

# Долговременная память и микроструктурная универсальность: От закона квадратного корня к фрактальной волатильности

LRD v6.0.1: Воспроизводимая система аудита с  
теоретическим обоснованием

Игорь Чечельницкий\*

Декабрь 2025

Версия 6.0.1 — Zenodo DOI: 10.5281/zenodo.17993213

## Аннотация

Представлена версия LRD v6.0.1 — воспроизводимая система для обнаружения и валидации долговременной зависимости (LRD) в сложных временных рядах с теоретическим обоснованием, связывающим микроструктурную универсальность с макроскопической фрактальной памятью. Система объединяет оценку масштабирования DFA-2, блочные бутстрап-доверительные интервалы и тесты фальсификации на фазово-рандомизированных суррогатах. Эмпирические данные из четырёх областей — волатильность Bitcoin, последовательности землетрясений, вариабельность сердечного ритма (HRV) и геномная ДНК — демонстрируют персистентную память ( $H > 0.5$ ) как универсальное свойство сложных систем.

Ключевой теоретический вклад — интеграция недавних высокоточных результатов по закону квадратного корня (SRL) ценового импакта: Sato и Kanazawa (*Phys. Rev. Lett.* **135**, 257401, 2025) установили, что рыночный импакт масштабируется как  $\Delta p \propto Q^\delta$  с  $\delta \approx 1/2$  универсально для всех ликвидных акций и трейдеров на Токийской фондовой бирже. Мы показываем, что эта микроструктурная универсальность обеспечивает механистический якорь для наблюдаемой макроскопической LRD в волатильности: стратегии дробления ордеров крупных трейдеров в сочетании с универсальным масштабированием импакта генерируют персистентные корреляции в потоке ордеров, проявляющиеся как фрактальная кластеризация волатильности.

**Ключевые слова:** долговременная зависимость; фрактальная память; показатель Хёрста; DFA; закон квадратного корня; микроструктура рынка; Bitcoin; кластеризация волатильности; эконофизика; универсальность

---

\*Независимый исследователь, Ашкелон, Израиль. ORCID: 0009-0007-4607-1946

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>3</b>
1.1 Разрыв микро-макро . . . . .	3
1.2 Вклад данной работы . . . . .	3
<b>2 Теоретические основы</b>	<b>4</b>
2.1 Долговременная зависимость: определения . . . . .	4
2.2 Закон квадратного корня ценового импакта . . . . .	4
2.2.1 Эмпирическое подтверждение: Sato и Kanazawa (2025)	4
2.3 От микроструктуры к макроскопической памяти . . . . .	5
<b>3 Методология: протокол аудита LRD</b>	<b>5</b>
3.1 Обзор . . . . .	5
3.2 Детрендрованный флуктуационный анализ (DFA-2) . . . . .	6
3.2.1 Алгоритм . . . . .	6
<b>4 Эмпирические результаты</b>	<b>6</b>
4.1 Область 1: Волатильность Bitcoin . . . . .	7
4.2 Область 2: Последовательности землетрясений . . . . .	7
4.3 Область 3: Вариабельность сердечного ритма (HRV) . . . . .	7
4.4 Область 4: Геномные последовательности ДНК . . . . .	8
4.5 Сводка эмпирических результатов . . . . .	8
<b>5 Обсуждение</b>	<b>8</b>
5.1 Универсальность фрактальной памяти . . . . .	8
5.2 Микроструктурное обоснование финансовой LRD . . . . .	9
5.3 Импликации для ИИ и машинного обучения . . . . .	9
5.3.1 Спецификация модели . . . . .	9
5.3.2 Рекомендуемые подходы . . . . .	9
5.3.3 Применения к криптовалютам . . . . .	9
<b>6 Заключение</b>	<b>10</b>

# 1. Введение

Обнаружение и характеристика долговременной зависимости (Long-Range Dependence, LRD) в эмпирических временных рядах стало центральной проблемой в дисциплинах от геофизики до финансов. Процесс  $\{X_t\}$  демонстрирует LRD, когда его автокорреляционная функция  $\rho(k)$  убывает гиперболически, а не экспоненциально:

$$\rho(k) \sim c \cdot k^{2H-2}, \quad k \rightarrow \infty, \quad H \in (0.5, 1), \quad (1)$$

где  $H$  — показатель Хёрста,  $c > 0$  — константа. Это медленное убывание означает, что шоки распространяются по всем временным масштабам, создавая «память», которую стандартные модели с короткой памятью (ARMA, GARCH) не способны уловить.

## 1.1. Разрыв микро-макро

Несмотря на обширную эмпирическую документацию, фундаментальный вопрос оставался открытым: *какой микроскопический механизм порождает макроскопическую фрактальную память?* Для финансовых рынков ответ включает взаимодействие:

- (i) **Дробление ордеров:** Крупные институциональные инвесторы исполняют метаордера, разбивая их на множество мелких дочерних ордеров в течение длительного периода для минимизации рыночного импакта.
- (ii) **Масштабирование импакта:** Каждый дочерний ордер двигает цену согласно универсальному закону — закону квадратного корня (SRL).
- (iii) **Агрегированная персистентность:** Кумулятивный эффект генерирует долговременные корреляции в потоке ордеров и, следовательно, в волатильности.

## 1.2. Вклад данной работы

LRD v6.0.1 вносит следующий вклад:

1. **Эмпирическая система аудита:** Воспроизводимый пайплайн для обнаружения LRD с использованием DFA-2, блочного бутстрапа и суррогатных тестов фальсификации, применённый к Bitcoin, землетрясениям, HRV и геномике.
2. **Теоретическое обоснование:** Интеграция результата универсальности SRL Sato-Kanazawa (*Phys. Rev. Lett.* 2025) как микроструктурного якоря для макроскопической LRD.
3. **Фальсифицируемость:** Явные условия, при которых заявления об LRD должны быть отвергнуты, отличая подлинную память от ложного масштабирования.

4. **Релевантность для ИИ:** Импликации для моделей машинного обучения, работающих на рынках с фрактальной памятью, где предположения i.i.d. нарушены.

## 2. Теоретические основы

### 2.1. Долговременная зависимость: определения

**Определение 2.1** (Долговременная зависимость). *Стационарный процесс  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  с автоковариацией  $\gamma(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k})$  демонстрирует долговременную зависимость, если:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| = \infty. \quad (2)$$

*Эквивалентно, спектральная плотность  $f(\lambda)$  удовлетворяет  $f(\lambda) \sim c_f |\lambda|^{1-2H}$  при  $\lambda \rightarrow 0$  для некоторого  $H \in (0.5, 1)$ .*

Показатель Хёрста  $H$  служит каноническим параметром:

- $H = 0.5$ : Отсутствие памяти (белый шум)
- $H > 0.5$ : Персистентная/положительная LRD (тренды продолжаются)
- $H < 0.5$ : Антиперсистентная/отрицательная LRD (возврат к среднему)

### 2.2. Закон квадратного корня ценового импакта

Закон квадратного корня (Square-Root Law, SRL) описывает, как рыночные цены реагируют на объём торгов:

**Гипотеза 1** (Универсальность SRL). *Для любого ликвидного финансового рынка ожидаемый ценовой импакт  $I(Q)$  исполнения метаордера объёма  $Q$  удовлетворяет:*

$$I(Q) \propto \sigma \sqrt{\frac{Q}{V}}, \quad (3)$$

*где  $\sigma$  — дневная волатильность,  $V$  — дневной объём. Показатель  $\delta = 1/2$  универсален — не зависит от идентичности акции, трейдера или торговой площадки.*

#### 2.2.1. Эмпирическое подтверждение: Sato и Kanazawa (2025)

Универсальность SRL теперь строго подтверждена. Sato и Kanazawa проанализировали восемь лет (2012–2019) полных данных об ордерах Токийской фондовой биржи:

- Все ордера, сделки и отмены
- Все индивидуальные торговые аккаунты (анонимизированные)
- Реконструкция метаордеров по всем ликвидным акциям

Их ключевой результат:

**Результат 1** (Универсальность SRL — Sato и Kanazawa 2025). *Показатель ценового импакта  $\delta$  равен  $0.5 \pm 0.05$  для каждой акции и каждой категории трейдеров на TSE, без систематических отклонений. Закон квадратного корня является строгим универсальным масштабированием.*

Этот результат опубликован в *Physical Review Letters* и обсуждён в APS Physics Viewpoint Bouchaud.

### 2.3. От микроструктуры к макроскопической памяти

Связь между SRL и LRD работает через следующий механизм:

**Утверждение 2.2** (Связь микро-макро). *При следующих условиях:*

- (a) *Крупные трейдеры дробят метаордера на дочерние ордера, исполняемые во времени*
- (b) *Каждый дочерний ордер воздействует на цену согласно SRL с  $\delta = 1/2$*
- (c) *Трейдеры оптимизируют исполнение для минимизации общей стоимости импакта*

*Результирующий процесс потока ордеров  $\{q_t\}$  демонстрирует долговременную зависимость в своей последовательности знаков, и процесс волатильности  $\{\sigma_t^2\}$  наследует эту персистентность.*

## 3. Методология: протокол аудита LRD

### 3.1. Обзор

Протокол аудита LRD v6 состоит из четырёх обязательных этапов:

1. **Оценка масштабирования:** DFA-2 для оценки показателя Хёрста  $H$
2. **Квантификация неопределённости:** Блочные бутстрап-доверительные интервалы
3. **Тестирование фальсификации:** Фазово-рандомизированные суррогаты
4. **Анализ чувствительности:** Проверка робастности по диапазону масштабов

Если любой этап не пройден, заявление об LRD отвергается.

## 3.2. Детрендрованный флуктуационный анализ (DFA-2)

DFA был введён Peng et al. для обнаружения LRD в нестационарных последовательностях со встроенными трендами.

### 3.2.1. Алгоритм

Для временного ряда  $\{x_i\}_{i=1}^N$ :

1. **Интегрирование:** Вычислить кумулятивную сумму  $y(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})$
2. **Сегментация:** Разделить  $\{y(k)\}$  на непересекающиеся сегменты длины  $n$
3. **Детрендрование:** В каждом сегменте подогнать полином  $p_\nu(k)$  порядка  $m$  (DFA- $m$  использует степень  $m$ ; мы используем  $m = 2$ )
4. **Флуктуация:** Вычислить среднеквадратичную флуктуацию:

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - p_\nu(k)]^2} \quad (4)$$

5. **Масштабирование:** Повторить для различных  $n$ ; соотношение

$$F(n) \propto n^H \quad (5)$$

даёт  $H$  из наклона в логарифмических координатах.

#### Правило принятия решения при аудите

**Принять заявление об LRD** тогда и только тогда, когда:

1. DFA-2 даёт  $\hat{H} > 0.5$  с бутстрап-ДИ полностью выше 0.5
2. Фазово-рандомизированные суррогаты дают значительно более низкий  $H$
3. Масштабирование сохраняется по нескольким диапазонам масштабов

В противном случае **отвергнуть** заявление об LRD.

## 4. Эмпирические результаты

Мы применяем протокол аудита LRD к четырём различным областям.

Таблица 1: Результаты DFA-2 для временных рядов Bitcoin

Ряд	$\hat{H}$	95% ДИ	$p$ -значение суррогата
Лог-доходности $r_t$	0.52	[0.49, 0.55]	0.34
Абсолютные доходности $ r_t $	0.71	[0.68, 0.74]	$< 0.001$
Объём торгов $V_t$	0.93	[0.89, 0.96]	$< 0.001$

#### 4.1. Область 1: Волатильность Bitcoin

**Результат 2** (LRD в Bitcoin). Сырые доходности Bitcoin не показывают значимой LRD ( $H \approx 0.5$ ), что согласуется со слабой формой рыночной эффективности. Однако прокси волатильности демонстрируют сильную персистентную LRD ( $H \approx 0.71$ ), а объём торгов показывает очень высокую персистентность ( $H \approx 0.93$ ). Эти результаты проходят тесты фальсификации на суррогатах.

#### 4.2. Область 2: Последовательности землетрясений

Таблица 2: Результаты DFA-2 для сейсмических временных рядов

Ряд	$\hat{H}$	95% ДИ	$p$ -значение суррогата
Кумулятивный момент (Италия)	0.87	[0.83, 0.91]	$< 0.001$
Кумулятивный момент (Глобальный)	0.84	[0.80, 0.88]	$< 0.001$
Межсобытийные интервалы	0.68	[0.64, 0.72]	$< 0.01$

**Результат 3** (LRD в сейсмике). Последовательности землетрясений демонстрируют сильную LRD с  $H \approx 0.85$ – $0.87$ , указывая, что периоды высокой сейсмической активности склонны кластеризоваться.

#### 4.3. Область 3: Вариабельность сердечного ритма (HRV)

Таблица 3: Результаты DFA-2 для HRV (здоровые субъекты)

Мера	$\hat{H}$	95% ДИ	$p$ -значение суррогата
RR-интервалы (покой)	0.92	[0.88, 0.96]	$< 0.001$
RR-интервалы (активность)	0.78	[0.74, 0.82]	$< 0.001$

**Результат 4** (LRD в HRV). Вариабельность сердечного ритма здоровых людей демонстрирует сильную LRD ( $H \approx 0.9$  в покое). Эта фрактальная структура — маркер здоровой кардиодинамики.

Таблица 4: Результаты DFA для последовательностей ДНК

Тип последовательности	$\hat{H}$	LRD присутствует?
Интроны (некодирующие)	0.60–0.65	Да
Межгенные области	0.62–0.68	Да
Экзоны (кодирующие)	0.50–0.52	Нет
кДНК (процессированная мРНК)	0.48–0.51	Нет

#### 4.4. Область 4: Геномные последовательности ДНК

**Результат 5** (LRD в геноме). *Некодирующие области ДНК (интроны, межгенные) демонстрируют значимую LRD ( $H \approx 0.65$ ), тогда как кодирующие области (экзоны) — нет. Это подтверждает оригинальные находки Peng et al. и предполагает, что фрактальная организация в геномах служит регуляторным или эволюционным функциям.*

#### 4.5. Сводка эмпирических результатов

Таблица 5: Кросс-доменная сводка доказательств LRD

Область	Наблюдаемая	$\hat{H}$	LRD подтверждена
Финансы (Bitcoin)	Прокси волатильности	0.71	✓
Финансы (Bitcoin)	Объём торгов	0.93	✓
Геофизика	Сейсмический момент	0.85	✓
Физиология	HRV (здоровые)	0.92	✓
Геномика	Некодирующая ДНК	0.65	✓

### 5. Обсуждение

#### 5.1. Универсальность фрактальной памяти

Присутствие LRD в волатильности Bitcoin, последовательностях землетрясений, кардиодинамике и геномной ДНК предполагает, что фрактальная память — не курьёз отдельных систем, а *универсальное свойство сложных систем* с:

- Множеством взаимодействующих компонентов
- Нелинейной динамикой
- Иерархической организацией



## 5.2. Микроструктурное обоснование финансовой LRD

Для финансовых рынков мы теперь имеем полное объяснение микро-макро:

1. **Микро:** Универсальный SRL ( $\delta = 1/2$ ) управляет импактом отдельной сделки
2. **Мезо:** Оптимальное исполнение  $\rightarrow$  дробление ордеров  $\rightarrow$  коррелированный поток ордеров
3. **Макро:** Долговременная зависимость в прокси волатильности

Результат Sato-Kanazawa закрывает эмпирический разрыв, демонстрируя, что SRL выполняется универсально.

## 5.3. Импликации для ИИ и машинного обучения

### 5.3.1. Спецификация модели

Стандартные подходы машинного обучения часто предполагают i.i.d. остатки или зависимость с короткой памятью. При наличии LRD эти предположения нарушены, что ведёт к:

- Недооценке неопределённости прогнозов
- Ложному обнаружению паттернов (переобучение на персистентных флуктуациях)
- Неверным доверительным интервалам для метрик риска

### 5.3.2. Рекомендуемые подходы

1. **Инженерия признаков:** Включить показатели Хёрста, полученные через DFA, как предиктивные признаки
2. **Архитектура модели:** Использовать архитектуры с длинным контекстом (Трансформеры) или явной памятью (LSTM с длинным состоянием)
3. **Функции потерь:** Адаптировать функции потерь для учёта коррелированных ошибок
4. **Квантификация неопределённости:** Использовать блочный бутстрап или другие методы, учитывающие LRD

### 5.3.3. Применения к криптовалютам

Bitcoin и другие криптовалюты показывают особенно сильную LRD в объёме и волатильности. Торговые алгоритмы и системы управления рисками должны:

- Ожидать кластеризацию волатильности за пределами затухания GARCH-типа
- Корректировать размер позиций для персистентных режимов
- Мониторить локальные оценки  $H$  для обнаружения смены режима

## 6. Заключение

LRD v6.0.1 предоставляет воспроизводимую, фальсифицируемую систему для обнаружения и интерпретации долговременной зависимости в сложных временных рядах. Ключевые достижения:

1. **Эмпирические:** Подтверждение LRD в четырёх областях со строгим аудитом (DFA-2 + бутстрап + суррогаты)
2. **Теоретические:** Интеграция результата универсальности SRL Sato-Kanazawa как микроструктурного обоснования финансовой LRD
3. **Практические:** Рекомендации для систем ИИ, работающих на рынках с фрактальной памятью

Более широкая импликация состоит в том, что сложные системы — будь то рынки, геофизические процессы или биологические ритмы — разделяют универсальные статистические сигнатуры, возникающие из их внутренней организации. Закон квадратного корня иллюстрирует, как универсальные законы физического типа могут возникать даже в системах, управляемых человеческим поведением.

## Доступность данных и кода

Все источники данных, код анализа и материалы воспроизводимости архивированы:

**Zenodo DOI:** <https://doi.org/10.5281/zenodo.17993213>

**GitHub:** <https://github.com/Muhomor2/LRD-v6-Empirical-Evidence>

## Список литературы

- [1] Y. Sato and K. Kanazawa, “Strict universality of the square-root law in price impact across stocks: A complete survey of the Tokyo stock exchange,” *Phys. Rev. Lett.* **135**, 257401 (2025).
- [2] Y. Sato and K. Kanazawa, “Does the square-root price impact law belong to the strict universal scalings?,” arXiv:2411.13965 (2024).
- [3] J.-P. Bouchaud, “The Universal Law Behind Market Price Swings,” *APS Physics Viewpoint* (2025).

- [4] J.-P. Bouchaud, J. Bonart, J. Donier, and M. Gould, *Trades, Quotes and Prices: Financial Markets Under the Microscope* (Cambridge University Press, 2018).
- [5] F. Lillo, S. Mike, and J. D. Farmer, "Theory for long memory in supply and demand," *Phys. Rev. E* **71**, 066122 (2005).
- [6] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM Rev.* **10**, 422 (1968).
- [7] C.-K. Peng et al., "Mosaic organization of DNA nucleotides," *Phys. Rev. E* **49**, 1685 (1994).
- [8] C.-K. Peng et al., "Long-range correlations in nucleotide sequences," *Nature* **356**, 168 (1992).
- [9] C.-K. Peng, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, "Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series," *Chaos* **5**, 82 (1995).