Dinâmica Metapopulacional Denso-Dependente

Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais e Modelagem Matemática

Outubro, 2024

Autor: Samuel H. M. Rodrigues [1]
Orientadora: Dra. Zochil G. Arenas [2]

[1]shrodrigues_mat@outlook.com
[2]zochil@ime.uerj.br

Sumário

Teoria de Metapopulações

- Na Ecologia, faz-se uma clara separação entre os conceitos de população e comunidade. Enquanto população pode ser definida como um conjunto de seres da mesma espécie, comunidade é dita como um conjunto de populações.

- A **Teoria de Metapopulações** diz que populações divididas em locais isolados, também conhecidos como regúfios [1] ou fragmentos de um *habitat* original [3], podem interagir podem interagir através da migração. Além disso, outros fatores que influenciam a dinâmica populacional desses indivíduos são a **reprodução**, **competição** por recursos (como alimento e espaço) e a **predação**.

Teoria de Metapopulações

- A divisão de uma população ao longo desses fragmentos é comumente chamada de **subpopulação**. Portanto, uma metapopulação ou "população de populações"[4, 5] pode ser entendida como um conjunto de subpopulações conectadas por migrações, distribuídas em **fragmentos** de habitats e que podem tanto persistir como serem extintas, localmente, nesses fragmentos [5].

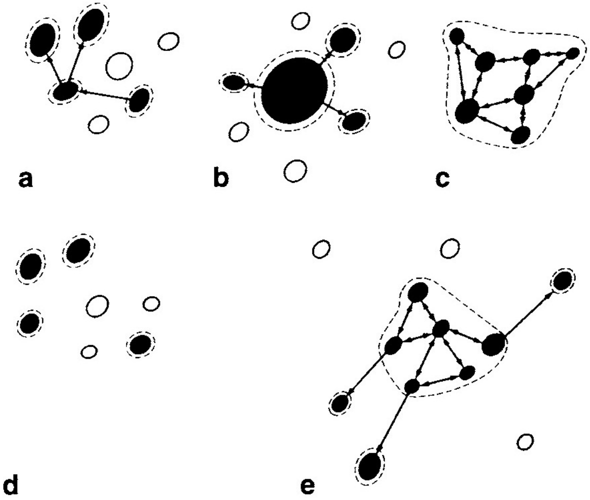

Figure: Figura retirada do artigo *Empirical Evidence for Metapopulation Dynamics* [2]. Representação de modelos metapopulacionais onde: (a) Clássico/Levins, (b) Continente-ilha, (c) população "em mancha", (d) metap. em desequilíbio , (e) modelo misto.

Objetivos

- Modelar uma dinâmica de metapopulações utilizando equações diferenciais parcias, considerando que as subpopulações estão sujeitas a difusão, crescimento, competição e por fim, migração.
- Construir um modelo matemático que possa ser usado como ferramenta de apoio para análises de fenômenos biológicos de crescimento controlado, espalhamento e interação entre seres vivos.
- Verificar a viabilidade do modelo em situações reais (validação).

Metapopulação em desequilíbrio

- A primeira parte do trabalho é a modelagem da dinâmica de populações relictuais, isoladas.
- Não há fluxo migratório, há crescimento populacional e abundância de recursos.

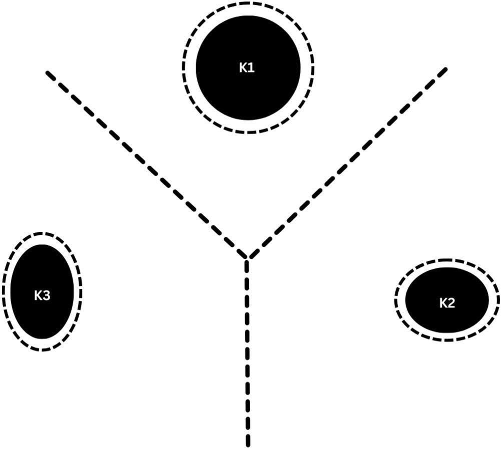

Figure: Imagem gerada pelo autor. K_i ($i = 1, 2, 3$) representam os *patches* separados por barreiras (que são as linhas tracejadas) que de alguma forma impossibilitam o fluxo migratório entre os fragmentos.

- Com essa hipótese, temos a seguinte equação de difusão-reação (unidimensional)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) &= \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D(x,K)\dfrac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)\right) + r(t)\rho^u(x,t), \quad u = 1,\ 2 \\ \rho(\pm L, t) &= \ 0,\ \ \rho(x,0) = \dfrac{N_0}{2L} \end{cases} \tag{1}$$

com $(x,t) \in [-L, L] \times [0, +\infty)$ e $L > 0$.

Metapopulação em desequilíbrio

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x,K)\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)\right) + r(t)\rho^u(x,t), \quad u = 1,\ 2$$

Os termos da equação são:

i. ρ - Densidade populacional;

ii. D - Coeficiente de difusão;

iii. K - Capacidade suporte;

iv. r - Taxa de crescimento populacional;

Difusão

Serão consideradas duas possibilidades para a difusividade: constante e variável. No segundo caso, será usada uma função na forma

$$D(x, K) = D_0 \ e^{-aKx^2}, \tag{2}$$

na qual D_0 e a são constantes positivas. A motivação dessa escolha é baseada nas alterações sofridas pelos ambientes no decorrer do tempo, de modo que a difusão seja máxima no interior e decresça conforme os indivíduos se aproximem dos extremos do fragmento.

Crescimento e Suporte

Resolvemos o modelo considerando que a taxa de crescimento é variável, na forma

$$r(t) = r_1 + r_2 \mathrm{sen}(t), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Foram estudados dois casos:

1. $u = 1$ (crescimento malthusiano) com difusão constante $D = D_0$;
2. $u = 2$ (crescimento facilitado) com difusão variável (Eq. 2), que chamaremos de **forma geral**.

Além disso, neste segundo caso, a capacidade suporte tem a forma

$$K(t) = k_1 + k_2 \mathrm{sen}(t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

tal que K seja não-negativa.

Caso 1

Considerando o modelo (1) com difusão constante, $u = 1$ e $r(t)$ dado pela expressão (3), procurou-se a solução pelo método clássico de separação de variáveis, chegando na solução seguinte:

$$\rho(x,t) = \frac{N_0}{2L} \sum_{n=1} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \; e^{-Dt\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - r_1 - r_2\frac{\cos(t)}{t}\right]}, \tag{5}$$

na qual b_n é o coeficiente da série de Fourier,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \, dy \;=\; \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]. \tag{6}$$

Caso 2 - Forma geral

Neste caso, é necessário buscar a solução de forma numérica. Através do método de linearização de tempo avançado, centrado no espaço (*forward-time, central-space scheme*) a equação (1) é representada por

$$\rho_{n+1}^{m} = \rho_n^m + \frac{\gamma}{4}\left(D_n^{m+1} - D_n^{m-1}\right)\left(\rho_n^{m+1} - \rho_n^{m-1}\right) + \left(\rho_n^{m+1} - 2\rho_n^m + \rho_n^{m-1}\right) + k\ r_n\left(\rho_n^m\right)^u \tag{7}$$

com $h = \Delta x$, $k = \Delta t$ e $\gamma = k/h^2$. Nesta expressão, ρ_{n+1}^m indica a variação da densidade para cada t_{n+1} calculada em função de x_m.

A solução pode ser vista no gráfico abaixo:

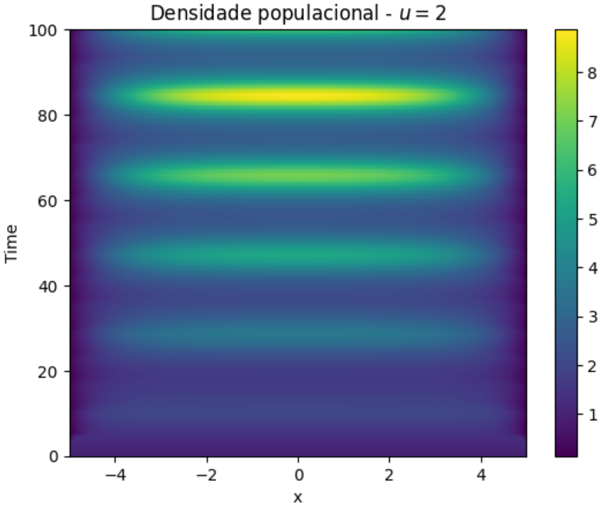

Figure: Simulação da dinâmica populacional utilizando os parâmetros $L = 5, T = 100, a = 0.3, D_0 = 0.5, k_1 = 1, k_2 = 0.7, r_1 = 0.05, r_2 = 0.04, \rho(x, 0) = 0.3$. Imagem gerada em Python pelo autor, utilizando o pacote **py-pde**.

Próximos passos

- Verificar a existência da solução analítica da forma geral.
- Analisar melhor o impacto dos diferentes parâmetros constantes têm no comportamento das soluções.
- Incluir termos competição intraespecífica, migração, e estudar a interação (hipotética) de "n" subpopulações.
- Fazer um estudo de caso real.

Referências I

E. H. Colombo and C. Anteneodo, *Nonlinear population dynamics in a bounded habitat*, Journal of Theoretical Biology, 446 (2018).

S. P. Harrison and A. D. Taylor, *Empirical evidence for metapopulation dynamics*, 1997.

A. A. R. M. E. Assis, Luciana, *Um estudo teórico de dinâmica entre fragmentos de habitat*, 30 (2020), pp. 1–38.

O. Marini-Filho and R. Martins, *Teoria de metapopulações, novos princípios na biologia da conservação*, Ciência Hoje, 27 (2000), pp. 22–29.

R. Pinto-Coelho, *Fundamentos em ecologia*, Séria biomédica, Artmed Ed., 2000.