Differansiyel / Matematiksel Modeller

Popülasyon modeli
Radyoaktif oranlar
Kimyasal tepkimeler
Newton ve Kepler çekim kanunları
Serbest Düşme
Isıtma / Soğutma Sistemleri
Mekanik titreşim / sarkaç
Elektrik devre çözümleri →(V, I) I A → Anlık
Telgraf denklemi
Maxwell denklemleri
Finans uygulamaları
Tümör Modeli
Dalga denklemleri

Temel Kavramlar:

Birinci mertebeden ADD ile $F(x,y,y')=0$, $F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0$ formunda yazılır.

n. mertebeden olursa; $F(x,y,y',y'',y''',\dots,y^{(n)})=0$ formunda tanımlanır.

$y=g(x)$ çözüm fonksiyonu I aralığında dd'yi sağlar.

Tanım!
Bir dd'de koşullar x in bir değeriyle ilgili ise bu probleme başlangıç değer problemi (initial value problem IVP), x in iki değeriyle ilgili ise bu probleme sınır değer problemi denir. (boundary value problem BVP)

Ex;

$$\left.\begin{aligned} & y''+y=0 \\ & y(1)=3 \\ & y'(1)=-4 \end{aligned}\right\} \text{IVP} \qquad \left.\begin{aligned} & y'''+y=0 \\ & y(0)=1 \\ & y(\pi/2)=5 \end{aligned}\right\} \text{BVP}$$

Sınavda sonucu kutu içine al

Birinci Mertebeden ADD

$y'=f(x)$ formundaki dd'lerdir. Çözümü $y=\int f(x)dx$ şeklindedir

$y(x_0)=y_0$ başlangıç koşulu verildiğinde çözüm

$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ şeklinde olacaktır.

Ex; $y'=3x^2$ ADD çözünüz.

$\boxed{y=x^3+C}$

Ex; $y'=3x^2$ ve $y(3)=27$ ise ADD çözünüz.
(ODE)

$y=x^3+c \xRightarrow{c=0} \boxed{y=x^3}$

Ex; $y''=\sin x$

$y'=-\cos x+c \Rightarrow \boxed{y=-\sin x+cx+c_1}$

Ex; $y'=3x^2-6x+1$ $\quad y(-2)=0$ ADD çözünüz.

$y=x^3-3x^2+x+c$

$0=-8-12-2+c \rightarrow c=22 \Rightarrow \boxed{y=x^3-3x^2+x+22}$

Ex; $y'''=\underbrace{\exp(-x)}_{e^{-x}}$ $\quad y(0)=-1 \quad y'(0)=1 \quad y''(0)=3$
ADD çözünüz.

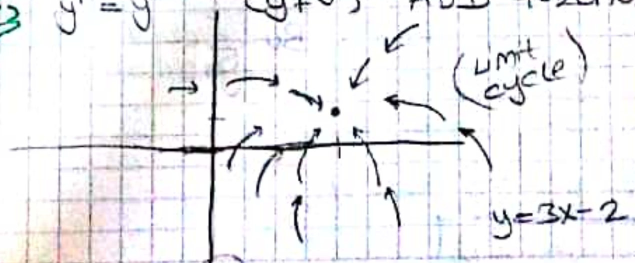
$y''=-\exp(-x)+c_1 \rightarrow c_1=4$

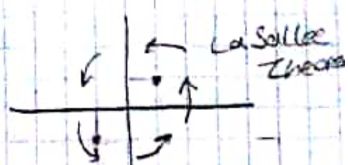
$y'=+\exp(-x)+c_1.x+c_2 \rightarrow c_2=0$

$y=-\exp(-x)+c_1.\frac{x^2}{2}+c_2.x+c_3 \rightarrow c_3=0$

$\boxed{y=-\exp(-x)+2x^2}$

Ex; $y'=y^2$ $(y\neq 0)$ ADD çözünüz. Çözüm $(3,1)$ noktasından geçmektedir.





$\int y(x)=\int f(x)\,dx$

$y' = f(y)$ formundaki d.d.

$f(y) \neq 0$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere >

$y' = f(y)$ ADD'yi

$$y' = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

$$\int dx = \int_{y} \frac{1}{f(y)} dy$$

$$x = \int_{y_0} \frac{1}{f(t)} \cdot dt$$

$\int y' = \int f(x)$

$\cancel{\int y' = \int f(y)}$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$f(y_0) = x_0$ başlangıç koşulu

$$\int y' = \int x^2 \longrightarrow y' = f(x)$$

$$y' = 2y^2 \longrightarrow y' = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2$$

Ex: $y' = y^2$, $y \neq 0$ ADD çözümü $(3,1)$ noktasından geçiyor. ADD çözünüz.

$y(3) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$\int dx = \int \frac{1}{y^2} dy \longrightarrow x = -\frac{1}{y} + c$$

$(3,1)$ nok. sağlatırsa

$$\left.\begin{aligned} x + c_1 &= -\frac{1}{y} + c_2 \\ x &= -\frac{1}{y} + \underbrace{(c_2 - c_1)}_{c} \\ x &= -\frac{1}{y} + \underbrace{\ln c}_{\text{sabit}} \end{aligned}\right\}$$ Bu şekilde de yazılabilir.

$$3 = -\frac{1}{1} + c \Rightarrow c = 4$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{y} + 4}$$

Ex; 7 $y' + \frac{1}{5}y = \frac{3}{5}$ ADD'yi çözünüz.

$$y' = \underbrace{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}y}_{f(y)} \quad \Big\} \; y' = f(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}(-3+y)$$

$$\int \frac{dy}{-3+y} = \int -\frac{1}{5}dx \longrightarrow \ln(y-3) = -\frac{1}{5}x + \underset{\text{sbt}}{\ln c}$$

$$y-3 = \exp\left(-\frac{1}{5}x + \ln c\right)$$

$$y-3 = \exp\left(-\frac{1}{5}x\right) \cdot \underbrace{\exp(\ln c)}_{c} \qquad e^{\log_e c} = c$$

$$y-3 = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{5}x\right)$$

$$\boxed{y(x) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{5}x\right) + 3}$$

Ex; 7 $y' = 2\underbrace{\sqrt{y-1}}_{f(y)}$ ADD'yi çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y-1}$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y-1}} = \int dx \longrightarrow x + c = \sqrt{y-1}$$

$$(y-1)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}}$$

$$\boxed{y = (x+c)^2 + 1}$$

Değişkenlerine Ayrılabilen ADD

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli, $g(y)$ ise $[c,d]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. $g(y) \neq 0$

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$ ADD'nin çözümü bulunur

Eğer çözüm (x_0, y_0) noktasından geçiyorsa

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{y_0}^{y} g(y)dy$$ çözümüne ulaşılır.

NOTE: $y' = f(x)g(y)$ formu içinde aynı teorem geçerlidir.

Çözüm: $\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)} dy$ şeklindedir.

Ex: $y' = x \cdot y^3 \cdot \sin x$ $\quad y(0) = 1$ ADD'yi çözün.

$$y' = \underbrace{x \cdot \sin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{y^3}_{g(y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin x \cdot y^3$$

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x \, dx}_{dv}$$

Türev: $x = u$, $dx = du$ (kısmi integral)

$\sin x dx = dv$, $-\cos x = v$ integral

$$uv - \int v du = -x\cos x - \int (-\cos x)dx$$

$$= -x\cos x + \sin x$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} = -x\cos x + \sin x + c$$

$y(0) = 1$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 0 + \underbrace{\sin 0}_{0} + c$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2x\cos x - 2\sin x + 1}}}$$

Ex; $(3x+8)(y^2+4)dx - 4y(x^2+5x+6)dy = 0$

ADD çözünüz.

$$\int\Big(\underbrace{\frac{(3x+8)}{x^2+5x+6}}_{f(x)}\cdot dx - \underbrace{\frac{4y}{y^2+4}}_{g(y)}dy\Big) = 0$$

$$\frac{3x+8}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3}_{(x+2)} + \frac{B}{x+2}_{(x+3)}$$

$-2/\ A+B=3$

$2A+3B=8$

$B=2 \quad A=1$

$$\left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx - 2\cdot\frac{2y}{y^2+4}dy = 0$$

$2\ln(x+2) = \ln(x+2)^2$

$\ln(x+2)^2 + \ln(x+3) - 2\ln(y^2+4)$

$\ln(x+2)^2 + \ln(x+3) - \ln(y^2+4)^2 = \ln c$

$$\ln\left(\frac{(x+2)^2\cdot(x+3)}{(y^2+4)^2}\right) = \ln c$$

$$\boxed{(x+2)^2(x+3) = c\cdot(y^2+4)^2}$$

Homojen ADD

$f(tx,ty) = t^n . f(x,y)$ formunda yazılabilen fonksiyonlara "n. dereceden homojen fonksiyon" denir.

Sağ taraf fonksiyonu 0. dereceden homojen olan;

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

formundaki ADD'ye homojen denklem denir.

NOT! Bir ADD'nin homojen olup olmadığını anlamak için

$$f(tx, ty) = f(x,y)$$

bağlantısının sağlanması gerekir.

Ex; $y' = \ln x - \ln y + \dfrac{x+y}{x-y}$ ADD'nin homojenliğini test ediniz.

$$f(x,y) = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$$

$$f(tx, ty) \overset{?}{=} f(x,y)$$

$$f(tx, ty) = \ln \frac{\cancel{t}x}{\cancel{t}y} + \frac{\cancel{t}x + \cancel{t}y}{\cancel{t}x - \cancel{t}y} = \ln \frac{x}{y} + \frac{x+y}{x-y}$$

$$= f(x,y)$$

olduğundan ADD homojendir.

Ex; $y' = \dfrac{y^3 + 2xy}{x^2}$

ADD homojen midir?

$$f(tx, ty) = \frac{t^3 y^3 + 2t^2 xy}{t^2 x^2}$$

$\neq f(x,y)$ olduğundan ADD homojen değildir.

Çözüm Yöntemi: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ denkleminde $u(x) = \dfrac{y(x)}{x} = \left(u = \frac{y}{x}\right)$

$[y(x) = x . u(x)]$ bağıntısına sahip $u(x)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Bu durumda:

$y' = u + xu'$ olacaktır.

$y' = u + x \cdot u' \triangleq f(u)$

$u' = \dfrac{f(u) - u}{x}$ ADD'yi elde ederiz. $\Rightarrow$ sonuçta u olmamalı.

Bu denklem ile değişkenlerine ayrılabilen bir ADD elde ederiz.

Ex; $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ ADD'yi çözünüz.

$u = \dfrac{y}{x}$ dönüşümünü uygulayalım.

$y = x \cdot u \Rightarrow y' = u + x u'$ elde edilir. Yerine yazarsak

$\cancel{u} + x u' = e^{u} + \cancel{u}$

$e^{u} / x u' = e^{u} / e$

$\int e^{-u} \cdot u' = \int \dfrac{1}{x}$

$-e^{-u} = \ln x - \ln c$ $+c$

$e^{-u} = \ln c - \ln x$

$-u = \ln\left(\ln \frac{c}{x}\right)$

$\underset{u(x)}{u} = -\ln\left(\ln \frac{c}{x}\right)$

$\boxed{\dfrac{y}{x} = -\ln\left(\ln \dfrac{c}{x}\right)} \Rightarrow$ genel çözüm

Ex; $(3x^2 + 9xy + 5y^2)dx - (6x^2 + 4xy)dy = 0$

ADD'nin genel çözümünü bulunuz.

$(3x^2 + 9xy + 5y^2)dx = (6x^2 + 4xy)dy$

$f(x,y) = \dfrac{3x^2 + 9xy + 5y^2}{6x^2 + 4xy} = \dfrac{dy}{dx}$ y'

Derece Eşit

$f(tx, ty) \stackrel{?}{=} f(x,y) \checkmark$

$\dfrac{3\cancel{t^2}x^2 + 9\cancel{t}x \cancel{t}y + 5\cancel{t^2}y^2}{6\cancel{t^2}x^2 + 4\cancel{t}x\cancel{t}y} = f(x,y) \Rightarrow$ Homojen ADD

$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

$y' = u + x \cdot u'$

$u + x \cdot u' = \frac{3x^2 + 9ux^2 + 5u^2x^2}{6x^2 + 4ux^2}$ } $y = ux$ yazdık.

$\cancel{u} + x \cdot u' = \frac{3 + 9u + 5u^2}{6 + 4u} - u$

$x \cdot u' = \frac{u^2 + 3u + 3}{6 + 4u}$

$\frac{6 + 4u}{u^2 + 3u + 3} \cdot u' = \frac{1}{x}$ } Değişkenlerine ayrılabilen cinsten

$u' \to \frac{du}{dx}$

$\int 2 \cdot \frac{(3 + 2u)}{u^2 + 3u + 3} \cdot du = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{u'}{u} = \ln u$

$\left[\int \frac{1}{1+u^2} du \to \text{olmasaydı bu uygulanır} \right]$

$\left(u^2 + 3u + \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{4}$

$k^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\cancel{2} \cdot \ln |u^2 + 3u + 3|^2 = \ln x$

$\left(u = \frac{y}{x}\right)$ $(u^2 + 3u + 3)^2 = x$

$\boxed{\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\frac{y}{x} + 3\right)^2 = x}$ ⇒ genel çözüm

$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$ formundaki ADD

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ olmak üzere ADD'nin çözümü için

$x = X + h$ ve $y = Y + k$ değişken dönüşümü yapılır.

Yerine yazılırsa: $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y + a_1 h + b_1 k + c_1}{a_2 X + b_2 Y + a_2 h + b_2 k + c_2}\right)$

dif. denkleminde: $a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$
$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$

olacak şekilde seçersek $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$

denklemi elde edilir ki bu da homojen bir d.d.'dir. (ADD)

Homojen ADD için önerilen çözüm yöntemi burada kullanılır.

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$ formunu ⇒ c_1 ve c_2 için dönüşüm yapılır.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$ ⇒ 2 bilinmeyenli denklem oluşur

(h ve k yerleri yok etmeli) $x = X + h$, $y = Y + k$ dönüşümü yapılır. $\frac{dY}{dX}$

$a_1h + b_1k + c_1 = 0$
$a_2h + b_2k + c_2 = 0$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) \longrightarrow \frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}$$

Homojen → $\frac{Y}{X}$

$z = \frac{Y}{X}$ koyulacak

$z = \frac{y}{x}$

$y = z.x$

$y' = z'x + z$

Ex; $y' = \frac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$ ADD'yi çözünüz.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5 \neq 0 \checkmark$$

$x = X + h$, $y = Y + k$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X + 2h - Y - k + 9}{X + h - 3Y - 3k + 2}$$

$2h - k + 9 = 0$
$h - 3k + 2 = 0$

$h = -5$
$k = -1$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y}{X - 3Y} = \frac{2 - \frac{Y}{X}}{1 - 3\frac{Y}{X}}$$ ⇒ Homojendir.

$z = \frac{Y}{X}$; $Y = zX$

$$\frac{dY}{dX} = X\frac{dz}{dX} + z$$

$$X \cdot \frac{dz}{dX} + z = \frac{2X - zX}{X - 3zX}$$

$$X\frac{dz}{dX} = \frac{2 - z}{1 - 3z} - z$$

$$X \cdot \frac{dz}{dX} = \frac{2 - 2z + 3z^2}{1 - 3z}$$

$$\frac{dX}{X} = dz\,\frac{(1 - 3z)\cdot(-2)}{2 - 2z + 3z^2\,(-2)} \Rightarrow \int \frac{1}{-2}\,\frac{(-2 + 6z)}{2 - 2z + 3z^2}\,dz = \int \frac{1}{X}\,dX$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2 - 2z + 3z^2| = \ln X + \ln c$$

$$\ln|2 - 2z + 3z^2| = -2\ln(X \cdot c) = \ln\frac{1}{X^2c^2}$$

$x = X-5 \quad y = Y-1$

$$2 - 2z + 3z^2 = \frac{1}{X^2 c^2}$$

$$2 - 2\cdot\frac{Y}{X} + 3\left(\frac{Y}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2 \cdot c^2}$$

$$\boxed{2 - 2\,\frac{(y+1)}{(x+5)} + 3\cdot\left(\frac{y+1}{x+5}\right)^2 = \frac{1}{(x+5)^2\cdot c^2}}$$

Ex; 7 $(2x+3y+1)\,dx + (4x+6y+1)\,dy = 0$ ASD [illegible].

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+3y+1)}{4x+6y+1} \qquad \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ X$$

$$\left.\begin{aligned} x &= X+h \\ y &= Y+k \end{aligned}\right\} \text{[illegible] A}$$

$$\left.\begin{aligned} z &\triangleq 2x+3y \\ z' &= 2+3y' \end{aligned}\right\} \cancel{z'\ y'}$$

$$\frac{z'-2}{3} = y'$$

$$\frac{z'-2}{3} = \frac{-(z+1)}{2z+1} \Rightarrow z' = \frac{z-1}{2z+1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z+1} \Rightarrow \int \underbrace{\frac{2z+1}{z-1}}_{*}\,dz = \int dx$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = \frac{2z-2+3}{z-1} = \left(2 + \frac{3}{z-1}\right)*$$

$$2z + 3\ln|z-1| = x + c$$

$$\boxed{2(2x+3y) + 3\ln|2x+3y-1| = x + C}$$

Ex; $y' = (\underbrace{4x+y-2}_{u})^2$ ADD çözünüz.

$4x+y-2 = u$

$4 + y' = u' \Rightarrow y' = u' - 4$

$u' - 4 = u^2$

$u' = 4 + u^2$

$\frac{du}{dx} = 4 + u^2 \Rightarrow \int \frac{1}{4+u^2} du = \int dx$

$\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \cdot \frac{u}{2} = x + c$

$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \cdot \left(\frac{4x+y-2}{2}\right) = x + c}$

Ex; $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$ ADD çözünüz.

$y' = \frac{1 + y/x}{1}$

$\frac{y}{x} = z$ Homojen denkl. çözümü yapılır.

Ex; $y' = \frac{2y-x}{2x-y}$ ADD çözünüz

$det \neq 0$

Homojen.'dir. $\longrightarrow$ $z = \frac{y}{x}$