Örnek Bir insanın belli bir hastalığa yakalanma ihtimali %15'tir. Bu hastalığı belirlemek için yapılan testin pozitif çıkma ihtimali, kişi gerçekten hastaysa %99.7, kişi hasta değilse %1.5'tir. Bu testin pozitif çıkması halinde kişinin gerçekten hasta olma ihtimali nedir?

T : Testin pozitif olma olayı

H : Kişi hasta

$P(H) = 0.15$

$P(T \mid H) = 0.997$

$P(T \mid H') = 0.015$

$P(H \mid T) = ?$

$$P(\mp) = P(\mp/H)\,P(H) + P(\mp/H')\,P(H') = 0{,}997 \times 0{,}15 + 0{,}015 \times 0{,}85 = \sim$$

$$P(H/\mp) = \frac{P(\mp/H) \cdot P(H)}{P(\mp)} \cong 992$$

Sayma Teknikleri

* Çarpım kuralı (Sayma için)

Bir operasyon k adımlı bir diziyle tanımlanabiliyorsa ~~ve 1.~~ ve

- 1. adımın tamamlanması için n_1 farklı yoldan
- 2. adımının tamamlanması için n_2 farklı yoldan

⋮

- k. adım için n_k yol

Bu operasyon toplam olarak

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

yoldan yapılabilir.

Permutasyon ve Kombinasyon

· Bir eleman kümesi düşünelim

$$S = \{a, b, c\}$$

Bu elemanların permutasyonu, sıralı olarak bu elemanın farklı diziliş sayısını gösteren rakamdır.

– $\{$~~ab~~, abc, acb, ... $\}$

Tanım

* n elemanlı bir dizinin, k elemanlı sıralı alt küme sayısı

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_2^3 = \frac{3!}{1!} = \underline{\underline{6}}$$

Benzer nesnelerin ~~Farklı objelerin~~ permutasyonu

Bir kümede $n = n_1 + n_2 + .. + n_r$ nesne vardır. Bu nesnelerin n_1 adedi bir çeşit, n_2 adedi ayrı bir çeşit ... Bu nesnelerin permutasyon sayısı

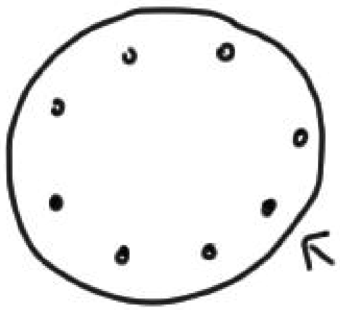
$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! .. \, n_r!}$$ -dir.

Örnek Bir hastanede operasyon odası 3 adet diz ameliyatı, 2 adet de kalça ameliyatı için ayrılacaktır. Bu ameliyathanede kaç farklı sırada ameliyat dizisi yapılabilir?

$S = \{kkkdd, ..$

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \underline{\underline{10}}$$

Dairesel Permutasyon



Bir masanın etrafınd $\underline{\underline{n}}$ adet kişi kaç farklı şekilde oturabilir?

$(n-1)!$

Kombinasyonlar:

n elemanlı bir kümeden r elemanın sıraya bakılmaksızın seçilmesi ile ilgilenebiliriz. Her bir seçime kombinasyon deriz. Toplam kombinasyon sayısı

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{P_r^r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Binom Teoremi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Rastgele Değişkenler

<u>Örnek</u> Bir çift zar atışı deneyinde bazen sonuçların kendisiyle değil, sonuçların bir fonksiyonu ile ilgilenebiliriz. Mesela zarların yüzlerindeki sayıların toplamları bizi ilgilendirebilir. Mesela zarların toplamına X dersek X, 2 ile 12 arasında değerler alabilir. Bu değerlerin oluşma ihtimalleri ile ilgilenebiliriz.

$$P(X=4) = ?$$

$$P\left(\{1,3\},\{2,2\},\{3,1\}\right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

TANIM

Bir örnek uzayındaki her olası sonuca bir reel sayı atayan fonksiyona "rastgele değişken" denir. Rastgele değişkenler X gibi büyük harflerle gösterilirler.

Sürekli rastgele değişkenler – Sonlu veya sonsuz bir aralık içindeki reel sayıları değer olarak alabilir.

- Bir lastiğin basıncı
- Bir trenin geldiği zaman

Ayrık R.D.ler – Sonlu sayıda veya sayılabilir sonsuz sayıda noktadan oluşur.

- zarların toplamı
- Torbadan çekilen kırmızı top sayısı.

Ayrık Rastgele Değişkenler

Olasılık Dağılımları ve Olasılık kütle fonksiyonu

Bir rastgele değişkenin X'in olasılık dağılımı, X'in alabileceği değerler ile o değerlere ait olasılıkların gösterimidir.

Örnek: Bir dijital kanaldan gönderilen 4 adet bitten hatalı olan bit sayısına X diyelim. X $\{0, 1, \ldots, 4\}$ değerlerini alabilir.

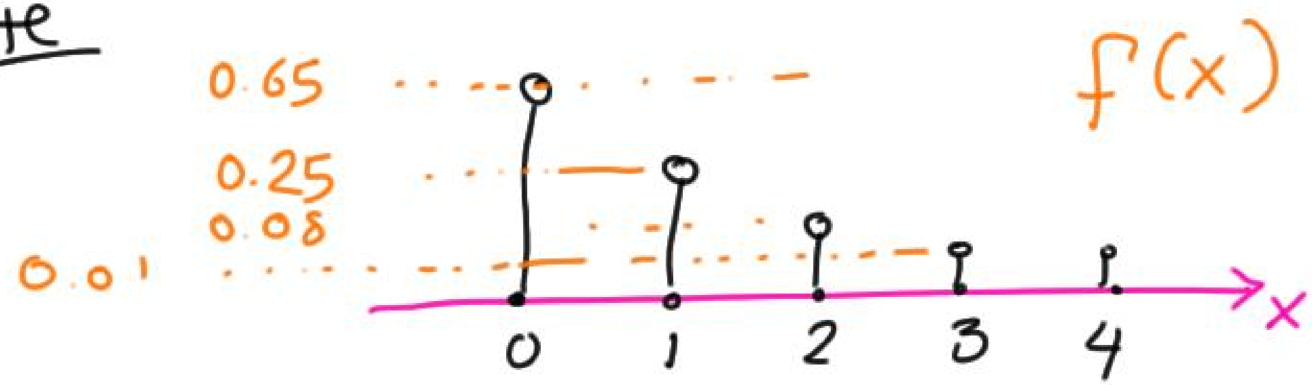
$$\begin{cases} P(X=0) = 0.65 \\ P(X=1) = 0.25 \\ P(X=2) = 0.08 \\ P(X=3) = 0.01 \\ P(X=4) = 0.01 \end{cases}$$

Tanım

X bir ayrık rastgele değişken ve alabileceği değerler $x_1, x_2, \dots, x_n$ olsun. Olasılık kütle fonksiyonu, OKF, $f(x)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şartları sağlar:

1. $f(x_i) \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots n$
2. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$
3. $f(x_i) = P(X = x_i)$

Önceki örnekte



Örnek

Bir depoda sınırsız sayıda yonga plakası vardır, bir kısmı bozuktur. X, bozuk yonga plakası bulununcaya kadar incelenmesi gereken plaka sayısı olsun. Bir plakanın bozuk olma ihtimali 0.01 olsun. X'in olasılılık dağılımı ve OKF'unu bulunuz.

b: bozuk   a: sağlam

$$S = \{b, ab, aab, aaab, \dots\}$$

$$P(X=1) = P(b) = 0.01$$

$$P(X=2) = P(ab) = 0.99 \times 0.01 = 0.0099$$

$\vdots$

$$f(x) = P(X=x) = P(\underbrace{aa\ldots a}_{x-1 \text{ adet}}b) = 0.99^{x-1} \cdot 0.01$$

Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Bir ayrık rastgele değişken, X'in birikimli (kümülatif) dağılım fonksiyonu, F(x), aşağıdaki gibidir.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

F(x) aşığadaki şartları sağlar.

1. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$

2. $0 \leq F(x) \leq 1$

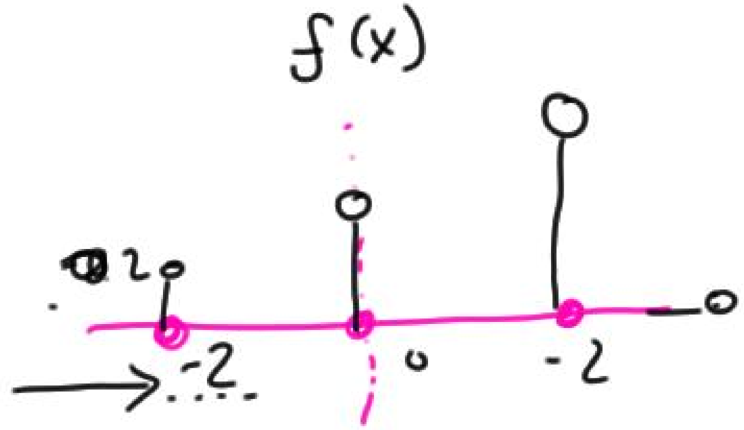
3. F(x) monoton olarak artan bir fonksiyondur, yani

$$x \leq y \implies F(x) \leq F(y)$$

Örnek

OKF aşağıdaki gibi verilen rastgele değişkenin BDF'nu bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases} 0.2, & x=-2 \\ 0.3, & x=0 \\ 0.5, & x=2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

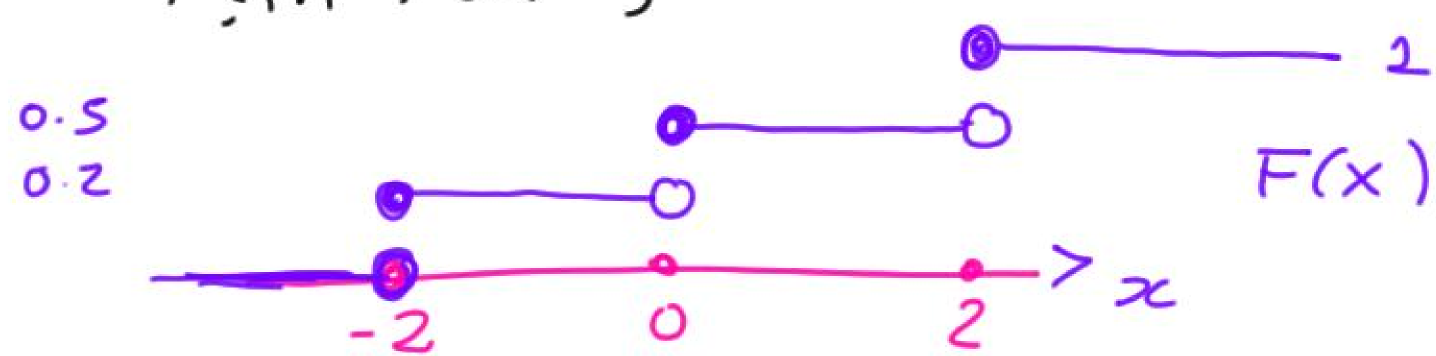


$x < -2$ için $F(x)=0$

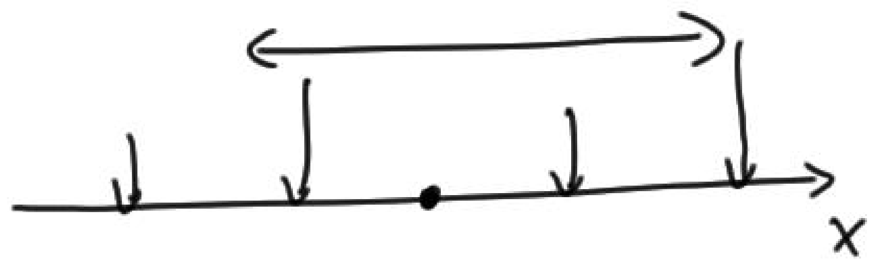
$-2 \leq x < 0$ için $F(x)=f(-2)=0.2$

$0 \leq x < 2$ için $F(x)=f(-2)+f(0)=0.5$

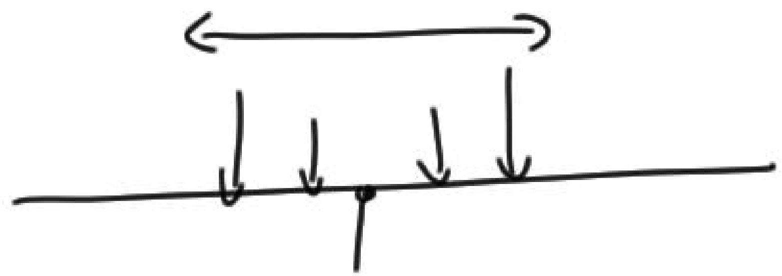
$x \geq 2$ için $F(x)=f(-2)+f(0)+f(2)=1$



Ortalama ve Varyans



ağırlık merkezi



X'in ortaması μ veya $E(X)$ ile gösterilir,

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x \cdot f(x)$$

Varyans da σ^2 veya $V(X)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibidir.

$$\sigma^2 = V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$
$$= \sum_{x} (x-\mu)^2 \cdot f(x) = \left[\sum_{x} x^2 f(x)\right] - \mu^2$$

Standart sapma σ ile gösterilir ve

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}$$

X'in varyansı, X'in aldığı değerlerin ortalamaya ne yakın olduğunu gösteren bir göstergedir.

<u>Örnek</u> Diyelim ki OKF

$$f(0) = f(1) = \frac{1}{2} \qquad E(x) = ? \quad V(x) = ?$$

$$\mu = E(x) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = V(x) = \left(0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} =$$

$$\cancel{V(X) = E[(X-\mu)^2]} =$$

Rastgele Değişkenlerin Fonksiyonlarının Beklenen Değer

* Beklenen değer, ortalama demektir.

X, R.D. için, $g(X)$ diye bir fonksiyon tanımlanmış olsun.

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot f(x)$$

Örnek

X için

$f(-1) = 0.2$

$f(0) = 0.5$

$f(1) = 0.3$ ise

$E(X^2)$ nedir? $\quad g(x) = x^2$

$$E[g(X)] = (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \times 0.5 + 1^2 \times 0.3$$

$$= 0.5$$