流体的体胀速度、散度及高斯公式的物理意义*

曲小钢(西安建筑科技大学理学院　西安　710055)

在高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

中, $\sum$ 是空间区域 Ω 的边界面, P, Q, R 是在 Ω 上有定义且具有连续偏导数的函数, 公式右端的曲面积分沿闭曲面 $\sum$ 之外侧进行。在该公式中, 若视

$$\mathbf{v}=\left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}=\{P,Q,R\}$$

为一稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场, 这里,"稳定流动"是指流体的流速与时间 t 无关,"不可压缩"是指流体的密度为常数。在一般教材中, 都已对公式右端的曲面积分作出了物理解释, 即"单位时间内经闭曲面 $\sum$ 流出的流体的质量", 或流量, 但却未能对整个公式的物理意义作出完整的说明。本文将直接由流体力学推导出高斯公式, 并对其物理意义作出解释。这需先了解流体力学中的一个基本概念——体胀速度。

在流场中取一体积为 V 的微元(称作流点)。当该流点流动时, 其单位体积的体积变化率(相对于时间 t)称作体胀速度(the relative time rate of expansion), 记作 ϵ, 即

$$\epsilon=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

体胀速度是流点体积膨胀或收缩的速度, $\epsilon>0$ 表示该点有流体产生, 犹如泉水的源头, 故在流体力学中称作源(source); 反之, $\epsilon<0$ 时称作汇(或沟, sink)。按照这一意义, 如果在流体内取有限大小的流体块 Ω, 并将 ϵ 沿 Ω 积分, 那么,

$$\iiint_{\Omega}\epsilon\,\mathrm{d}v \tag{3}$$

就是 Ω 内的源在单位时间内产生的流体的质量。

由于我们假定流体是不可压缩的, 且流动是稳定的, 因此, 按照质量守恒定律, 这一流体质量必然等于单位时间内经 Ω 之表面 $\sum$ 流出的流量, 即有

$$\iiint_{\Omega}\epsilon\,\mathrm{d}v=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{4}$$

下面给出体胀速度 ϵ 的计算公式并说明等式(4)其实就是高斯公式。

在(2)式中将流点取为边长为 Δx, Δy 和 Δz 的长方体(图 1), 则 $V=\Delta x\Delta y\Delta z$,

$$\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\frac{\mathrm{d}(\Delta x\Delta y\Delta z)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\Delta x}\frac{\mathrm{d}(\Delta x)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\Delta y}\frac{\mathrm{d}(\Delta y)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\Delta z}\frac{\mathrm{d}(\Delta z)}{\mathrm{d}t}$$

* 收稿日期: 2002-12-01

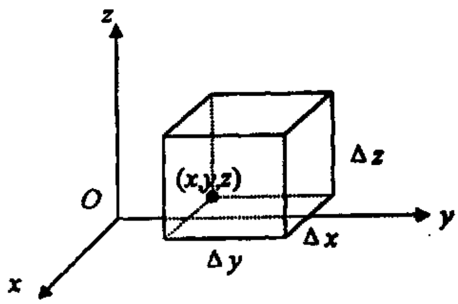

图 1 流体微元

在上式中, 导数运算$\frac{d}{dt}$是关于时间变量的, 而差分 Δ 运算则是关于空间变量的, 二者的运算顺序可以交换。交换导数运算与差分运算的运算顺序并注意到

$$\frac{dx}{dt}=P,\frac{dy}{dt}=Q,\frac{dz}{dt}=R,$$

就有

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\Delta P}{\Delta x}+\frac{\Delta Q}{\Delta y}+\frac{\Delta R}{\Delta z}$$

令 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0,\Delta z\to 0$ (即 $V\to 0$), 就得到体胀速度的计算公式

$$\epsilon=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{\Delta P}{\Delta x}+\frac{\Delta Q}{\Delta y}+\frac{\Delta R}{\Delta z}\right),$$

即

$$\epsilon=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\tag{5}$$

将所得计算公式(5)代入(4)式, 即是高斯公式(1)。所以, 高斯公式的物理意义为: 流体块内的源在单位时间内产生的流体质量等于单位时间内经流体块的表面流出的流体质量。

体胀速度 ϵ 的计算公式(5)也可按下述方法推导。

设一质点当 $t=t_0$ 时位于流体内(x_0,y_0,z_0)处, 随流体流动, 该质点的运动轨迹可以用方程组

$$x=x(x_0,y_0,z_0,t),y=y(x_0,y_0,z_0,t),z=z(x_0,y_0,z_0,t)\tag{6}$$

描述。(6)式称为点(x,y,z)的 Lagrange 坐标。

如果一流体块在 $t=t_0$ 时占据的区域为 Ω_0, t 时刻占据的区域为 Ω, 体积为 V, 那么

$$V=\iiint_{\Omega}dx\,dy\,dz\tag{7}$$

因为区域 Ω 随时间 t 变化, 而 Ω_0 则不变, 所以, 为计算$\frac{dV}{dt}$, 需将上式右端的积分区域变换为 Ω_0。由于 Ω 中每一点(x,y,z)都对应于 Ω_0 中一点(x_0,y_0,z_0), 所以, 在(7)式的积分中作变量代换(6)。由重积分的换元公式, 得

$$V=\iiint_{\Omega}dx\,dy\,dz=\iiint_{\Omega_0}J(x_0,y_0,z_0,t)\,dx_0dy_0dz_0,\tag{8}$$

其中 J 是变换(6)的 Jacobi 行列式

$$J(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0}&\frac{\partial x}{\partial y_0}&\frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial y}{\partial x_0}&\frac{\partial y}{\partial y_0}&\frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial x_0}&\frac{\partial z}{\partial y_0}&\frac{\partial z}{\partial z_0}\end{vmatrix}$$

(8)式两端对 t 求导数, 得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega_0}J(x_0,y_0,z_0,t)\,dx_0dy_0dz_0=\iiint_{\Omega_0}\frac{\partial J(x_0,y_0,z_0,t)}{\partial t}dx_0dy_0dz_0\tag{9}$$

上式中的偏导数可按行列式的微分运算法则求得

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial t} & \frac{\partial^2 x}{\partial y_0\partial t} & \frac{\partial^2 x}{\partial z_0\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_0\partial t} & \frac{\partial^2 y}{\partial y_0\partial t} & \frac{\partial^2 y}{\partial z_0\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0}\\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_0\partial t} & \frac{\partial^2 z}{\partial y_0\partial t} & \frac{\partial^2 z}{\partial z_0\partial t}\end{vmatrix}$$

以 $t=t_0$ 代入并注意到当 $t=t_0$ 时

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}=\frac{\partial y}{\partial y_0}=\frac{\partial z}{\partial z_0}=1,\ \frac{\partial x}{\partial y_0}=\frac{\partial x}{\partial z_0}=\frac{\partial y}{\partial z_0}=\frac{\partial y}{\partial x_0}=\frac{\partial z}{\partial x_0}=\frac{\partial z}{\partial y_0}=0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)=\frac{\partial P}{\partial x_0},\ \frac{\partial^2 y}{\partial y_0\partial t}=\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\frac{\partial Q}{\partial y_0},\ \frac{\partial^2 z}{\partial z_0\partial t}=\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial R}{\partial z_0},$$

就有

$$\left.\frac{\partial J}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial x_0} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial Q}{\partial y_0} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial R}{\partial z_0}\end{vmatrix}\right]_{t=t_o}$$

即

$$\left.\frac{\partial J}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\left[\frac{\partial P}{\partial x_0}+\frac{\partial Q}{\partial y_0}+\frac{\partial R}{\partial z_0}\right]_{t=t_0}$$

代入(9)式并将其中的 t_0 换为 t, x_0, y_0, z_0 换为 x, y, z, Ω_0 换为 Ω, 就得到任一瞬时 t、流体内任一占据区域为 Ω 的流体块的体积变化率

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

将积分中值定理用于上式右端的积分并将结果代入(2)式, 我们就将再次推导出体胀速度的计算公式(5)

$$\epsilon=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=$$

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]_{(\xi,\eta,\zeta)}\cdot V=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

其中, (ξ,η,ζ) 是 Ω 内某一点。

顺便指出, 体胀速度也称作体形变, 其三个组成部分 $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ 分别相应于沿三个坐标轴伸长或缩短的形变率, 称作轴形变或法形变。

此外, 由(5)式可以看出, 散度 $\mathrm{div}\mathbf{v}$ 的计算公式与体胀速度的计算公式相同, 即

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{10}$$

但二者在流体力学中的定义却是不同的。散度是单位体积的流体通量。流体内一点 M 处的散度定义为

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{11}$$

其中 Σ 为流体内一包围 M 点的封闭曲面, V 为 Σ 包围的体积, $\mathrm{d}\mathbf{S}$ 是 Σ 之指向外侧的有向曲面元。当 Σ 为几何曲面时, $\mathrm{div}\mathbf{v}>0$ 表示该点有外流的流体通量, 而当 Σ 为由质点组成的物质曲

面时, $\mathrm{div}v > 0$ 表示的外流的流体通量即相当于闭曲面 $\sum$ 的外向膨胀。可见, 散度也是一个表示流点体积膨胀或收缩的物理量, 它与体胀速度具有相同的计算公式便不是偶然的了。

在有些地方, 为简化概念, 也采用(10)式作为散度的定义。这样定义的优点是便于计算, 而缺点则是要依赖于坐标系的选取, 但按(11)式定义则不依赖于坐标系的选取。也有称(2)式定义的体胀速度为散度的, 它同样不依赖于坐标系的选取。

另外, 需注意的是, 体胀速度的计算公式(5)是独立于高斯公式而推导出来的, 而散度的计算公式(10)则是利用高斯公式而推导出来的, 因此, 在涉及高斯公式的物理意义这一问题时, 二者存在一定差异。固然可以反过来用散度概念解释高斯公式, 然而, 欲直接引出高斯公式, 则仍然以使用体胀速度的概念更为恰当。

参考文献

[1] Gillett P. Calculus and analytic geometry: 2nd ed. Lexington: D. C. Heath and Company, 1981.

[2] Kellogg OD. Foundations of potential theory. New York: Frederick Ungar Publishing Company, 1929.

[3] Milne-Thomson LM. Theoretical Hydrodynamics: 5th ed, The Macmillan Press Ltd, 1979.

[4] 余志豪, 王彦昌. 流体力学. 北京: 气象出版社, 1982

(上接第 8 页)

$$|AB| = \frac{|\vec{AM} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

(其中 M 为直线 L 上任意一点, $\vec{s}$ 为直线 L 的方向向量。该式可用向量积的几何意义证明。)

由 $\vec{AM} = \{2t-3, 2t-4, -3t+1\}$, $\vec{s} = \{2, 2, -3\}$, 计算

$$\vec{AM} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t-3 & 2t-4 & -3t+1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \{10, -7, 2\}$$

于是

$$|AB| = \frac{\sqrt{10^2 + 7^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}} = 3$$

以上解法中, 解法一是分三步解决的: 求垂面、求交点、求距离, 运用了平面方程的求法, 线面交点的求法, 两点距离公式。解法二, 除了两点距离公式外还用到了二元函数极值的求法。解法三用到了两向量垂直, 数量积为零的结论。解法四运用了向量积的计算法及向量积的几何意义。需要说明的是, 若给出的直线方程不是对称式(点向式)而是一般式, 则需将一般式化为对称式, 则又考查了一个知识点。

综上, 点到直线距离这一问题的解决, 运用了空间解析几何一章中点、向量、直线、平面等诸多知识点。这是一道综合性很强的典型题目, 一题多解又说明了此问题有较强的灵活性, 笔者认为, 此类题应为本章习题课的必备习题。

参考文献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学(第四版)上册. 上海: 同济大学出版社, 1996. 432.