(x)$ diyelim.

$$\int_{-k}^{k} n(x)\,dx + 2.\int_{k}^{\infty} e^{-1.5x}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad + 2.\frac{-2}{3}.\left(e^{-1.5x}\right)_{k}^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad + 1,333.\left(0 - e^{-1.5k}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad + 1.333 \cdot e^{-1.5k} = 1$$

$n(x)$ 'i normalize edelim. $z = \frac{x-10}{7}$

$$\int_{\frac{-k-10}{7}}^{\frac{k-10}{7}} n(z)\,dz + \frac{4}{3}\, e^{-1.5k} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi\left(\frac{k-10}{7}\right) - \phi\left(\frac{-k-10}{7}\right) + 1.333\, e^{-1.5k} - 1 = 0}$$

Bundan sonra iterasyon yapacağız. Akıllı bir sayı ile başlayalım. Önceki örnekten, k'nın çok küçük bir sayı olması gerektiği çıkarımını yapabiliriz. k çok küçükse $\phi\left(\frac{k-10}{7}\right) - \phi\left(\frac{-k-10}{7}\right)$ 'de küçük olur. Bu yüzde başlangıç noktası için bu kısmı ihmal edip k'yı bulalım.

$$1\frac{4}{3} e^{-1.5k} = 1$$

$$e^{-1.5k} = 0.75$$

$$-1.5k = \ln(0.75)$$

$$\Rightarrow k = 0.19$$

O zaman $k = 0.19$ için

$$\phi(-1.40) - \phi(-1.46) + \frac{4}{3} e^{-1.5 \times 0.19} - 1 =$$

$$0.0807 - 0.0721 + 1.0027 - 1 = 0.0113$$

$k = 0.2$ için

$$\underbrace{\phi(-1.40) - \phi(-1.46)}_{\text{üstteki ile aynı}} + 0.98 - 1 = -0.0038$$

Bundan sonra kesin değeri bulmak için

$$0.0807 - 0.0721 + \frac{4}{3} e^{-1.5 \cdot k} - 1 = 0$$ formülünü

kullanabiliriz.

$$\frac{4}{3} e^{-1.5k} = +0.9914$$

$$\Rightarrow e^{-1.5k} = +0.7436 \Rightarrow -1.5k = -0.2963$$

$$\Rightarrow \boxed{k \cong 0.1975}$$

//