



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ

İstatistiksel Analiz

Hafta -4

Dr.Didem Tetik Küçükkelçi



Hipotez Testi Aşamaları

Bir hipotez testi 6 aşamada sonuçlanıp karara bağlanmaktadır.

Bu aşamalar;

1. Hipotezlerin ifade edilmesi
2. Anlamlılık seviyesi (α) nın belirlenmesi

Genelde araştırmalar α yı 0,05 olarak, yani $\alpha=0,05$ olarak alıp testi sonuçlandırmaktadırlar. Bazı hallerde; $\alpha=0,01$ ve $\alpha=0,10$ değerleri ile testler sonuçlandırılmaktadır.

Anlamlılık seviyesi (α) test sonucunda varılacak kararın gerçekleşmeme olasılığıdır.



3. Olasılık Dağılımın Belirlenmesi

- Üzerinde çalışılan dağılımın “Z” dağılımı mı yoksa (n-m) serbestlik dereceli “t” dağılımı mı olduğuna karar verilmelidir.

4. Test İstatistiğinin Hesaplanması

- Bu aşamada yapılacak testin istatistik değerinin hesap edilmesi gerekir.
- Eğer, Z testi ise Z değerini, t testi ise t değerini hesap etmek gerekir.
- Test istatistiği; örnekten elde edilen değer ile hipotez olarak ileri sürülen anakütle değeri arasındaki fark, standart hata değerine bölünerek hesaplanır.



5. Tablo (kritik) Değer Alınır.

6. Karar Verilir

- Bu aşama test işleminde sona gelindiğini gösterir.
- Sonuçta, araştırmacı H_0 hipotezini RED edebilecek mi, yoksa RED edemeyecek mi? Buna karar verilecektir.
- Eğer H_0 RED edildi ise; araştırmacının hipotezi olan H_1 KABUL edilir.
- Aksi halde, araştırmacının iddiası (savı) kabul görmez.

Araştırmalarda Sık Kullanılan Testler

Araştırmacılar bilimsel araştırmalarının hipotezlerini sınarken bazı istatistiksel test tekniklerine sık sık başvurmaktadırlar.

- Genel olarak hipotez testleri iki kategoride ifade edilirler. Şöyle ki;

a) Parametrik Testler

- Nicel değişken değerlerinin söz konusu olduğu yerlerde gündeme gelirler.
- Birçok türe sahiptirler.
- Bu türler içerisinde en çok kullanılan testler ise;
 - T testi (ortalamanın testi)
 - (iki ortalamanın farkı testi)
 - (korelasyon katsayısının testi)
 - (regresyon denkleminin testi)
 - Varyans Analizi Testi (2 veya daha fazla ortalamanın farkının testi)
 - (F testi (ANOVA))

b) Parametrik Olmayan Testler

- Nitel değişken değerinin söz konusu olduğu yerlerde uygulanan test türleridir. Bunların da ;
 - X^2 (k-hi kare) testi
 - Mann-Whitney U testi
 - Wilcoxon eşleştirilmiş iki örneklem testi
 - Kruskal-Wallis H testi
 - Friedman testi

gibi yaygın kullanılan türleri vardır. Ancak konumuz içerisinde sadece X^2 testi ele alınacaktır.



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ

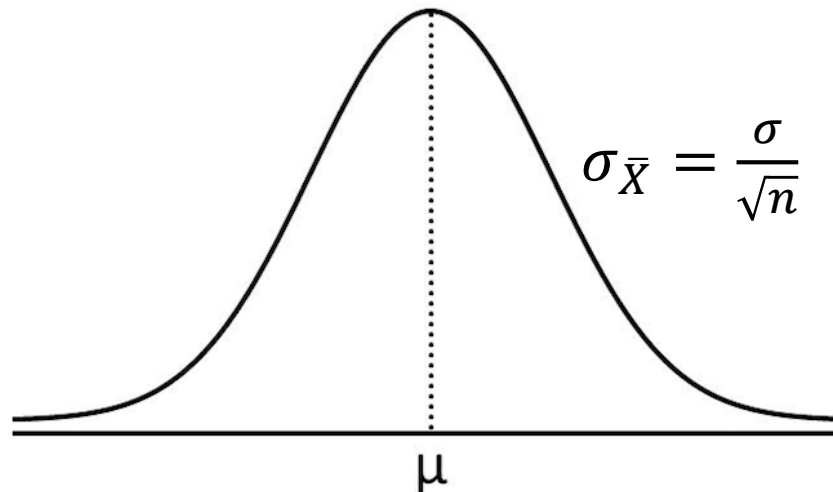
ANAKÜTLE ORTALAMASININ (μ) İÇİN HİPOTEZ TESTİ

- Ortalamaya ilişkin sıfır hipotezin testinde kanıt olarak \bar{X} istatistiği kullanılır. \bar{X} istatistiğinin anakütleye ait μ parametresinin bir tahmini olup olmadığı araştırılır. μ parametresine sahip bir anakütlenin dağılımının normal olduğu kabul edilmektedir.
- Böyle bir anakütleden çekilen örneklem dağılımının ortalaması \bar{X} , çapı ise n ile simgelenmektedir.
- Ortalamanın testi örneklemin çekildiği anakütlenin varyansının bilinip bilinmemesine göre farklı ele alınır.



1- Anakütlenin Varyansı Biliniyorsa;

- Anakütlenin dağılımı normal ise \bar{X} istatistiğinin dağılımı da normaldir. Buna göre, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ dir.
- \bar{X} istatistiğinin dağılımını aşağıdaki şekilde olduğu gibi göstermek mümkündür.



- Bilindiği gibi μ örneklem dağılımının ortalamasıdır. Buradaki σ/\sqrt{n} ise \bar{X} dağılımının standart sapması olup, "standart hata" adıyla anılmaktadır.
- Anakütlenin varyansı bilindiği takdirde ortalamanın standart hatası $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ formülü ile bulunur.
- Sıfır hipotezinin testinde örnek ortalaması ile anakütle ortalaması arasında anlamlı bir fark olup olmadığı araştırılmaktadır. Bu araştırmayı yaparken örnek değeri ile anakütle değeri arasındaki farkın standart hata değerine bölümü ile ortaya çıkan sonuç test istatistiğini oluşturacaktır.
- Bu durumda test istatistiği $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ dir.

Örnek 1: Bir makinede üretilen metal çubukların uzunluklarının normal dağıldığı, uzunluk ortalamasının 420 cm ve standart sapmasının 12 cm. olduğu bilinmektedir. Söz konusu makinede üretilmiş çubuklar içerisinde tesadüfi olarak çekilen 100 tanesinin uzunluk ortalamasının 423 cm olduğu gözlenmiştir. Bu sonuçlara göre %5 anlamlılık seviyesinde ilgili makineden üretilen çubukların uzunluk ortalamasının hala 420 cm. olduğunu söyleyebilir misiniz?

Örnek 2: Bir firmanın üretmiş olduğu ampullerin ortalama 400 saat yandığı ve varyansının 5000 saat olduğu bilinmektedir. Firmanın üretmiş olduğu ampuller içerisinde tesadüfi olarak çekilen 200 ampulün ortalama 430 saat yandığı gözlenmiştir. Acaba, $\alpha = \% 10$ anlamlılık seviyesinde ampullerin ortalama 400 saatin üzerinde yandığını söyleyebilir misiniz?

Örnek 3: A fakültesi mezunlarının mezuniyet derecelerinin normal dağıldığı ortalamasının 70 (100 üzerinden) varyansının ise 36 puan olduğu bilinmektedir. 1994 yılı mezunları arasından tesadüfen çekilen 36 kişinin mezuniyet ortalamasının 68.5 puan olduğu gözlenmiştir. Acaba %1 anlamlılık seviyesinde söz konusu fakülte mezunlarının mezuniyet ortalamasının 70 puanın altına düştüğünü söyleyebilir misiniz?

Örnek 4: Bir firma tarafından üretilen pillerin ömürlerinin ortalaması 300 saat ve standart sapma 49 saat olarak belirlenmiştir. Bu pillerin satıcısı bir bayi pillerin ömürlerinin 300 saatten az olduğunu düşünmektedir. Bunu araştırmak için üretilen pillerden rastgele 49 pil seçilerek ömür testine tabi tutulmuş ve ortalama ömrün 295 saat olduğu görülmüştür.

- a) Çekilen bu 49 birimlik bir örneğe göre ortalama ömrünün 300 saat olduğu iddiasını %5 anlam düzeyinde test ediniz.
- b) 49 birimlik örneğin ortalaması en fazla ne kadar olursa %1 anlam düzeyinde hipotez reddedilerek $\mu < 300$ alternatif hipotezi kabul edilir?



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ

Ödev: Bir paketleme makinesi otomatik olarak tartım yaparak mamulleri paketlemektedir. Bu makine ile yapılan tartımların ortalamasının 1000 gr, standart sapmasının 8 gr olduğu bildirilmiştir. Üretim mühendisi bu durumu kontrol amacıyla bu makine ile paketlenen 36 paket tartılıyor ve ortalamasının 997 gr olduğu görülüyor. Bu verilere göre:

- a) Paketleme makinesinin doğru çalışıp çalışmadığını %5 anlam düzeyinde test edip karar veriniz.
- b) Prosesin ortalaması en az kaç gram olursa H_0 hipotezi kabul edilir?



2- Anakütlenin Varyansı Bilinmiyorsa;

Örnek Çapı $(n) \geq 30$ iken

- Anakütleden çekilen örneklerin ortalamalarının normal dağılım gösterdiğini daha önce ifade etmiş ve

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ biçiminde göstermiştik.

- σ^2 bilinmediği zaman bunun yerine $\hat{\sigma}^2$ kullanılmaktadır.
- Kullanılacak olan test istatistiği; ortalaması 0 ve varyansı 1 olan

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ test istatistiğidir.



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ

Örnek çapı (n)<30 iken

- Anakütle varyansı σ^2 bilinmediği zaman ve örnek çapı (n) yeterince büyük olunca $\hat{\sigma}^2=s^2$ istatistiği kullanılır.

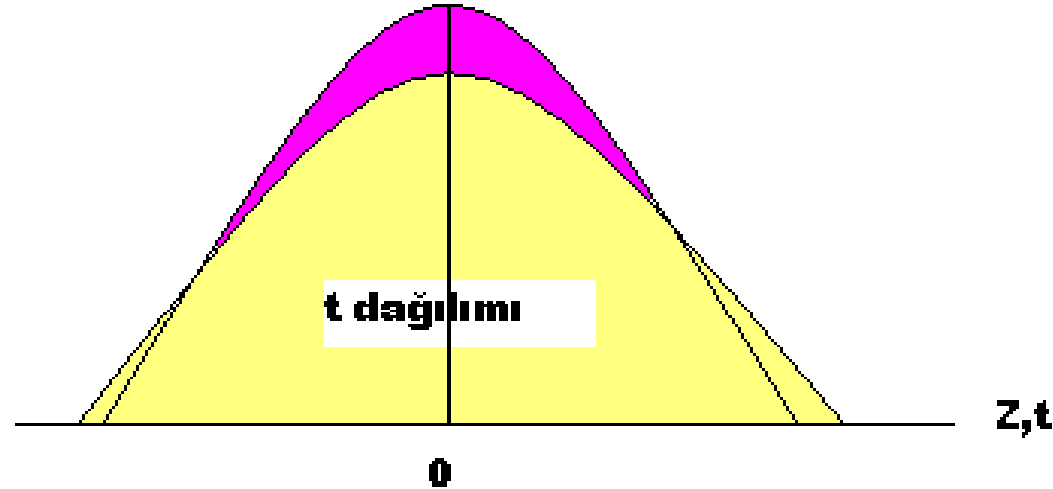
Örnekleme hacminin az olduğu bu gibi durumlarda, küçük örneklemeler için geliştirilmiş test yöntemlerine başvurulur.

Standart normal dağılmış bir rassal değişkenle ki- kare dağılmış bir rasgele değişkenin özel bir fonksiyonu şeklinde tanımlanan yeni rassal değişken t ya da student t dağılımı olarak bilinir.



Normal dağılım

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$



NOT: Anakütle sınırlı, iadesiz seçim yapılıyorsa ve n/N örnekleme oranı %5 ten büyükse; aşağıdaki düzeltme faktörü ele alınır!

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Örnek 5: X turistik işletmesinde sabah kahvaltılarında kişi başına ortalama 50 gram beyaz peynir tüketildiği ve değerlerin normal dağıldığı bilinmektedir. 100 kişi üzerinde yapılan araştırma neticesinde kişi başına ortalama 53 gram peynir tüketildiği ve örnek varyansının 16 gram olduğu gözlenmiştir. 0,05 anlamlılık seviyesinde kişi başına tüketilen peynir miktarının 50 gramın üstünde olduğunu söyleyebilir misiniz?

Örnek 6: İlköğretim okulu birinci sınıf sonu itibariyle bir öğrencinin dakikada ortalama 25 kelime okuduğu bilinmektedir.

Yapılan bir araştırma neticesinde birinci sınıfı bitiren 5 öğrencinin bir dakikada okudukları kelime sayısı şöyle gözlenmiştir:

$$X_i: 27 \quad 28 \quad 26 \quad 25 \quad 29$$

Acaba, bu sonuçlara bakarak %5 anlamlılık düzeyinde, okuma hızının ortalama 25 kelimenin üstüne çıktığı görüşüne katılabilir misiniz?

Örnek 7: Belli bir parçanın üretimi için gereken ortalama zamanın 11,5 dakika olduğu biliniyor. İşe alınan 10 işçinin bu mamulü üretim süreleri gözlemleniyor ve aşağıdaki sonuçlar elde ediliyor. 0,05 anlam düzeyinde yeni işe alınan işçilerin bu mamulü üretim süresinin eski işçilerden daha fazla olup olmadığını araştırınız.

Süre	10,5	12,8	13	12,7	11	14	10,4	13,6	12,7	13	
------	------	------	----	------	----	----	------	------	------	----	--

Örnek 8: 250 gramlık bisküvilerin üretildiği bir fabrikada üretimin kontrol altında olup olmadığını sık aralıklarla her 400 kutudan tesadüfi olarak 25 kutu seçilerek incelenmiştir. Ağırlıklarına göre kutuların normal dağıldığı bilinmektedir. Seçilen bir örneğin ortalama ağırlığı 247,67gr. standart sapması 6gr. olduğuna göre %1 anlamlılık düzeyinde üretimin kontrol altında olduğu kabul edilebilir mi?

ORANLAR İÇİN (BİNOM PARAMETRESİ) HİPOTEZ TESTİ

Bilindiği gibi uygun hal sayısının (x) mümkün hal sayısına (n) oranı $\tilde{p} = x/n$ şeklinde ifade edilir ve örnek oranı olarak adlandırılır. Örnek hacmi yeterince büyük ve kütle normal dağılıyorsa p parametresinin testi normal dağılımdan yararlanarak yapılabilir.

Örnekten elde edilen \tilde{p} değeri aşağıdaki şekilde standart değişkene dönüştürülür.

p : kütle oranı

\tilde{p} : örnek oranı

n : örnek hacmidir.

DeneySEL Z değeri kritik Z değerinin ötesinde ise H_0 reddedilir, aksi halde kabul edilir.

$$Z = \frac{\tilde{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Örnek 9: Bir prosesin kusurlu oranının %4 olduğu iddia edilmektedir. Üretim sorumlusu mühendis prosesin kusurlu oranının %4 ten büyük olduğunu düşünmektedir. Bu durumu araştırmak için prosten rasgele 150 mamul seçilip test ediliyor ve 12 tanesinin kusurlu olduğu görülüyor. Bu delillere göre prosesin kusurlu oranının %4 olduğu iddiasını %1 anlam düzeyinde test ederek sonucu yorumlayınız.

İKİ ORTALAMA FARKININ TESTİ

- Hipotezler bazen tek bir değerin (örneğin; ortalamasının) testi ile ilgili olmayıp, birden fazla değerin birlikte testi ile ilgili olabilir.

Örneğin: İki anakütle ortalamasının birbirinden farklı olup olmadığı araştırılmak istenebilir.

Çapları n_1 ve n_2 olan ve birbirinden bağımsız iki örneklem normal dağılsın:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Dolayısıyla örnekleme dağılımları ortalamaları arasındaki fark için,

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

Şeklindeki dağılım, iki ortalama farkının örnekleme dağılımıdır



1. σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyor ise:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

Örnek 10: A ve B marka pillerin ortalama ömürlerinin aynı olduğu standart sapmalarının ise A marka için 50, B marka için 60 saat olduğu bildirilmiştir. Bu durumu araştırmak için A marka pillerden rastgele 40 pil alınmış ortalama ömrünün 300 saat, B marka pillerden 50 tanesi rastgele alınmış ortalama ömrünün 285 saat olduğu görülmüştür.

a) Buna göre %1 anlam düzeyinde iki pilin ortalama ömürlerinin farklı olup olmadığını araştırınız.

b) $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) > 15$ olma olasılığı ne olur?



2. Ortak σ^2 bilinmiyor ise:

a. Onun yerine $\hat{\sigma}^2$ tahmin edilir. $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ formülünden $\hat{\sigma}^2$ elde edilir (Küçük örneklemeler).

Buradaki s_1^2 ve s_2^2 örnek varyanslardır.

b. Büyük örnekler için,

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad , Z \sim N(0,1)$$

Örnek 11: Varyansı $\sigma_1^2 = 40$ olan ve normal dağılmış bir anakütleden çekilen 100 birimlik tesadüf örneğinin ortalaması $\bar{X}_1 = 38.3$ 'tür. Bir başka normal dağılmış ve varyansı $\sigma_2^2 = 30$ olan anakütleden çekilen 80 birimlik tesadüf örneğinin ortalaması $\bar{X}_2 = 40.1$ 'dir. 0.05 anlamlılık seviyesinde yığın ortalamalarının birbirinden farklı olup olmadığını test ediniz.

Örnek 12: Bir ilkokulda kayıtlı birinci sınıf öğrencilerinin ağırlıklarının normal dağıldığı ve varyansının $\sigma^2 = 23.04$ kg. olduğu bilinmektedir. Aynı yığından çekilen 121 erkek öğrencinin ağırlık ortalamasının 28 kg. olduğu, buna karşılık çekilen 100 kız öğrencinin ağırlık ortalamasının 27 kg. olduğu gözlenmiştir.

0,01 anlamlılık seviyesinde erkek öğrencilerin ağırlık ortalamasının kız öğrencilerin ağırlık ortalamasından fazla olduğu iddiasına katılabilir misiniz?

Örnek 13: Bir işletmede aynı parçayı üreten iki işçinin bu parçayı üretim sürelerinin varyanslarının eşit olduğu bildirilmiştir. Bu işçilerin söz konusu parçayı üretim sürelerinin ortalamalarının eşit olup olmadığını araştırmak amacıyla 1. işçinin ürettiği 12 parça rastgele seçiliyor ortalamasının 20 dakika standart sapmasının 5 dakika olduğu görülüyor. 2. işçinin ürettiği parçalardan rastgele 15 tanesi gözlemleniyor ortalamasının 23 dakika, standart sapmasının 7 dakika olduğu görülüyor. Birinci işçinin üretim süresinin ikinciden düşük olup olmadığını %5 anlam düzeyinde test edip karar veriniz.



İSTANBUL
GELİŞİM
ÜNİVERSİTESİ

Katılımınız İçin Teşekkür EdeJiz.

Ekolojik, Ekonomik ve Sosyal Sürdürülebilirlik İçin

İstanbul Gelişim
Üniversitesi