Olasılık

Yunus Emre ÖK 130615000L

$\Rightarrow P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $(P(B)>0)$ $P(A\cap B) = P(B).P(A/B) = P(A).P(B/A)$

Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B)}$$

$\Rightarrow P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A') = P(B/A).P(A) + P(B/A').P(A')$

Permutasyon

$\Rightarrow P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ if $(n_1 == n_2)$ $P = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!}$ $\circlearrowleft \Rightarrow P = (n-1)!$

Kombinasyon

$\Rightarrow C_r^n = \dfrac{P_r^n}{P_r^r} = \dfrac{n!}{r!.(n-r)!}$

Binom

$\Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k . b^{n-k}$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Olasılık Kütle Fonksiyonu (OKF) (OYF) $f(x) \sim \int$ sürekli

$\Rightarrow$ X: Rastgele Değişken

$f(x)$: Olasılık kütle fonksiyonu

$\to f_n(x_i) \geq 0$ $i = 1,2 \ldots n$

$\to \sum_{i=1}^{n} f(x) = 1$ *

$\to f(x) = P(X = x)$

0 1 2 3

x_1 x_2 x_3 x_4

Birikimli Dağılım Fonksiyonu (~~...~~)

$\Rightarrow F(x) = P(x \leq X) = \sum f(x_i)$

$\to 0 \leq F(x) \leq 1$

$\to x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ (artan)

x_1 x_2 x_3

* $f(x)$: ... olma

* $F(x)$ ... 'dan küçük veya büyük

Ortalama

$\Rightarrow$ X: R.D

$\to Ort = \mu = E(x) = \sum_x x.f(x)$

Varyans

$\Rightarrow$ X: R.D

$\to$ Varyans $= \sigma^2 = V(x) = E[(X-\mu^2)]$ $E(x^2)$

$= \sum_x (x-\mu)^2.f(x) = \left[\sum_x x^2.f(x)\right] - \mu^2$

S. Sapma

$\Rightarrow$ X: R.D

$\to$ S.Sapma $= \sigma = \sqrt{V(x)}$

Beklenen Değer Fonksiyonu

$\Rightarrow$ X: R.D

$\to g(x)$: beklenen X

* Beklenenin ort. alınır.

$E[g(x)] = \sum_x g(x).f(x)$

Bernolli Denemesi

$\Rightarrow$ X: Binomiyal Rastgele Değişken ise; * n'tane bernollideki başarılı sonuç

$\to$ Deneyler Bağımsız

$\to$ 2 sonuçlu

$\to$ Her başarı ihtimali: p

$\to$ Tekrarlanma Sayısı: n

Binom Dağılım

$p(X=x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x . (1-p)^{n-x}$

$\Rightarrow$ X: B.R.D.

$\to$ Beklenen değer (ort.) $= \mu = E(x) = n.p$

$\to$ Varyansı $\sigma^2 = V(x) = n.p(1-p)$

Bernolli Denemesi – Geometrik Dağılım

$\Rightarrow$ X: Geometrik Rastgele Değişken

$\to$ Başarılı gelene olasılığı: p

$\to$ Başarı olana kadar inceleme

$\to f(x)$; O.K.F.

* Başarılı sonuç buluncaya kadar yapılan deneme sayısı

$\to f(x) = P(X=X) = (1-p)^{x-1}.p$

$\to \mu = 1/p$ (ilimu)

$\to \sigma^2 = V(x) = 1-p/p^2$

Negatif Binom Dağılım

$\Rightarrow$ X: Negatif Binomiyal R.D.

$\to$ Başarılı olma olasılığı: p

$\to$ r adet deneme oluncaya kadar yapılan deneme

* Başarılı r tane sonuç bulununcaya kadar yapılan deneme

$\to f(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}.p^r$

$\to \mu = E(x) = r/p$ $E(x^2) = \frac{r}{p}\left[\frac{r+1}{p} - 1\right]$

$\to \sigma^2 = V(x) = E(x^2) - \mu^2 = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Poisson Dağılım

* Binom dağılımlı bir RD'de np sabitse kullanılan dağılım

$\Rightarrow$ X: Olay oluşma sayısı R.D

$\to$ Birden fazla olay aynı alt aralıkta değil

$\to$ Alt aralıktaki olay olma ihtimali

$\to$ Bağımsız

$\Rightarrow f(x) = P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ toplamdaki ort.

$\to \mu = E(x) = \lambda$ * Sayıda verilir

* λ = Toplam. ort

$\to \sigma^2 = V(x) = \lambda$

* Binom dağılım sonsuza giderken poisson dağılıma eşittir.

Binom $\lim_{x \to \infty} P(X=x) =$ Poisson $P(X=x)$

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{3} f(n)$ aralıklar

Sürekli Rastgele Değişkenler

$\Rightarrow$ X: Sürekli Rastgele Değişken

$\to f(x) \geq 0$

Olasılık kütle

$\to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$\to P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

$\to P(X=x) = 0$ (noktada değer olmaz.)

$\to P(x_1 < x_2 \leq x_3) = P(x_1 \leq x_2 < x_3)$

$= P(x_1 \leq x_2 \leq x_3)$

Birikimli Dağılım

$\to F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

* $f(x) = \dfrac{d}{dx} F(x)$

Olasılık Yoğunluk (OYF)

Ort

$\to \mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Varyans

$\to \sigma^2 = V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= E(X^2 - \mu)^2 = \int (x-\mu)^2.f(x)dx$

S. Sapma $\to \sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2}$

Beklenen Değer $\to E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).f(x)dx$

Gauss Dağılım - Normal Dağılım

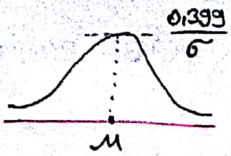
=> X: Normal Dağılımlı R.D

-> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$

$(-\infty < x < \infty)$

* Binom ve Poisson modellemesi

? Noktada = 0



$\frac{0{,}399}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

μ

=> Z: Standart Normal Rastgele Değişken

-> Ort = $\mu = 0$

-> Varyans = $\sigma^2 = 1$

-> S.Sapma = $\sigma = 1$

Kütle -> $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2}$

Birikimli -> $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

* Tablo'da olasılıklar yazar.

* $p(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$

* $p(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$

Standardizasyon

=> Normal Dağılımlı R.D.'yi Standart Normal Dağılımlı R.D.'ye dönüştürmeye "standardizasyon" denir.

-> $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ardından $p(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$

-> $\mp \%a$ => $P\left(\mu - \frac{\mu a}{100} < Z < \mu + \frac{\mu a}{100}\right)$

Binom Dağılım Standardizasyon

=> X: Binom Dağılımlı Rastgele Değişken

-> $n.p > 10$

-> $n.(1-p) > 10$

-> Hesap sırasında süreklilik düzeltmesi uygulanır.

μ süreklilik düzeltmesi

-> $Z = \frac{X - n.p \mp 0{,}5}{\sqrt{np(1-p)}}$ σ

* $P\left(\frac{x - 0{,}5 - \mu}{\sigma} < x < \frac{x + 0{,}5 - \mu}{\sigma}\right)$

* ilk başarılı deneme görünceye kadar geçen süre, uzunluk vs.

Poisson Dağılım Standardizasyon

=) X: Poisson Dağılımlı R.D.

-> $(\lambda) > 10$

Laplace

-> Süreklilik Düzeltmesi $(\mp 0{,}5)$

-> $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ μ (ort) σ^2 (varyans)

=) X: Üstsel Dağılımlı R.D.
$P(X < t_1 + t_2 \,/\, X > t_1) = P(X < t_2)$

Üstsel - Poisson

* Poissonun herhangi bir zamandaki "başarılı (1) sonuç için geçen süreç

=> X: Üstsel Dağılımlı R.D.

-> x: geçen süre

-> λ: ortalama [illegible] / süre

* 6'a kadar araç gelmeme = 6'dan sonra araç gelme

-> $\mu = 1/\lambda$ -> $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

-> $P(X > x_1) = \int_{x_1}^{\infty} \lambda . e^{-\lambda x} dx$

$1 - F(x)$

$F(x) = P(X < x)$

-> $F(x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}$

-> $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

-> $F(x) = \int_{x_1}^{\infty} f(x)\, dx$

Erlang ve Gamma Dağılımları

* Poisson - Üssel Dağılımın 1'den fazla veya r adet "başarılı" sonucu için geçen süre. (genel hâli) r=1 için üssel ile aynı

=> X: Erlang Dağılımlı R.D.

-> r tane olay için (r=1 ise üssel ile aynı)

-> $P(X > x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x} . (\lambda x)^k}{k!} = 1 - F(x)$

-> $F(x) = P(X \leq x)$

-> $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

-> $f(x) = \frac{\lambda^r . x^{r-1} . e^{-\lambda x}}{(r-1)!}$ $x > 0$, $r = 1, 2, 3$

-> r tam sayılar dışındaysa;

önemli $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} . e^{-x}$, $r > 0$

-> $\Gamma(r) = (r-1) . \Gamma(r-1)$

-> $\Gamma(1) = 1$

-> $f(x) = \frac{\lambda^r . x^{r-1} . e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$

-> $E(x) = \mu = r/\lambda$

-> $V(x) = r/\lambda^2$

Rastgele Değişim Fonksiyonunun Dağılımı

* X için fx verip Y için OYF (f_y) soran sorular. Monotonluk, artan, azalanlık kontrol edilir.

=> X: R.D.

-> $g(x)$ X'in fonksiyonu

-> $P(X < x)$ => $P(g(x) < x)$

gerekli işlemler yapıldığında

$f_{g(x)} \& h(x)$ => $f_{g(x)}() = h'(x) . f_{g(x)}(h(x))$

-> iki kök varsa

$P(y_1 < x < y_2)$

$= | f_X(y_1) - f_X(y_2) |$

$f_X(y_2) - f_X(y_1)$

=> X: sürekli R.D

-> f_X: OYF

-> $g(x)$: monoton artan / azalan

-> $y = g(x)$

-> $x = g^{-1}(y) \triangleq u(y)$ ise;

-> $f_X(y) = \begin{cases} f_X[u(y)] . \left| \frac{du(y)}{dy} \right|, & y = g(x) \\ 0, & y \neq g(x) \end{cases}$

* $x_1 < x_2$ => $g(x_1) < g(x_2)$ monoton artan
$x_1 < x_2$ => $g(x_1) > g(x_2)$ monoton azalan

Birleşik Olasılık Dağılımları

=> X, Y: R.D. ve X ve Y ayrık

f sağlar OKF

① $0 \leq f_{xy} \leq 1$ $\forall x y$

② $\sum_x \sum_y f_{xy} = 1$

③ $F(x,y) = P(X = x, Y = y)$

=> X, Y sürekli ise

-> $f_{xy}(x,y) \geq 0$

-> $\iint f_{xy}(x,y)\, dx dy = 1$

R x,y düzleminde bölge

-> $P[(X,Y) \in R] = \iint_R f_{xy}(x,y)\, dx dy$

Bileşen Olasılık Dağılımları

* X, Y birleşikten X ve Y çıkarılabilir.

f_{xy} -> f_x, f_y

-> sürekli $f_X = \int_y f(x,y)\, dy$

-> $f_y = \int_x f(x,y)\, dx$

Ayrık -> $f_x = \sum_y f(x,y)$

-> $f_y = \sum_x f(x,y)$

Şartlı Olasılık Dağılımı

Bayes

=> X, Y R.D. için Y=y şartında olasılık dağılımı istenebilir.

OYF ve OKF

-> $f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ $f_Y(y) > 0$

-> $f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ $f_X(x) > 0$

=> Ayrık için

-> $0 \leq f_{X/Y} \leq 1$

-> $\sum_x f_{X/Y}(x/y) = 1$

=> Sürekli

-> $f_{X/Y}(x/y) \geq 0$

-> $\int_x f_{X/Y}(x/y)\, dx = 1$

-> $P(X = x / Y = y) = F_{X/Y}(x/y)$ -> $P(X \in B / Y = y) = \int_{x \in B} f_{X/Y}(x/y)\, dx$

-> $E(X/y) = \mu_{X/y} = \sum_x x . f(x/y)$
$= \int_x x f(x/y)\, dx$

-> $V(X/y) = \sum_x (x - \mu_{X/y})^2 . f(x/y)$ $\int \ldots dx$

Bağımsız => X, Y bağımsız R.D.

-> $f(x,y) = f(x) . f(y)$

$f(y/x) = f(y)$ tersi de

$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) . P(Y \in B)$