

Домашнее задание №1 по электродинамике.

Задача №1.

Изучить ГОСТ 18238-72 Линии передачи сверхвысоких частот;
ГОСТ 24375-80 Радиосвязь. Термины и определения.

ГОСТ 18238-72 Линии передачи сверхвысоких частот.

1. **Линия передачи сверхвысоких частот** – устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток сверхвысокочастотной электромагнитной энергии в заданном направлении.

2. **Тракт сверхвысоких частот** – совокупность сверхвысокочастотных устройств, сочлененных определенным образом.

Примечание. К сверхвысокочастотным устройствам относятся линии передачи, преобразователи сверхвысокочастотной энергии, ответвители, фильтры, вентили и т.д.

3. **Волновод** – линия передачи, имеющая одну или несколько проводящих поверхностей, с поперечным сечением в виде замкнутого проводящего контура, охватывающего область распространения электромагнитной энергии.

4. **Электрическая волна** – электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

5. **Магнитная волна** – электромагнитная волна, вектор напряженности магнитного поля которой имеет поперечную и продольную составляющие, а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

ГОСТ 24375-80 Радиосвязь.

1. **Радиосвязь** – электросвязь, осуществляемая посредством радиоволн.

2. **Радиоволны** – электромагнитные волны с частотами до 3 ТГц, распространяющиеся в среде без искусственных направляющих линий.

3. **Поляризация радиоволны** – характеристика радиоволны, определяющая направление вектора напряженности электрического поля.

4. **Радиопередача** – формирование и излучение радиочастотного сигнала.

5. **Антенна** – устройство, предназначенное для излучения или приема радиоволн.

Задача №2.

Положительный заряд q равномерно распределён по объёму шара радиусом a . Определить напряжённость электрического поля, электрическую индукцию и скалярный потенциал внутри и вне шара. Диэлектрическая проницаемость материала ϵ_{a1} , окружающей среды ϵ_{a2} . Построить зависимости $E(r)$, $D(r)$, $\varphi(r)$, указать характерные особенности графиков и причину их появления.

Дано:

$$a[\text{мм}] = M + 2N$$

$$q[\text{Кл}] = 0,07 \cdot N$$

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_{r1} = 2 + N/10$$

$$\epsilon_{r2} = 1 + N/10$$

Найти:

$$E(r) - ?$$

$$D(r) - ?$$

$$\varphi(r) - ?$$

Решение.

1). Вне шара поле обладает такой же симметрией, как и поле точечного заряда. Применим теорему Гаусса для вектора \vec{D} :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q,$$

где S – сфера радиусом $r_1 > a$.

Сфера является эквипотенциальной поверхностью, следовательно, в каждой её точке вектор \vec{D} имеет одно и то же значение и перпендикулярен ей.

$$D \cdot 4\pi r^2 = q, \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Вектор \vec{D} имеет только нормальную составляющую.

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \text{ для } r > a.$$

Материальное уравнение:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}.$$

Напряжённость электрического поля:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}r^2} \text{ для } r > a.$$

2). Для нахождения поля внутри шара проведём сферу радиусом $r_2 < a$ и применим теорему Гаусса для вектора \vec{D} .

$$\oint_{S'} \vec{D} d\vec{S}' = q',$$

где S' – сфера радиусом r_2 , q' – заряд, заключённый внутри сферы.

$$D \cdot 4\pi r_2^2 = q';$$

$$q' = \rho V';$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi r_2^3;$$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3},$$

где ρ – объёмная плотность заряда, V – объём поверхности.

$$D \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3,$$

$$D = \frac{qr_2}{4\pi a^3};$$

$$D(r) = \frac{qr_2}{4\pi a^3} \text{ для } r < a.$$

Аналогично, используя приведённое выше материальное уравнение, получим

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_{a1}a^3} \text{ для } r < a.$$

3). Таким образом,

$$D(r) = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi a^3} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{мм}^2} \right], & r < a \\ \frac{q}{4\pi r^2} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{мм}^2} \right], & r > a \end{cases} \quad (1)$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_{a1}a^3} \left[\frac{\text{В}}{\text{мм}} \right], & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_{a2}r^2} \left[\frac{\text{В}}{\text{мм}} \right], & r > a \end{cases} \quad (2)$$

Найдём скалярный потенциал в точке, находящейся вне шара. По определению, потенциал в точке равен потенциальной энергии заряда в данной точке, отнесённой к величине этого заряда.

$$\varphi(r) = \frac{W_p(r)}{q_0} = \frac{\int_r^\infty F(r)dr}{q_0} = \frac{q_0 \int_r^\infty E(r)dr}{q_0} = \int_r^\infty E(r)dr.$$

Потенциал в точке $r > a$:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E(r)dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_{a2}r^2}dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_{a2}r}, \quad r > a.$$

Найдём потенциал внутри шара. Необходимо учесть, что при переходе из шара в окружающую среду происходит изменение значения вектора напряжённости.

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_r^\infty E(r)dr = \int_r^a E_{\text{внутр}}(r)dr + \int_a^\infty E_{\text{внеш}}(r)dr; \\ \int_r^a \frac{qr}{4\pi\epsilon_{a1}a^3}dr &= \frac{q}{8\pi\epsilon_{a1}a} - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_{a1}a^3}; \end{aligned}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}a};$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_{a1}a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}a}, \quad r < a.$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{8\pi\varepsilon_{a1}a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}a} \text{ [B]}, & r < a, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_{a2}r} \text{ [B]}, & r > a, \end{cases} \quad (3)$$

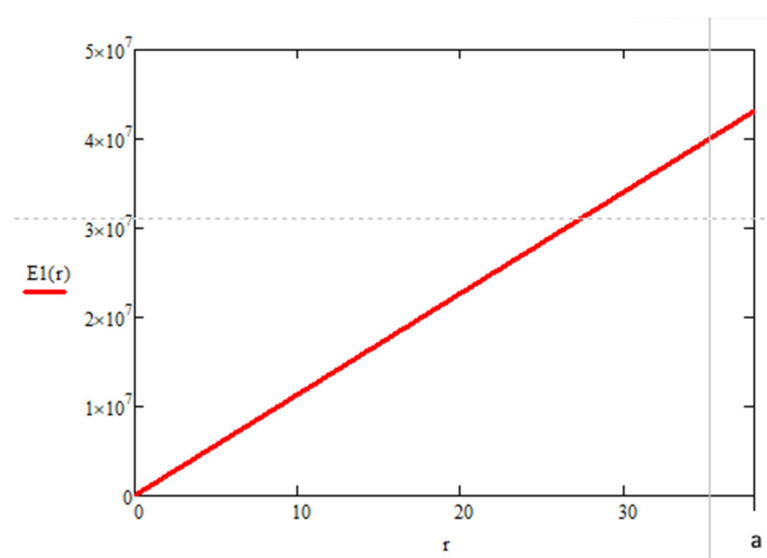
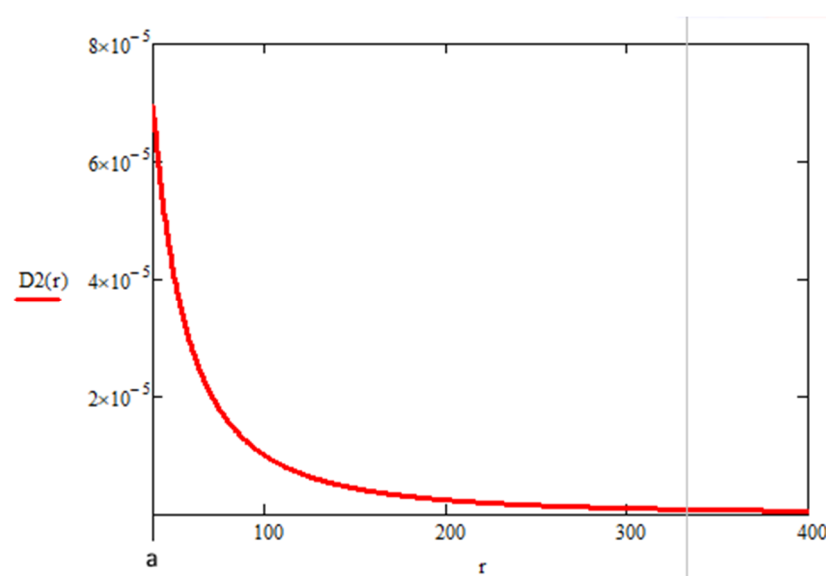
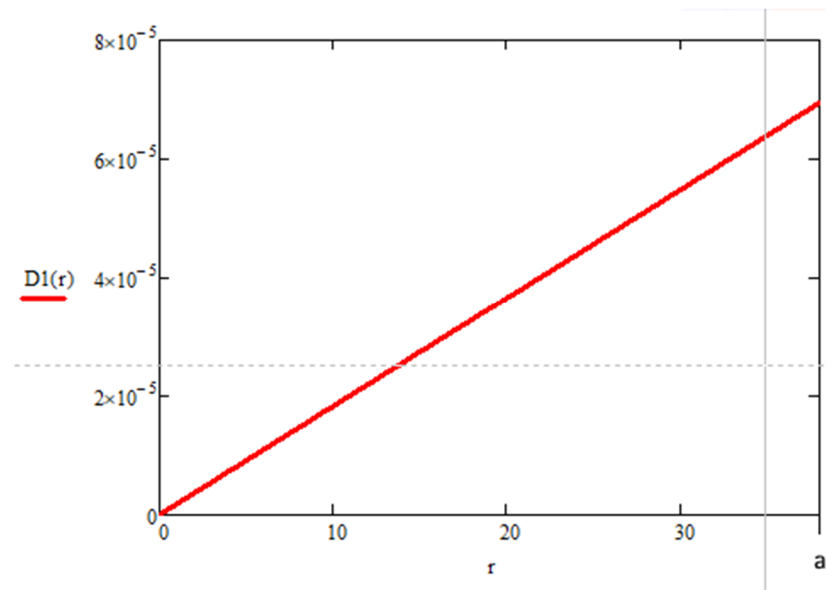
Расчёты (для варианта $M = 2$, $N = 18$).

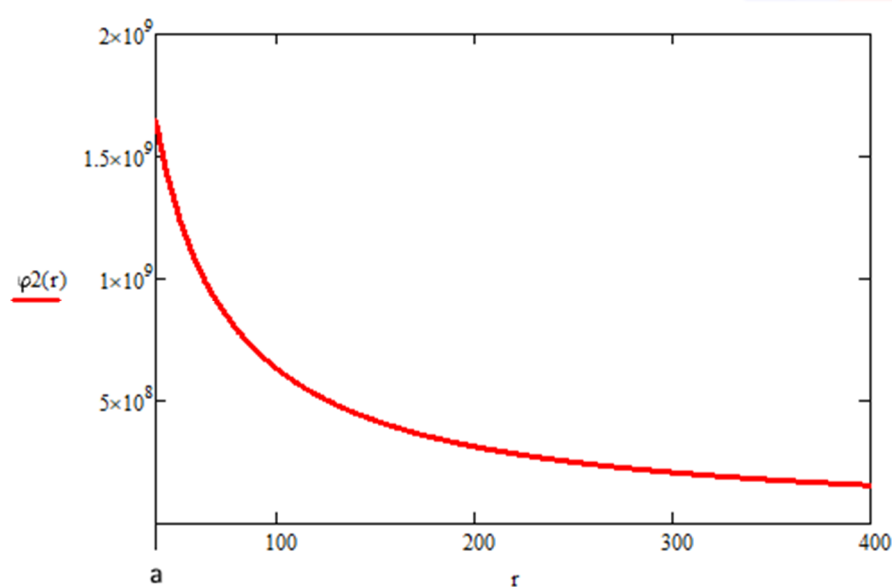
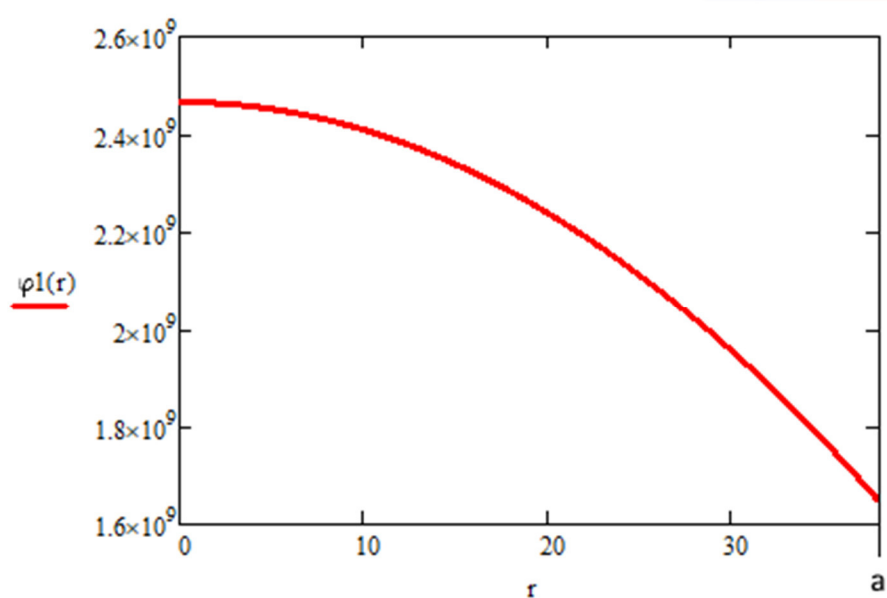
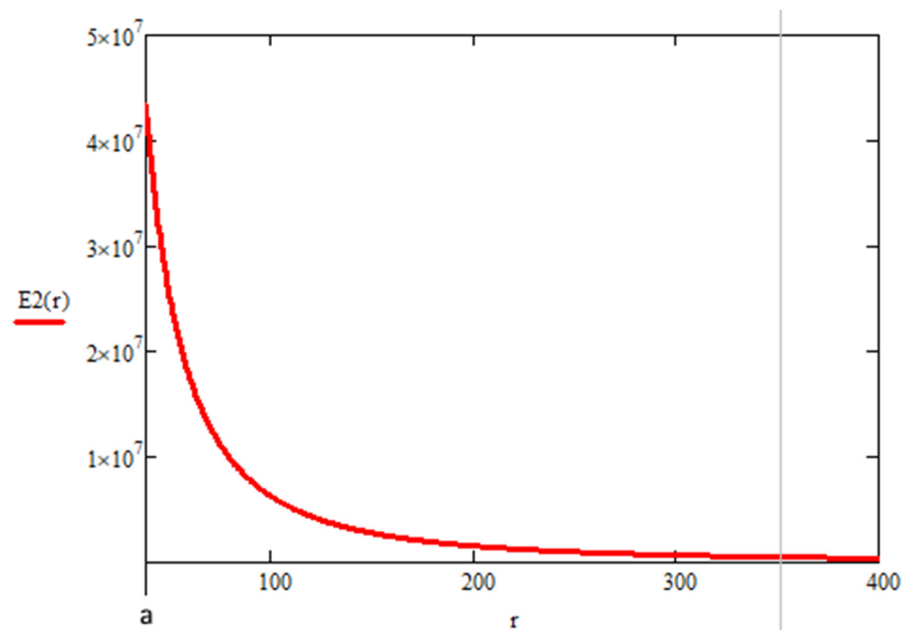
$$D(r) = \begin{cases} 1,827 \cdot 10^{-6} r \left[\frac{\text{Кл}}{\text{мм}^2} \right], & r < 38 \text{ [мм]}, \\ \frac{0,1}{r^2} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{мм}^2} \right], & r > 38 \text{ [мм]}. \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} 1,134 \cdot 10^6 r \left[\frac{\text{В}}{\text{мм}} \right], & r < 38 \text{ [мм]}, \\ \frac{6,26 \cdot 10^{10}}{r^2} \left[\frac{\text{В}}{\text{мм}} \right], & r > 38 \text{ [мм]}. \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} 8,19 \cdot 10^8 \left(1 - \frac{r^2}{1444}\right) + 1,647 \cdot 10^9 \text{ [В]}, & r < 38 \text{ [мм]}, \\ \frac{6,26 \cdot 10^{10}}{r} \text{ [В]}, & r > 38 \text{ [мм]}. \end{cases}$$

Графики.





Задача №3.

По бесконечно длинному цилиндрическому проводнику радиуса a протекает ток I , равномерно распределённый по площади поперечного сечения. Построить зависимость напряжённости и индукции магнитного поля $\vec{H}(\vec{r})$ и $\vec{B}(\vec{r})$, создаваемого этим током в однородной среде с $\mu_r = 1$.

Дано:

$$\mu_r = 1$$

$$I[A] = 0,05 \cdot N + M$$

$$a[\text{мм}] = 1 + 0,5 \cdot N$$

Найти:

$$B(r) - ?$$

$$H(r) - ?$$

Решение.

1). Вне проводника магнитное поле обладает такой же симметрией, как поле бесконечного прямого проводника с током. Применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I,$$

где L – замкнутый контур в виде окружности радиусом $r_1 > a$.

Окружность является замкнутым контуром, в каждой точке которого вектор \vec{H} сохраняет одно и то же значение и направлен по касательной.

$$H \cdot 2\pi r_1 = I, \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r_1}.$$

Вектор \vec{H} имеет лишь тангенциальную составляющую.

Пусть магнитная проницаемость окружающей среды $\mu_{a2} = \mu_0 \mu_{r2}$.

Материальное уравнение:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_{r2} I}{2\pi r}, \quad r > a.$$

2). Для определения магнитного поля внутри проводника проведём замкнутый контур в виде окружности радиусом $r_2 < a$ и применим теорему о циркуляции вектора \vec{H} :

$$\oint_{L'} \vec{H} d\vec{l} = I';$$

$$I' = jS';$$

$$S' = \pi r_2^2;$$

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi a^2},$$

где L' – замкнутый контур радиусом r_2 ,

I' – ток, попадающий внутрь контура,

j – плотность тока,

S' – площадь контура L' .

$$H \cdot 2\pi r_2 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r_2^2,$$

$$H = \frac{I r_2}{2\pi a^2},$$

$$H(r) = \frac{I r}{2\pi a^2}, \quad r < a.$$

Пусть магнитная проницаемость проводника $\mu_{a1} = \mu_0 \mu_{r1}$.

Аналогично, используя материальное уравнение $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, получим

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mu_{r1} I r}{2\pi a^2}, \quad r < a.$$

3). Таким образом,

$$H(r) = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2} \left[\frac{A}{\text{мм}} \right], & r < a \text{ [мм]}, \\ \frac{I}{2\pi r} \left[\frac{A}{\text{мм}} \right], & r > a \text{ [мм]}. \end{cases} \quad (1)$$

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \mu_{r1} Ir}{2\pi a^2} \text{ [Тл]}, & r < a \text{ [мм]}, \\ \frac{\mu_0 \mu_{r2} I}{2\pi r} \text{ [Тл]}, & r > a \text{ [мм]}. \end{cases} \quad (2)$$

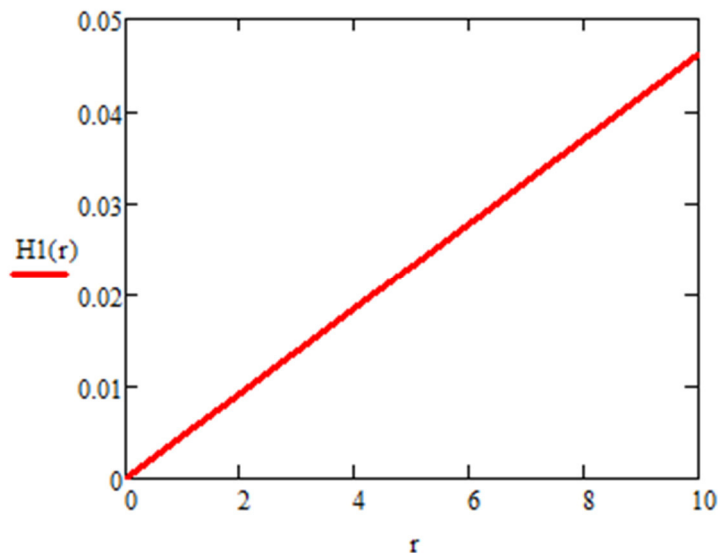
Расчёты.

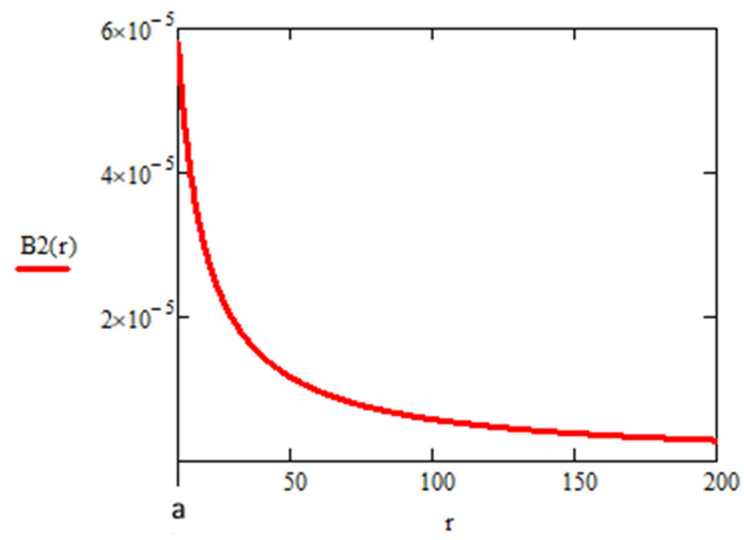
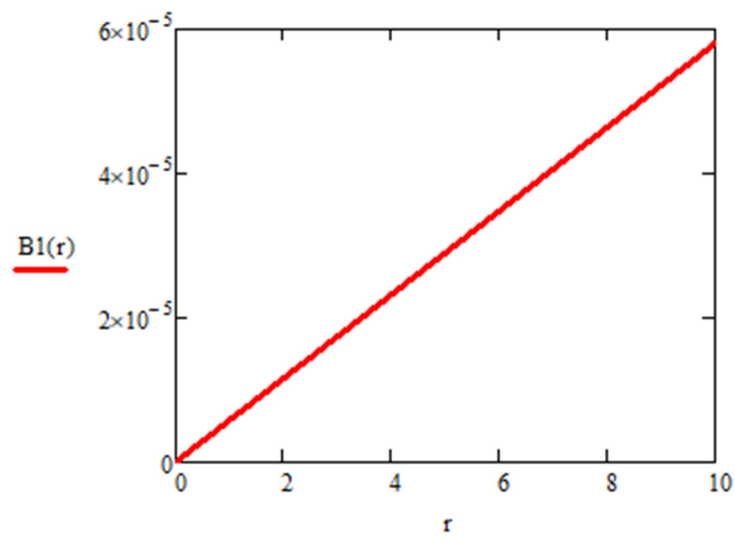
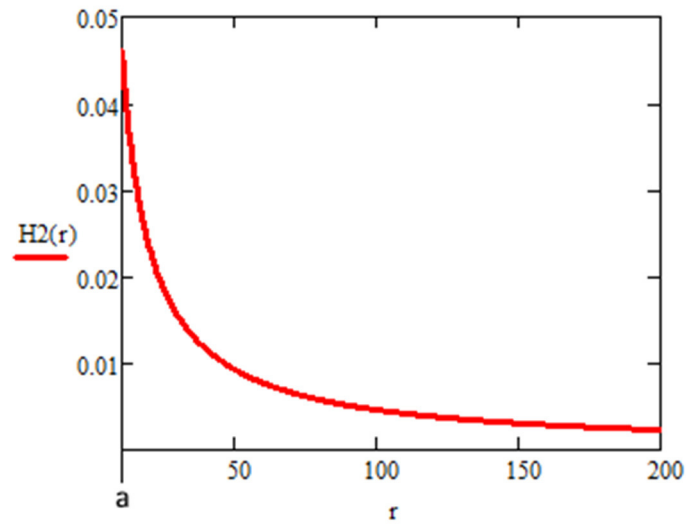
Сделаем допущение, что $\mu_r = \mu_{r1} = \mu_{r2}$.

$$H(r) = \begin{cases} 0,0046r \left[\frac{A}{\text{мм}} \right], & r < 10 \text{ [мм]}, \\ \frac{0,461}{r} \left[\frac{A}{\text{мм}} \right], & r > 10 \text{ [мм]}. \end{cases}$$

$$B(r) = \begin{cases} 5,8 \cdot 10^{-12} \text{ [мкТл]} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ [Тл]}, & r < 10 \text{ [мм]}, \\ \frac{5,8 \cdot 10^{-10}}{r} \text{ [мкТл]} = \frac{5,8 \cdot 10^{-4}}{r} \text{ [Тл]}, & r > 10 \text{ [мм]}. \end{cases}$$

Графики.





Задача №4.

Плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в неограниченном пространстве без потерь. Диэлектрическая проницаемость среды ϵ_a , магнитная проницаемость среды μ_a , амплитуда напряжённости электрического поля E_m , частота, на которой распространяется электромагнитная волна, f . Записать выражение для плоской электромагнитной волны и определить её основные параметры.

Дано:

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_r = 2 + N/5$$

$$\mu_a = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_r = 1 + N/5$$

$$E_m \left[\frac{\text{МВ}}{\text{М}} \right] = 30 + 0,5N$$

$$f [\text{Гц}] = \left(M + \frac{N}{5} \right) \cdot 10^9$$

Найти:

$$\vec{E}(z, t), \vec{H}(z, t) - ?$$

Решение.

1). Уравнения плоской монохроматической линейно поляризованной волны:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_m \cos(\omega t - kz),$$

$$\vec{H} = \vec{y}_0 H_m \cos(\omega t - kz).$$

2). Циклическая частота ω :

$$\omega = 2\pi f.$$

3). Волновое число k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{v_\phi T} = \frac{2\pi f}{v_\phi} = \frac{2\pi f}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}} = 2\pi f \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a},$$

где v_ϕ – фазовая скорость волны.

4). Характеристическое сопротивление среды:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}.$$

5). Амплитуда напряжённости магнитного поля:

$$H_m = \frac{E_m}{Z}.$$

6). Выражения для электромагнитной волны:

$$\begin{cases} \vec{E}(z, t) = \vec{x}_0 E_m \cos(\omega t - kz); \\ \vec{H}(z, t) = \vec{y}_0 H_m \cos(\omega t - kz). \end{cases}$$

Расчёты.

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 5,6 \cdot 10^9 = 3,519 \cdot 10^{10} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right];$$

$$\varepsilon_a = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5,6 = 4,956 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right];$$

$$\mu_a = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 4,6 = 5,781 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right];$$

$$k = 3,519 \cdot 10^{10} \sqrt{4,956 \cdot 10^{-11} \cdot 5,781 \cdot 10^{-6}} = 595,55 \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right];$$

$$Z = \sqrt{\frac{5,781 \cdot 10^{-6}}{4,956 \cdot 10^{-11}}} = 341,52 \text{ [Ом]};$$

$$H_m = \frac{39}{341,52} = 0,114 \left[\frac{\text{мА}}{\text{м}} \right];$$

$$\begin{cases} \vec{E}(z, t) = \vec{x}_0 \cdot 39 \cdot \cos(3,519 \cdot 10^{10} \cdot t - 595,55 \cdot z) \left[\frac{\text{мВ}}{\text{м}} \right]; \\ \vec{H}(z, t) = \vec{y}_0 \cdot 0,114 \cdot \cos(3,519 \cdot 10^{10} \cdot t - 595,55 \cdot z) \left[\frac{\text{мА}}{\text{м}} \right]. \end{cases}$$

Задача №5.

В диэлектрике с параметрами $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$ вдоль оси z распространяется электромагнитная волна, имеющая линейную поляризацию по x и частоту f . Напряжённость электрического поля в точке $z = 0$ в момент времени $t = 0$ равна E_m . Записать выражения для мгновенных значений электрического и магнитного поля и определить расстояние, на котором амплитуда напряжённости электрического поля уменьшится в S раз относительно начального значения.

Дано:

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$\epsilon_r = \frac{3 + N}{2}$$

$$\mu_a = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_r = \frac{M + N}{2}$$

$$E_m \left[\frac{\text{В}}{\text{М}} \right] = 0,05M + 0,3N$$

$$f [\text{МГц}] = \frac{N + 5}{10}$$

$$S = \frac{N + M}{10} \cdot 10^3$$

$$\sigma \left[\frac{\text{СМ}}{\text{М}} \right] = 2N \cdot 10^{-2}$$

Решение.

1). Уравнения электромагнитной волны в комплексном виде:

$$\dot{\vec{E}}(z, t) = \overline{x_0} E_m e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\dot{\vec{H}}(z, t) = \overline{y_0} H_m e^{i(\omega t - kz)}.$$

2). Циклическая частота:

$$\omega = 2\pi f.$$

3). Комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости:

$$\widetilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - \frac{\sigma}{\omega} i;$$

$$\widetilde{\mu}_a = \mu_a.$$

4). Комплексное волновое число:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\widetilde{\varepsilon}_a \widetilde{\mu}_a}.$$

5). Комплексное характеристическое сопротивление среды:

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{\widetilde{\mu}_a}{\widetilde{\varepsilon}_a}}.$$

6). Комплексная амплитуда вектора напряжённости магнитного поля:

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}}.$$

7). Выражения для мгновенных значений:

$$\overline{E}(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{E}(z, t) \right\},$$

$$\overline{H}(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{H}(z, t) \right\}.$$

Расчёты.

$$\omega = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,3 \cdot 10^6 = 1,445 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right];$$

$$\widetilde{\varepsilon}_a = 9,293 \cdot 10^{-11} - 0,25 \cdot 10^{-7} i \left[\frac{\Phi}{\text{М}} \right];$$

$$\widetilde{\mu}_a = 1,257 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{М}} \right];$$

$$\begin{aligned} \dot{k} &= 1,445 \cdot 10^7 \sqrt{(9,293 \cdot 10^{-11} - 0,25 \cdot 10^{-7} i) \cdot 1,257 \cdot 10^{-5}} = \\ &= 5,728 - 5,707 i \left[\frac{\text{рад}}{\text{М}} \right]; \end{aligned}$$

$$\dot{Z} = 15,911 + 15,852 i = 22,46 e^{i44,9^\circ} [\text{ОМ}] = 22,46 e^{i \cdot 0,783(\text{рад})} [\text{ОМ}];$$

$$\dot{H}_m = \frac{5,5}{15,911 + 15,852 i} = 0,1735 - 0,1728 i = 0,244 e^{-i44,9^\circ} \left[\frac{\text{А}}{\text{М}} \right];$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \overline{x_0} \cdot 5,5 \cdot e^{i(1,445 \cdot 10^7 t - 5,728 z + 5,707 i z)} = \\ &= \overline{x_0} \cdot 5,5 \cdot e^{-5,707 z} e^{i 1,445 \cdot 10^7 t} e^{-i 5,728 \cdot z} \left[\frac{\text{В}}{\text{М}} \right];\end{aligned}$$

$$\alpha = 5,707 \left[\frac{\text{рад}}{\text{М}} \right];$$

$$\beta = 5,728 \left[\frac{\text{рад}}{\text{М}} \right];$$

$$\vec{H}(z, t) = \overline{y_0} \cdot 0,244 \cdot e^{-i 44,9^\circ} e^{-5,707 z} e^{i 1,445 \cdot 10^7 t} e^{-i 5,728 \cdot z} \left[\frac{\text{А}}{\text{М}} \right];$$

$$\vec{E}(z, t) = \overline{x_0} \cdot 5,5 \cdot e^{-5,707 z} \cos(1,445 \cdot 10^7 t - i 5,728 \cdot z) \left[\frac{\text{В}}{\text{М}} \right];$$

$$\vec{H}(z, t) = \overline{y_0} \cdot 0,244 \cdot e^{-5,707 z} \cos(1,445 \cdot 10^7 t - i 5,728 \cdot z - 0,783) \left[\frac{\text{А}}{\text{М}} \right].$$

Комплексная амплитуда напряжённости электрического поля:

$$\vec{E} = 5,5 \cdot e^{-5,707 z}.$$

Напряжённость электрического поля в начальный момент времени $t = 0$ в точке $z = 0$:

$$E(0,0) = 5,5 \left[\frac{\text{В}}{\text{М}} \right].$$

Значение в точке, где напряжённость уменьшается в S раз относительно начального значения:

$$E_x = \frac{E_m}{S} = \frac{5,5}{2000} = 275 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{В}}{\text{М}} \right].$$

Координата z , в которой напряжённость уменьшится в S раз:

$$E_m e^{-5,707 z} = \frac{E_m}{S} \Rightarrow z = \frac{\ln(S)}{5,707} = 1,33 \text{ [М]}.$$