Decision Science

Lezione 1

Ottimizzazione

Un problema di ottimizzazione consiste nel determinare un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, in modo tale che sia minima una funzione $f(x)$, detta **Funzione Obiettivo** e siano soddisfatti alcuni vincoli $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, in cui X è detto **Spazio Ammissibile**. Un problema di ottimizzazione si può scrivere come:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in X \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \ , \quad i = 1...l \end{cases}$$

Si ricerca, quindi, fra tutte le soluzione ammissibili, quella che forinsce il valore ottimo della funzione obiettivo.

Il particolare, studieremo questi problemi di ottimizzazione in cui le componenti di x (o *variabili decisionali*) sono legate in modo lineare ai dati. Questi problemi sono detti di Programmazione Lineare (PL) o Ottimizzazione Lineare e sono tipicamente presentati in due forme: quella **canonica** oppure quella **standard**.

Un problema di PL in forma canonica è del tipo:

$$\begin{cases} \min l' x = \min \sum_{j=1}^{n} l_j x_j & \text{funzione obiettivo con vettore di costi l} \\ Ax \geq b & \text{vincoli tecnologici} \\ x \geq 0 & \text{vincoli di non negatività} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_j & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m1} & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad l' = \begin{bmatrix} l_1 & ... & l_n \end{bmatrix}$$

Detto a_i' l'i-esimo vettore riga di A, un problema di PL in forma canonica si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ , \ i = 1...m \Rightarrow a_i' x \geq b_1 \Rightarrow a_i' x + b_i \leq 0 \\ x_j \geq 0 \ , \quad j = 1...n \Rightarrow x_j \leq 0 \end{cases}$$

Se tutti i vincoli tecnologici sono ugualianze , un problema di PL ha una forma **standard**.

Note generali sui problemi di Ottimizzazione

1. Si studiano solo problemi di minimizzazione, perchè $\max\{f(x) : x \in X\} = -\min\{-f(x) : x \in X\}$
2. Un problema di ottimizzazione in cui NON esiste alcuna soluzione che soddisfa tutti i vincoli è detto INAMMISSIBILE. In tal caso, per convenzione, si ha che $\min\{f(x) : x \in X\} = +\infty$
3. Un problema di ottimizzazione in cui $f(x)$ NON è limitato inferiormente si dice ILLIMITATO : $\min\{f(x) : x \in X\} = -\infty$
4. Risolvere un problema di ottimizzazione significa determinare un vettore (o punto) x^*, se esiste, tale che $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$. Questo punto x^* si chiama **ottimo globale** del problema.
5. Una soluzione $\bar{x}$ di un problema di ottimizzazione è un punto di OTTIMO LOCALE se esiste un $\varepsilon > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in X$ tale che $|x - \bar{x}| \leq \varepsilon$.
   In alternativa, si può scrivere che $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in I_\varepsilon(\bar{x})$, dove $I_{\varepsilon(\bar{x})}$ è un intorno di ampiezza ε di $\bar{x}$.

Ottimizzazione di problemi connessi

In alcuni problemi di ottimizzazione (tra cui quelli di PL) si minimizza una funzione convessa su un dominio connesso. Si impiegano in questo caso le seguenti definizioni:

- **Definizione 1**.

Dati x^1 e $x^2 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0,1]$ (cioè $\lambda \in \mathbb{R} : 0 \leq \lambda \leq 1$), si definisce **combinazione connessa** ogni $z \in \mathbb{R}^n$ ottenuto dalla relazione $z = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$.
La combinazione connessa si dice *stretta* se $\lambda \in (0,1)$, equivalmente, $\lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < 1$.

Esempio:
$n = 2,\ x^1 = \binom{1}{1},\ x^2 = \binom{3}{2},\ \lambda = 0.5$
$z = 0.5\binom{1}{1} + (1-0.5)\binom{3}{2} = \binom{0.5}{0.5} + \binom{1.5}{1} = \binom{2}{15}$
se $\lambda = 1,\ z = x^1 = \binom{1}{1}$;
se $\lambda = 0,\ z = x^2 = \binom{3}{2}$.

Si dice **combinazione connessa di K vettori** $x^1, ..., x^k$ di $\mathbb{R}^n$ l'insieme di punti ottenuti dalla relazione $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i ... \lambda_k \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Esempio:
$n = 2,\ k = 3,\ x^1 = \binom{1}{1},\ x^2 = \binom{3}{2},\ x^3 = \binom{2}{3}$
$z = \lambda_1\binom{1}{1} + \lambda_2\binom{3}{2} + \lambda_3\binom{2}{3}$ con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$
se $\lambda_1 = 1, z = x^1 = \binom{1}{1}$;
se $\lambda_1 = 0, z$ è la congiungente di x^2 e x^3

Analizzando i casi $\lambda_2 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_3 = 0$, si osserva che la combinazione connessa individua tutti i punti interni al triangolo di vertici x^1, x^2, x^3. È questo un esempio di insieme convesso.

- **Definizione 2.**

Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se, $\forall x, y \in X, Z = [\lambda x + (1 - \lambda)y] \in X, \lambda \in [0, 1]$.

- **Definizione 3.**

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita su un insieme convesso $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convessa se, $\forall x, y \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$, definito $Z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ è l'insieme dei punti segmento che congiunge $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Quindi, una funzieno è convessa tra x e y se sta *"sotto"* o *"coincide"* con il segmento che congiunge $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

- **Proposizione.**

L'intersezione tra 2 insiemi convessi è un insieme convesso.

Dimostrazione: Siano dati due punti x e y che appartengono entrambi a due insieme convessi A e $B : x \in A, y \in A, x \in B, y \in B$. Preso un qualunque punto $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $z \in A$ per la convessità di A, $z \in B$ per la convessità di B, quindi $z \in A \cap B$.

- **Teorema 1.**

Se $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1...l\}$ e $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1...l$ sono funzioni convesse, X è un insieme convesso. Quindi, se X è spazio ammissibile di un problema di ottimizzazione e i suoi vincoli sono funzione convesse, in base a questo teoriema, X è convesso.

Visita la precedente proposizione, il teorema si dimostra mostrando che $X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0\}$ è un insieme convesso se $g_i(x)$ è una funzione convessa. Presi $x \;\text{ e }\; y \in X_i$, per l'ipotesi di convessità di $g_i(x)$, si ha $g_i(z) = g_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g_i(x) + (1 - \lambda)g_i(y) \leq 0$ perchè $\lambda \leq 0, (1 - \lambda) \geq 0, g_{i(x)} \leq 0 \;\text{ e }\; g_{i(y)} \leq 0$. Quindi $z \in X_i$, che è convesso.

- **Teorema 2.**

Dato il problema $\min\{f(x) : x \in X\}$ un cui X è un insieme convesso e $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa, ogni punto di ottimo locale in X è un punto di ottimo globale.

Dimostrazione: Ipotizzando che $\tilde{x} \in X$ sia un punto di ottimo locale e che $y \in X$.
Sia $z = \lambda \tilde{x} + (1 - \lambda)y$. $f(\tilde{x}) \leq f(z) = f(\lambda \tilde{x} + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(\tilde{x}) + (1 - \lambda)f(y)$ $f(\tilde{x}) - \lambda f(\tilde{x}) = (1 - \lambda)f(\tilde{x}) \leq (1 - \lambda)f(y) \Rightarrow f(\tilde{x}) \leq f(y)$.

Per la generalità di $\tilde{x}$ e y, $\tilde{x}$ è un punto di ottimo globale. Quindi, in PL gli ottimi locali sono ottimi globali per la proprietà di convessità.

Esempio

Il seguente esempio mostra come trasformando un generico problema di PL in un problema di PL in forma canonica:

$$
\begin{aligned}
&\min\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
&x_1 + x_2 + x_4 \leq 2 \\
&3x_2 - x_3 = 5 \\
&x_3 + x_4 \geq 3 \\
&x_1 \geq 0 \\
&x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Questo problema NON è in forma canonica, perchè:
- alcuni vincoli tecnologici non sono del tipo $\geq$
- x_2, x_3 e x_4 non sono soggette ai vincoli di non negatività

Un problema equivalente (di uguale soluzione) si ottiene:
- moltiplicando il 1° vincolo per −1 e cambiando il "$\leq$" in "$\geq$";
- suddividendo il vincolo "$=$" in un vincolo di "$\leq$" e uno di "$\geq$":

$3x_2 - 3x_3 = 5$ $\qquad$ $3x_2 - x_3 \leq 5 \Rightarrow -3x_2 + 3x_3 \geq -5$

$3x_2 - x_3 \geq 5$

Quindi il problema diventa:

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ &-x_1 - x_2 - x_4 \geq -2 \\ &-3x_2 + x_3 \geq -5 \\ &3x_2 + x_3 \geq 5 \\ &x_3 + x_4 \geq 3 \\ &x_1 \geq 0 \\ &-x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Per avere i vinculo di non negatività su tutte le variabili decisionali e ottenere una soluzione equivalente facciamo queste sostituzioni:

$x_3 = -x_5$

$x_2 = x_6 - x_7$ con $x_6 \geq 0$ e $x_7 \geq 0$

$x_4 = x_8 - x_9$ con $x_8 \geq 0$ e $x_9 \geq 0$

Infine, il problema diventa:

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 - x_6 + x_7 - 4x_5 \\ &-x_1 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 \geq -2 \\ &-3x_6 + 3x_7 - x_5 \geq -5 \\ &3x_6 - 3x_7 + x_5 \geq 5 \\ &-x_5 + x_8 - x_9 \geq 3 \\ &x_1, x_6, x_7, x_5, x_8, x_9 \geq 0 \end{aligned}$$

Questo problema di PL in forma canonica risolve equivalmente il probleema iniziale.