Olasılık Teorisi ve İstatistik - Final Sınavı Çözümleri

İstanbul Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü - Güz 2010

11.Ocak.2011

S1: Bir kimyasal ölçüm için hazırlanan bir deney seti, labaratuar teknisyenlerinin %22'si tarafından doğru bir biçimde hazırlanıyor, %71'i tarafından küçük hatalarla hazırlanıyor ve %7'si tarafından büyük hatalarla hazırlanıyorç

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) `(10 p)` Eğer deney setini hazırlaması için rasgele bir teknisyen seçilirse, bu hazırlığın hatasız bir şekilde yapılma ihtimali nedir?

Çözüm 1a: Örneklerimiz sadece 3 olaydan oluşuyor ve bu olaylar birbirini dışlayan olaylardır. Bu yüzden bu sorunun cevabı 0.22'dir. ♠

(b) `(15 p)` Eğer deney setini hazırlaması için rasgele bir teknisyen seçilirse, bu hazırlığın ya küçük hatalarla, ya da büyük hatalarla hazırlanması olasılığı nedir?

Çözüm 1b: Örneklerimiz sadece 3 olaydan oluşuyor ve bu olaylar birbirini dışlayan olaylardır. Bu yüzden bu sorunun cevabı 0.78'dir. ♠

S2: Trafik akışı genellikle Poisson dağılımıyla modellenmektedir. Bir kavşaktan geçen araçların sayısı, saatte ortalama 217 araçtır. Aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Çözümlerinizde noktadan sonra en az 4 ondalık basamak hassasiyet olmalıdır.)

(a) `(15 p)` **Versiyon 1:** Bu kavşaktan 12 dakika içinde 38 ya da daha fazla araç geçme olasılığı nedir?

Çözüm 2a Versiyon 1: $\lambda = \frac{12}{60} \times 217 = 43.4$ araç/12dk'dır. Sorumuzun cevabı

$$P(X \geq 38) = \sum_{i=38}^{\infty} \frac{e^{-43.4} \cdot 43.4^i}{i!}$$

işlemi yapılarak bulunabilir. Fakat bu işlemi bilgisayar ortamı olmadan yapmak imkansız olduğundan Poisson dağılımını Normal dağılımla modelleyerek de sorumuzu çözebiliriz.

$$P(X \geq 38) = 1 - P(X \geq 38) = 1 - P(Z \leq \frac{38 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) = 1 - P(Z \leq -0.82) = 0.7939 \spadesuit$$

Versiyon 2: Bu kavşaktan 12 dakika içinde tam olarak 38 araç geçme olasılığı nedir?

Çözüm 2a Versiyon 2: $\lambda = \frac{12}{60} \times 217 = 43.4$ araç/12dk'dır. Sorumuzun cevabı

$$P(X = 38) = \frac{e^{-43.4} \cdot 43.4^{38}}{38!} = 0.0455 \spadesuit$$

(b) `(15 p)` 43 dakika içinde hiç araç geçmeme olasılığı nedir?

Çözüm 2b: $\lambda = \frac{43}{60} \times 217 = 155.52$ araç/43dk'dır. Sorumuzun cevabı

$$P(X = 0) = e^{-155.52} = 2.88 \times 10^{-68} \simeq 0 \spadesuit$$

(c) `(15 p)` **Versiyon 1:** Bu kavşaktan 66 dakika içinde geçen araç sayısının hangi sayıya eşit veya o sayıdan küçük olma ihtimali en az %40'tır?

Çözüm 2c Versiyon 1: $\lambda = \frac{66}{60} \times 217 = 238.7$ araç/66dk'dır. Sorumuzun cevabı yine Normal dağılıma yaklaşım ile bulunabilir. Önce 0.40 ihtimaline denk gelen z sayisini bulalim.

$$P(Z \leq z) \simeq 0.40 \Rightarrow z \simeq -0.25$$

Burdan:

$$-0.25 = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow x \simeq 234.8$$

x'in bir tamsayı olması gerekiyor. $x = 234$ alırsak

$$P(Z \leq \frac{234 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) = P(Z \leq -0.30) \simeq 0.3821$$

O zaman doğru cevap $x = 235$'tir. $\spadesuit$

Versiyon 2: Bu kavşaktan 30 saniye içinde geçen araç sayısının hangi sayıya eşit veya o sayıdan büyük olma ihtimali en az %40'tır?

Çözüm 2c Versiyon 2: $\lambda = \frac{30}{60 \times 60} \times 217 = 1.8083$ araç/30sn'dır. $\lambda \leq 5$ olduğundan sorumuzun cevabını Normal dağılıma yaklaşım ile BULAMAYIZ. Poisson dağılımı formülünü kullanıp $x = 0$'dan başlayarak rasgele değişkenin BDF'sine bakacağız.

$$P(X = 0) = e^{-1.8083} = 0.1639$$

$$P(X \leq 1) = 0.1639 + P(X = 1) = 0.1639 + (e^{-1.8083} \times 1.8083) = 0.1639 + 0.2964 = 0.4603$$

Bu versiyonda araç sayısının hangi sayıdan BÜYÜK olma ihtimali en az %40'tır diye sorulmuş. Bu yüzden sorumuzun cevabı $x \in \{1 ... \infty\}$'dir. $\spadesuit$

S3: Bir yarıiletken lazerin ömrü normal dağılımla modellenmektedir ve ortalaması 7120 saat ve standart sapması 890 saattir. Bu lazerlerden çalışma ömrü 7399 saati geçen lazerler "uzun ömürlü" olarak sınıflandırılmaktadır. Çözümlerinizde noktadan sonra en az 4 ondalık basamak hassasiyet olmalıdır.

Çözüm 3: $\mu = 7120$ saat ve $\sigma = 890$ saattir $x = 7399$ için z sayısını bulalım.

$$z = \frac{7388 - \mu}{\sigma} = 0.31$$

Bir örneğin uzun ömürlü sayılması için $Z > 0.31$ olmalı. Bir örneğin uzun ömürlü sayılma olasılığına p dersek

$$p = 1 - P(Z < 0.31) = 0.6217$$

(a) `(15 p)` Bir fabrika bu lazerlerden satın almaktadır ve lazerler bozulunca yenisiyle değiştirmektedir. "Uzun ömürlü" sayılan ilk lazerin değiştirilen 11. lazer olma ihtimali nedir?

Çözüm 3a: Burda parametresi yukarda bulduğumuz p olan geometrik dağılım tanımlanmaktadır. Burdan $P(X = 11) = 0.0033$ bulunur. ♠

(b) `(15 p)` Bu fabrikanın değiştirdiği 20. lazerin o ana kadar kullanılan lazerlerin içinden "uzun ömürlü" lazer sayısını 4 yapan ilk lazer olma ihtimali nedir?

Çözüm 3a: Burda parametreler yukarda bulduğumuz p ve $r = 4$ olan negatif binom dağılım tanımlanmaktadır. Burdan $P(X = 20) = 0.0099$ bulunur. ♠