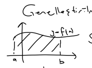
Genelleştirilmiş İnt.



$S=\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow$ Has int.

$S_1=\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ İnt. bölgesi sınırlı ancak fonk. bölgede sınırlı değil
↓
II. çeşit has olmayan integral.

$S_2=\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \rightarrow$ int bölgesi sınırlı değil, ancak fonk bölgede sınırlı.
↓
I. çeşit has olmayan int. denir.

$\int_a^b f(x)\,dx$ int. için

* Aralığın uç noktalarından biri veya her ikisi sınırsız ise 1. tip has olmayan int.
* Aralığın uç noktalarında $f(x)$ fonk. sınırsız ise int. 2. tip has olmayan int.

1. Tip Has Olmayan İnt:

f fonk.nun $\forall t \geq \alpha$ için $[\alpha,t]$ üzerinde sürekli ise

$$\lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t f(x)\,dx \quad \ldots (1)$$

ifadesine f fonk.nun $[\alpha,\infty)$ üzerindeki 1. tip has olmayan int. denir ve $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ ile göst. Eğer (1) limiti mevcutsa integrali yakınsaktır denir

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_\alpha^t f(x)\,dx$$

ii) f fonk $\forall t \leq \alpha$ için $[t,\alpha]$ üzerinde sürekli ise

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^\alpha f(x)\,dx$$

ifadesine f fonk.nun $(-\infty,\alpha]$ üzerindeki 1. tip has olmayan int. denir

$$\int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^\alpha f(x)\,dx$$

Örnek. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. $f(x)=e^{-x}$ fonk. $\forall t>0$ için $[0,t)$ üzerinde sürekli o.d. int. bilir.

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx=\lim_{t\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^t$$

$=1$ // $\Rightarrow$ int. yakınsaktır

$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$

Örnek $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ integralinin türünü belirleyiniz

$f(x)=\frac{1}{x}$ fonk $[1,t]$ üzerinde int. bilir. o.d. 1. tip has olmayan int

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\to\infty}[\ln x]_1^t=\infty$$

o.d. int. ıraksaktır

Örnek: $\int_0^\infty \cos x\,dx$ int.nin türünü belirleyiniz ve int. hesaplayın

$\forall t>0$ için $[0,t]$ üzerinde sürekli olmasından int. bilir → 1. tip has olmayan

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \cos x\,dx=\lim_{t\to\infty}(\sin x]_0^t=\text{yoktur.}$$

limit olmadığından integral ıraksaktır

Örnek $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^0 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}+\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\arctan e^x\Big|_{-t}^0+\lim_{t\to\infty}\arctan e^x\Big|_0^t$

$=\left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ //

2. tip Has Olmayan İnt.

Örnek! $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

$f(x)$, $[0,1)$ de sürekli old. 2. tip has olmayan int

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{t\to1^-}\int_0^t (1-x)^{-1/3}\,dx=\lim_{t\to1}\left[-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\right]_0^t$$

$=\frac{3}{2}$ //

Örnek $\int_0^1 \frac{dx}{x} \rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$

ve $f(x)$, $(0,1]$ de sürekli old. 2. tip has olmayan

$$\lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x}=\lim_{t\to0^+}[\ln x]_t^1=\lim_{t\to0^+}(\ln t-0)$$

$=-\infty$

$\Rightarrow$ int. ıraksak

Örnek $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}=$

$=\int_0^1 \frac{dx}{x.(x-2)}+\int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}=\lim_{t\to0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x(x-2)}+\lim_{t\to2^-}\int_1^t \frac{dx}{x(x-2)}$

$\int\frac{1}{x(x-2)}$: $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}$, $A=-1/2$, $B=1/2$

$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2}\int_t^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Big|_t^1\right)$

$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\ln\left(\frac{1}{t}\right)=+\infty$

Örnek! $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}=?$

$=\lim_{t\to1^-}\int_0^t \left(\frac{1}{1-x}\right)dx=\lim_{t\to1^-}[-\ln|1-x|]=\infty$

Örnek $\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx=?$

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^t\left[\frac{2}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+1}\right]dx$$

$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+1}-\arctan t\right]=\ln 5+\arctan 2-\pi/2$

Örnek: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ integrali p'nin hangi değerleri için yakınsar.

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{x=1}^b$

$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}\right]$

$=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1 \text{ ise}\\ \infty, & p<1 \text{ ise}\end{cases}$

$p=1$ için

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}(\ln x)\Big|_1^b$

$=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$

$p=1$ için int ıraksak

Örnek $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ yakınsaklığını araş

$0\leq\frac{\sin^2 x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}=g(x)$

$\int_1^\infty g(x)\,dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ $p=2>1$ yakınsak

$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ int. yakınsaktır.

ÖDEV: 1) $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ integralin türünü belirleyin ve int. hesaplayın

2) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=?$

3) $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}=?$

Örnek: $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}=?$

$=\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{t\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln t}\frac{du}{u}=\lim_{t\to\infty}\ln u\Big|_{\ln 2}^{\ln t}$

$=\lim_{t\to\infty}\ln(\ln t)-\ln(\ln 2)=\infty\rightarrow$ ıraksak

$\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx=?=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{2x}{(x^2)^2+1}\,dx\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\arctan x^2\Big|_1^t$

$x^2=u$
$2x\,dx=du$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\arctan t^2-\frac{1}{2}\arctan 1$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$

$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}=?$ $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{e^x+1}$

$=\lim_{t\to\infty}\int_2^{e^t+1}\frac{1}{u(u-1)}\,du=\lim_{t\to\infty}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du$

$=\lim_{t\to\infty}\ln(u-1)-\ln u\Big|_2^{e^t+1}=\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{e^t}{e^t+1}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\ln 2$ //