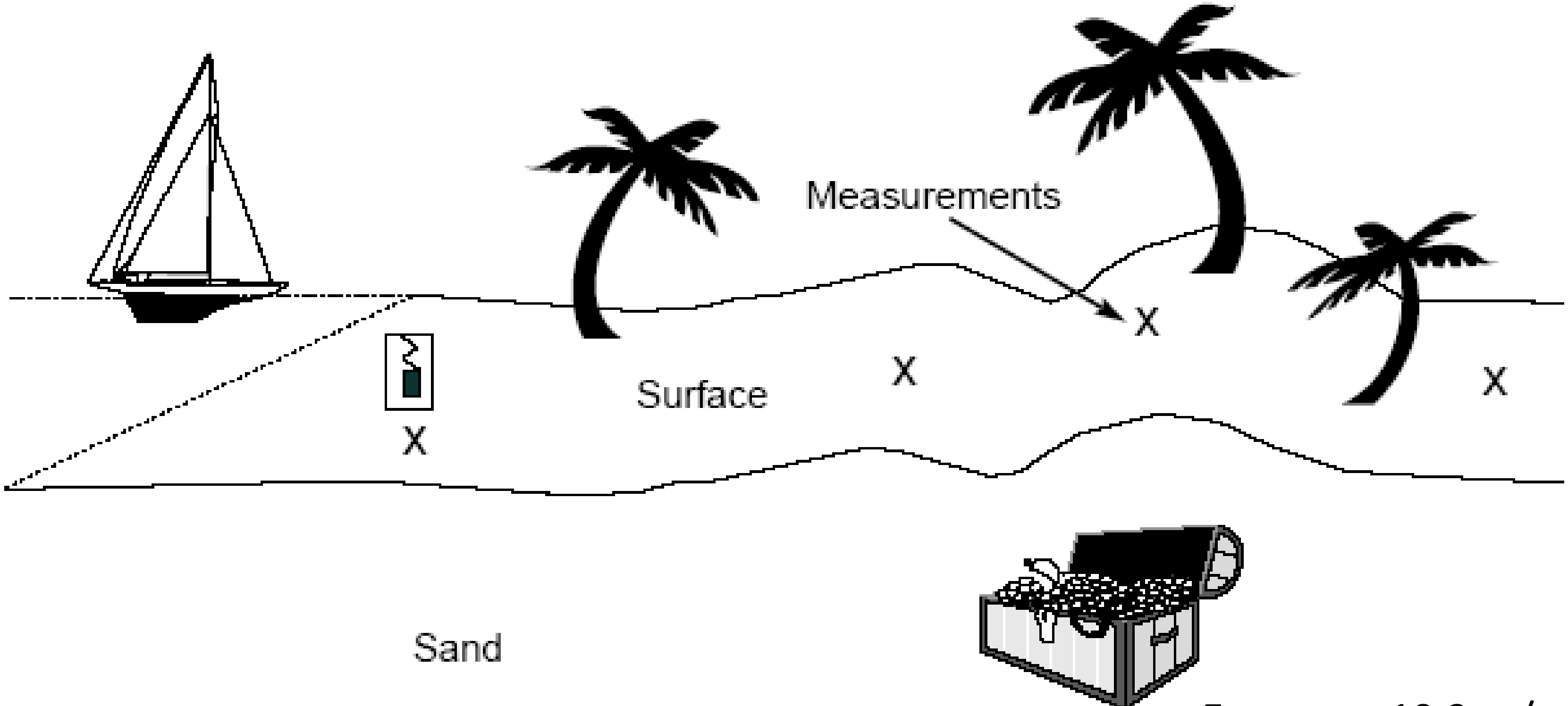
Teori Inversi

Syamsu Rosid

Geophysics, University of Indonesia



Emas, ρ = 19,3 gr/cc

Pasir, ρ = 2,2 gr/cc

Dimanakah emas itu berada, berapa dalam dan berapa banyak?

5 pengukuran gravitasi di 5 tempat berbeda:
22, 34, 30, 24 dan 55 μgal

Definisi dan Konsep Dasar

- Hasil pengukuran geofisika → data observasi/ data lapangan
- Data lapangan tergantung pada:
  - Kondisi
  - Sifat fisis batuan
- Data eksperimen diharapkn bisa meng-infokan
  - Distribusi sifat fisis batuan bawah permukaan
  - Kondisi geometri batuan
  - Posisi kedalaman batuan

Data Observasi $\leftrightarrow$ Sifat Fisis Batuan

Model Matematika $\rightarrow$ Ekstraksi Parameter Fisis

Inverse Modeling

Sifat Fisis $\rightarrow$ Estimasi Hasil Pengukuran

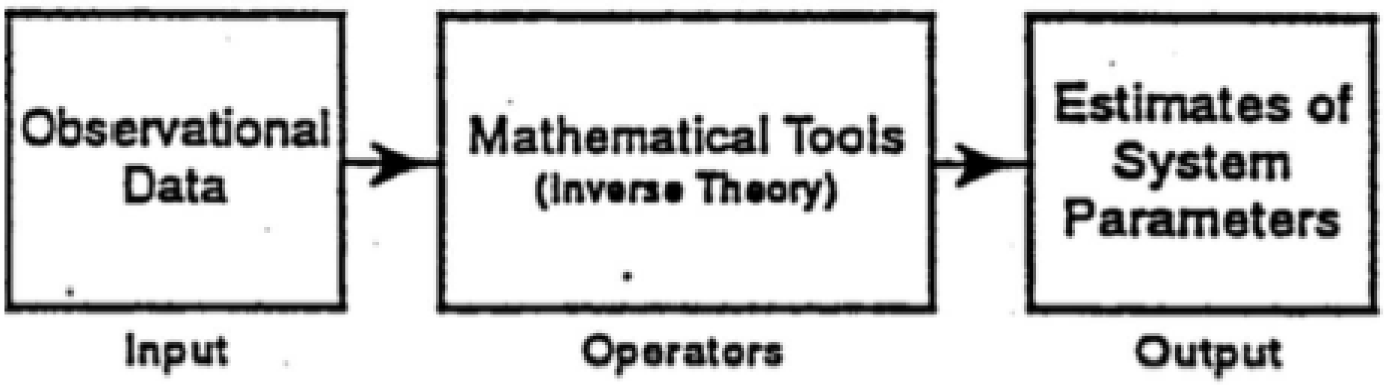
Forward Modeling

Inverse Problem

Given: Field observations (Earth system responses)

Determine: Parameters of the earth–model

The Inversion Process



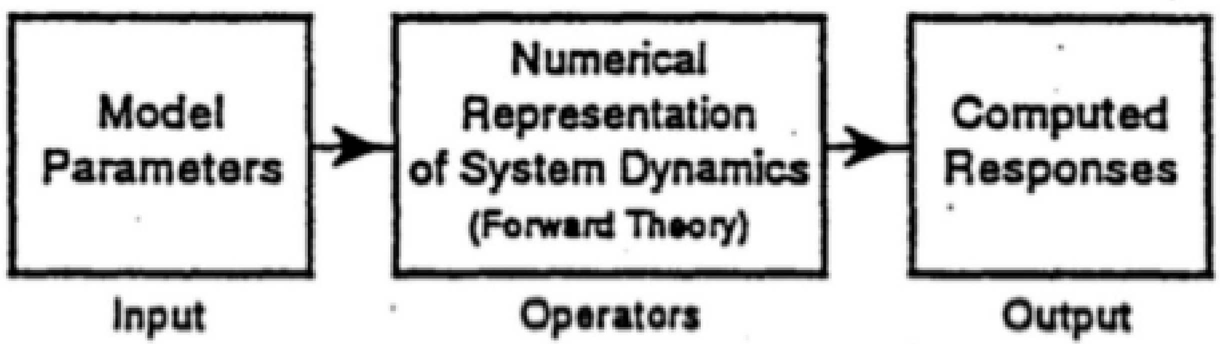
Forward Problem

Given: Estimates or values of the model parameters

↓

Determine: Theoretical responses (data)

The Forward Process



Proses Inversi

- Proses **pengolahan** data lapangan mengguna-kan teknik **matematika** dan **statistik** untuk mendapatkan informasi yang berguna mengenai **distribusi sifat fisis** bawah permukaan.

- ***Curve Fitting*** mulai dari:
  - *fitting garis* untuk data seismik refraksi hingga
  - level yang rumit seperti tomografi akustik dan *matching (*pencocokan*)* kurva resistivity yang multidimensi

Contoh Problem Inversi dlm Geofisika

- Penentuan struktur bawah tanah
- Estimasi parameter^2 bahan tambang
- Estimasi parameter^2 akumulasi sumber energi
- Penentuan lokasi gempa bumi berdasarkan waktu datang gelombang
- Pemodelan respon *lithospere* untuk mengamati proses sedimentasi
- Analisis sumur bor pada hidrogeologi

Proses Geofisika

- Perambatan gelombang seismik,
- Perambatan gelombang elektromagnetik di bawah tanah dan
- Aliran muatan (arus listrik) ataupun arus fluida pada batuan berpori

- Data lapangan adalah **refleksi** dari kompleksitas sistem geofisika yang dikontrol oleh **distribusi parameter fisis** batuan berikut **struktur geologi**nya.

Data Geofisika

- Data Lapangan
  - densitas,
  - kecepatan gelombang seismik,
  - modulus bulk,
  - hambatan jenis batuan,
  - permeabilitas batuan,
  - suseptibilitas magnet
- Data Laboratorium
  - model lapisan bumi

Sifat Data (Geofisik)

- Selalu terukur noise
- Selalu ada instrumen error
- Selalu ada human error

➔ Pengukuran diulang berkali-kali → distribusi probabilistik

Eksplorasi Geofisik dan Inversi

- Akuisisi Data → Analisis Data → Model Bawah Permukaan → Interpretasi → Penentuan Titik Bor

- Yg diperhatikan dalam Analisis:
  - berapakah nilai sampling rate yang optimal?
  - berapa jumlah data yang diperlukan?
  - berapa tingkat akurasi yang diinginkan?
  - dan model matematika mana yang cocok?

Model Matematika

- Seluruh proses geofisika dapat dideskripsikan secara matematika
- Suatu formulasi yang bisa menjelaskan sistem geofisika disebut **model**
- Model hasil laboratorium disebut sebagai **model konseptual/model fisis/model matematika**

- Kebanyakan proses geofisika dapat diformulasikan dalam bentuk:

$$d_i = \int_0^z K_i(z)\; p(z)\, dz$$

dengan d_i respon atau data yang terukur, $p(z)$ **parameter model** yaitu suatu fungsi yang berkaitan dengan parameter fisis yang hendak dicari (misalnya: hambatan jenis, densitas, kecepatan), dan ***K_i* disebut data kernel**

- Data **kernel** menjelaskan hubungan antara data d_i dan parameter model $p(z)$

Forward Modeling

- Parameter model bisa berbentuk fungsi kontinyu terhadap jarak/posisi, seperti

$$t = \int_L \frac{1}{v(x, z)} dl$$

- Deskripsi matematika diatas → forward modeling
- Digunakan untuk memprediksi data simulasi berdasarkan hipotesa kondisi bawah permukaan
- Data simulasi tersebut biasanya dinamakan **data teoritik** atau **data sintetik** atau **data prediksi** atau **data kalkulasi**

Diskritisasi dan Linearisasi

- Dalam banyak kasus, model bumi selalu fungsi kontinyu terhadap jarak/posisi

$$Massa = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r)\, dr$$

$$Momen\ Inersia = \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 \rho(r)\, dr$$

dengan *R* jejari bumi dan $\rho(r)$ densitas fungsi jarak *r*

- Dalam bentuk umum kedua pers diatas ditulis menjd

$$d_i = \int_0^R K_i(r)\, p(r)\, dr$$

- Untuk pendekatan komputasi, dilakukan penyederhanaan $\rho(r)\,dr = m$ dan $K_i = G_i$, maka

$$d_i = \sum G_{ij}\, m_j$$

- Ini bentuk **diskritisasi** → teori inversi diskrit
- Dalam bentuk diskrit, persamaan waktu tempuh gelombang seismik menjadi

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{L_{ij}}{v_j}$$

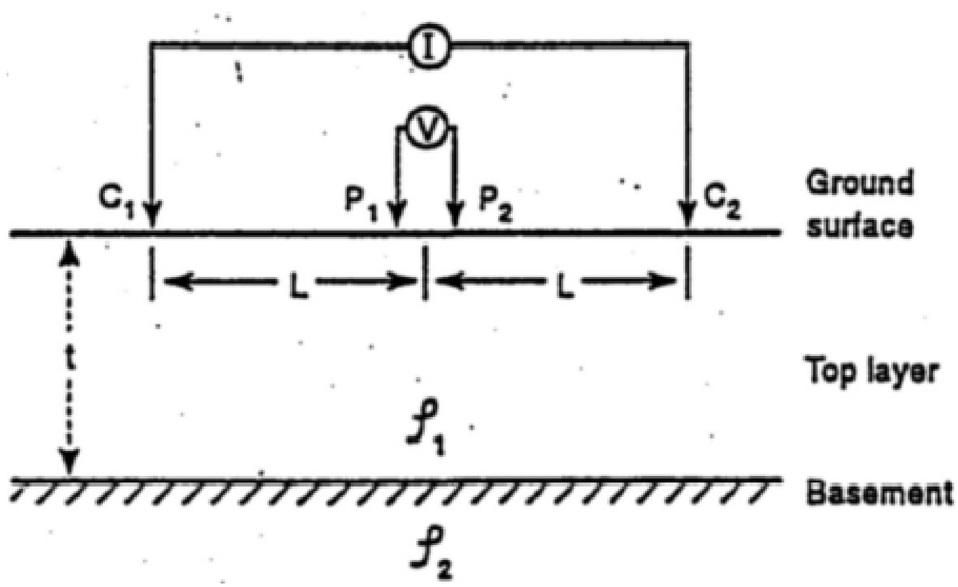
Linearisasi

- Karena *t* berbanding terbalik terhadap *v*, kita definisikan $c = 1/v \equiv$ *slowness*, maka

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} L_{ij}\, c_j$$

- Persamaan memenuhi $d = G\, m$
- Disebut sebagai proses linearisasi parameter

Metoda Schlumberger



- Menurut P…snis (1986)

L=AB/2

Fungsi Bessel orde 1

$$\rho_a(L) = \rho_1 \left(1 + 2L^2 \int_0^\infty K(\lambda) J_1(\lambda L) \lambda d\lambda \right)$$

K(λ) Fungsi Parameter

- $K(\lambda)$ adalah fungsi parameter (resistivitas masing-masing lapisan yaitu ρ_1 dan ρ_2 serta ketebalan lapisan paling atas t) dari sistem yang kita asumsikan

$$K(\lambda) = \frac{-k_{1,2}^{(-2\lambda t)}}{1 + -k_{1,2}^{(-2\lambda t)}}$$

$$k_{1,2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

- Karena pers. resistivitas diatas tidak bisa didekati dengan $d = Gm$, maka pers ρ_a disebut sebagai *highly non-linear*

Operasi Matriks

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- Jika $A^T = A$ ➔ matriks Simetri
- Jika $A^T = -A$ ➔ matriks Simetri sekrup
- Kita dapat men-split setiap matriks A menjadi jumlah dari bagian matriks Simetri dan matriks Simetri sekrup sebagai berikut,

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^T) + \tfrac{1}{2}(A - A^T)$$

Operasi Matriks (Lanjutan ...)

- Transpose dari sebuah matriks Hermitian adalah kompleks konjugate dari transposenya
- Jika
$$A = \begin{bmatrix} 4-i & 8 & 12+i \\ -12 & -8 & -4-i \end{bmatrix}$$
- Maka
$$\bar{A}^T \equiv A^H = \begin{bmatrix} 4+i & -12 \\ 8 & -8 \\ 12-i & -4+i \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks (Lanjutan …)

- Penjumlahan dua buah matriks dapat dilakukan hanya jika banyaknya baris dan kolom kedua matriks sama

$$(A + B)_{ij} = (A_{ij} + B_{ij})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks (Lanjutan ...)

- Operasi matriks bisa menyatakan sebuah operasi vektor.
- Jika $A \in R^{nxm}$ dan $x \in R^{m}$, maka $\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in R^{m}$

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j$$

$$A \cdot \mathrm{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks (Lanjutan ...)

- Hasil kali dua buah matriks berlaku,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \neq AB$$

Operasi Matriks (Lanjutan …)

- Jika kedua matriks x dan y adalah vektor dan $x \in R^m$ dan $y \in R^n$ maka hasil kali xy dan biasanya disebut sebagai hasil kali “outer” ditulis dalam bentuk xy^T

$$(xy)_{ij} = x_i + y_j$$

- Jadi jika $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Maka $\mathrm{xy}^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks Inverse

- Untuk matriks A = m x n
- Jika m > n

$$A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$$

- Jika m = n

$$A^{-1} = (1/\det A)\ \ \mathrm{Adj.}\ A$$

- Jika m < n

$$A^{-1} = A^T (AA^T)^{-1}$$

Formulasi Masalah Inversi

- Dalam inversi:
  - Parameter model, M
  - Jumlah data, N

  →Menentukan kalisifikasi permasalahan inversi dan cara penyelesaiannya.
- Bila $M < N$
  - **overdetermined**
  - Menggunakan pencocokan (*best fit*) terhadap data lapangan
- Bila $M > N$
  - **underdetermined**
  - banyak model yang dapat sesuai datanya. Masalah ini disebut **non-uniqness**

lanjutan …

→ diselesaikan dengan model yang parameternya berbentuk fungsi kontinyu terhadap posisi.

- Bila M = N
  - **evendetermined**
  - Selesaikan dengan metoda inversi langsung

- Model-model Inversi: model garis, model parabola dan model bidang

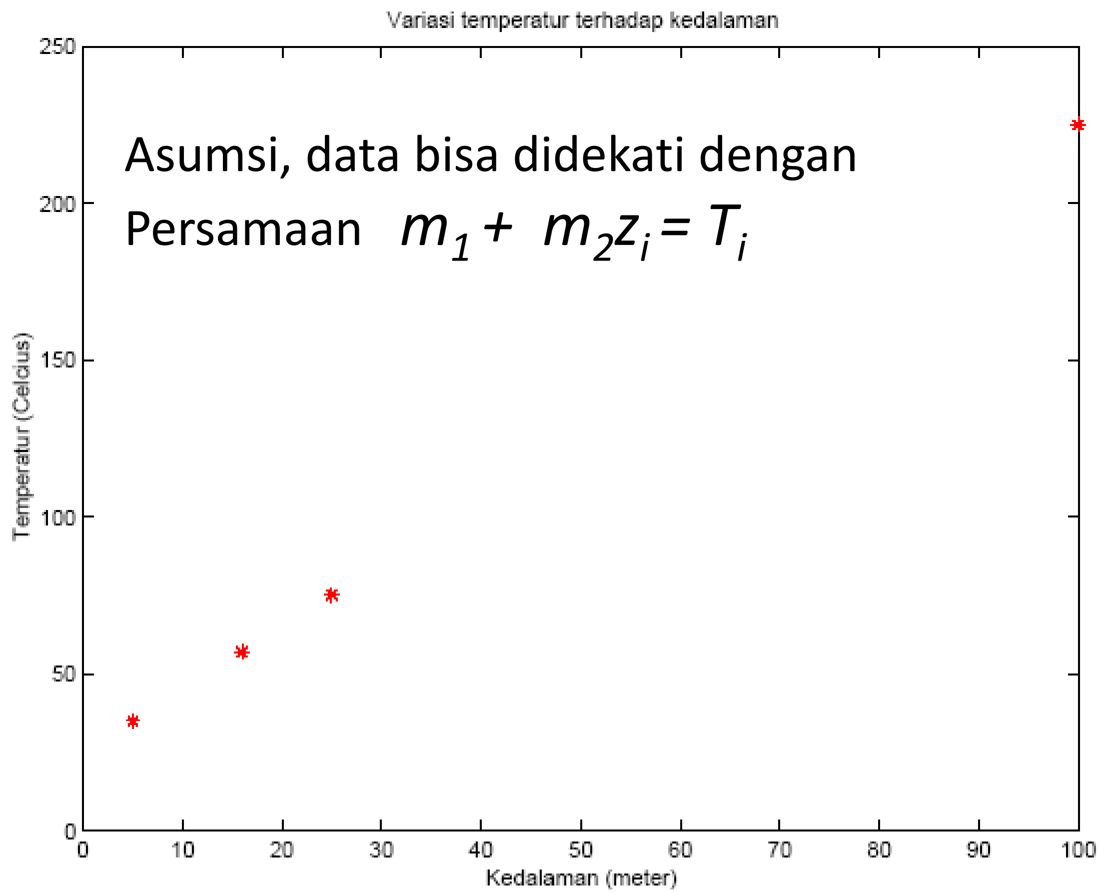
Inversi Model Garis

- Pengukuran temperatur terhadap kedalaman di bawah permukaan bumi menunjukkan bahwa semakin dalam, temperatur semakin tinggi.

- **Misal**

  ada empat kali (N = 4) pengukuran temperatur (T_i) pada kedalaman yang berbeda beda (z_i)

Pengukuran ke-i	Kedalaman (m)	Temperatur (^{O}C)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 35$
2	$z_2 = 16$	$T_2 = 57$
3	$z_3 = 25$	$T_3 = 75$
4	$z_4 = 100$	$T_4 = 225$



Asumsi, data bisa didekati dengan

Persamaan $m_1 + m_2 z_i = T_i$

- Persamaan $m_1 + m_2 z_i = T_i$ disebut *model matematika*
- m_1 dan m_2 disebut **parameter model** atau biasa juga disebut **unknown parameter**
- Dengan M = 2 dan N = 4, diperoleh:

$$m_1 + m_2 z_1 = T_1$$

$$m_1 + m_2 z_2 = T_2$$

$$m_1 + m_2 z_3 = T_3$$

$$m_1 + m_2 z_4 = T_4$$

- Dalam bentuk operasi matrik berbentuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

- Sesuai dengan bentuk umum: *G**m** = **d***

  d data yang dinyatakan dalam vektor kolom, ***m*** adalah model parameter, juga dinyatakan dalam vektor kolom, dan *G* disebut **matrik Kernel**

Langkah Penentuan Nilai *m*

- Untuk mencari nilai *m* gunakan pendekatan

$$G^t G\mathbf{m} = G^t\mathbf{d} \qquad (*)$$

1. Tentukan transpose matriks Kernel, G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}$$

2. Lakukan perkalian matriks $G^t\, G$

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \\ 1 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana N = 4 dan i = 1, 2, 3, 4.

3. Tentukan pula $G^t d$

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang pers (*) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i \\ \sum z_i & \sum z_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \end{bmatrix}$$

- Dari data observasi diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & 146 \\ 146 & 10906 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 392 \\ 25462 \end{bmatrix}$$

  dan menghasilkan $m_1 = 25$ dan $m_2 = 2$.

- Dalam program Matlab tersedia perintah:

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

Inversi Model Parabola

- Dengan jumlah data N = 8

Pengukuran ke-i	Kedalaman (m)	Temperatur (^{O}C)
1	$z_1 = 5$	$T_1 = 21,75$
2	$z_2 = 8$	$T_2 = 22,68$
3	$z_3 = 14$	$T_3 = 25,62$
4	$z_4 = 21$	$T_4 = 30,87$
5	$z_5 = 30$	$T_5 = 40,5$
6	$z_6 = 36$	$T_6 = 48,72$
7	$z_7 = 45$	$T_7 = 63,75$
8	$z_8 = 60$	$T_8 = 96$

- Diasumsikan model matematiknya

$$m_1 + m_2 z_i + m_3 z_i^2 = T_i$$

- m_1, m_2, m_3 adalah **unknown parameter**.
- Disini ada $M = 3$ dan $N = 8$

$$
\begin{aligned}
m_1 + m_2 z_1 + m_3 z_1^2 &= T_1 \\
m_1 + m_2 z_2 + m_3 z_2^2 &= T_2 \\
m_1 + m_2 z_3 + m_3 z_3^2 &= T_3 \\
m_1 + m_2 z_4 + m_3 z_4^2 &= T_4 \\
m_1 + m_2 z_5 + m_3 z_5^2 &= T_5 \\
m_1 + m_2 z_6 + m_3 z_6^2 &= T_6 \\
m_1 + m_2 z_7 + m_3 z_7^2 &= T_7 \\
m_1 + m_2 z_8 + m_3 z_8^2 &= T_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix}
$$

$$G\mathbf{m} = \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{G\,m = d}$$

- ***d*** adalah data dalam matriks kolom, ***m*** matriks parameter model, dan *G* matriks **kernel**
- Manipulasikan bentuk diatas menjadi bentuk

$$G^t G\mathbf{m} = G^t\mathbf{d}$$

Langkah Penyelesaian

1- Tentukan transpose dari matriks Kernel, G^t

$$G = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix}$$

2- Tentukan $G^t\, G$

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \\ 1 & z_4 & z_4^2 \\ 1 & z_5 & z_5^2 \\ 1 & z_6 & z_6^2 \\ 1 & z_7 & z_7^2 \\ 1 & z_8 & z_8^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 8$ dan $i = 1, 2, 3, \ldots, 8$

3- Tentukan pula $G^t d$

$$G^t \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 & z_8^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix}$$

4- Sekarang pers. dapat dinyatakan dlm bentuk

$$\begin{bmatrix} N & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum T_i \\ \sum z_i T_i \\ \sum z_i^2 T_i \end{bmatrix}$$

Dari data observasi, didapatkan

$$\begin{bmatrix} 8 & 219 & 8547 \\ 219 & 8547 & 393423 \\ 8547 & 393423 & 19787859 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 349,89 \\ 12894,81 \\ 594915,33 \end{bmatrix}$$

- Dengan program matlab

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

diperoleh nilai m_1 = 21; m_2 = 0,05; dan m_3 = 0,02.

- Itulah model garis parabola

$$y = m_1 + m_2x + m_3x^2$$

- Sekarang bagaimana dengan **model 2-D** ?

Inversi Model Bidang

- Bentuk umum:

$$m_1 + m_2\, x_i + m_3\, y_i = d_i$$

dimana m_1, m_2, m_3 adalah *unknown parameter* yang dicari, sedangkan datanya adalah $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_i$.

- Secara matematis model tersebut adalah

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 x_1 + m_3 y_1 &= d_1 \\ m_1 + m_2 x_2 + m_3 y_2 &= d_2 \\ m_1 + m_2 x_3 + m_3 y_3 &= d_3 \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \quad &\;\; \vdots \\ m_1 + m_2 x_N + m_3 y_N &= d_N \end{aligned}$$

- Dalam bentuk matriks dapat dinyatakan sebg

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}$$

- Yang memenuhi bentuk umum ***G m = d***

dimana ***d*** vektor kolom data, ***m*** vektor kolom *unknown parameter*, dan ***G*** matriks Kernel.

Langkah Perhitungan

0- Rubah bentuk $\boldsymbol{G\,m = d} \rightarrow \boldsymbol{G^t\,G\,m = G^t\,d}$

1- Tentukan transpose matriks Kernel, $\boldsymbol{G^t}$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix} \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix}$$

2- Tentukan nilai $\boldsymbol{G^t\,G}$

$$G^tG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix}$$

dimana N = jumlah data dan

i = 1, 2, 3, ….., N

3- Tentukan ***G^t d***

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix}$$

4- Pers. matriks sekarang menjadi berbentuk

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum x_i d_i \\ \sum y_i d_i \end{bmatrix}$$

- Nilia *m* dapat ditentukan dengan perintah matlab berikut:

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

Contoh Aplikasi

- Menghitung gravitasi di Planet X

  Seorang astronout tiba di sebuah planet yang tidak dikenal. Setibanya disana, ia segera mengeluarkan kamera otomatis, lalu melakukan eksperimen kinematika yaitu melakukan pelemparan batu secara vertikal ke atas. Hasil foto-foto yang terekam dalam kamera otomatis adalah data yang bisa digunakan untuk mem-Plot waktu pengukuran vs ketinggian.

Contoh Aplikasi (Lanjutan ...)

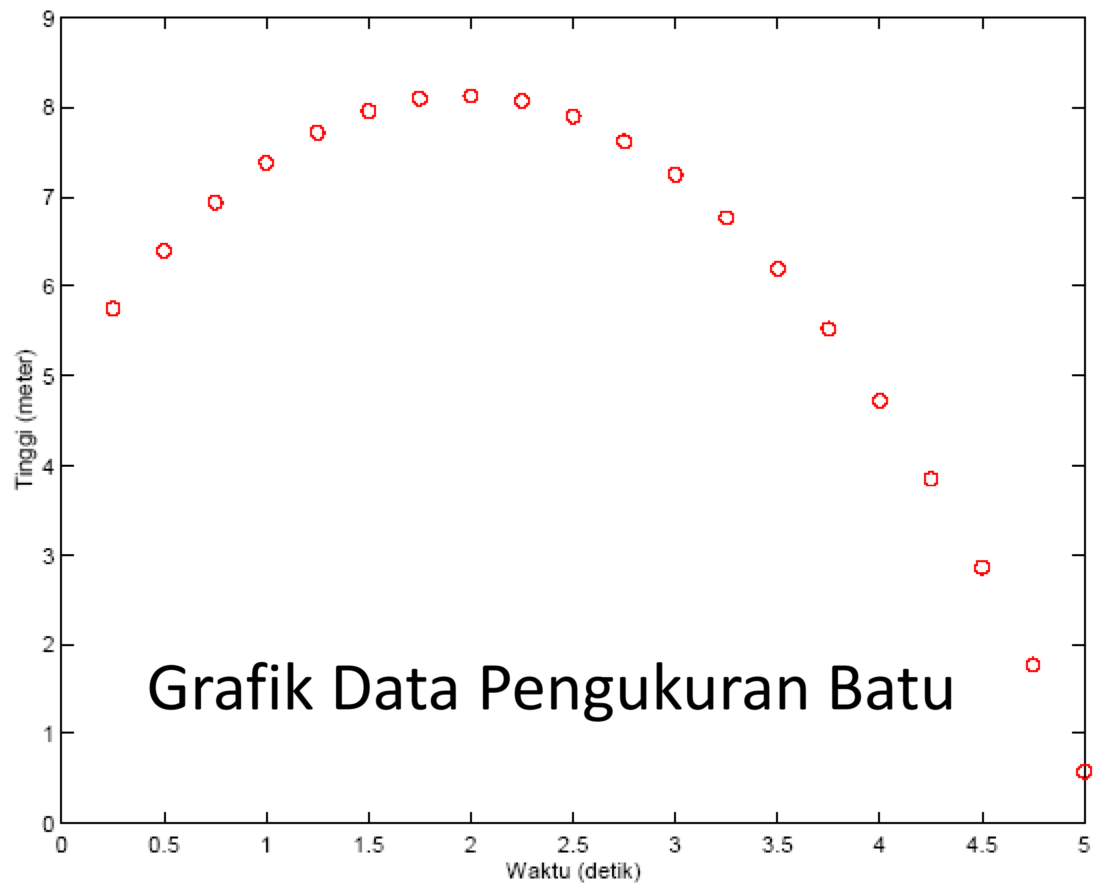
Waktu (dt)	Ketinggian (m)	Waktu (dt)	Ketinggian (m)
0,00	5,00	2,75	7,62
0,25	5,75	3,00	7,25
0,50	6,40	3,25	6,77
0,75	6,94	3,50	6,20
1,00	7,38	3,75	5,52
1,25	7,72	4,00	4,73
1,50	7,96	4,25	3,85
1,75	8,10	4,50	2,86
2,00	8,13	4,75	1,77
2,25	8,07	5,00	0,58
2,50	7,90		

- *Unknown parameter*nya adalah
  - Percepatan gravitasi, **g** dan
  - Kecepatan awal batu, $\mathbf{V_o}$

Langkah Penyelesaian

- Buat model matematik dengan konsep fisika yang sesuai dengan kasus tersebut

- Dari data pada gambar samping merupakan glbb → **model para-bola**



- Formula untuk glbb berbentuk:

$$h = h_o + v_o\, t - \tfrac{1}{2}\, gt^2$$

- Dari data kurva diketahui pada t = 0, h_o = 5 m
- Jadi persamaan geraknya adalah

$$h - 5 = v_o\, t - \tfrac{1}{2}\, gt^2$$

- Jika $v_o = m_1$ dan $-\tfrac{1}{2}\, g = m_2$, maka

$$h - 5 = m_1\, t + m_2\, t^2$$

- Bentuk umum glbb nya menjadi

$$h_i - 5 = m_1\, t_i + m_2\, t_i^2$$

- Masukkan data observasi ke dalam model matematik, sehingga berbentuk

$$\begin{aligned}
m_1 t_1 + m_2 t_1^2 &= h_1 - 5 \\
m_1 t_2 + m_2 t_2^2 &= h_2 - 5 \\
m_1 t_3 + m_2 t_3^2 &= h_3 - 5 \\
\vdots \qquad \vdots \quad &= \vdots \\
m_1 t_{20} + m_2 t_{20}^2 &= h_{20} - 5
\end{aligned}$$

- Nyatakan model tersebut dalam operasi matriks

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - 5 \\ h_2 - 5 \\ h_3 - 5 \\ \vdots \\ h_{19} - 5 \\ h_{20} - 5 \end{bmatrix}$$

Model ***G m = d***

0. Lakukan manipulasi matriks dalam bentuk

$$\boldsymbol{G^t\, G\, m = G^t\, d}$$

1. Tentukan transpose matriks Kernel, $\boldsymbol{G^t}$

$$G = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad G^t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan ***G^t G***

$$G^tG = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \\ t_4 & t_4^2 \\ \vdots & \vdots \\ t_{19} & t_{19}^2 \\ t_{20} & t_{20}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix}$$

dimana $N = 20$, dan $i = 1, 2, 3, \dots\dots, N$

3. Tentukan hasil perkalian $\boldsymbol{G^t d}$

$$G^t\mathbf{d} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \dots & t_{19} & t_{20} \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 & \dots & t_{19}^2 & t_{20}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ \vdots \\ h_{19} \\ h_{20} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix}$$

4. Sekarang pers. matriks dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum t_i h_i \\ \sum t_i^2 h_i \end{bmatrix}$$

G m = d

- Dari data observasi diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} 179,4 & 689,1 \\ 689,1 & 2822,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 273,7 \\ 796,3 \end{bmatrix}$$

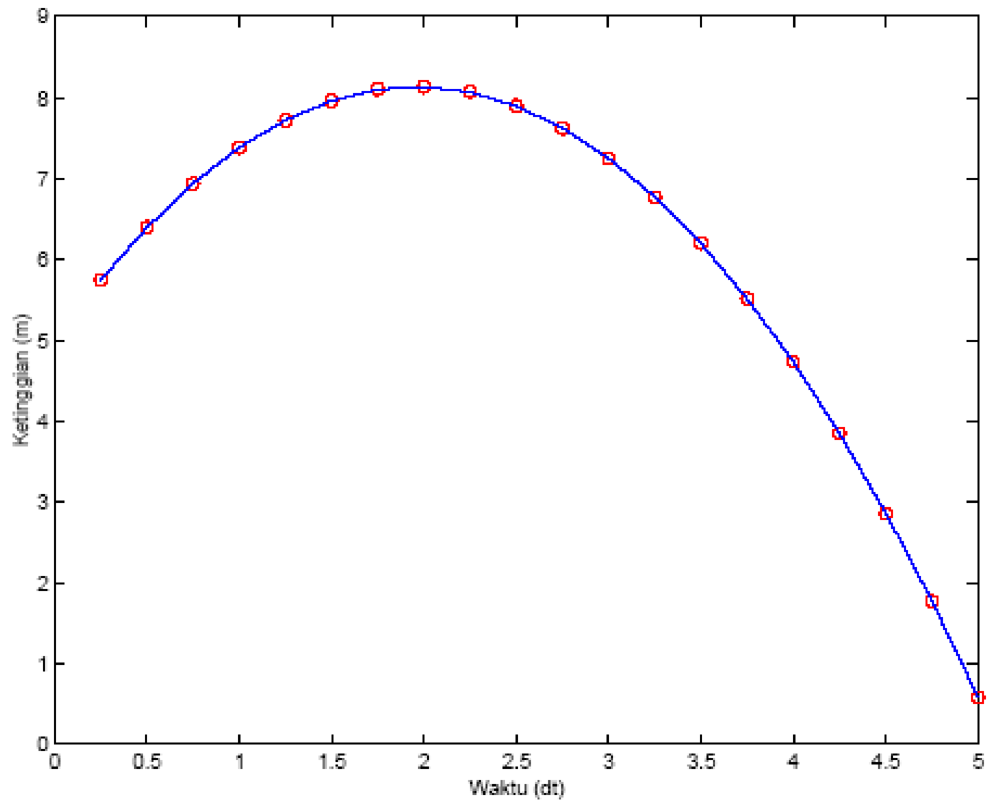
- Dan dengan menggunakan perintah matlab

```
m=inv(G'*G)*G'*d
```

- Diperoleh nilai
  - o $m_1 = v_o = 3,2009$ m/det
  - o $m_2 = -\frac{1}{2} g = -0,8169 \rightarrow \quad g = 1,6338$ m/det^2

- **Kurva Hasil Inversi**

Garis berwarna biru merupakan garis kurva *fitting* hasil inversi parabola. Sedangkan bulatan berwarna merah adalah data pengukuran ketinggian (m) terhadap waktu (dt)



Kesimpulan

- Terlihat bahwa **matrik kernel** sering kali berubah-ubah (bentuk matriksnya), sesuai dengan model matematika.
- Jadi, model matematika secara otomatis akan mempengaruhi bentuk rupa matrik kernelnya