Örnek X, Y sürekli R.D ve Birleşik O.Y.F aşağıdaki gibidir.

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} c.(y^2-x^2)e^{-y} & , \quad 0<y<\infty, \ -y\leq x\leq y \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

$c = ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-y}^{y} c.\ e^{-y}(y^2-x^2)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} c.\ e^{-y}.\left[y^2.x - \frac{x^3}{3}\right]_{-y}^{y} dy = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} c.\ e^{-y}\left[y^2.y - \frac{y^3}{3} - \left(-y^3 - \frac{(-y)^3}{3}\right)\right] dy = 1$$

$$c\int_{0}^{\infty} e^{-y}.\left[2.y^3 - \frac{2y^3}{3}\right] dy = 1$$

$$1 = \frac{4c}{3}\underbrace{\int_{0}^{\infty} y^3 e^{-y}\, dy}_{\Gamma(4)} \qquad \Gamma(4) = 3!$$

$$1 = \frac{4c}{3}.\ 3! \quad \Longrightarrow \quad c = 1/8 = \_\_\_\_ .$$

Bileşen (Morjinal) Olasılık Dağılımları

X, Y 'nin birleşik olasılık dağılımından X ve Y'nin tek başına olan dağılımları çıkarılabilir.

$$f_{XY} \rightarrow f_X, \quad f_{XY} \rightarrow f_Y$$

I) X, Y sürekli ise

$$f_X(x) = \int_x f_{XY}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_y f_{XY}(x,y)\, dx$$

II) X, Y ayrık ise

$$f_X(x) = \sum_x f_{XY}(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_y f_{XY}(x,y)$$

Örnek X ve Y sürekli R.D.'ler ve Birleşik O.Y.F.

$$f_{XY}(x,y) = 6\, e^{-2x} e^{-3y} \quad (x>0,\ y>0)$$

$$f_X(x) = \int_0^\infty 6 \cdot e^{-2x} \cdot e^{-3y} \cdot dy$$

$$= 6 \cdot e^{-2x} \left[-\frac{e^{-3y}}{3} \right]_0^\infty$$

$$= 2 \cdot e^{-2x} \quad (x>0)$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty 6 \cdot e^{-2x} e^{-3y}\, dx$$

$$= \ldots = 3 \cdot e^{-2y} \quad (y>0)$$

Şartlı Olasılık Dağılımları

Bayes Teoremini hatırlayalım. A ve B olayları için

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad (P(A) > 0)$$

X ve Y rastgel değişkenleri için $Y=y$ olma şartı aldında X ve Y'nin olasılık dağılımları istenebilir.

Şartlı olasılık Y.F ve K.F aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \qquad (f_X(x) > 0)$$

Ayrık R.D için OKF'den

I) $1 \geq f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

II) $\sum_{x} f_{X|Y}(x|y) = 1$

III) $P(X=x \mid Y=y) = f_{X|Y}(x|y)$

Sürekli R.D. için OYF'den

I) $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$

II) $\int_{x} f_{X|Y}(x|y) = 1$

III) $P(X \in \mathbb{B} \mid Y=y) = \int_{x \in \mathbb{B}} f_{X|Y}(x|y)\,dx$

$\mathbb{B}$ ~~b~~

Örnek

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5} x(2-x-y), & \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{matrix} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

Bazen $f_{XY}(x,y)$ yerine $f(x,y)$ de kullanılabilir.

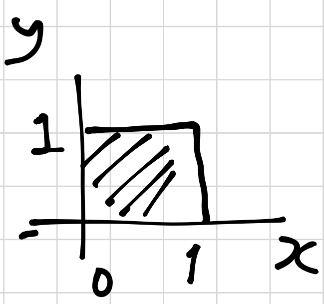
$f_{X|y}(x|y)$ yerine $f(x|y)$'de yazılabilir.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \frac{12}{5}\int_0^1 x(2-x-y)\,dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{2}{5}(4-3y) \qquad (0<y<1)$$



$$f(x|y) = \frac{12/5}{2/5} \cdot \frac{x(2-x-y)}{(4-3y)}$$

$$= 6 \cdot \frac{x(2-x-y)}{4-3y} \qquad \begin{bmatrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{bmatrix}$$

Şartlı ortalama

$Y=y$ şartı altında X'in şartlı beklenen değeri

$E(X|y)$ veya $\mu_{X|y}$

$$E(X|y) = \sum_x x \cdot f(x|y)$$

$$= \int_x x \cdot f(x|y)$$

Şartlı varyans

$$V(X|y) = \sigma^2_{X|y} = E\left[(X-\mu_{X|y})^2 / y\right]$$

(ayrık) $$= \sum_x (x-\mu_{X|y})^2 f(x|y)$$

(sürekli) $$= \int_x (x-\mu_{X|y})^2 f(x|y)\,dx$$

Bağımsız Rasgele Değişkenler

Bazı rastgele deneylerde rastgele değişkenlerin birinin değeri diğerlerini etkilemez.

Tanım X ve Y bağımsız R.D ise aşağıdaki şartları sağlarlar.

① $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

② $f(y|x) = f_Y(y)$ bütün x, y ve $f_X(x) > 0$

③ $f(x|y) = f_X(x)$ bütün x, y'ler için ve $f_Y(y) > 0$

④ $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

A, X'in bir bölgesi
B, Y'nin " "

Genel Örnekler

Örnek X ve Y'nin birleşik O.Y.F.

$$f(x,y) = e^{-x-y} \quad (x, y > 0)$$

X ve Y bağımsız R.D.'ler midir?

Bileşen O.Y.F'larına bakalım.

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x} e^{-y}\, dy = e^{-x} \qquad x > 0$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)\, dx = e^{-y} \qquad y > 0$$

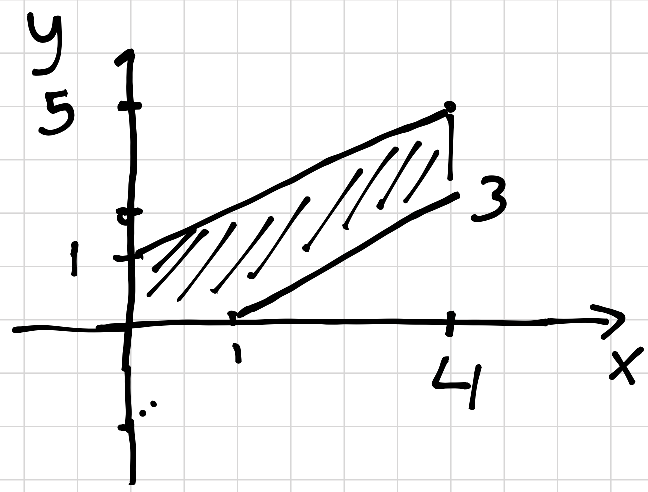
$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ olduğu için X ve Y birbirinden <u>bağımsız</u> R.D.'lerdir.

Örnek

$f(x,y) = c \qquad 0<x<4$ ve $y>0$

$x-1<y<x+1$

$c = ?$



$$\int_x \int_y f(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^{x+1} c \cdot dy \cdot dx + \int_1^4 \int_{x-1}^{x+1} c \cdot dy \cdot dx = 1$$

$$\int_0^1 c \cdot (x+1)\, dx + \int_1^4 c \cdot (x+1-x+1)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}c + 6c = 1 \Rightarrow c = 2/15 = \dots$$

Ortalama ve Varyans

X ve Y için $f(x,y)$ verilmiş

$$E(X) = \int_x \int_y x \cdot f(x,y)\, dy\, dx$$

$$E(Y) = \int_x \int_y y \cdot f(x,y)\, dy\, dx$$

Yukarıdaki örnek için

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^{x+1} x.c.\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x-1}^{x+1} x.c.\, dy\, dx$$

$$= \dots$$

$$= \frac{19}{9}$$

$f_X(x) = ?$

$0<x<1 \qquad f_X(x) = \int_0^{x+1} c \cdot dy = \dfrac{x+1}{7.5}$

$1<x<4 \qquad f_X(x) = \int_{x-1}^{x+1} c \cdot dy = \dfrac{2}{7.5} = \dfrac{4}{15}$

$$f_X(x) = \begin{cases} (x+1)\frac{2}{15} , & 0 \leq x < 1 \\ 4/15 , & 1 \leq x < 4 \\ 0 , & \text{diğer.} \end{cases}$$

Örnek X, Y Ayrık R.D'ler. O.k.F :

x	y	f(x,y)
−1	−2	1/8
−0.5	−1	1/4
0.5	1	1/2
1	2	c

$+ \quad 1 \rightarrow c = 1/8$

$E(X) = ?$

$$E(X) = \sum_x \sum_y x \, f(x,y)$$

$$= (-1)\cdot \tfrac{1}{8} + (-0.5)\cdot \tfrac{1}{4} + 0.5 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8} \,//$$

Örnek

$$f(x,y) = 24xy, \quad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \\ 0<x+y<1 \end{matrix}$$

$$f_X(x) = \int_{0<x+y<1} f(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 24x \cdot y\,dy$$

$$= 24 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2 \quad (0<x<1)$$

$f_Y(y) = 12y(1-y)^2 \quad 0<y<1$

Bağımsız ?

$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ olduğu bağımsız Değil !

Örnek

Sürekli X, Y

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0<x\leq y<\infty \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

a) Y'nin bileşen O.Y.F ?

$$f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} \cdot dx$$

$$= e^{-y} \cdot x\Big|_0^y = y \cdot e^{-y} \quad (0<y<\infty)$$

$$f_X(x) = \int_x^\infty e^{-y}\, dy = -e^{-y}\Big|_x^\infty = e^{-x} \quad 0<x<\infty$$

b) $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-y}}{y \cdot e^{-y}} = \frac{1}{y} \quad (0<x<y)$$

Örnek X bir AYRIK R.D. ve

OKF

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\alpha x), & 2<x\leq 5 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$\alpha = 0.3565$ olması gerektiğini gösteriniz.

$$\sum_x f(x) = 1 \Rightarrow \ln(\alpha.3) + \ln(\alpha.4) + \ln(\alpha.5) = 1$$

$$\ln(60.\alpha^3) = 1 \Rightarrow 60\alpha^3 = e \rightarrow \alpha = 0.3565$$

Birikimli dağılım fonksiyonu.

$$F(x) = \sum_{u=-\infty}^{x} f(u)$$

$x < 3$ ise $F(x) = 0$

$3 \leq x < 4$ " $F(x) = f(3) = 0.06716$

$4 \leq x < 5$ " $F(x) = f(3) + f(4)$

$= 0.4220$

$x \geq 5$ $F(x) = f(3) + f(4) + f(5)$

$= 1$