1. Для уравнения

$$y''=16.81y$$

Найдите решение $y(t)$ и $y'(t)$ в аналитическом виде для начального условия $y(0)=1.0$, $y'(0)=-4.1$ на некотором промежутке (следует свести уравнение к системе). Используйте для построения численного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию на заданном промежутке, явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка, явный метод Эйлера. Проанализируйте особенности поведения численного решения, поясните, чем они вызваны (для этого следует построить точное решение, удовлетворяющее начальным условиям, а также общее решение). Проверьте, возникают ли аналогичные проблемы построения численного решения следующего уравнения

$$y''+8.2y'+16.81y=0$$

для начального условия $y(0)=1.0$, $y'(0)=-4.1$. Поясните.

2. Рассмотрим несколько математических моделей движения маятника:

1) Смоделируем движение математического маятника, который представляет собой легкий жесткий стержень, подвешенный вертикально на шарнире без трения и имеющий на другом конце некоторый груз. Описанный процесс может быть описан следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{\theta}+\sin\theta=0,$$

где θ угол отклонения маятника от вертикали. Предположим, что в начальный момент времени маятник висит вертикально, то есть начальный угол отклонения от вертикали равен нулю $\theta(0)=0$. Если начальная скорость также равна нулю, то маятник так и останется неподвижным. Если начальная скорость является ненулевой, но достаточно малой то маятник начнет совершать колебательное движение. Если начальная скорость оказывается достаточно большой, то маятник перевернется через верхнюю точку и продолжит вращение, то есть решение будет бесконечно возрастать. Также существует начальная скорость, при которой маятник дойдет до верхней точки и там останется. Это движение соответствует начальной скорости $\dot{\theta}(0)=2$.

2) Смоделируем движение математического маятника, который представляет собой легкий жесткий стержень, подвешенный вертикально на шарнире, имеющий на другом конце некоторый груз и вращающийся с трением. Описанный процесс может быть описан следующим дифференциальным уравнением

$$\ddot{\theta}+\nu\dot{\theta}+\sin\theta=0,$$

где θ угол отклонения маятника от вертикали, для различных $\nu>0$ (определяется коэффициентом трения в шарнире). Предположим, что в начальный момент времени маятник висит вертикально, то есть начальный угол отклонения от вертикали равен нулю $\theta(0)=0$. Если начальная скорость также равна нулю, то маятник так и останется неподвижным. Если начальная скорость является ненулевой, маятник будет совершать колебательное затухающее движение.

3) Построить линейные модели рассматриваемого процесса, считая $\sin\theta \approx \theta$ на основе представленных выше нелинейных моделей.

Исследовать решения рассмотренных уравнений (построенных численно), проиллюстрировать понятие асимптотической устойчивости по Ляпунову, а также разницу, определяемую переходом от модели одного вида к модели другого вида.

3. Оцените шаг интегрирования, который следует использовать при численном решении уравнения

- $\dot{x} = -10000x$,

с помощью явного и неявного методов Эйлера, проиллюстрировав понятие устойчивости метода и преимущества одного метода над другим.

4. На примере численного решения уравнения

$$\ddot{x} + 100000.001\dot{x} + 100x = 0,$$

проиллюстрировать понятие жесткости уравнения, решения, задачи.