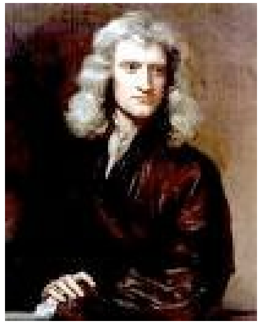
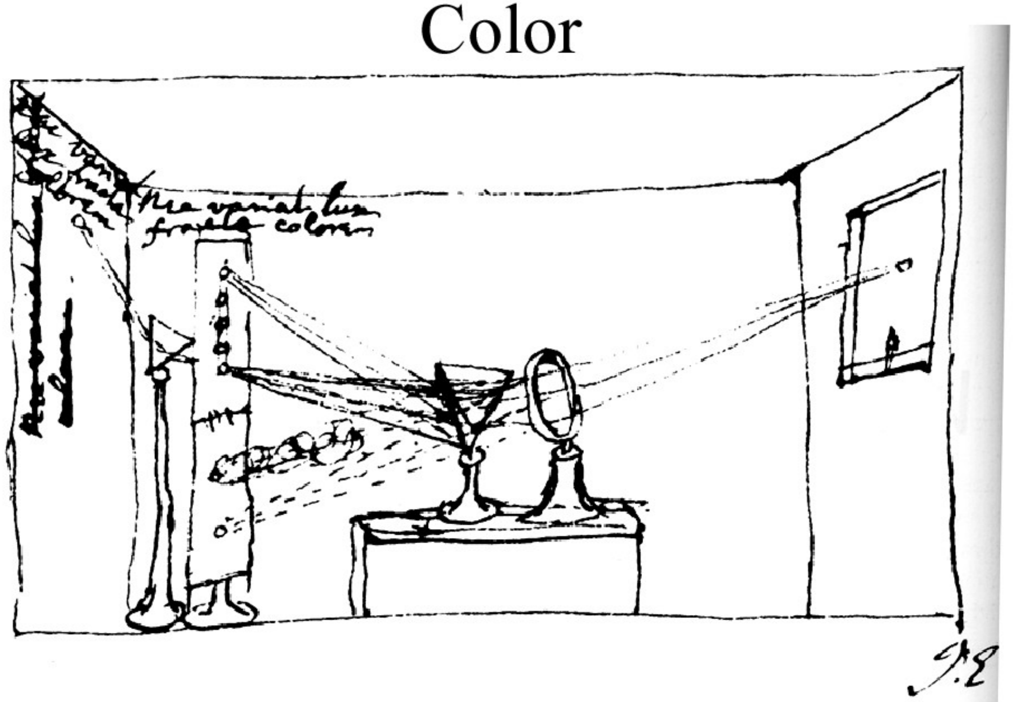
RENK
GEOMETRİK
DÖNÜŞÜMLER

- Beyaz ışık: görünür spektrumun tüm dalga boylarındaki yaklaşık eşit enerjiden oluşur.



Newton 1665

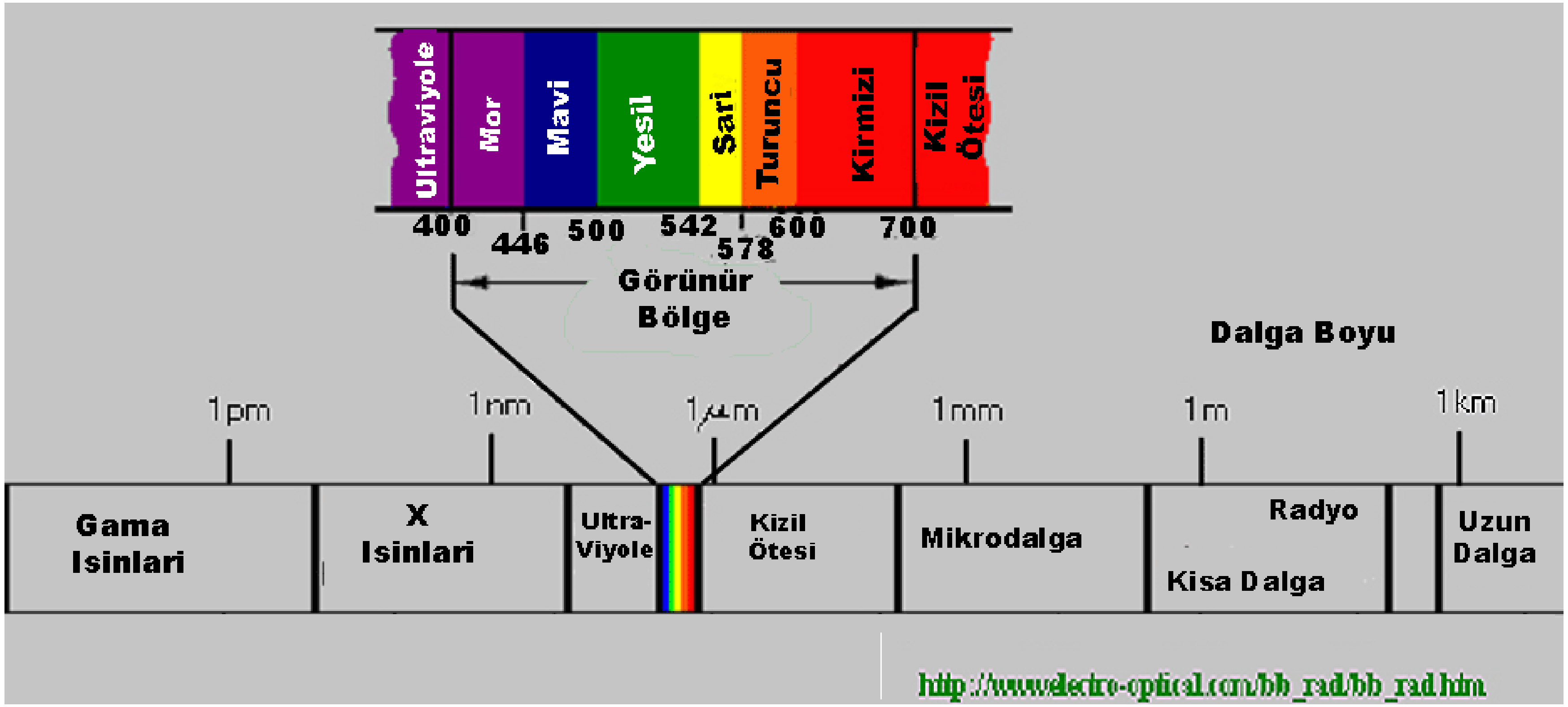


4.1 NEWTON'S SUMMARY DRAWING of his experiments with light. Using a point source of light and a prism, Newton separated sunlight into its fundamental components. By reconverging the rays, he also showed that the decomposition is reversible.

From Foundations of Vision, by Brian Wandell, Sinauer Assoc., 1995

Renk Nedir ?

- Renk, insan gözünün algılayabildiği görülen elektro manyetik dalga boyundaki enerjidir.

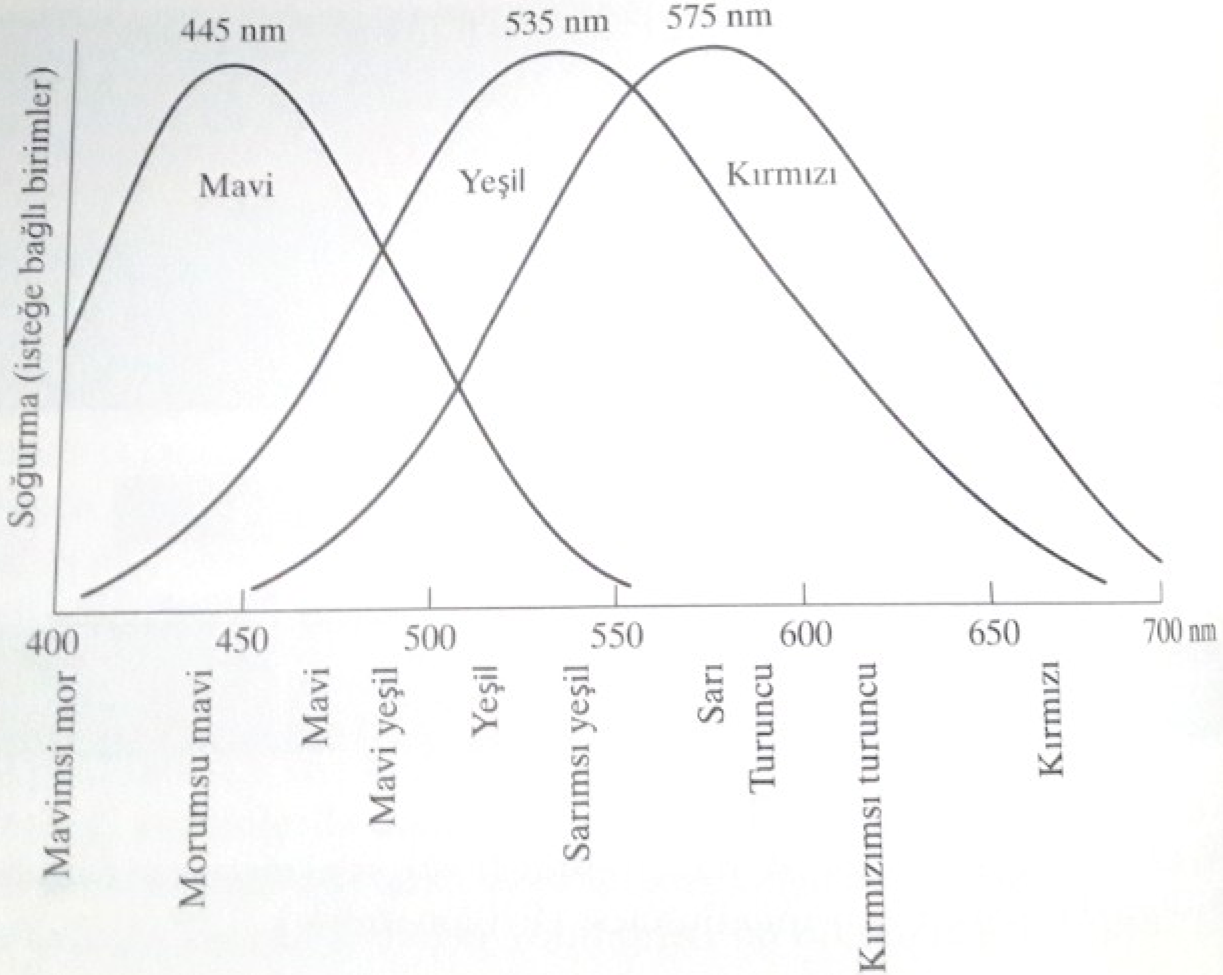


Renkli ışık elektromanyetik tayfda yaklaşık 350µm ile 750µm arasındaki bir alanı temsil etmektedir.

Renkli ışığın özelliğini ifade etmek için üç temel parametre kullanılır:

1. Işıma (radiance): Işık kaynağından yayılan toplam enerji miktarıdır ve Watt (W) cinsinden ölçülür.
2. Işıklılık (luminance): Gözlemcinin ışık kaynağından algıladığı toplam enerji miktarıdır ve Lumen (lm) cinsinden ölçülür.
3. Parlaklık (brightness): Ölçümü pratik olarak mümkün olmayan subjektif bir tanımlayıcı parametredir. Parlaklık renksiz ışık şiddetini kapsar.

- Koni hücreleri gözdeki renkli görmeden sorumludur.
- İnsan gözündeki 6-7 milyon koni hücresinin yaklaşık olarak kırmızı, yeşil ve mavi renge karşılık gelen üç ana algılama kategorisine ayrılabilir.
- Bu hücrelerin %65’i kırmızı, %33’ü yeşil ve %2’si mavi ışığa (ancak mavi koni hücreleri en hassas olanlardır) duyarlıdır.



ŞEKİL 6.3 Dalgaboyuna bağlı olarak insan gözündeki koni hücrelerinin kırmızı, yeşil ve mavi ışığı soğurma oranları

Bir rengi diğerinden ayırt etmek için kullanılan özellikler genellikle parlaklık, renk tonu ve doygunluktur.

Parlaklık: Gri seviyenin renksiz halini ihtiva eder.

Renk tonu: Bir ışık dalgası karışımı içerisindeki baskın dalga boyu ile ilgili bir özniteliktir ve gözlemci tarafından algılandığı şekilde baskın rengi ifade eder.

Doygunluk: Göreceli saflık ya da bir renk tonu ile karıştırılan beyaz ışık miktarı ile ilgilidir. Salt spektrum renkleri tam doygunluktadır.

RGB Renk Modeli

- RGB renk modeli, fosforların ışık yayması prensibine dayanarak oluşturulmuş, toplamsal (additive) bir renk modelidir.

- Bu renk modelinde Kırmızı (Red), Yeşil (Green) ve Mavi (Blue) ana renkler olarak kullanılır.

- Modelin ismi de bu renklerden gelmektedir.

RGB Renk Modeli

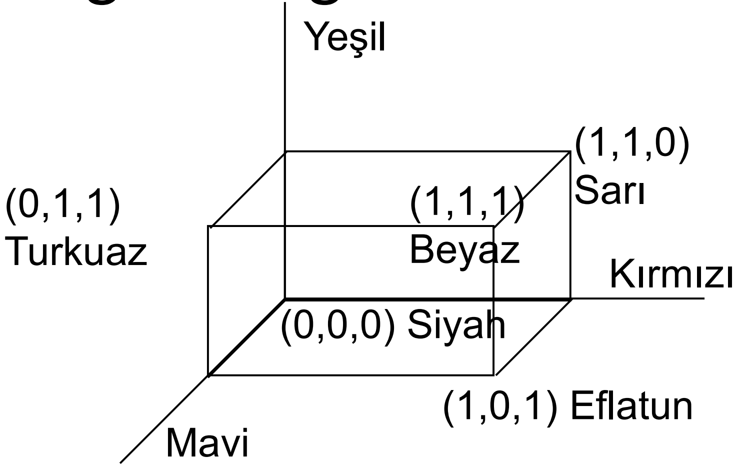
- Diğer renkler bu ana renklerin karışımından elde edildiği için bu renk modeli toplamsal renk modeli olarak da ifade edilir.

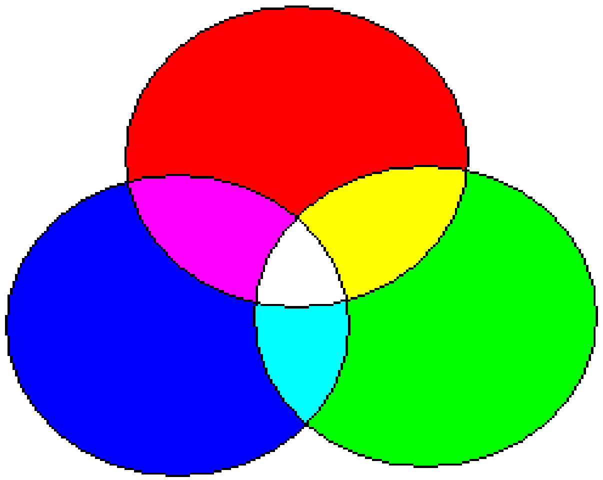
- Beyaz renk kırmızı, yeşil ve mavi renklerinin hepsini içermekte, siyah ise hiçbirini içermemektedir.

- Bu model genellikle televizyon, bilgisayar ekranı gibi aktif göstergelerde kullanılır.

RGB Renk Modeli

- RGB renk modeli Şekildeki gibi bir küp ile ifade edilir. Küpün bir köşesi koordinat sisteminin orijinindedir. Koordinat sisteminin orijini (0,0,0) değerine sahip olduğundan siyah renge karşılık gelmektedir. Orijine köşegensel olarak karşılık gelen (1,1,1) noktası ise beyaz renge karşılık gelir. Diğer renkler ise şekilde de görüldüğü gibi ifade edilir.





RGB Renk Modeli

- Renkli görüntüler bilgisayar ekranlarında 24 bit lik veri olarak görüntülenir.

- Görüntüleme R(Kırmızı), G(Yeşil), B(Mavi) kodlanmış aynı objeye ait üç adet gri düzeyli görüntünün üst üste ekrana iletilmesi ile oluşur.

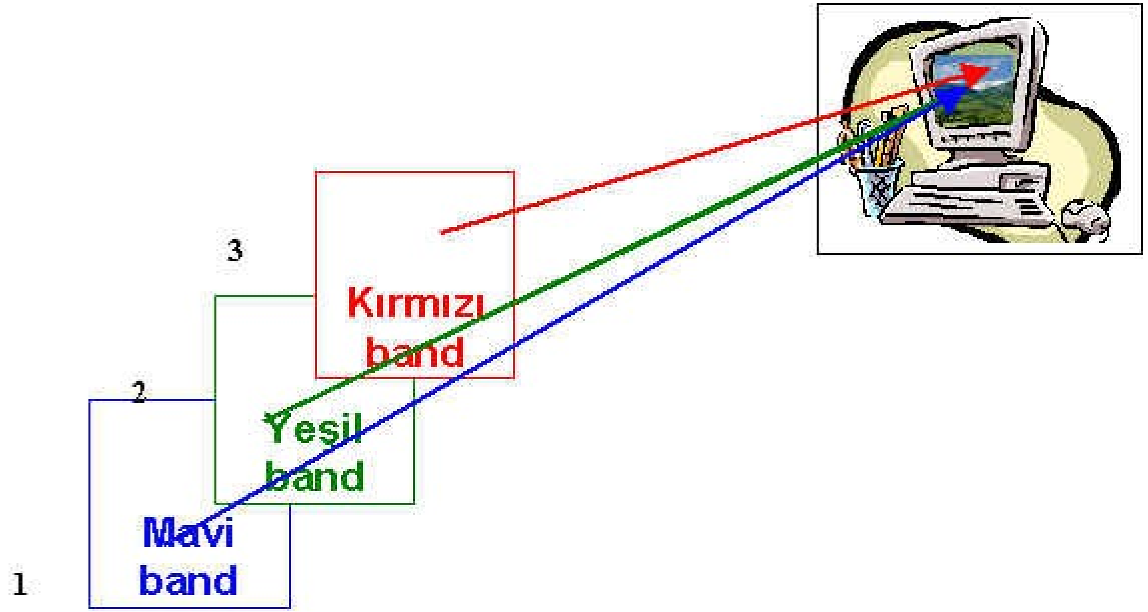
RGB Renk Modeli

- Elektro-manyetik spektrumda 0,4-0,5 µm dalga boyu mavi renge; 0,5-0,6 µm dalga boyu yeşil renge; 0,6-0,7 µm dalga boyu kırmızı renge karşılık gelir.

- Bu dalga boylarında elde edilmiş üç gri düzeyli görüntü bilgisayar ekranında sırası ile kırmızı-yeşil-mavi kombinasyonunda üst üste düşürülecek olursa renkli görüntü elde edilmiş olur.

RGB Renk Modeli

- Renkli görüntü kavramı; 1. bant bir anlamda kırmızı filtrelenmiş, başka bir deyişle orijinal görüntüdeki gri değerler kırmızının tonları şeklinde ifade edilmiş, benzer şekilde 2. ve 3. bantlar da yeşilin ve mavinin tonları şeklinde ifade edilip üst üste çakıştırılmış ve oluşan renk karışımından da doğal renkler elde edilmiştir şeklinde açıklanabilir. Yani bant kombinasyonu şekilden de görüleceği üzere 3-2-1 dir.



RGB Renk Modeli

- Burada görüntü RGB dir ve bant kombinasyonu 3-2-1 dir.

RGB Renk Modeli

- Aşağıdaki şekillerde ise aynı görüntü RGB fakat bant kombinasyonları 1-2-3 ve 2-1-3 şeklinde sıralanmıştır.

1. bant R, 2. bant G, 3. bant B

2. bant R, 1. bant G, 3. bant B

RGB Renk Modeli

- Doğal renkli bir görüntüye ait R-G-B bantlarının ayrı ayrı gösterilmesi

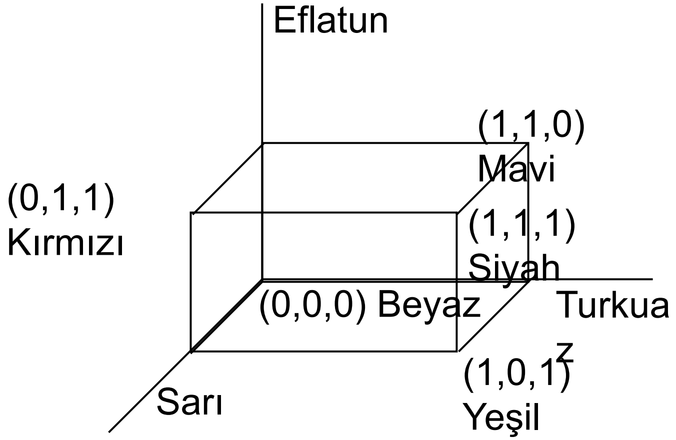
Görüldüğü gibi her banda ait gri düzeyli görüntüde gri değerler farklıdır. Bunun nedeni her banda ait dalga boyu aralığının farklı olmasıdır.

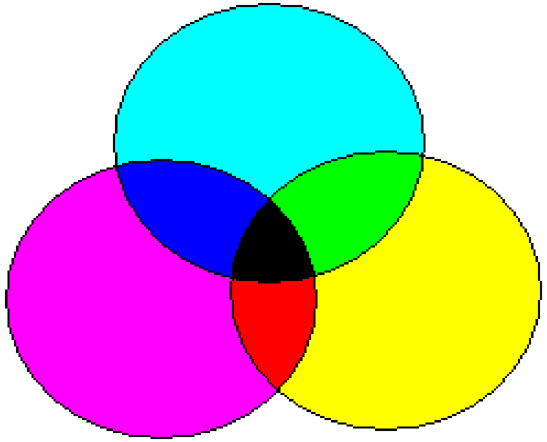
RGB Renk Modeli

- RGB renk modeli yaygın olarak kullanılmasına rağmen, görüntüyü elde etmekte faydalanılan cihazlara bağımlı olması bir dezavantajdır.
- Bununla birlikte baskı ortamında değil de Internet veya sayısal ortamda yapılan çalışmalarda RGB renk modelinin kullanılması bir avantajdır.
- RGB renk modeli kullanıldığında sayısal dosyalar fazla yer gereksinimi duymazlar ve parlak renkler daha belirgin olduğu için görüntü de daha kaliteli olur.
- Baskı ortamında yapılan çalışmalar için ise CMYK renk modeli geliştirilmiş ve matbaacılıkta da bir standart halini almıştır

CMYK Renk Modeli

- Bu renk modelinde Turkuaz (Cyan), Eflatun (Magenta) ve Sarı (Yellow) ana renk olarak kullanılır.
- Bu renk modelinde RGB renk modelinin tersine diğer renkleri elde etmek için bir nevi çıkarma işlemi uygulanır.
- Diğer renkleri elde etmek için çıkarma işlemi kullanılması nedeni ile bu renk modeli eksiltici (subtractive) renk modeli olarak da ifade edilir.





CMYK Renk Modeli

- Diğer renklerin elde edilmesinde, hangi renk için hangi ana renklerin emilmesi veya yansıtılması gerektiği Tabloda gösterilmiştir.

  Bu işlem için renklere yansıtıcı olmayan bazı pigmentler eklenerek o rengin görülmemesi sağlanır. Bu renk modeli genellikle yazıcılarda, matbaalarda ve yüksek seviyeli baskı işleri ile uğraşılan alanlarda kullanılır.

Ana Renk	Emilme	Yansıtma
Turkuaz	Kırmızı	Mavi ve Yeşil
Eflatun	Yeşil	Mavi ve Kırmızı
Sarı	Mavi	Kırmızı ve Yeşil
Siyah	Hepsi	Hiçbiri

CMYK Renk Modeli

- Beyaz ortamda kırmızı, yeşil ve mavi renkleri çıkartılır (substractive colors). Bunun için ise mürekkep olarak adlandırılan filtreler kullanılır. Cyan mürekkebi kırmızı rengi soğururken mavi ve yeşil renkleri yansıtır. Benzer şekilde magenta yeşili, sarı ise maviyi soğurur.
- Teorik olarak, bu üç mürekkep eşit olarak en yüksek yoğunlukta karıştıklarında bütün renkleri soğuracağı için ışık kalmaz ve ortaya siyah çıkar. Fakat kâğıdın beyaz yüzeyinden gelen yansıma bu rengin tam siyah değil, koyu kahverengi gibi görünmesine neden olur. Bu yüzden siyah mürekkep baskı işleminde yardımcı bir filtre olarak kullanılır.

Renk Modelleri Arasında Dönüşümler

- Uygulamalardaki kullanım alanlarının farklı olması nedeni ile teorik olarak da renk modelleri arasında dönüşüm yapma ihtiyacı doğmuştur.
- Aşağıda en çok kullanılan renk modelleri arasındaki matematiksel ifadeleri gösteren denklemler verilmiştir.

Renk Modelleri Arasında Dönüşümler

- RGB ve CMYK renk modelleri arasındaki dönüşümün denklemi;

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

Renk Modelleri Arasında Dönüşümler

- RGB ve YIQ renk modelleri arasındaki dönüşümün denklemi;

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.523 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

Renk Modelleri Arasında Dönüşümler

- RGB ve HSI renk modelleri arasındaki dönüşümün denklemi;

$$I = \frac{1}{3}(R + G + B)$$

$$H = \cos\left\{ \frac{\frac{1}{2}\left[(R - G) + (R - B)\right]}{\left[(R - G)^2 + (R - B)(G - B)\right]^{1/2}} \right\}$$

$$S = 1 - \frac{3}{(R + G + B)}\left[\min(R, G, B)\right]$$

Sözde Renkli Görüntü İşleme

- Sözde renkli (yapay renk) görüntü işleme, belirli bir kritere dayalı olarak renklerin gri değerlerine atanmasıyla oluşur.
- Bir görüntü ya da görüntü dizisindeki gri ölçekli olayların bizim tarafımızdan daha iyi canlandırılması ya da yorumlanmasıdır.
- İnsan sadece iki düzine kadar gri tonuna kıyasla binlerce renk tonunu ayırt edebilmektedir.

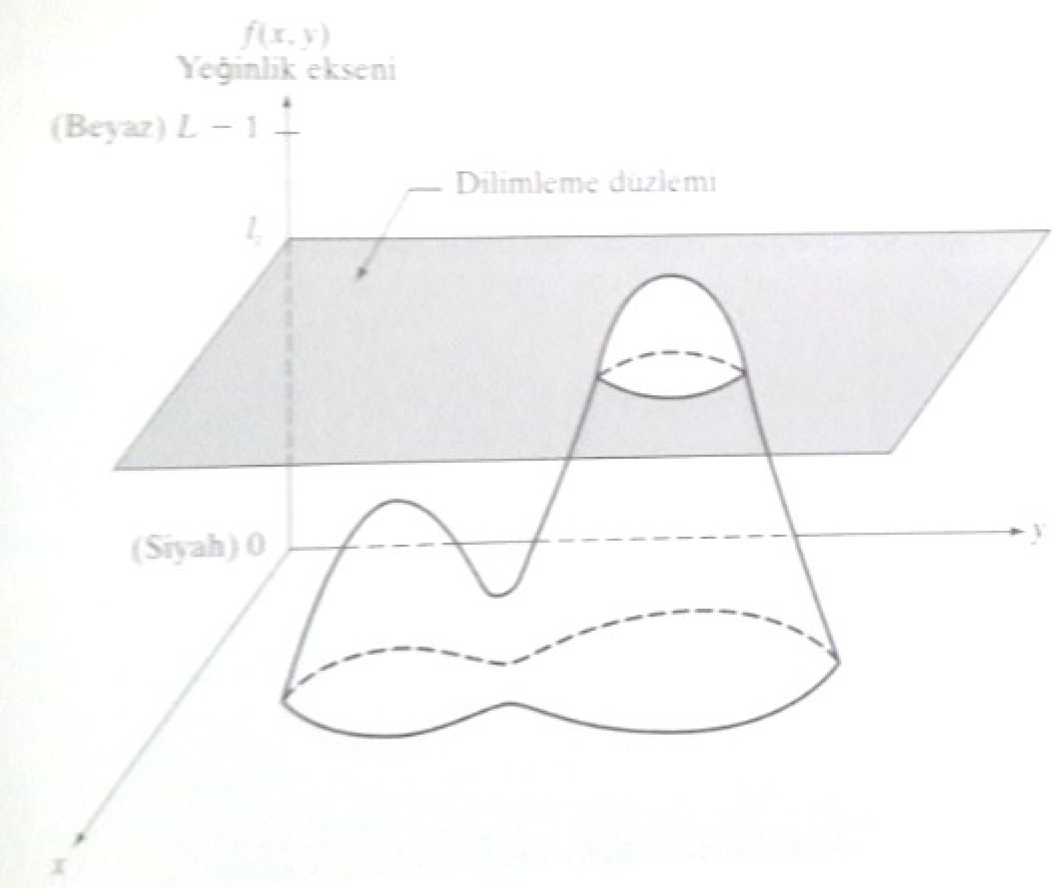
Yoğunluk Dilimleme

- 0-(L-1) arası gri seviyeye sahip bir görüntüde, l_1, l_2,..., l_p seviyelerinde P adet düzlem tanımlandığını düşünelim. Dolayısıyla gri seviyeler P+1 adet V_1, V_2,..., V_{P+1} şeklinde aralığa ayrılır yani dilimlenir. Renge atama işlemi de aşağıdaki denklemle yapılır.

$$f(x,y) = c_k \quad \text{if} \; f(x,y) \in V_k$$

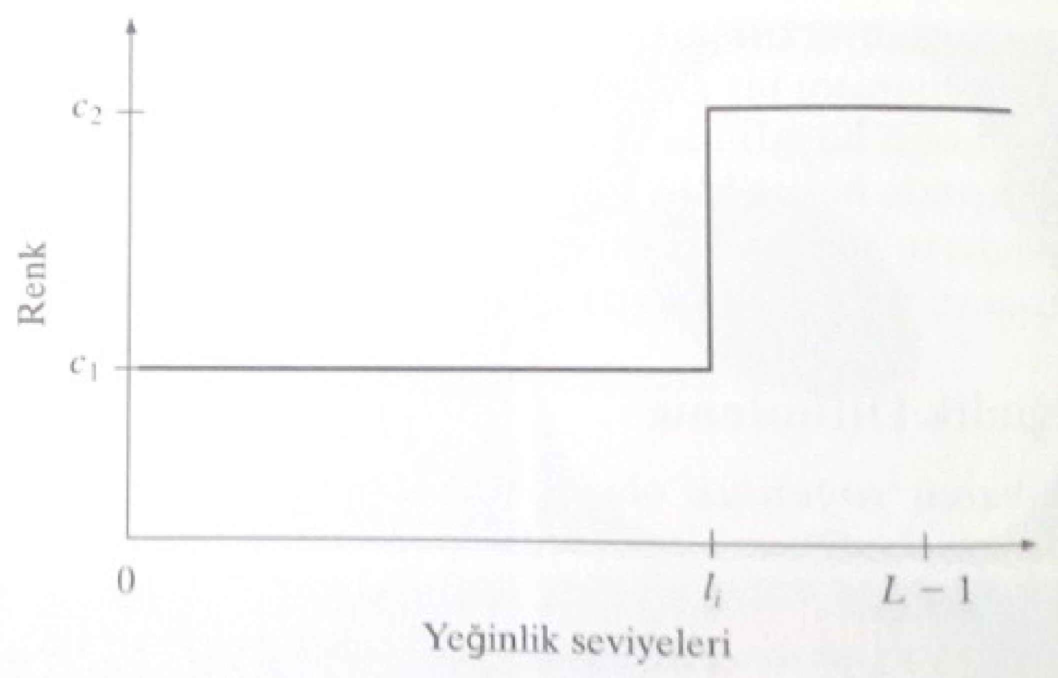
- Burada c_k, k. gri seviye aralığı V_k ya atanan rengi ifade eder.

Yoğunluk Dilimleme

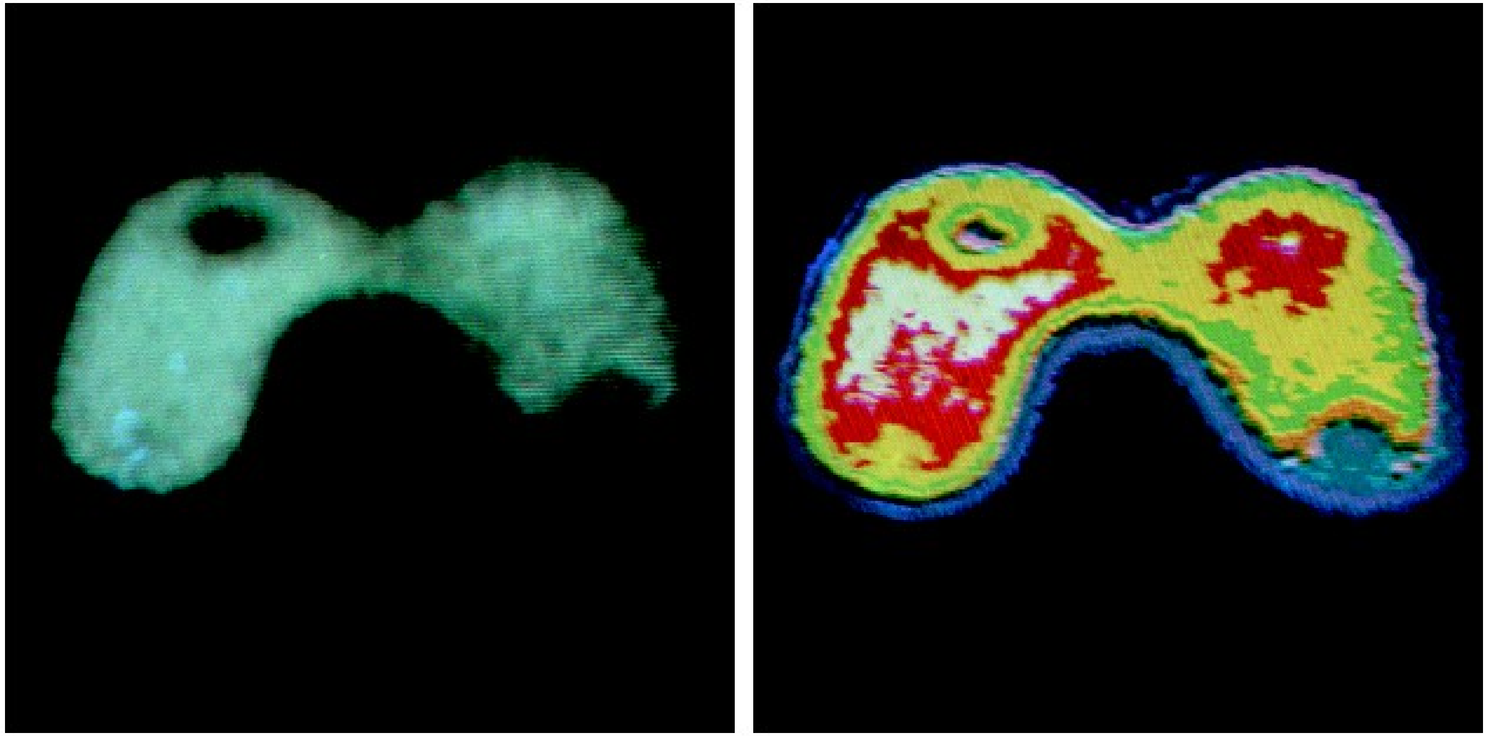


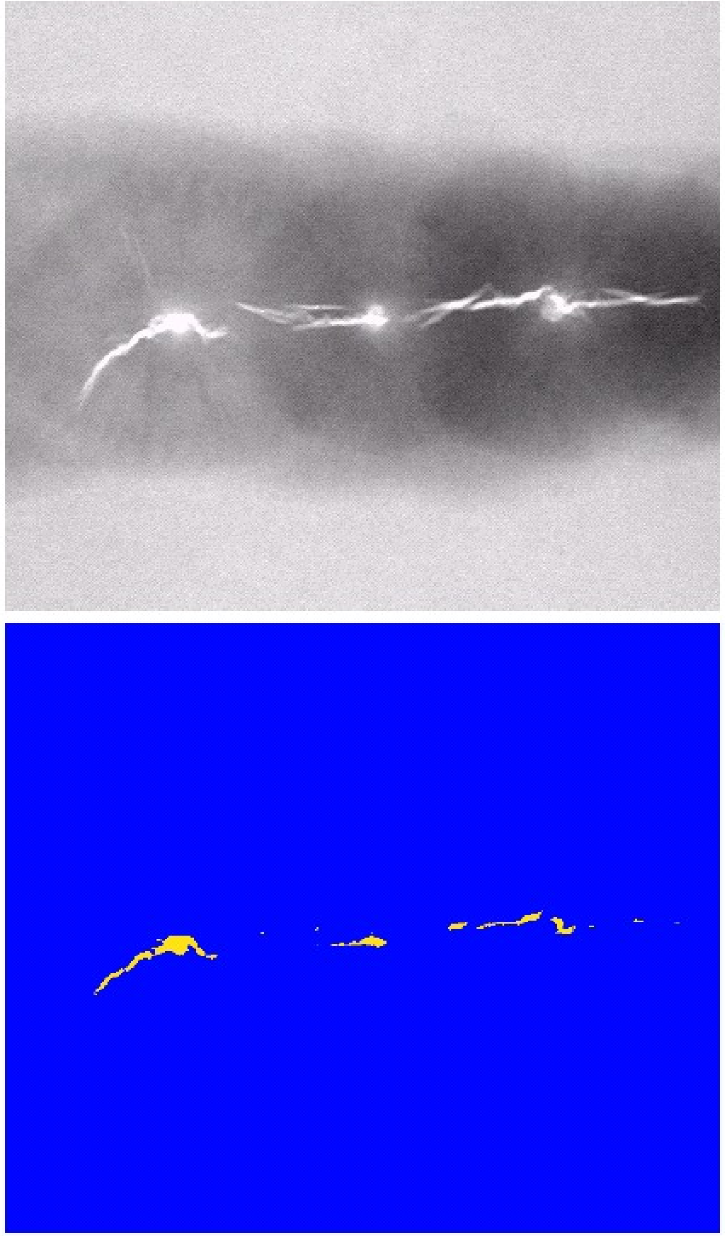
Yoğunluk Dilimleme

- Burada iki renkli bir atamam işlemi mevcuttur.
- Eğer daha çok seviye kullanılırsa şekil basamak halini alır.

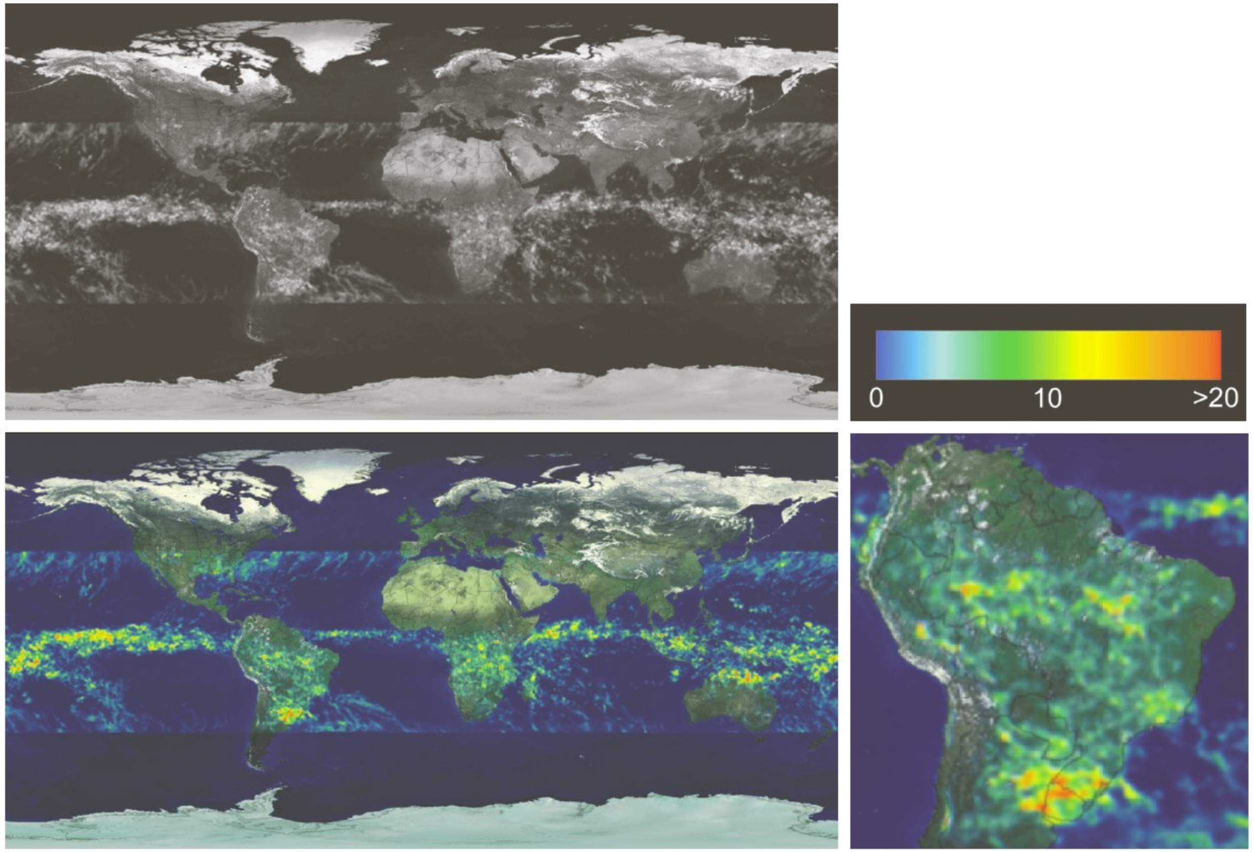


Yoğunluk Dilimleme





Yoğunluk Dilimleme



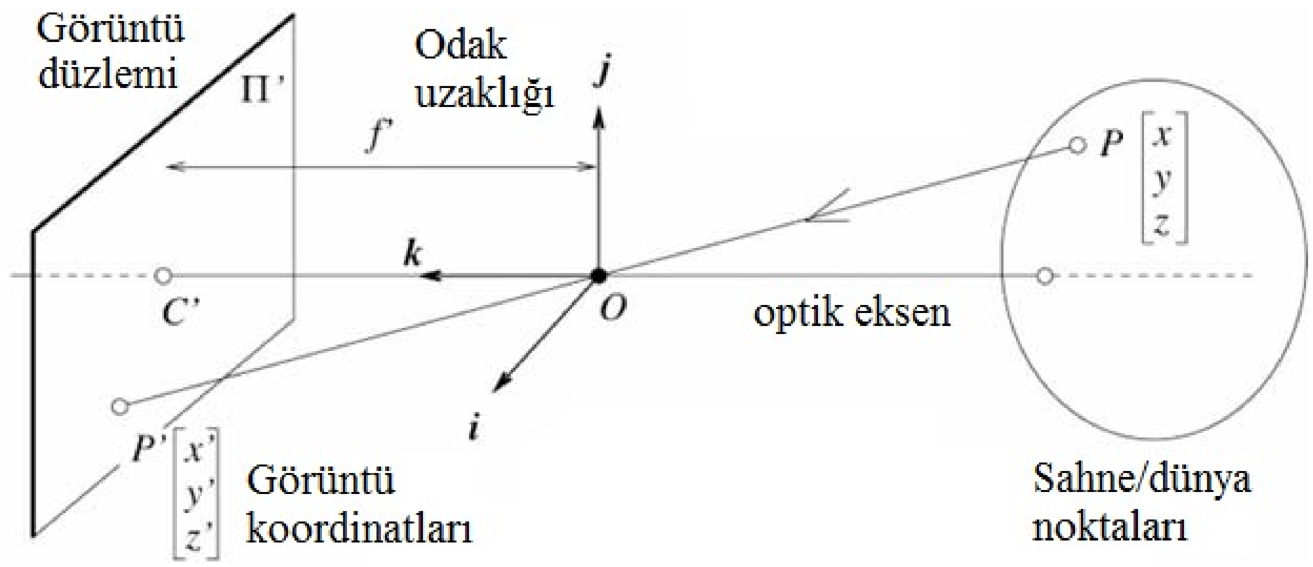
a b
c d

ŞEKİL 6.22 (a) Yeğinliğin aylık ortalama yağış miktarına karşılık geldiği gri ölçekli görüntü. (parlak gözüken yatay band) (b) Yeğinlik değerlerine atanan renkler. (c) Renk kodlanmış görüntü. (Güney Amerika bölgesinin yakınlaştırılmış hali. (NASA'nın izniyle)

Perspektif İzdüşüm -Perspective Projection

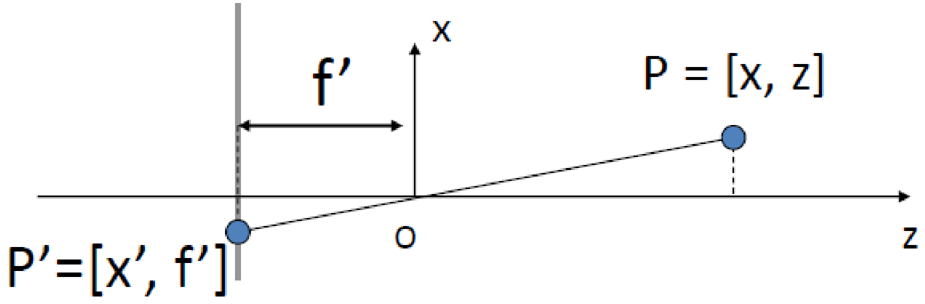
- Şekilde (*O*,*i*,*j*,*k*) ile belirtilen ve orijini *O* olan koordinat sistemini ele alalım. (*O*,*i*,*j*,*k*), *O* iğne deliği ve (*i*,*j*) vektörlerinin oluşturduğu düzlem görüntü düzlemine paralel olacak şekilde seçilmiştir.

- Görüntü düzleminin *O*'ya uzaklığına (*f'*) odak uzaklığı, görüntü düzlemine dik ve *O*'dan geçen doğruya optik eksen (optical axis), optik eksenin görüntü düzlemini kestiği noktaya (*C'*) ise görüntü merkezi denir.



Perspektif İzdüşüm

- Bir dünya koordinatına karşılık gelen görüntü koordinatı benzer üçgenler kullanılarak kolayca belirlenebilir.



$$\frac{x'}{f'} = \frac{x}{z} \Rightarrow x' = f' \frac{x}{z}$$

$$\frac{y'}{f'} = \frac{y}{z} \Rightarrow y' = f' \frac{y}{z}$$

$$z' = f'$$

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = (f' \frac{x}{z}, f' \frac{y}{z}, f')$$

- 3-boyutlu (3D) dünya koordinatları, görüntü düzleminde 2-boyutlu (2D) bir izdüşüme karşılık gelmektedir (z ne olursa olsun z’ = f’)

- Bir 3D dünya koordinatına karşılık gelen 2D görüntü koordinatını veren bu ilişkiye perspektif izdüşüm denir.

Perspektif İzdüşüm

- Perspektif izdüşüm teke-çok bir dönüşümdür çünkü aynı ışın üzerindeki tüm noktalar görüntü düzleminde aynı izdüşüme sahiptir (derinlik bilgisi kaybolur).

- Perspektif izdüşüm, dünya koordinatlarındaki bir noktayı ve doğruyu, görüntü düzleminde sırasıyla bir nokta ve doğruya dönüştürür. Ancak, dünya koordinatlarındaki mesafeler ve açılar izdüşümden sonra korunmaz.

- Odak noktasından geçen herhangi bir doğru bir noktaya izdüşer. Benzer şekilde, odak noktasından geçen herhangi bir düzlem bir doğruya izdüşer.

- Görüntü düzlemine dik düzlem görüntünün bir kısmına iz düşer.

Homojen Koordinatlar

- Perspektif izdüşüm denklemleri (*z* ile bölmeden dolayı) doğrusal değildir.
- Görüntü veya dünya koordinatlarına bir koordinat eklenmesiyle oluşan koordinatlara homojen koordinatlar denir.
- HK, geometrik dönüşümlerin matris çarpımı şeklinde ifade edilmesini sağlar.
- HK dan geri dönmek için sonuncu hariç tüm koordinatlar en son koordinata bölünür.

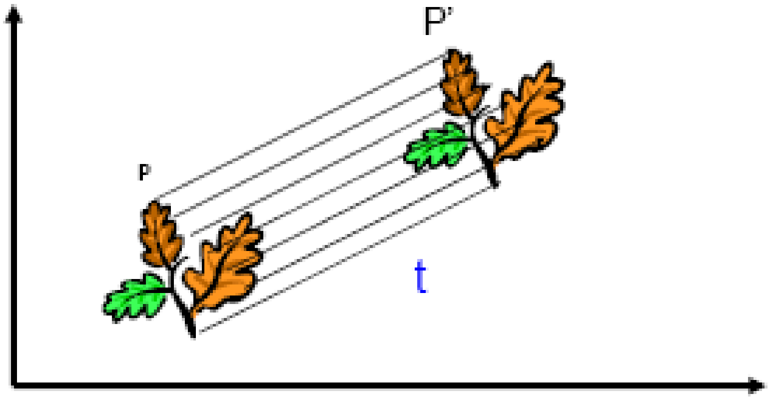
$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

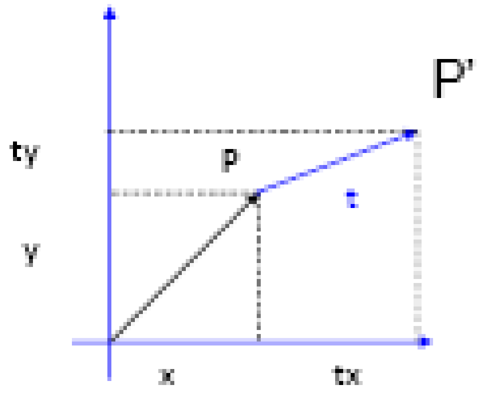
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

Geometrik Dönüşümler

- İki boyutlu (2D) düzlemde, bir nesne şekli bozulmadan ötelendiğinde nesnenin yeni koordinatları ile eski koordinatları arasındaki ilişkiyi belirlemek istiyoruz.
- (x,y) koordinatlarına sahip bir P noktası, x-yönünde t_x; y-yönünde t_y kadar ötelenerek P' noktası oluşturulsun.

$$P' = P + t = (x + t_x, y + t_y)$$





Geometrik Dönüşümler

- P ve P' noktaları için homojen koordinatlar kullanılırsa, bu noktalar arasındaki ilişki vektör-matris notasyonunda ifade edilebilir.

$$\mathbf{P} = (x, y) \rightarrow (x, y, 1)$$

$$\mathbf{t} = (t_x, t_y) \rightarrow (t_x, t_y, 1)$$

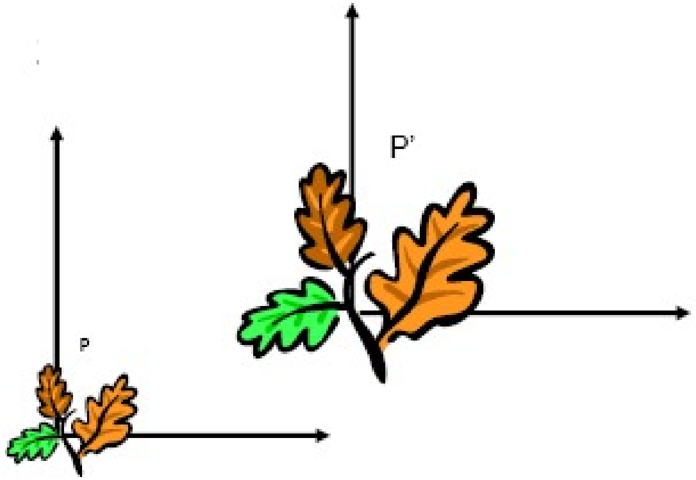
$$\mathbf{P}' \rightarrow \begin{bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \end{matrix}}}_{\mathbf{t}} \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}}_{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

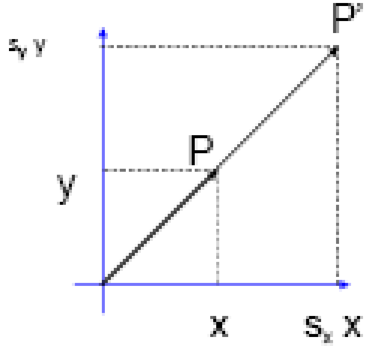
- T'ye ÖTELEME MATRİSİ denir.

Geometrik Dönüşümler

- 2D düzlemde, bir nesne şekli bozulmadan ölçeklendiğinde nesnenin yeni koordinatları ile eski koordinatları arasındaki ilişkiyi belirlemek istiyoruz.
- (x,y) koordinatlarına sahip bir P noktası, x-yönünde s_x; y-yönünde s_y kadar ölçeklenerek P’ noktası oluşturulsun.

$$\mathbf{P} = (x, y) \rightarrow \mathbf{P}' = (s_x x, s_y y)$$





Geometrik Dönüşümler

- P ve P’ noktaları için homojen koordinatlar kullanılırsa, bu noktalar arasındaki ilişki vektör-matris notasyonunda ifade edilebilir.

$$\mathbf{P} = (x, y) \rightarrow (x, y, 1)$$

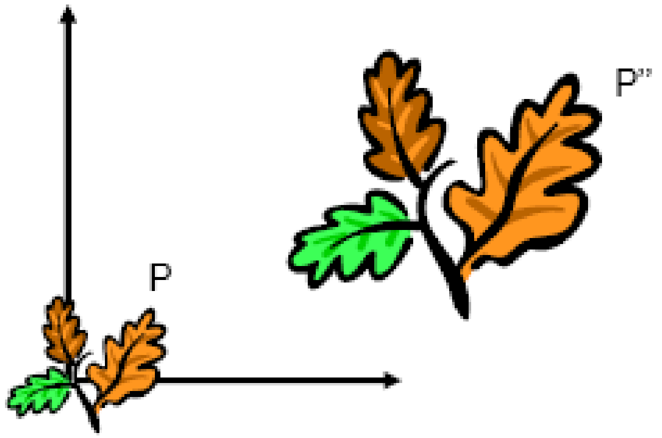
$$\mathbf{P}' = (s_x x, s_y y) \rightarrow (s_x x, s_y y, 1)$$

$$\mathbf{P}' \rightarrow \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

- S’ye ÖLÇEKLEME MATRİSİ denir.

Geometrik Dönüşümler

- 2D düzlemde, bir nesne şekli bozulmadan ilk önce ölçeklenip daha sonra ötelendiğinde nesnenin yeni koordinatları ile eski koordinatları arasındaki ilişkiyi belirlemek istiyoruz.
- (x,y) koordinatlarına sahip bir P noktası, x-yönünde s_x; y-yönünde s_y kadar ölçeklenip P' oluşturuluyor. Daha sonra, P' noktası x-yönünde t_x; y-yönünde t_y kadar ötelenerek P'' noktası elde ediliyor.



$$P' = S \cdot P$$

$$P'' = T \cdot P'$$

$$P'' = T \cdot P' = T \cdot (S \cdot P) = T \cdot S \cdot P = A \cdot P$$

Geometrik Dönüşümler

- Daha önce tanımladığımız, öteleme ve ölçekleme matrisleri açık halde yazılarak noktalar arasındaki ilişki kolayca bulunur.

$$\mathbf{P}'' = \mathbf{T}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & t_x \\ 0 & s_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x + t_x \\ s_y y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrik Dönüşümler

- Öteleme ve ölçekleme işlemlerinin sırası değiştirildiğinde, noktalar arasındaki ilişki değişir mi?
- P noktasına önce ölçekleme, sonra öteleme uygulanarak elde edilen noktayı P'' ile belirtelim.
- İşlemlerin sırası (önce öteleme, sonra ölçekleme) değiştirilerek elde edilen noktayı P''' ile gösterelim.
- P'' ile P''' aynı koordinatlara sahipse işlemlerin sırası değiştirilebilir, aksi halde değiştirilemez.

Geometrik Dönüşümler

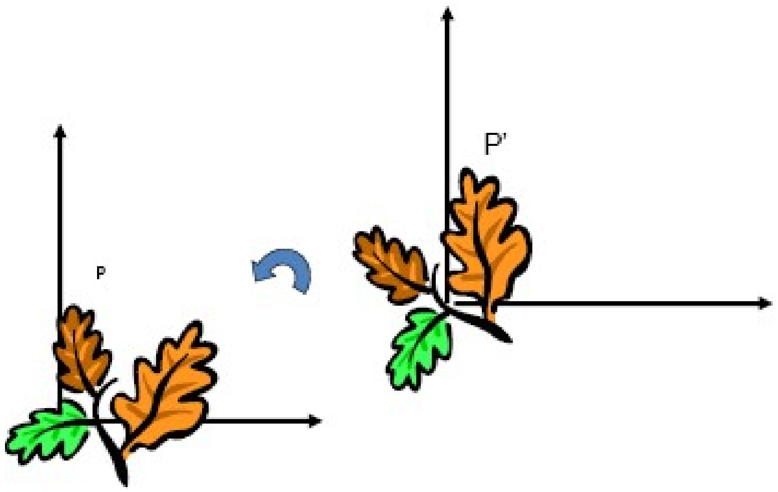
- Görüldüğü gibi, sonuç değişmektedir. Dolayısıyla ölçekleme ve öteleme işlemleri arka arkaya uygulandığında işlemlerin uygulanma sırası önemlidir.

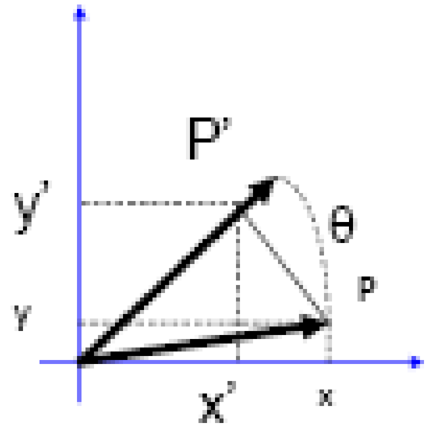
$$\mathbf{P}'' = \mathbf{T}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & t_x \\ 0 & s_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x + t_x \\ s_y y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}''' = \mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & s_x t_x \\ 0 & s_y & s_y t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x + s_x t_x \\ s_y y + s_y t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrik Dönüşümler

- 2D düzlemde, bir nesne şekli bozulmadan döndüğünde nesnenin yeni koordinatları ile eski koordinatları arasındaki ilişkiyi belirlemek istiyoruz.
- (x,y) koordinatlarına sahip bir P noktası, x-eksenine göre saat yönünün tersi istikametinde θ açısı kadar döndürülerek P’ noktası oluşturulsun.





Geometrik Dönüşümler

$$x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y$$
$$y' = \cos\theta\, y + \sin\theta\, x$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{R}\ \mathbf{P}$$

- R’ye DÖNME MATRİSİ denir. Dönme matrisi bazı özelliklere sahiptir. Bunlardan ikisi aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$$
$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

Geometrik Dönüşümler

- Bir noktaya birden fazla dönüşüm uygulandığında, eski ile yeni koordinatlar arasındaki ilişki yukarıda verilen dönüşümler uygun sırada uygulanarak bulunur.
- P noktasına sırasıyla öteleme, dönme ve ölçekleme uygulanarak P' elde edilsin.

P'= (T R S) P

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R' & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} R'S & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

3B Dönüşümler

- Translation – Öteleme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+d \\ y+h \\ z+l \\ 1 \end{bmatrix}$$

3B Dönüşümler

- Scaling – Ölçeklendirme

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ fy \\ kz \\ 1 \end{bmatrix}$$

3B Dönüşümler

- Rotation - Döndürme

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z' = z$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3B Dönüşümler

- Rotation - Döndürme

$$x' = x$$

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$

$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3B Dönüşümler

- Rotation - Döndürme

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta$$

$$y' = y$$

$$z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geometrik Dönüşümler

- IZOMETRI, BENZERLİK, İLGİN(AFFINE) ve PROJEKTİF dönüşüm denilen özel durumlar vardır.
- Izometri durumunda görüntüdeki mesafeler ve alanlar korunur.
- Benzerlik dönüşümü durumunda, görüntüdeki uzunlukların oranı ve açılar korunur.
- İlgin dönüşüm durumunda, görüntüdeki paralel doğrular, alanların oranı, eşdoğrusal doğrular üzerindeki oranlar ve diğer bazı özellikler korunur.
- Projektif dönüşüm durumunda, eşdoğrusal dört noktanın çapraz oranı, eşdoğrusallık ve diğer bazı özellikler korunur.

Matlab Örnekleri

im=imread('C:\lena512.JPG');

Ölçekleme

tform = maketform('affine', [0.5 0 0; 0 0.5 0; 0 0 1]);

imt = imtransform(im, tform);

Döndürme

tform = maketform('affine', [cos(0.52) –sin(0.52) 0; sin(0.52) cos(0.52) 0; 0 0 1]);

imt = imtransform(im, tform);

imshow(imt);

Ödev

- 3B geometrik dönüşümleri gerçekleştiren bir program yazınız. Birden fazla dönüşüm aynı anda uygulanabilmelidir.
- Teslim Tarihi: 02 Mayıs 2019