

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

DEVOIR 1

PAR

JÉRÉMY BOUCHARD (BOUJ08019605)

ALEXANDRE LAROCHE (LARA04119705)

JEAN-PHILIPPE SAVARD (SAVJ04079609)

ALEXIS VALOTAIRE (VALA)

DEVOIR PRÉSENTÉ À

M. FRANÇOIS LEMIEUX

DANS LE CADRE DU COURS D'ALGORITHMIQUE (8INF433)

Question 1

(a)

$$4^{\log_2 n} \in \omega 4^{\log_4 n}$$

(b)

$$(n+1)^2 \in \Theta(n^2)$$

(c)

$$2^{n+1} \in \Theta(2^n)$$

(d)

$$n! \in o(n+1)!$$

(e)

$$2^n \in \Theta(4^{n/2})$$

(f)

$$n \log_2 n \in o(n^2 - n)$$

(g)

$$(\log_2 n)^2 \in \omega(\log_2 n^2)$$

(h)

$$\frac{1}{2}^n \in o(1)$$

(i)

$$2^{100} \in \Theta(2)$$

(j)

$$\log_2 n^2 \in \Theta \log_4 n$$

Question 2

a)

Il est possible d'exprimer le pseudo-code de l'algorithme décrit dans l'énoncé de la question 2. Il est également possible de constater qu'il s'agit de l'algorithme du tri par selection. Celui-ci se décrit de cette façon :

Algorithme 1 : Pseudo-code du numéro 2

Données : $T[1 \dots n]$

Résultat : $T[1 \dots n]$ (Trié)

```
1 pour  $j \leftarrow 1$  à  $n - 1$  faire
2    $petit \leftarrow j$ 
3   pour  $i \leftarrow j + 1$  à  $n$  faire
4     si  $T[i] < T[petit]$  alors
5        $petit \leftarrow i$ 
6     fin
7   fin
8    $T[j] \leftrightarrow T[petit]$ 
9 fin
```

b)

Il est possible de calculer le temps d'exécution de cet algorithme facilement. En effet, pour chaque élément du tableau il est nécessaire de parcourir le reste du tableau moins les éléments déjà triés. Donc, pour la première itération, il est nécessaire de réaliser $(n - 1)$ comparaisons. Pour la deuxième itération, cela sera $(n - 2)$ itérations et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste que une seule valeur à trier. Il est donc possible de formaliser le temps d'exécution de cette manière :

$$(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i$$

Il ne reste qu'à trouver l'ordre de $\sum_{i=1}^{n-1} i$.

Temps d'exécution de l'algorithme de tri.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^{n-1} i \\
 &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 \\
 2S &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 \\
 &\quad + 1 \quad \quad + 2 \quad \quad + 3 + \dots + (n-1) \\
 &= \underbrace{(n + n + n + \dots + n)}_{(n-1) \text{ fois}} \\
 &= (n-1)(n) \\
 S &= \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{O}(n^2)$

□

Question 3

Supposons, par abus de notation, que $f \geq g$ (puisque forcément l'une doit être plus grande ou égale que l'autre).

a)

Prouvons que $\max(f, g) \in \mathcal{O}(f + g)$:

On a

$$\max(f, g) = f$$

Or,

$$f \leq f + g$$

On a donc

$$\max(f, g) \in \mathcal{O}(f + g)$$

b)

Prouvons que $f + g \in \mathcal{O}(\max(f, g))$:

On a

$$f + g \in \mathcal{O}(f)$$

Or,

$$\max(f, g) = f$$

Alors,

$$f + g \in \mathcal{O}(\max(f, g))$$

Donc,

$$\mathcal{O}(\max(f, g)) = \mathcal{O}(f + g)$$

CQFD

Question 4

Temps d'exécution

Pour déterminer le temps d'exécution de l'algorithme tel qu'écrit dans l'énoncé, il faut avant tout analyser ligne par ligne le pseudo-code. Voici donc l'analyse ligne par ligne.

Ligne 1 : $d = 0$

Une affectation en informatique se fait en un temps constant $\mathcal{O}(1)$.

Ligne 2 : tant que $(X > Y)$ faire $\{\dots\}$

L'analyse de cette ligne est beaucoup plus difficile à faire, puisque nous ne savons pas comment la condition sortie est modifiée. Nous le saurons au moment de l'analyse du contenu de la boucle.

Avec l'analyse du contenu de la boucle, on découvre qu'elle est exécutée n fois, basée sur la différence de X et Y . Ainsi, on peut conclure qu'elle est exécutée en un temps linéaire $\mathcal{O}(n)$.

Ligne 3 : *Soustraction*(X, Y)

Il est mentionné dans l'énoncé que cette fonction est exécutée en un temps linéaire $\mathcal{O}(n)$.

Ligne 4 : $d = d + 1$

Une affectation et une addition en informatique se font en un temps constant $\mathcal{O}(1)$.

Ligne 5 : return d

Un retour en informatique se fait en un temps constant $\mathcal{O}(1)$.

Ainsi, il est possible de savoir que :

1. Le temps d'exécution du contenu de la boucle est de $n + 1$;
2. Le contenu de la boucle est exécuté ' n ' fois, donc $n(n + 1)$;
3. Le reste de l'algorithme est en temps constant, donc $n(n + 1) + 1$.

En distribuant le tout, nous avons $n^2 + n + 1$. Donc le temps d'exécution est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$.

Efficacité de l'algorithme

Est-ce que l'algorithme est efficace? La réponse est non. En effet, avec l'analyse du temps d'exécution fait précédemment, nous avons déterminé que dans le pire des cas, le temps d'exécution est de l'ordre de $\mathcal{O}(n^2)$.

Bien qu'un algorithme de cet ordre est généralement acceptable, il est mentionné dans l'énoncé que les variables X et Y sont de grands entiers. On peut conclure que le pire des cas se produira relativement souvent à l'exécution de l'algorithme, ce qui n'est pas vraiment acceptable.

Pour améliorer l'algorithme, il faudrait que la fonction *Soustraction*(X, Y) soit exécutable dans un temps constant au lieu d'un temps linéaire, ce qui réduirait le temps d'exécution dans l'ordre de $\mathcal{O}(n)$, ce qui serait beaucoup plus acceptable avec de grandes valeurs d'entiers.

Question 5