Thomas Eglin
Muhsin Scott

Afleveringsopgave 3

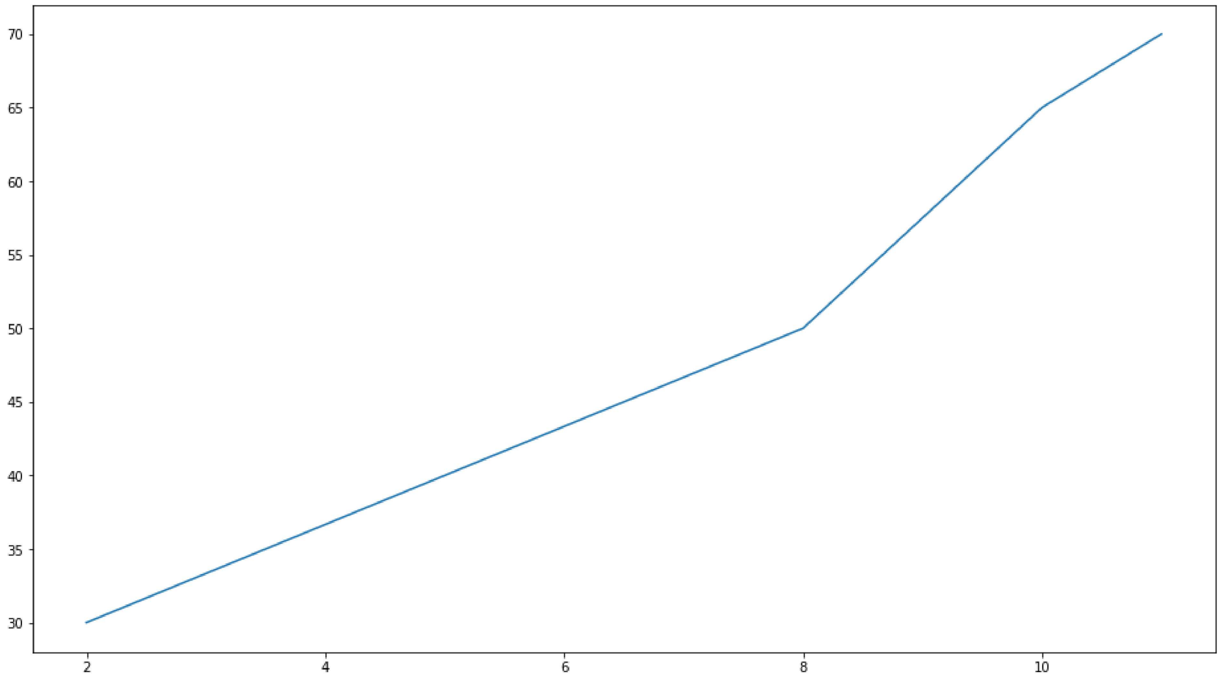
In [331...
```
import numpy as np
```

In [332...
```
import matplotlib.pyplot as plt
```

a)

In [333...
```
tid = [2.0, 5.0, 8.0, 10.0, 11.0]
temperatur = [30.0, 40.0, 50.0, 65.0, 70.0]

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(tid, temperatur)
plt.show()
print("\n")
```



b)

Vi har en andengradsligning:

p(x) = a + b *x* + *c* x**2

Med den kan opstille et ligningssytem, hvor a, b og c er de eneste ubekendte:

50.0 = a + 8b + 64c

65.0 = a + 10b + 100c

70.0 = a + 11b + 121

In [334...
```
A = np.array([[1.0, 8.0, 64.0],
              [1.0, 10.0, 100.0],
              [1.0, 11.0, 121.0]])
```

```
B = np.array([50.0, 65.0, 70.0])[:, np.newaxis]

C = np.hstack([A,B])
C
```

Out[334…

```
array([[  1.,   8.,  64.,  50.],
       [  1.,  10., 100.,  65.],
       [  1.,  11., 121.,  70.]])
```

In [335…

```
C[[1,2],:] -= C[0,:]        # Først trækker vi række 0 fra 1    #
                            #    og 2 for at få 0 i søjle 0     #
C[2,:] -= 3/2 * C[1,:]      # Nu trækker vi en skaleret søjle   #
                            #    1 fra 2, for at få 0 i søjle 1 #
C[1,:] *= 1/2               # Til sidst bruger vi skalarer til  #
                            #    at etablere pivotelementerne   #
C[2,:] *= 1/3
C
```

Out[335…

```
array([[ 1.    ,  8.    , 64.    , 50.    ],
       [ 0.    ,  1.    , 18.    ,  7.5   ],
       [ 0.    ,  0.    ,  1.    , -0.8333]])
```

In [336…

```
C[1,:] -= 18 * C[2,:]                  # Nu reducerer vi koefficientmatricen til en
C[0,:] -= 64 * C[2,:] + 8 * C[1,:]  # indentitetsmatrix for at finde løsningen
C
```

Out[336…

```
array([[  1.    ,   0.    ,   0.    , -76.6667],
       [  0.    ,   1.    ,   0.    ,  22.5   ],
       [  0.    ,   0.    ,   1.    ,  -0.8333]])
```

In [337…

```
a, b, c = C[:,3]
a, b, c #Løsningerne på ligningssystemet
```

Out[337…

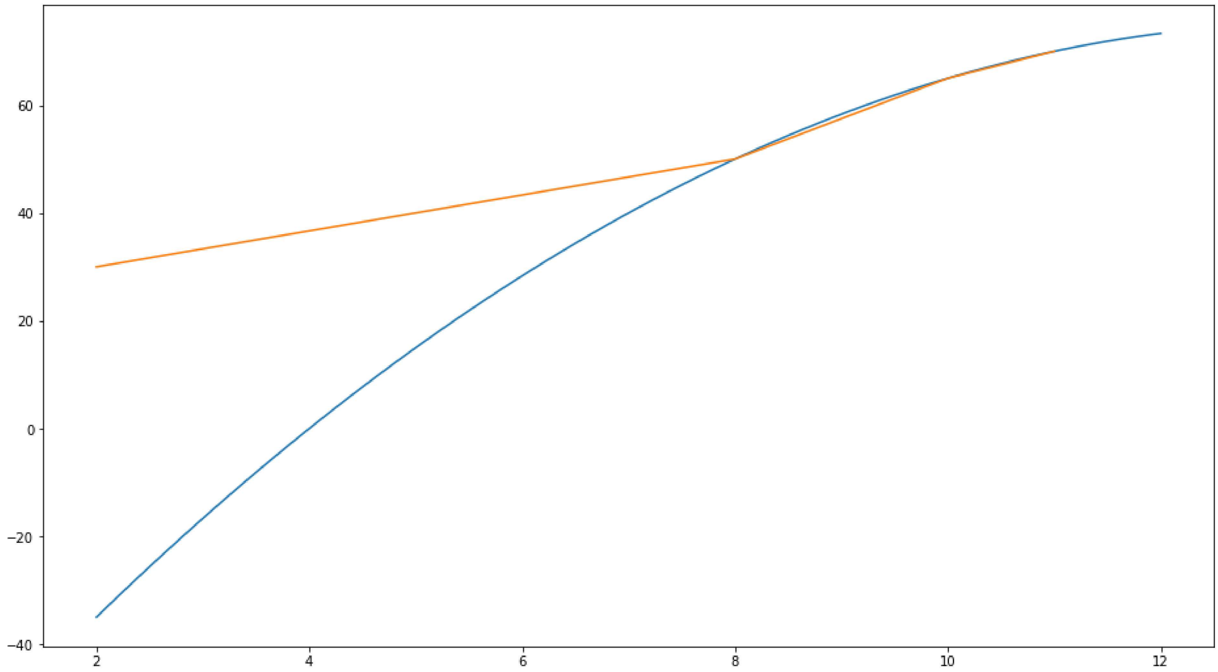
```
(-76.66666666666667, 22.5, -0.8333333333333333)
```

In [338…

```
x = np.linspace(2, 12, 200)

y = a + b * x + c * x**2

fig, ax = plt.subplots() # Tegning
ax.plot(x, y)
ax.plot(tid, temperatur)
plt.show()
```



Her kan vi se, at polynomiet passer rimelig godt på vores data i intervallet mellem vores tre punkter. Bevæger vi os ud herfra, afviger funktionen dog hurtigt fra vores data.

c)

Hvis vi skal have et polynomium, der går igennem fem punkter, er vi nødt til at have fem variable. Det vil sige, at vi som minium skal bruge et fjerdegradspolynomium:

p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4

In [339…

```
A = np.array([[1.0, 2.0, 4.0, 8.0, 16.0],
              [1.0, 5.0, 25.0, 125.0, 625.0],
              [1.0, 8.0, 64.0, 512.0, 4096.0],
              [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0, 10000.0],
              [1.0, 11.0, 121.0, 1331.0, 14641.0]])

B = np.array([35.0, 40.0, 50.0, 65.0, 70.0])[:, np.newaxis]

a, b, c, d, e = np.linalg.solve(A,B)
a, b, c, d, e
```

Out[339…

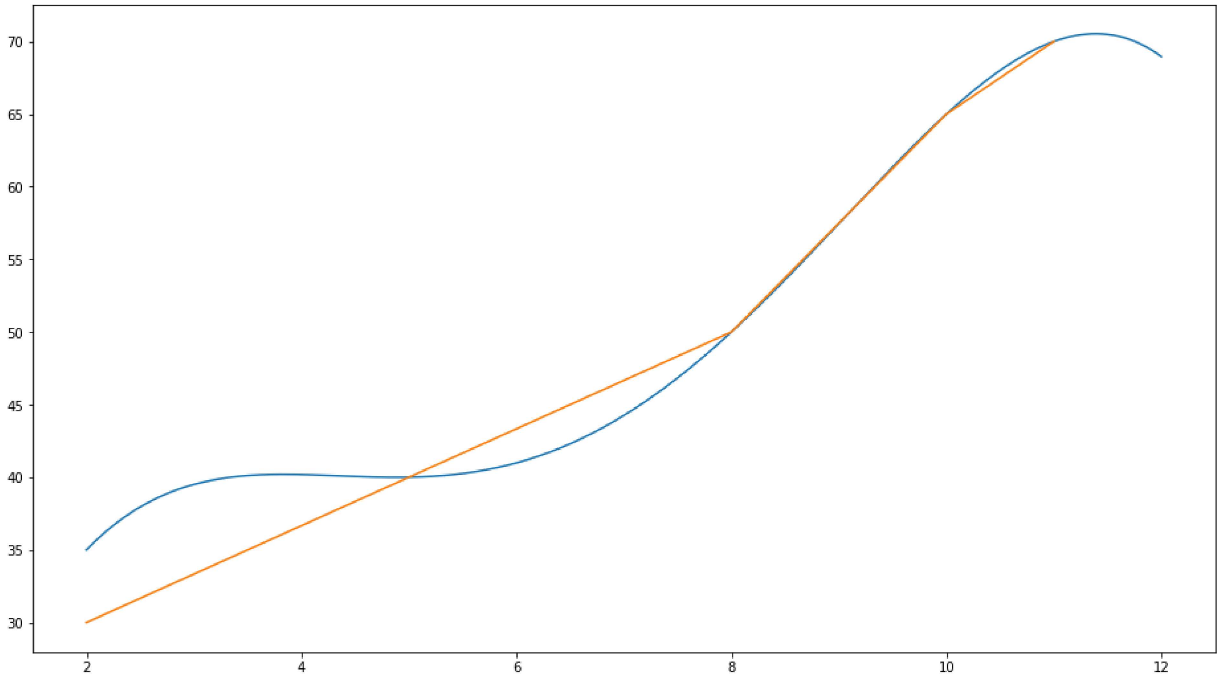
```
(array([-1.9753]),
 array([32.8549]),
 array([-9.0972]),
 array([1.034]),
 array([-0.0386]))
```

In [340…

```
x = np.linspace(2, 12, 200)

y = a + b * x + c * x**2 + d * x**3 + e * x**4

fig, ax = plt.subplots() # Tegning
ax.plot(x, y)
ax.plot(tid, temperatur)
plt.show()
```



70
65
60
55
50
45
40
35
30
2
4
6
8
10
12

d)

Vi kan betragte variablerne fra de to polynomier som 6 ubekendte, a, b, c, d, e, f. Ud fra dette kan vi opstille et ligningssystem. Vi har, at de to polynomier skal gå igennem 2 punkter hver. Dette giver os fire ligninger:

$$\begin{aligned}
a + 5b + 25c \quad & & &= 40 \\
a + 8b + 64c \quad & & &= 50 \\
& & d + 8e \;\; + 64f &= 50 \\
& & d + 10e + 100f &= 65
\end{aligned}$$

Samtidig ved vi, at de afledte, som angiver hældningen, skal være lig hinanden når $x = 8$. Hvis vi trækker det ene udtryk fra på hver side, får vi en ligning, der er lig en konstant (0):

$$b + 16c = e + 16f \rightarrow$$

$$b + 16c - e - 16f = 0$$

Dette giver os ligningssystemet:

$$\begin{aligned}
a + 5b + 25c \quad & & &= 40 \\
a + 8b + 64c \quad & & &= 50 \\
& & d + 8e \;\; + 64f &= 50 \\
& & d + 10e + 100f &= 65 \\
b + 16c \quad & & - \; e - 16f &= 0
\end{aligned}$$

e)

Vi i sætter vores ligningssystem ind i en matrix, og bruger rækkeoperationer til at ændre den til echelonform.

In [341…

```
A = np.array([[1.0, 5.0, 25.0, 0.0, 0.0, 0.0],
              [1.0, 8.0, 64.0, 0.0, 0.0, 0.0],
              [0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 8.0, 64.0],
              [0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 10.0, 100.0],
              [0.0, 1.0, 16.0, 0.0, 1.0, 16.0]])

B = np.array([40.0, 50.0, 50.0, 65.0, 0.0])[:, np.newaxis]

C = np.hstack([A,B])
C
```

Out[341…

```
array([[  1.,   5.,  25.,   0.,   0.,   0.,  40.],
       [  1.,   8.,  64.,   0.,   0.,   0.,  50.],
       [  0.,   0.,   0.,   1.,   8.,  64.,  50.],
       [  0.,   0.,   0.,   1.,  10., 100.,  65.],
       [  0.,   1.,  16.,   0.,   1.,  16.,   0.]])
```

In [342…

```
np.set_printoptions(precision=4)

C[1,:] -= C[0,:]
C[1,:] -= C[4,:] * 2
C[[2,4],:] = C[[4,2],:]
C[2,:] -= C[1,:]
C[2,:] *= 1/9
C[4,:] -= C[3,:]
C[4,:] *= -1/2
print(C)
```

```
[[  1.       5.      25.       0.       0.       0.      40.    ]
 [  0.       1.       7.       0.      -2.     -32.      10.    ]
 [  0.       0.       1.       0.       0.3333   5.3333  -1.1111]
 [  0.       0.       0.       1.      10.     100.      65.    ]
 [ -0.      -0.      -0.      -0.       1.      18.       7.5   ]]
```

In [343…

```
C[3,:] -= C[4,:] * 10 # Her finder vi løsning(en/erne) på ligningssystemet
C[2,:] -= C[4,:] / 3
C[1,:] += C[4,:] * 2
C[1,:] -= C[2,:] * 7
C[0,:] -= C[2,:] * 25
C[0,:] -= C[1,:] * 5
print(C)
```

```
[[   1.        0.        0.        0.        0.      -26.6667 -121.1111]
 [   0.        1.        0.        0.        0.        8.6667   50.2778]
 [   0.        0.        1.        0.        0.       -0.6667   -3.6111]
 [   0.        0.        0.        1.        0.      -80.       -10.    ]
 [  -0.       -0.       -0.       -0.        1.       18.         7.5   ]]
```

Nu har vi en matrix i echelonform, hvor der er strengt færre pivotelementer end søjler. Dette betyder, at matricen er underbestemt, og vores variabel f er fri. Dette betyder, at der er uendelig mange løsninger.

f)

Vi kan nu definere b og c i den afledte af p1(x) ud fra vores frie variabel f. I vores data har vi fra x = 2 til x = 8 noget, der nærmer sig lineær vækst, som vi kan udregne hældningen på. Hvis vi sætter f således, at hældingen i b + 2cx bliver lig med y'(5), har vi en god approksimation af f.

In [344...

```
slope5 = (60.0 - 40.0) / (8.0 - 2.0)

print(slope5)
```

```
3.3333333333333335
```

Dette er hældningen i x = 5 hvis vi antager lineær vækst. Grundet mangel på data kan vi ikke med rimelig sikkerhed konkludere, at der er lineær vækst, men det er den bedste approksimering. Vi har en ligning b + 2cx = 11/3 som vi løser i maple. Meget høj precision i svaret er ikke en mulighed, da vores tal i ligningen var meget precise.

In [345...

```
f = 5.51

# Vi ganger vores bestemte f på f søjlen.
C[:, 5] = C[:, 5] * f

#Dette giver os en værdi, vi kan ligge til på den anden side af lighedstegnet
C[:, 5] = C[:, 6] - C[:, 5]

#Nu har vi værdierne af variablerne i søjle 5 og kan gemme dem i separate variabler:
a, b, c, d, e = C[:, 5]
a, b, c, d, e
```

Out[345...

```
(25.822222222222223,
 2.524444444444441,
 0.06222222222222351,
 430.79999999999995,
 -91.67999999999999)
```

Nu er der ingen ubekendte, og vi kan plotte funktionerne

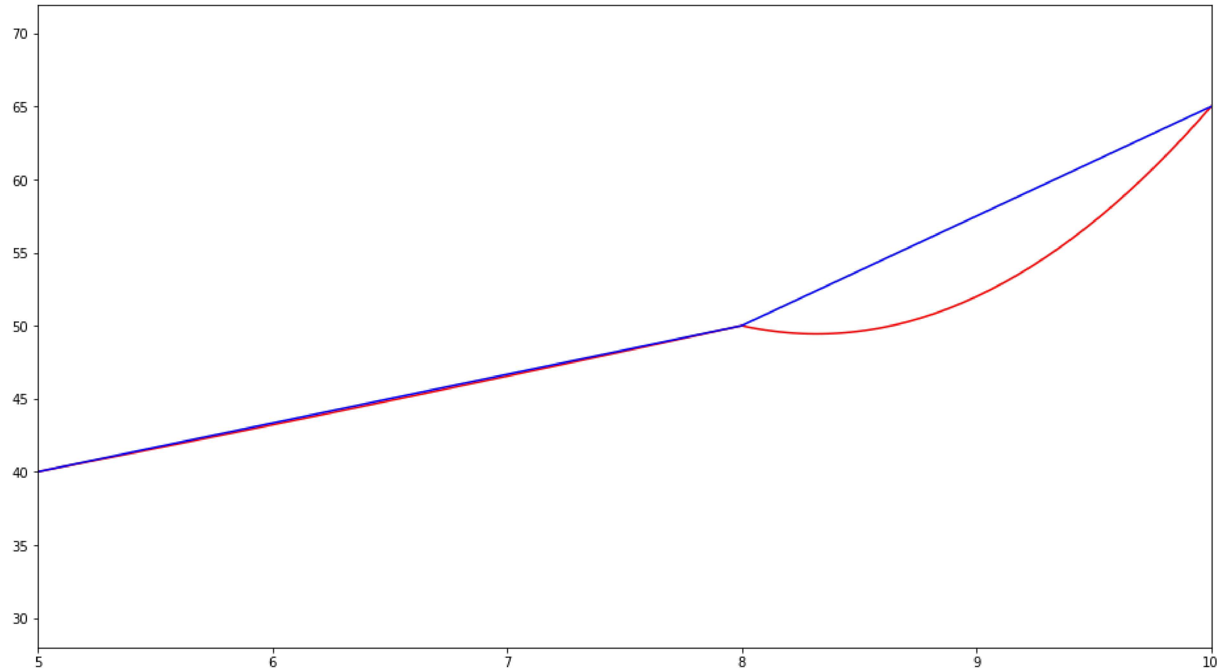
In [346...

```
x1 = np.linspace(5, 8, 150)
x2 = np.linspace(8, 10, 100)

p1 = a + b * x1 + c * x1**2
p2 = d + e * x2 + f * x2**2

fig, ax = plt.subplots() # Tegning
ax.plot(x1, p1, 'r')
ax.plot(x2, p2, 'r')
ax.plot(tid, temperatur, 'b')

plt.xlim([5, 10]) #Da funktionen f(x) kun har værdier i [5;10] plotter vi her
plt.show()
```



g)

Hvis vi først kigger på metoden fra b), er det ydeligt, at funktionen afviger kraftigt fra vores data. Metoden fra c) afviger mindre, og krydser grafen i 5. Hvis vi sammenligner c) med f) ser vi dog, at denne graf ligger tættest på grafen for vores data, når temperaturen er 55 grader. Vi ville derfor helst bruge denne til at estimere i dette punkt. Hvis vi kigger over hele intervallet [2;12], ville vi dog helst bruge metoden fra c).