OLASILIK TEORİSİ ve İSTATİSTİK Güz-2008

Final Sınavı Çözümleri

(1) Birleşik olasılık dağılım fonksiyonunun tanımından

a) 15

$$\sum_{x}\sum_{y} f_{XY}(x,y) = 1 \quad \text{olmalı.}$$

$$(\alpha + 0.1) + (\alpha + 0.01) + (\alpha^2 + 0.1) + (\alpha^2 + 0.01) = 1$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha + 0.22 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 0.39 = 0$$

Bu quadratik eşitliğin kökleri $\alpha = 0,3$ ve $\alpha = -1.3$

$\alpha = -1.3$ alırsak $f_{XY}(1,1) = -1.3 + 0.1 = -1.2$ olacağını görüyoruz, bu da mümkün olamayacağından $\alpha = 0.3$ olmalıdır.

b) 10

$$f_X(x) = \sum_{y} f_X(x;y)$$

$$= (0.3^x + 0.1) + (0.3^x + 0.01) = \boxed{2\times 0.3^x + 0.11}$$

$(f_X(1) = 0.71 \quad f_X(2) = 0.29)$

c) 10

$$f_Y(y) = \sum_{x} (x,y)$$

$$= (0.3 + 0.1^y) + (0.09 + 0.1^y)$$

$$= \boxed{2\times 0.1^y + 0.39}$$

$(f_Y(1) = 0.59 \quad f_Y(2) = 0.41)$

2

20

A: A'nın bozulma olayı $P(A) = 0.1$

B: B' " " " $P(B) = 0.05$

C: C' " " " $P(C) = 0.2$

D: D' " " " $P(D) = 0.25$

E: A ve B'nin ikisinin birden bozuk olma olayı

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$ (Bağımsız olaylar)

$$= 0.1 \times 0.05$$

$$= 0.005$$

F: C ve D'nin en az birisinin bozulması olayı

$$P(F) = P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$

C ve D birbirini dışlayan olaylar olmadığından kesişimlerini toplamdan çıkarmak zorundayız.

$$= 0.2 + 0.25 - 0.2 \times 0.25$$

$$= 0.4$$

G: E veya F'in oluşma olasılığı

$$P(G) = P(E) + P(F) - P(E) \cdot P(F)$$

E ve F'de birbirini dışlayan olaylar değildir. O yüzden kesişimlerini toplamdan çıkarmalıyız.

$$= 0.005 + 0.4 - (0.005 \times 0.4)$$

$$= \boxed{0.4030}$$

③ X: Uçuşa gelen biletli yolcu sayısı, binom, $p = 1-0.1 = 0.9$
$n = 125$

a) 10

$$P(X \leq 120) = 1 - P(X > 120)$$

$$P(X>120) = \binom{125}{121} 0.9^{121} 0.1^{4} + \binom{125}{122} 0.9^{122} 0.1^{3}$$

$$+ \binom{125}{123} 0.9^{123} 0.1^{2} + \binom{125}{124} 0.9^{124} 0.1 + \binom{125}{125} 0.9^{125}$$

$$= \frac{125.124.123.122}{4.3.2} \cdot 2.9063 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-4}$$

$$+ \frac{125.124.123}{3.2} \cdot 2.6157 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-3}$$

$$+ \frac{125.124}{2} \cdot 2.3541 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-2}$$

$$+ 125 \times 2.1187 \times 10^{-6} \times 10^{-1}$$

$$+ 1.9068 \times 10^{-6}$$

$$= 0.0028 + 8.3114 \times 10^{-4} + 1.8244 \times 10^{-4} + 2.6484 \times 10^{-5}$$

$$+ 1.9068 \times 10^{-6}$$

$$= 0.0039$$

$$P(X \leq 120) = 1 - 0.0039 = \underline{0.9961}$$

Alternatif çözüm $n.p = 125 \times 0.9 = 112.5 \gg 5$

ve $n(1-p) = 125 \times 0.1 = 12.5 > 5$

Bunu normal dağılıma yaklaştırarak çözebiliriz.

$\mu = n.p = 112.5$

$\sigma = \sqrt{112.5 \times (1-0.9)} = 3.3541$

$$Z = \frac{X - np}{3.3541}$$

süreklilik düzeltmesi

$$P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120 + 0.5 - 112.5}{3.3541}\right)$$

$$= P(Z \leq 2.3851)$$

$$= \boxed{0.991463} \quad \text{(yaklaşık çözüm)}$$

$$\left(\text{hata oranı} \quad \frac{0.9961 - 0.991463}{0.9961} = \%\,0.47\right)$$

b) 10

En az 1 koltuğun boş olması lazım

$$P(X < 120) = P(X \leq 121) - P(X = 120)$$

$$P(X = 120) = \binom{125}{120} 0.9^{120}\, 0.1^{5} = 0.0076$$

$$P(X < 120) = 0.9961 - 0.0076 = \boxed{0.9885}$$

c) 10

$$P(X = 125) = \binom{125}{125} 0.9^{125} = \boxed{1.9068 \times 10^{-6}}$$

4 Vize sorusu idi.