İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi
Final Sınavı – Bahar 2019

Matematik II
Sınav Tarihi: 27.05.2019
Sınav Süresi: 75 Dakika

Ad-Soyad:
Öğrenci Numarası:

Q.1) $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun $x = 1$'deki Taylor serisini bulunuz. (25 Points)

Q.2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız. Eğer mevcut ise limiti hesaplayınız. (25 Points

Q.3) Üstü açık olan dikdörtgenler prizması şeklinde $4m^3$ hacminde bir karton kutu yapmak için en az kaç m^2 kartona ihtiyaç vardır? (25 Points

Q.4) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y, 0 \le x, 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$ böldesindeki integralini hesaplayınız. (25 Points

Dr. Uğur Odabaşı

1) $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun $x=1$'deki Taylor serisini bulun.

Çözüm| Fonksiyon ve türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$f(x) = 3^x \implies f(1) = 3$$

$$f'(x) = \ln 3 . 3^x \implies f'(1) = (\ln 3) . 3$$

$$f''(x) = (\ln 3)^2 . 3^x \implies f''(1) = (\ln 3)^2 . 3$$

$$f'''(x) = (\ln 3)^3 . 3^x \implies f'''(1) = (\ln 3)^3 . 3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (\ln 3)^n 3^x \implies f^{(n)}(1) = (\ln 3)^n . 3$$

Bu durumda

$$3^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n . 3}{n!}(x-1)^n$$

$(x,y)\to(0,0)\ \ |x.y|$ ... Mevcut ise limiti bulunuz.

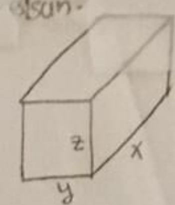
Çözüm | $y=mx$ doğruları boyunca $(0,0)$ noktasına yaklaşırsak,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y}{|x.y|} = \lim_{\substack{\cancel{(x,y)\to(0,0)} \\ x\to 0}} \frac{x\,mx}{|xmx|} = \frac{m}{|m|}$$

olacağından m'nin pozitif ve negatif oluşuna göre sonuç değişir. $\left(\begin{array}{l} m>0 \text{ ise limit } 1 \\ m<0 \text{ ise limit } -1 \end{array}\right)$

O halde limit mevcut değildir.

Çözüm Kutunun kenar ayrıtlarının uzunluğu x, y ve z olsun.



$$V = x.y.z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{xy}$$

$$A = xy + 2(xz + yz) = xy + 2\left(x\frac{4}{xy} + y\frac{4}{xy}\right) = xy + 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y - \frac{8}{x^2} = 0 \\ f_y &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y \text{ ve } x^3 = 8 \Rightarrow x = 2,\ y = 2 \text{ olduğundan}$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{4}{2.2} = 1$$

(2,2) noktası tek kritik noktadır. 2. türev testinden

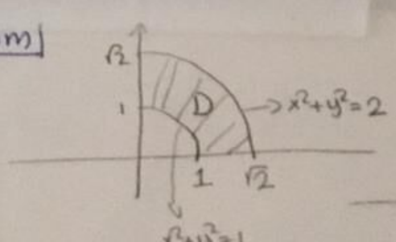
$f_{xx} = \frac{16}{x^3}$, $f_{yy} = \frac{16}{y^3}$ ve $f_{xy} = 1$ bulunur

$$\Rightarrow D = \frac{16}{x^3}\cdot\frac{16}{y^3} - 1^2 = \frac{256}{x^3y^3} - 1 \Rightarrow D(2,2) = 3 > 0 \text{ ve } f_{xx}(2,2) = 2 > 0$$

$\Rightarrow (2,2,1)$ boyutlu bir kutu için en az karton kullanılır ve bu

karton $f(2,2) = 2.2 + 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 12\ m^2$ dir.

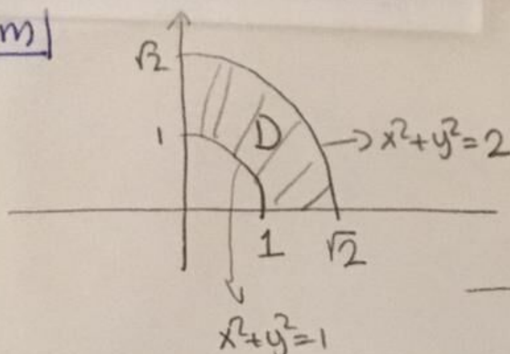
Çözüm



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow dA = r\,dr\,d\theta$$

$\rightarrow 1 \leq r \leq \sqrt{2}$

Çözüm



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow dA = r\,dr\,d\theta$$

$$\longrightarrow 1 \le r \le \sqrt{2}$$
$$0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\iint_D f(r,\theta)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{2}} r^2(1+\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{2}} r^3(1+\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}(1+\sin^2\theta)\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_1^{\sqrt{2}}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}(1+\sin^2\theta)\,\frac{3}{4}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\theta - \left.\frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{\pi/2}\right.$$

$$= 3/4 \cdot \frac{3}{2}\,\pi/2 = 9\pi/16 \,//$$