

Random and Stochastic Processes (Örgün) Final Exam

İstanbul University Computer Engineering Dept. - Spring 2014

June 17th, 2014

LÜTFEN OKUYUN: Bu sınavın süresi **90** dakikadır. Lütfen soruları İNGİLİZCE kısa ve anlaşılır olarak cevaplayınız. Anlaşılmayan, muğlak ifadeler kullanmak, kötü yazı yazmak notunuza negatif olarak etki edecektir. Sınavda 1 adet hesap makinası, TEK YÜZÜNE notlarınızı el yazınızla yazdığınız fotokopi/printout olmayan, ÜZERİNDE SORU ÇÖZÜMLERİ OLMAYAN 1 adet A4 sayfası, içinde dersle ilgili yazı çizik olmayan 1 adet sözlük ve "CUMULATIVE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION" tablosunu kullanabilirsiniz. Bunların dışında her türlü defter, kitap, notlar ve elektronik sözlük yasaktır. Materyalin paylaşılması yasaktır. Soruları çözmeye başlamadan lütfen okuyun. Soru kağıtlarını çıkarken LÜTFEN KAĞIDINIZLA BİRLİKTE İADE EDİNİZ. YOU MUST HAVE AT LEAST 4 DECIMAL POINT RESOLUTION FOR YOUR ANSWERS! YOU MUST EXPLAIN CALCULATION STEPS, ASSUMPTIONS ETC. PLEASE **DRAW A SQUARE OR A CIRCLE AROUND YOUR FINAL ANSWER(S)**. Good Luck. (Mustafa Dağtekin)

Some useful equations ($a \in \mathbb{R}^+$, $0 < a < 1$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{ax} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{ax} = 0 \quad \int x e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax} \quad \int x^2 e^{ax} dx = \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$$

Q1: For a **CONTINUOUS** random variable, X , the *cumulative distribution function*, $F(x)$, is given below. Answer the following questions.

$$F(x) = \begin{cases} e^{cx} & \text{for } -\infty < x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}, \text{ where } c \in \mathbb{R}$$

(a) (15 p) Given $P(X > -1) = 0.3934693$, show that $c = 0.5$.

(b) (15 p) Find and sketch the probability density function of X .

Q2: For a **CONTINUOUS** random variable, Y , the *probability density function*, $f(y)$, is given below. Answer the following questions.

$$f(y) = \begin{cases} 3e^{3y} & \text{for } -\infty < y < 0 \\ 0 & \text{for } y \geq 0 \end{cases}$$

(a) (15 p) Find the expected value and variance of Y .

(b) (15 p) A function of Y is given as: $h(Y) = Y^2 + 4Y + 1$. Calculate expected value of $h(Y)$.

Q3: (20 p) Show that if X is a Binomial Random Variable, then the Probability Mass Function of X has the following property:

$$f(x-1)f(x+1) < f^2(x) \quad \forall x \in \{\mathbb{Z}^+, 0\}$$

Q4: (20 p) Errors on a data stream follows Poisson distribution with an average of 5 errors per minute. What is the expected amount of time in which the probability of getting at most 450 errors is 0.4. (Note: Use *Normal Approximation with Continuity Correction*)