

第三章 Fluent 湍流模型介绍

3.1 Fluent 中湍流模型概述

3.1.1 湍流模型框架结构

Fluent 中湍流的数值模拟方法可以分为直接数值模拟方法和非直接数值模拟方法。所谓直接数值模拟方法是指直接求解瞬时湍流控制方程（3.1）和（3.2）。而非直接数值模拟方法就是不直接计算湍流的脉动特性，而是设法对湍流作某种程度的近似和简化处理。依赖所采用的近似和简化方法不同，非直接数值模拟方法分为大涡模拟、统计平均法和 Reynolds 平均法。

下图简要概括了湍流模型的分类：

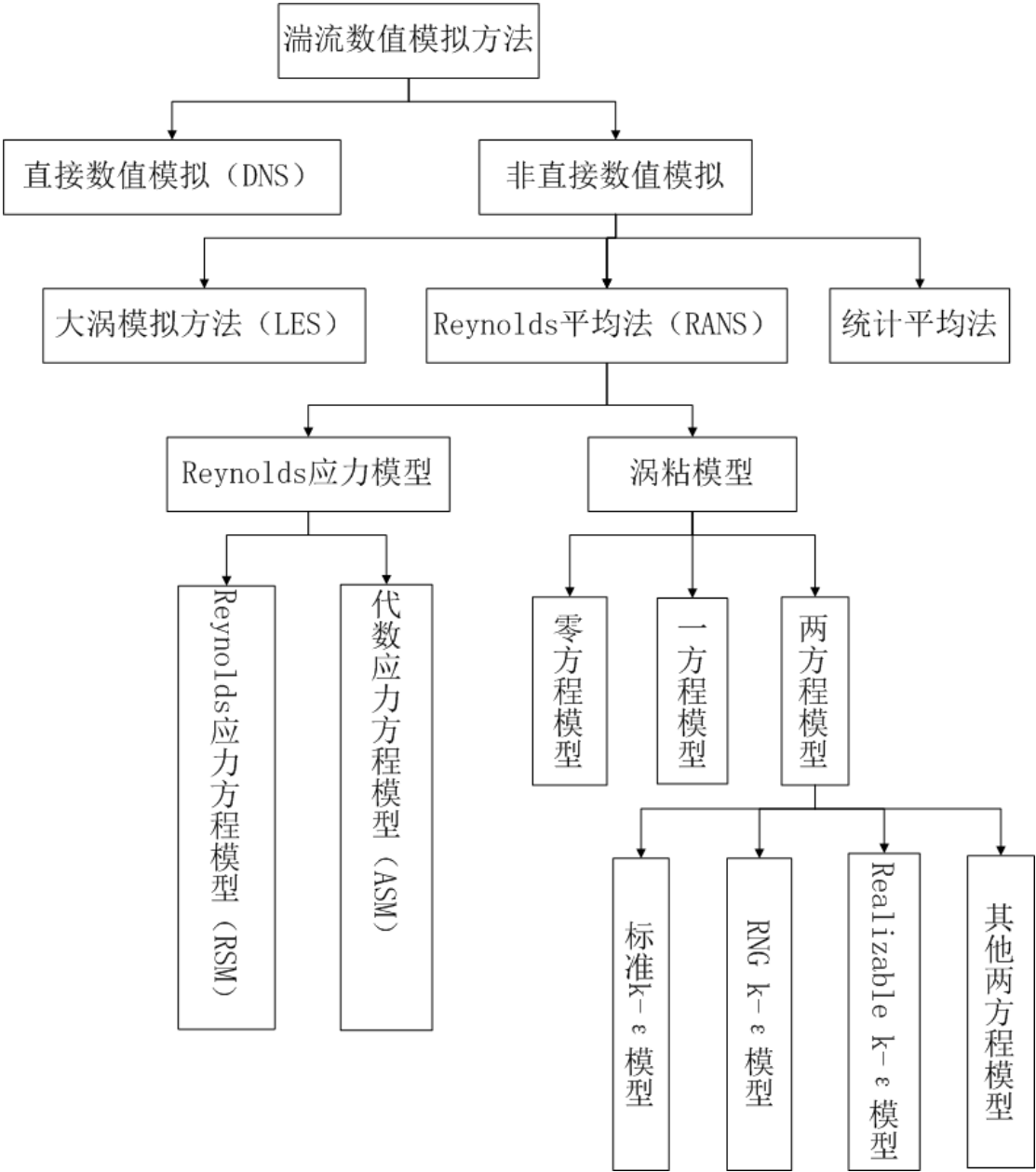


图 3.1 三维湍流数值模拟方法及相应的湍流模型

3.1.2 湍流模型概述

3.1.2a 直接数值模拟(DNS)

直接数值模拟(Direct Numerical Simulation,简称 DNS)方法就是直接用瞬时的 N-S 方程对湍流进行计算。DNS 的最大好处是无需对湍流流动作任何简化或近似,理论上可以得到相对准确的计算结果。虽然这样计算的误差很小,最能贴近实际工况,但是计算量巨大,网格必须小于或等于流场中最小的涡结构尺寸。在现有的计算机水平下,该方法只能求解低雷诺数,理想边界条件下简单的流动,很难应用于工程计算。

3.1.2b 大涡模拟(LES)

在模拟湍流运动的过程中,一方面要求计算区域大到可以包含湍流运动的整个流场区域,另一方面又要求计算网格的尺寸小到可以包含最小尺寸涡的运动,这在实际应用中是很难实现的。因此,目前只能放弃对全尺度范围上涡的运动的模拟,而只将比网格尺度大的湍流运动通过 N-S 方程直接计算出来,对于小尺度的涡对大尺度运动的影响则通过建立模型来模拟(亚格子尺度模型),这就解决了 DNS 方法中网格的细小化问题。能够在较大网格的尺度上模拟较高雷诺数和较复杂的湍流流动"总体而言,LES 方法对计算机的要求还是比较高,但低于 DNS 方法。

LES 方法的基本思想可以概括为:用瞬时的 N-S 方程直接模拟湍流中的大尺度涡,不直接模拟小尺度涡,而小涡对大涡的影响通过近似的模型来考虑。

3.1.2c 雷诺平均模拟(RANS)

雷诺平均法是将非定常的 N-S 方程对时间平均,得到一组以时均物理量和脉动量乘积的时均值作为未知量的非封闭方程,然后添加其他方程来描述脉动量乘积的时均值,同 N-S 方程一起组成封闭的方程组来描述湍流运动。比如在 $k - \varepsilon$ 模型中,我们添加湍动能 k 和湍动能耗散率 ε 的方程来使 N-S 方程封闭。雷诺平均模型不需要计算各种尺度的湍流脉动,只计算平均流动,因此对空间的分辨率要求低,计算量小。RANS 主要分为 Reynolds 应力模型和涡粘模型,下文将分别阐述。本文主要是采用涡粘模型中的 RNG $k - \varepsilon$ 模型来进行计算的。

3.2 Reynolds 时均方程推导

3.3.1 湍流物理量时均值定义及性质

按 Reynolds 平均法,任一变量 ϕ 的时间平均值定义为:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt \quad (3.1)$$

其中时间间隔 Δt 相对于湍流的随机脉动周期而言足够地大,但相对于流场的各种时均量的缓慢变化周期来说,则应足够地小。

物理量的瞬时值 ϕ , 时均值 $\bar{\phi}$ 及脉动值 ϕ' 之间有如下关系:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (3.2)$$

设 ϕ 及 ξ 是两个瞬时值, ϕ' 及 ξ' 为相应的脉动值,则按定义 (3.1) 及式 (3.2) 有以下基本关系成立:

$$\bar{\phi'}=0; \quad \bar{\bar{\phi}}=\bar{\phi}; \quad \overline{\bar{\phi}+\phi'}=\bar{\phi}; \quad \overline{\phi\xi}=\bar{\phi}\bar{\xi}; \quad \overline{\phi\xi'}=0; \quad \overline{\phi\xi}=\bar{\phi}\bar{\xi}; \quad \overline{\phi\xi}=\bar{\phi}\bar{\xi}+\overline{\phi'\xi'}$$

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}; \quad \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}; \quad \overline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_i^2}; \quad \overline{\frac{\partial \phi'}{\partial x_i}} = 0; \quad \overline{\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x_i^2}} = 0 \quad (3.3)$$

3.3.2 Reynolds 时均方程

3.3.2a 连续性方程

将三个坐标方向的瞬时速度表示成时均值与脉动值之和并代入连续性方程，再对该式作时均运算，得：

$$\overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0$$

显然可有：

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

这两式表明，湍流速度的时均值仍满足连续性方程。

3.3.2b 动量方程

以 x 方向动量方程为例，作类似于上面的处理，有：

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')\partial(\bar{v} + v')}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\bar{u} + u')\partial(\bar{w} + w')}{\partial z}} \\ &= -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x}} + \nu \left[\overline{\frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial x^2}} + \overline{\frac{\partial^2(\bar{v} + v')}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial z^2}} \right] \end{aligned}$$

利用上节给出的关系式，可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'w')}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

把上式左端脉分量乘积的时均值项移到等号右端，得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}'v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}'w')}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{(u')^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right] \end{aligned}$$

对其他两个方向也可作类似的推导，并写成张量符号形式。可得下列时均形式的 Navier-Stokes 方程，即 Reynolds 方程：

$$\frac{\partial(\overline{\rho u_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho u_i u_j})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \right) \quad (i=1,3) \quad (3.6)$$

3.3.3c 其他变量方程

$$\frac{\partial(\overline{\rho \phi})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho u_j \phi})}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_j \phi'} \right) + S \quad (3.7)$$

3.4 关于脉动值乘积的时均值的讨论

3.4.1 湍流模型

由上述时均方程推导可看出，一次项在时均过程中保持形式不变，二次项产生了包含脉动值乘积的附加项，该项代表了由湍流脉动而引起的能量转移（应力、热流密度等），其中 $(-\overline{\rho u'_i u'_j})$ 称为 **Reynolds 应力** 或 **湍流应力**。

在 (3.5), (3.6), (3.7) 这五个方程中有 14 个变量：5 个时均量 (\bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 、 \bar{p} 、 $\bar{\phi}$)，

9 个脉动值乘积的时均项 ($\overline{u'_i u'_j}$ 、 $\overline{u'_j \phi'}$ i, j=1, 2, 3)。要使上述方程组封闭必须补充用以确定这 9 个附加量的关系，并且这些关系式中不能再引入新的未知量。所谓湍流模型就是把湍流的脉动值附加项与时均值联系起来的一些特定关系式。

3.4.2 Reynolds 应力方法

对 9 个附加量分别导出确定它们的控制方程；在导出过程中又引进了更高阶的附加量；需要进一步导出确定更高阶附加量的控制方程，但是最终必须终止在近似的模型上；如此处理已经导出了多达 20 余个偏微分方程的模型。其中对两个脉动量乘积的时均值导出微分方程，对三个脉动量乘积时均值建立模型的方法称为二阶矩模型(second moment model)，已经得到工程应用。

3.4.3 湍流粘性系数法

将湍流应力表示成湍流黏性系数的函数，这就叫做湍流系数法，整个方法的关键就在于确定这种湍流粘性系数。

3.4.3a 湍流粘性系数

Boussinesq (1877) 假设，湍流脉动所造成的附加应力也与层流运动应力那样可以同时均的应变率关联起来。

层流时联系流体的应力与应变率的本构方程为：

$$\tau_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{i,j} \text{div} \mathbf{V} \quad (3.8)$$

其中 μ 是分子扩散所造成的动力粘性。

模拟层流的本构方程，湍流脉动所造成的附加应力可以表示成为：

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = (\tau_{i,j})_t = -p_t \delta_{i,j} + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \delta_{i,j} \text{div} \mathbf{V} \quad (3.9)$$

上式各物理量均为时均值。 p_t 是脉动速度所造成的压力，定义为：

$$p_t = \frac{1}{3} \rho (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = \frac{1}{3} \rho k \quad (3.10)$$

k 为单位质量流体湍流脉动动能：

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (3.11)$$

式 (9.9) 中 μ_t 称为湍流粘性系数，它是空间坐标的函数，取决于流动状态而不是物性参数，而分子粘性 μ 则是物性参数。（今后，为了方便表述，除脉动值的时均值外，其他时均值的符号均予略去；凡由流体分子扩散所造成的迁移特性，不加下标，由湍流脉动所造成的量加下标 t ）。

Boussinesq 近似与雷诺应力输运模型对比：

Boussinesq 假设被用于 Spalart-Allmaras 单方程模型和双方程模型。Boussinesq 近似的好处是与求解湍流粘性系数有关的计算时间比较少，例如在 Spalart-Allmaras 单方程模型中，只多求解一个表示湍流粘性的输运方程；在双方程模型中，只需多求解湍动能 k 和耗散率 ϵ 两个方程，湍流粘性系数用湍动能 k 和耗散率 ϵ 的函数。Boussinesq 假设的缺点是认为湍流粘性系数是各向同性标量，对一些复杂流动该条件并不是严格成立，所以具有其应用限制性。

另外的方法是求解雷诺应力各分量的输运方程。这也需要额外再求解一个标量方程，通常是耗散率 ϵ 方程。这就意味着对于二维湍流流动问题，需要多求解 4 个输运方程，而三维湍流问题需要多求解 7 个方程，需要比较多的计算时间，对计算机内存也有更高要求。

在许多问题中，Boussinesq 近似方法可以得到比较好的结果，并不一定需要花费很多时间来求解雷诺应力各分量的输运方程。但是，如果湍流场各向异性很明显，如强旋流动以及应力驱动的二次流等流动中，求解雷诺应力分量输运方程无疑可以得到更好的结果。

3.4.3b 湍流扩散系数

类似于湍流切应力，其他 Φ 变量的湍流脉动值附加项可以引入相应的湍流扩散系数，均以 Γ_t 表示，则湍流脉动所传递的通量可以通过下列关系式与时均参数联系起来：

$$-\overline{\rho u'_i \phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

$$\sigma = \frac{\mu_t}{\Gamma_t} \quad (3.13)$$

σ 常可近似唯为一常数，称为湍流 Prandtl 数 (ϕ 为温度) 或 Schmidt 数 (ϕ 为质交换方程的组份)

将式 (3.9) 代入 (3.6) 后，可以把 p_t 与 p 组合成一个有效压力：

$$P_{\text{eff}} = p + p_t = p + \frac{2}{3} \rho k \quad (3.14)$$

于是湍流对流换热研究归结为确定 μ_t ，确定湍流黏性系数所需微分方程的个数成为湍流工程计算模型的名称。

3.5 零方程模型

所谓零方程模型是指确定湍流黏性系数不需要微方程的模型。

3.5.1 常系数模型

最简单的零方程模型是常系数模型。对自由剪切层流动, Prandtl 提出在同一截面上 μ_t 为常数。

$$\nu_t = C\delta \left| u_{\max} - u_{\min} \right| \quad (3.15)$$

式中, δ 为剪切层厚度 (δ 为对称轴到 1% 速度点之间的距离), u_{\max} 与 u_{\min} 为同一截面上的最大和最小流速。

3.5.2 二维 Prandtl 混合长度理论

在二维坐标系中, 湍流切应力表示成为:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.16)$$

或

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (3.17)$$

μ 为主流的时均速度, y 是与主流方向相垂直的坐标。 l_m 称为**混合长度**, 是这种模型中需要加以确定的参数。确定合适的混合长度是零方程模型的关键。

l_m^2 是从量纲考虑的唯一选择; $\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ 是造成动量交换的根本原因; $\frac{\partial u}{\partial y}$ 是按照牛顿切应

力公式。混合长度理论已被推广到三维流动。

混合长度理论适用于一些比较简单的流动, 如: 边界层类型流动与换热 (机翼上气流脱离前部分); 平直通道内的流动与换热; 回流较弱接近于边界层类型流动与换热等。但混合长度理论在物理概念上存在着不足之处, 如: 在管道中心线处速度梯度为零, 但实际 μ_t 不为零; 不能考虑湍流的历史 (上游情况) 的影响; 不能考虑到湍流强度的影响。因此, 引入偏微分方程来确定湍流粘性系数来适应这方面的需要。

3.6 雷诺应力输运方程和湍动能输运方程推导

3.6.1 纳维-斯托克斯方程

不可压缩牛顿型流体运动的控制方程是纳维-斯托克斯方程。在直角坐标下, 它可表示为:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

ρ 是流体密度, ν 是流体的运动粘性系数, f_i 是质量力强度。

3.6.2 雷诺方程

由第 3 节可得雷诺方程组为:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho u}_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho u'_i u'_j} \right) + \bar{f}_i \quad (2.7)$$

3.6.3 脉动运动方程

将 N-S 方程 (2.1) 和 (2.2) 和雷诺平均方程 (2.7) 和 (2.6) 相减, 得到脉动运动的控制方程。通常质量力是确定性的, 即 $f_i = \bar{f}_i$, 经过运算, 得到脉动运动的控制方程如下:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \bar{u'_i u'_j}) \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.8b)$$

式 (2.8a) 称为脉动运动方程, 式 (2.8b) 称为脉动连续方程。

3.6.4 雷诺应力输运方程

从湍流脉动方程 (2.8) 出发, 在 u'_i 脉动方程上乘以 u'_j , 再用 u'_i 乘以 u'_j 的脉动方程, 两式相加后做平均运算, 得到如下不可压缩湍流的雷诺应力输运方程:

$$\frac{\partial \bar{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{D(\bar{u'_i u'_j})}{Dt} = P_{i,j} + \pi_{i,j} + D_{i,j} - \varepsilon_{i,j}$$

其中,

$$C_{ij} \frac{\partial \bar{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{D(\bar{u'_i u'_j})}{Dt} \text{ 是雷诺应力在平均运动轨迹上的增长率。}$$

$$P_{i,j} = - \left(\bar{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \bar{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \text{ 为应力产生相, 是雷诺应力和平均运动速度梯度的}$$

乘积, 它是产生湍动能的关键。

$$\pi_{i,j} = \frac{\bar{p'}}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \text{ 是压力应变再分配项, 是脉动压强和脉动速度变形张量的}$$

平均值。

$$D_{i,j} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial (\bar{u'_i u'_j})}{\partial x_k} + \delta_{i,k} \frac{\bar{u'_j p'}}{\rho} + \delta_{j,k} \frac{\bar{u'_i p'}}{\rho} \right) \text{ 为雷诺应力扩散相。}$$

$$\varepsilon_{i,j} = 2\nu \frac{\overline{\partial u'_i}}{\partial x_k} \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_k} \text{ 为耗散项}$$

3.6.4 湍动能输运方程

将雷诺应力输运方程做张量的收缩运算，得：

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = -2\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} + \frac{2\overline{u'_j p'}}{\rho} \right) - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \right)$$

将 $\overline{u'_i u'_j} = 2k \delta_{ij}$ 代入上式，得湍动能输运方程如下：

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{k' u'_k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} + \frac{\overline{u'_k p'}}{\rho} \right) - \nu \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right)$$

$C_k = \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k}$ 是湍动能在平均运动轨迹上的增长率。

$P_k = P_{ii} / 2 = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}$ 表示雷诺应力和平均运动变形率张量的二重标量积。从流体力学一般原理中知道应力和当地速度梯度的标量积是向质点输入能量的机械功，因此 P_k 表示雷诺应力通过平均运动的变形率向湍流脉动输入的平均能量。 $P_k > 0$ 表示平均运动向脉动

运动输入能量，反之， $P_k < 0$ 将使湍动能减小，因此 P_k 称为湍动能生成项。

$D_k = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{k' u'_k} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_k} + \frac{\overline{u'_k p'}}{\rho} \right)$ 表示一种扩散过程，它由三部分组成：1. 由压力速度

相关产生的扩散作用；2. 由湍流脉动 3 阶相关 $\overline{k' u'_k} = \overline{u'_i u'_j u'_k} / 2$ 产生的扩散，它是由湍流脉动 u'_k 的不规则运动携带的脉动动能平均值，属于湍流的扩散作用，它有别于分子粘性的湍

动能扩散；3. 由分子粘性产生的湍动能扩散： $\nu \frac{\partial k}{\partial x_k}$ 。

$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k}$ 是湍动能的耗散项，从湍动能耗散的表达式可以肯定 $\varepsilon > 0$ ，而在湍动能

方程中这一项总是使湍动能减小，所以称 ε 为湍动能的耗散项

3.7 一方程模型

在现象上湍流最大的特点是脉动，脉动动能是表征脉动大小的最合适的物理量，要考虑湍流本身特性的影响，须将 k 作为求解变量。

3.7.1 Prandtl-Kolmogorov 假设

在混合长度理论中, μ_t (或 ν_t) 仅与集合位置及时均速度场有关, 而与湍流的特性参数无关。混合长度理论应用的局限性启发我们湍流粘性系数应当与湍流本身的特性量有关。将湍流脉动造成黏性过程与分子扩散形成分子黏性的过程相比拟, 可以设想湍流粘性系数应当与脉动的特征速度及脉动的特征尺度的乘积有关, 正如分子粘性正比于分子平均自由程与其速度的乘积一样。(分子黏性 $\mu_l \propto \overline{\rho u \lambda} \rightarrow$ 湍流黏性 $\mu_t \propto \rho k^{1/2} l$)。湍流脉动动能的平方根, 即 $k^{1/2}$, 可以作为湍流脉动速度的代表。Prandtl 和 Kolmogoro 从上述考虑提出了计算 μ_t 的表达式:

$$\mu_t = c'_\mu \rho k^{1/2} l \quad (9-20)$$

其中 c'_μ 为经验系数, l 是湍流脉动的长度标尺。

3.7.2 湍流脉动动能方程

经过简化处理, 可得 k 方程的最终形式如下:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial k}{\partial t}}_{\text{非稳态项}} + \underbrace{\rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{对流项}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{\text{扩散项}} + \underbrace{\mu_t \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{产生项}} - \underbrace{c_D \rho \frac{k^{3/2}}{l}}_{\text{耗散项}} \quad (9-21)$$

σ_k 称为脉动动能的 Prandtl 数, 其值在 1.0 左右。

3.7.3 一方程模型

利用 k 方程来确定 μ_t 时, 整个控制方程组包括连续性方程、动量方程、能量方程及 k 方程。此外还必须对式(9.20)、(9.21)中的 l 做出规定才能使方程组封闭。这样连同式(9.20)就构成了一方程湍流模型。

式(9.21)中的 l 称为湍流长度标尺, 不同的 k 方程模型间的区别也就在于计算 l 方法不同。常用的做法是采用类似于混合长度理论中 l_m 的计算式。

在一方程模型中, 湍流粘性系数与能表征湍流流动特性的脉动动能联系起来, 无疑优于混合长度理论。但是在一方程模型中仍要用经验的方法规定长度标尺的计算公式, 这是一方程模型的主要缺点。实际上湍流长度标尺本身也是与具体问题有关的, 需要有一个偏微分方程来确定, 这就导致了两方程模型。

附：Fluent 中的 Spalart-Allmaras 模型 (10-11 页)

3.3.1 单方程 (Spalart-Allmaras) 模型

Spalart-Allmaras 模型的求解变量是 $\tilde{\nu}$ ，表征出了近壁（粘性影响）区域以外的湍流运动粘性系数。 $\tilde{\nu}$ 的输运方程为：

$$\rho \frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho\tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) \right] - Y_\nu \quad 3-9$$

其中， G_ν 是湍流粘性产生项； Y_ν 是由于壁面阻挡与粘性阻尼引起的湍流粘性的减少； $\sigma_{\tilde{\nu}}$ 和 C_{b2} 是常数； ν 是分子运动粘性系数。

湍流粘性系数用如下公式计算：

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{\nu1}$$

其中， $f_{\nu1}$ 是粘性阻尼函数，定义为： $f_{\nu1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu1}^3}$ ，并且 $\chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$ 。

湍流粘性产生项， G_ν 用如下公式模拟：

$$G_\nu = C_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} \quad 3-10$$

其中， $\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{\nu2}$ ，而 $f_{\nu2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu1}}$ 。其中， C_{b1} 和 k 是常数， d 是计算点

到壁面的距离； $S \equiv \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ 。 Ω_{ij} 定义为：

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad 3-11$$

由于平均应变率对湍流产生也起到很大作用，FLUENT 处理过程中，定义 S 为：

$$S \equiv |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|) \quad 3-12$$

其中， $C_{prod} = 2.0$ ， $|\Omega_{ij}| \equiv \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ ， $|S_{ij}| \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ ，平均应变率 S_{ij} 定义为：

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad 3-13$$

在涡量超过应变率的计算区域计算出来的涡旋粘性系数变小。这适合涡流靠近涡旋中心的区域，那里只有“单纯”的旋转，湍流受到抑止。包含应变张量的影响更能体现旋转对湍流的影响。忽略了平均应变，估计的涡旋粘性系数产生项偏高。

湍流粘性系数减少项 Y_ν 为：

$$Y_\nu = C_{w1} \rho f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad 3-14$$

$$\text{其中，} f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad 3-15$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r) \quad 3-16$$

$$r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d^2} \quad 3-17$$

其中, C_{w1} , C_{w2} , C_{w3} 是常数, $\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2}$ 。在上式中, 包括了平均应变率对 S 的影响, 因而也影响用 \tilde{S} 计算出来的 r 。

上面的模型常数在 FLUENT 中默认值为: $C_{b1} = 0.1335$, $C_{b2} = 0.622$, $\sigma_{\tilde{\nu}} = 2/3$, $C_{v1} = 7.1$, $C_{w1} = C_{b1}/k^2 + (1 + C_{b2})/\sigma_{\tilde{\nu}}$, $C_{w2} = 0.3$, $C_{w3} = 2.0$, $k = 0.41$ 。

壁面条件

在壁面, 湍流运动粘性 $\tilde{\nu}$ 设置为零。当计算网格足够细, 可以计算层流底层时, 壁面切应力用层流应力—应变关系求解, 即:

$$\frac{u}{u_{\tau}} = \frac{\rho u_{\tau} y}{\mu} \quad 3-18$$

如果网格粗错不能用来求解层流底层, 则假设与壁面近邻的网格质心落在边界层的对数区, 则根据壁面法则:

$$\frac{u}{u_{\tau}} = \frac{1}{k} \ln E \left(\frac{\rho u_{\tau} y}{\mu} \right) \quad 3-19$$

其中, $k=0.419$, $E=9.793$ 。

单一输运方程模型, 直接解出修正过的湍流粘性, 用于有界壁面流动的航空领域 (需要较好的近壁面网格), 尤其是绕流过程; 可以使用粗网格。

计算量小, 对一定复杂的边界层问题有较好效果; 计算结果没有被广泛测试, 缺少子模型; 典型的应用场合为航空领域的绕流模拟。

单方程湍流模型 (S-A 模型)。适合用于翼型、壁面边界层等流动, 不适合射流类等自由剪切湍流问题。

Spalart-Allmaras 模型是一个相对简单的一方程模型, 求解了一个关于涡粘性的输运方程。该湍流模型比较适合于具有壁面限制的流动问题, 对有逆压梯度的边界层问题能够给出很好的计算结果, 常常用在空气动力学问题当中, 例如对飞行器, 翼型等绕流场分析。

对于解决动力湍流粘性, Spalart-Allmaras 模型是相对简单的方程。它包含了一组新的方程, 在这些方程里不必要去计算和剪应力层厚度相关的长度尺度。Spalart-Allmaras 模型是设计用于航空领域的, 主要是墙壁束缚流动, 而且已经显示出和好的效果。在透平机械中的应用也愈加广泛。

在原始形式中 Spalart-Allmaras 模型对于低雷诺数模型是十分有效的, 要求边界层中粘性影响的区域被适当的解决。在 FLUENT 中, Spalart-Allmaras 模型用在网格划分的不是很好时。这将是最好的选择, 当精确的计算在湍流中并不是十分需要时。再有, 在模型中近壁的变量梯度比在 $k-\epsilon$ 模型和 $k-\omega$ 模型中的要小的多。这也许可以使模型对于数值的误差变得不敏感。想知道数值误差的具体情况请看 5.1.2。

需要注意的是 Spalart-Allmaras 模型是一种新出现的模型, 现在不能断定它适用于所有的复杂的工程流体。例如, 不能依靠它去预测均匀衰退, 各向同性湍流。还有要注意的是, 单方程的模型经常因为对长度的不敏感而受到批评, 例如当流动墙壁束缚变为自由剪切流。

3.8 k-ε 两方程模型

3.8.1 引入与湍流长度标尺有关的物理量

在一方程模型中，湍流长度标尺 l 是由经验公式给出的。其实长度标尺也是一个变量，可以通过求解微分方程而得出。文献中广泛采用形如 $Z = k^m l^n$ 的公式来选择与湍流脉动的长度标尺有关的量。已经采用的 Z 变量的主要形式列于表 1 中。Rodi 指出，所有这些 Z 变量的微分方程形式均类似，但对靠近壁面地区来说 ε 方程计算最为方便。因而，在湍流的工程计算中， k - ε 两方程模型使用最广泛。

表一 Z 变量的几种主要形式

Z 变量	$k^{1/2} / l$	$k^{3/2} / l$	k / l	k / l^2
提出者	Kolmogorov	Chou (周培源)	Rodi, Spalding	Spalding
符号	f	ε	kl	W
物理意义	涡旋频率	能量的耗散	能量与标尺之积	涡量脉动的时均方值

3.8.2 脉动动能耗散率的定义及其控制方程

3.8.2a 耗散率的定义

耗散率的两种定义

(1) 严格的定义：
$$\varepsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)}$$

它代表各向同性小尺度涡耗散的机械能转化为热能的速率，是推导微分方程的出发点，式中 ν 为流体的分子粘性。

(2) 模拟的定义：
$$\varepsilon = c_D \rho \frac{k^{3/2}}{l}$$

它可看作是单位质量流体脉动动能耗散率， c_D 为经验常数。这一模拟定义来源可以如下的理解：从较大的涡向较小的涡传递能量的速率对单位体积流体正比于 ρk ，而反比于传递时间。传递时间与湍流长度标尺 l 成正比，而与脉动速度 $k^{1/2}$ 成反比。

$$\rho \varepsilon \propto \rho k / \left(\frac{l}{k^{1/2}} \right) \propto \rho \frac{k^{3/2}}{l} = c_D \rho \frac{k^{3/2}}{l}$$

对推导过程中得出的一些复杂项做简化处理时用此定义。

3.8.2b ε 的控制方程

从 ε 的严格定义出发，对 N-S 方程做时均运算，最终得出 ε 方程形式如下：

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \frac{c_1 \varepsilon}{k} \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

非稳态项 对流项 扩散项 产生项 消失项

式中 c_1, c_2 为经验系数。

k 方程可改写为:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho \varepsilon$$

引入: $G = \mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 称为单位质量的产生函数, 则 k 方程源项简化

为: $\rho G - \rho \varepsilon$

3.8.2c k-ε 两方程模型控制方程组

采用 k-ε 模型时, 式 (9.20) 可改写为:

$$\mu_t = c'_\mu \rho k^{\frac{1}{2}} l = (c'_\mu c_D) \rho k^2 \frac{1}{c_D k^{3/2} / l} = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (9.25)$$

其中, $c_\mu = c'_\mu c_D$

采用 k-ε 两方程模型时, 控制方程包括连续性方程、动量方程、能量方程及 k、ε 方程与 (9.25) 式。这一方程组中的六个系数现比较一致取值如表 2 所示:

表二 k-ε 模型中的系数

c_μ	c_1	c_2	σ_k	σ_ε	σ_T
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0.9-1.0

其中与温度场有关的湍流 Pr 数 σ_T 与时均形式能量方程的广义扩散系数 Γ 有下列关系:

$$\Gamma = \frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_T} = \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}$$

其中 μ / Pr 是由分子扩散造成的, 而 μ_t / σ_t 是由湍流脉动造成的。在旺盛湍流区, 分子扩散部分可以略而不计。

采用 k-ε 两方程模型湍流应力可以按以下公式计算:

$$(\tau_{i,j})_t = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{i,j} + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

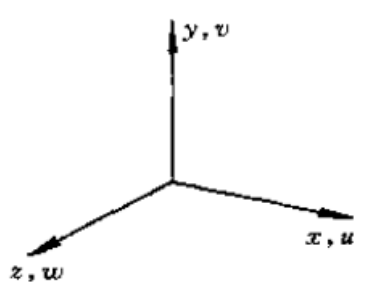
$$\mu_t = c_\mu \rho k^2 / \varepsilon$$

通用控制方程可以表示成为以下通用形式:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{V}\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S$$

三维直角坐标系中湍动量方程及 k - ϵ 方程如表三所示:

表三 三维直角坐标系中 k - ϵ 模型的控制方程

控制方程	$\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}) + S$ <p>对 u, v, w, k, ϵ, T 广义扩散系数 Γ 为:</p> <p>$u, v, w: \Gamma = \eta_{\text{eff}} = \eta + \eta_t$</p> <p>$k: \Gamma = \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k}$</p> <p>$\epsilon: \Gamma = \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\epsilon}$</p> <p>$T: \Gamma = \frac{\eta}{Pr} + \frac{\eta_t}{\sigma_T}$</p> 
源项	<p>$u: S = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial x})$</p> <p>$v: S = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial y})$</p> <p>$w: S = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial z})$</p> <p>$k: S = \rho G_k - \rho \epsilon$</p> <p>$\epsilon: S = \frac{\epsilon}{k} (c_1 \rho G_k - c_2 \rho \epsilon)$</p> <p>$G_k = \frac{\eta_t}{\rho} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$</p> <p>$T: S$ 按实际问题而定</p>

附：Fluent 中 $k-\varepsilon$ 两方程模型（15-21 页）

3.3.2 标准 $k-\varepsilon$ 模型

标准 $k-\varepsilon$ 模型需要求解湍动能及其耗散率方程。湍动能输运方程是通过精确的方程推导得到，但耗散率方程是通过物理推理，数学上模拟相似原形方程得到的。该模型假设流动为完全湍流，分子粘性的影响可以忽略。因此，标准 $k-\varepsilon$ 模型只适合完全湍流的流动过程模拟。

标准 $k-\varepsilon$ 模型的湍动能 k 和耗散率 ε 方程为如下形式：

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M \quad 3-22$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad 3-23$$

在上述方程中， G_k 表示由于平均速度梯度引起的湍动能产生， G_b 是由于浮力影响引起的湍动能产生； Y_M 可压速湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响。湍流粘性系数

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}。$$

在 FLUENT 中，作为默认值常数， $C_{1\varepsilon}=1.44$ ， $C_{2\varepsilon}=1.92$ ， $C_\mu=0.09$ ，湍动能 k 与耗散率 ε 的湍流普朗特数分别为 $\sigma_k=1.0$ ， $\sigma_\varepsilon=1.3$ 。可以通过调节“粘性模型”面板来调节这些常数值。

3.3.3 重整化群 $k-\varepsilon$ 模型

重整化群 $k-\varepsilon$ 模型是对瞬时的 Navier-Stokes 方程用重整化群的数学方法推导出来的模型。模型中的常数与标准 $k-\varepsilon$ 模型不同，而且方程中也出现了新的函数或者项。其湍动能与耗散率方程与标准 $k-\varepsilon$ 模型有相似的形式：

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\alpha_k \mu_{eff} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M \quad 3-$$

24

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\alpha_\varepsilon \mu_{eff} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad 3-$$

25

G_k 表示由于平均速度梯度引起的湍动能产生， G_b 是由于浮力影响引起的湍动能产生； Y_M

可压速湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响，这些参数与标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型中相同。 α_k 和 α_ε 分别是湍动能 k 和耗散率 ε 的有效湍流普朗特数的倒数。

湍流粘性系数计算公式为：

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon \mu}}\right) = 1.72 \frac{\tilde{\nu}}{\sqrt{\tilde{\nu}^3 - 1 - C_\nu}} d\tilde{\nu} \quad 3-$$

26

其中， $\tilde{\nu} = \mu_{eff} / \mu$ ， $C_\nu \approx 100$

对上面方程积分，可以精确得到有效雷诺数（涡旋尺度）对湍流输运的影响，这有助于处理低雷诺数和近壁流动问题的模拟。

对于高雷诺数，上面方程可以给出： $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ ， $C_\mu = 0.0845$ 。这个结果非常有

意思，和标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型的半经验推导给出的常数 $C_\mu = 0.09$ 非常近似。

在 FLUENT 中，如果是默认设置，用重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型时候是针对的高雷诺数流动问题。如果对低雷诺数问题进行数值模拟，必须进行相应的设置。

重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型有旋修正

通常，平均运动有旋时候对湍流有重要影响。FLUENT 中重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型通过修正湍流粘性系数来考虑了这类影响。

湍流粘性的修正形式为：

$$\mu_t = \mu_{t0} f(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\varepsilon}) \quad 3-27$$

其中， μ_{t0} 是不考虑有旋计算出来的湍流粘性系数； Ω 是 FLUENT 计算出来的特征旋流数； α_s 是旋流常数，不同值表示有旋流动的强度不同。流动可以是强旋或者中等旋度的。FLUENT 默认设置 $\alpha_s = 0.05$ ，针对中等旋度的流动问题，对于强旋流动，可以选择较大的值。

湍动能及其耗散率的有效湍流普朗特数倒数的计算公式为：

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_0 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad 3-$$

28

式中， $\alpha_0 = 1$ ，在高雷诺数流动问题中， $\mu_{mol} / \mu_{eff} \ll 1$ ， $\alpha_k = \alpha_\varepsilon = 1.393$ 。

湍流耗散率方程右边的 R 为：

$$R = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad 3-$$

29

其中, $\eta \equiv Sk / \varepsilon$, $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$ 。

为了更清楚体现 R 对耗散率的影响, 我们把耗散率输运方程重写为:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_\varepsilon \mu_{eff}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - C_{2\varepsilon}^* \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad 3-$$

30

$$\text{则: } C_{2\varepsilon}^* = C_{2\varepsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad 3-$$

31

在 $\eta < \eta_0$ 的区域, R 的贡献为正; $C_{2\varepsilon}^*$ 大于 $C_{2\varepsilon}$ 。以对数区为例, $\eta \approx 3$, $C_{2\varepsilon}^* \approx 2.0$,

这和标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型中给出的 $C_{2\varepsilon} = 1.92$ 接近。因此, 对于弱旋和中等旋度的流动问题, 重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型给出的结果比标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型的结果要大。

重整化群模型中, $C_{1\varepsilon} = 1.42$, $C_{2\varepsilon} = 1.68$ 。

3.3.4 可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型

可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型的湍动能及其耗散率输运方程为:

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M \quad 3-$$

32

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b \quad 3-$$

33

$$\text{其中, } C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad \eta = Sk / \varepsilon$$

在上述方程中, G_k 表示由于平均速度梯度引起的湍动能产生, G_b 是由于浮力影响引起的湍动能产生; Y_M 可压速湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响。 C_2 和 $C_{1\varepsilon}$ 是常数; σ_k , σ_ε 分别是湍动能及其耗散率的湍流普朗特数。在 FLUENT 中, 作为默认值常数, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_2 = 1.9$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.2$ 。

可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型的湍动能的输运方程与标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型和重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型有相同的形式，只是模型参数不同。但耗散率方程有较大不同。首先耗散率产生项（方程右边第二项）不包含湍动能产生项 G_k ，现在的形式更能体现能量在谱空间的传输。另外的特色在于耗散率减少项中，不具有奇异性。并不象标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型模型那样把 K 放在分母上。

该模型适合的流动类型比较广泛，包括有旋均匀剪切流，自由流（射流和混合层），腔道流动和边界层流动。对以上流动过程模拟结果都比标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型的结果好，特别是可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型对圆口射流和平板射流模拟中，能给出较好的射流扩张角。

湍流粘性系数公式为 $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ ，这和标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型相同。不同的是，在可实现

$\kappa - \varepsilon$ 模型中， C_μ 不再是个常数，而是通过如下公式计算：

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{U^* K}{\varepsilon}} \quad 3-$$

34

其中， $U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij}}$ ， $\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} - 2\varepsilon_{ijk}\omega_k$ ， $\Omega_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} - \varepsilon_{ijk}\omega_k$ ， $\bar{\Omega}_{ij}$ 是 is the mean rate-of -rotation tensor viewed in a rotating reference frame with the angular velocity ω_k 。模型常数 $A_0 = 4.04$ ， $A_s = \sqrt{6} \cos \phi$ ，而：

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W)，\text{式中 } W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}}, \quad \tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

我们可以发现， C_μ 是平均应变率与旋度的函数。在平衡边界层惯性底层，可以得到 $C_\mu = 0.09$ ，与标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型中采用底常数一样。

双方程模型中，无论是标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型、重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型还是可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型，三个模型有类似的形式，即都有 κ 和 ε 的输运方程，它们的区别在于：1，计算湍流粘性的方法不同；2，控制湍流扩散的湍流 Prandtl 数不同；3， ε 方程中的产生项和 G_k 关系不同。

但都包含了相同的表示由于平均速度梯度引起的湍动能产生 G_k ，用于浮力影响引起的湍动能产生 G_b ；可压速湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响 Y_M 。

湍动能产生项

$$G_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad 3-35$$

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{\text{Pr}t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad 3-36$$

式中， $\text{Pr}t$ 是能量的湍流普朗顿数，对于可实现 $\kappa - \varepsilon$ 模型，默认设置值为 0.85。对于重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型， $\text{Pr}t = 1/\alpha$ ， $\alpha = 1/\text{Pr} = k/\mu C_p$ 。热膨胀系数 $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ ，对于理想气体，浮力引起的湍动能产生项变为：

$$G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad 3-37$$

在 FLUENT 程序中，如果有重力作用，并且流场里有密度或者温度的梯度，浮力对湍动能的影响都是存在的。浮力对耗散率的影响不是很清楚，因此，默认设置中，耗散率方程中的浮力影响不被考虑。如果要考虑浮力对耗散率的影响，用“粘性模型”面板来控制。浮力对耗散率影响是用 $C_{3\varepsilon}$ 来体现。但 $C_{3\varepsilon}$ 并不是常数，而是如下的函数形式：

$$C_{3\varepsilon} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right| \quad 3-38$$

v 是平行于重力方向的速度分量； u 是垂直于重力方向的速度分量。如果流动速度与重力方向相同的剪切流动， $C_{3\varepsilon} = 1$ ，对于流动方向与重力方向垂直的剪切流， $C_{3\varepsilon} = 0$ 。

对于高马赫数的流动问题，可压速性对湍流影响在 Y_M 中体现。

$$Y_M = \rho \varepsilon 2M_t^2$$

其中， M_t 是马赫数，定义为： $M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}$ （ $a \equiv \sqrt{\gamma RT}$ 是声速）。

默认设置中，只要选择可压速理想气体，可压速效应都是考虑的。

在上述的双方程模型中，对流传热传质模型都是通过雷诺相似湍流动量输运方程得到的。能量方程形式为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i (\rho E + p)] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_i} + u_j (\tau_{ij})_{eff} \right) + S_h \quad 3-39$$

式中， E 是总的能量， k_{eff} 是有效导热系数； $(\tau_{ij})_{eff}$ 是偏应力张量，定义为：

$$(\tau_{ij})_{eff} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{eff} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \quad 3-40$$

$(\tau_{ij})_{eff}$ 表示的是粘性加热，耦合求解时总是计算。如果不是耦合求解时候，作为默认设置，并不求解该量。如果有需要，需在“粘性模型”面板中设置。

对于重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型，有效导热系数为：

$$k_{eff} = \alpha c_p \mu_{eff} \quad 3-41$$

α 用 (3-28) 计算，式中， $\alpha_0 = 1/\text{Pr} = k/\mu C_p$ 。事实上， α 随着 μ_{mol}/μ_{eff} 的变化而变化，这是重整化群 $\kappa - \varepsilon$ 模型的一个优点，因为实验中证明，湍流普朗特数随分子普朗特数及湍流而变化。

湍流质量输运处理过程与能量输运过程类似。对于标准 $\kappa - \varepsilon$ 模型和可实现的 $\kappa - \varepsilon$ 模型，默认的 Schmidt 数是 0.7，重整化群模型中，是通过方程 3-28 来计算的，其中， $\alpha_0 = 1/Sc$ ， Sc 是分子 Schmidt 数。

标准 k-e 模型

最简单的完整湍流模型是两个方程的模型，要解两个变量，速度和长度尺度。在 FLUENT 中，标准 k-e 模型自从被 Launder and Spalding 提出之后，就变成工程流场计算中主要的工具了。适用范围广、经济，有合理的精度，这就是为什么它在工业流场和热交换模拟中有如此广泛的应用了。它是个半经验的公式，是从实验现象中总结出来的。

由于人们已经知道了 k-e 模型适用的范围，因此人们对它加以改造，出现了 RNG k-e 模型和带旋流修正 k-e 模型。k- ε 模型中的 K 和 ε 物理意义： k 是紊流脉动动能 (J)， ε 是紊流脉动动能的耗散率 (%)； k 越大表明湍流脉动长度和时间尺度越大， ε 越大意味着湍流脉动长度和时间尺度越小，它们是两个量制约着湍流脉动。

RNG k-e 模型

RNG k-e 模型来源于严格的统计技术。它和标准 k-e 模型很相似，但是有以下改进：

- RNG 模型在 ε 方程中加了一个条件，有效的改善了精度。
- 考虑到了湍流漩涡，提高了在这方面的精度。
- RNG 理论为湍流 Prandtl 数提供了一个解析公式，然而标准 k-e 模型使用的是用户提供的常数。

• 然而标准 k-e 模型是一种高雷诺数的模型，RNG 理论提供了一个考虑低雷诺数流动粘性的解析公式。这些公式的效用依靠正确的对待近壁区域

这些特点使得 RNG k-e 模型比标准 k-e 模型在更广泛的流动中有更高的可信度和精度。

带旋流修正的 k-e 模型

带旋流修正的 k-e 模型是近期才出现的，比起标准 k-e 模型来有两个主要的不同点。

- 带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型为湍流粘性增加了一个公式。
- 为耗散率增加了新的传输方程，这个方程来源于一个为层流速度波动而作的精确方程。

术语“realizable”，意味着模型要确保在雷诺压力中要有数学约束，湍流的连续性。带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型直接的好处是对于平板和圆柱射流的发散比率的更精确的预测。而且它对于旋转流动、强逆压梯度的边界层流动、流动分离和二次流有很好的表现。带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型和 RNG $k-\epsilon$ 模型都显现出比标准 $k-\epsilon$ 模型在强流线弯曲、漩涡和旋转有更好的表现。由于带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型是新出现的模型，所以现在还没有确凿的证据表明它比 RNG $k-\epsilon$ 模型有更好的表现。但是最初的研究表明带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型在所有 $k-\epsilon$ 模型中流动分离和复杂二次流有很好的作用。带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型的一个不足是在主要计算旋转和静态流动区域时不能提供自然的湍流粘度。这是因为带旋流修正的 $k-\epsilon$ 模型在定义湍流粘度时考虑了平均旋度的影响。这种额外的旋转影响已经在单一旋转参考系中得到证实，而且表现要好于标准 $k-\epsilon$ 模型。由于这些修改，把它应用于多重参考系统中需要注意。

Standard $\kappa - \epsilon$

基于两个输运方程的模型解出 κ 和 ϵ 。默认的 $\kappa - \epsilon$ 模型，系数由经验公式给出；只对高 Re 的湍流有效；包含粘性热、浮力、压缩性选项。

应用多，计算量适中，有较多数据积累和比较高的精度；对于曲率较大和压力梯度较强等复杂流动模拟效果欠佳；一般工程计算都使用该模型，其收敛性和计算精度能满足一般的工程计算要求，但模拟旋流和绕流时有缺陷。

标准 $\kappa - \epsilon$ 模型。有较高的稳定性、经济性和计算精度，应用广泛，适合高雷诺数湍流，但不适合旋流等各向异性较强的流动。

RNG $\kappa - \epsilon$

标准 $\kappa - \epsilon$ 模型的变形，方程和系数来自解析解，在 ϵ 方程中改善了模拟高应变流动的能力；用来预测中等强度的旋流和低雷诺数流动。

能模拟射流撞击、分离流、二次流和旋流等中等复杂流动；受到涡旋粘性各向同性假设限制；除强旋流过程无法精确预测外，其他流动都可以使用该模型。

重整化群 RNG $\kappa - \epsilon$ 模型。可以计算低雷诺数湍流，其考虑到旋转效应，对强旋流动计算精度有所提高。

Realizable $\kappa - \epsilon$

标准 $\kappa - \epsilon$ 模型的变形，用数学约束改善模型性能。能用于预测中等强度的旋流。

和 RNG 基本一致，还可以更好地模拟圆形射流问题；受到涡旋粘性各向同性假设限制；除强旋流过程无法精确预测外，其他流动都可以使用该模型。

可实现性 Realizable $\kappa - \epsilon$ 模型。可以保持雷诺应力与真实湍流一致，可以更精确地模拟平面和圆形射流的扩散速度，同时在旋流计算，带方向压强梯度的边界层计算和分离流计算等问题中更符合真实，在分离流计算和带二次流的复杂流动计算中也表现出色。

3.9 二阶矩模型

上面所介绍的各种两方程模型都采用各项同性的湍流动力粘度来计算湍流应力,这些模型难于考虑旋转流动及流动方向表面曲率变化的影响;另外,需要引入湍流 Pr 数来计算湍流热流密度。为了克服这些缺点,有必要直接对湍流脉动应力 $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ 及湍流热密度 $-\rho c_p \overline{u'_i T'}$ 直接建立微分方程式求解。对两个脉动量乘积的时均值 $\overline{u'_i u'_j}$ 等,建立求解的微分方程式,对三个脉动值乘积的时均值,如 $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ 等,则采用模拟方式计算的模型来封闭。

这种方法称为**二阶矩 Reynolds 应力模型**。

3.9.1 Reynolds 应力方程及热流密度方程的严格形式

3.9.1a Reynolds 应力方程的严格形式

由以上章节可知:

不可压缩湍流的雷诺应力输运方程:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{D(\overline{u'_i u'_j})}{Dt} = P_{i,j} + \pi_{i,j} + D_{i,j} - \varepsilon_{i,j}$$

其中,

$$C_{ij} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{D(\overline{u'_i u'_j})}{Dt} \text{ 是雷诺应力在平均运动轨迹上的增长率。}$$

$$P_{i,j} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \right) \text{ 为应力产生相,是雷诺应力和平均运动速度梯度的}$$

乘积,它是产生湍动能的关键。

$$\pi_{i,j} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \text{ 是压力应变再分配项,是脉动压强和脉动速度变形张量的}$$

平均值。

$$D_{i,j} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} + \delta_{i,k} \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} + \delta_{j,k} \frac{\overline{u'_i p'}}{\rho} \right) \text{ 为雷诺应力扩散相。}$$

$$\varepsilon_{i,j} = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \text{ 为耗散项}$$

由以上结果可知。为了得出 $\overline{u'_i u'_j}$ 的微分方程,引入了比 $\overline{u'_i u'_j}$ 更高阶的未知量 $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ 以

及压力脉动值 p' 与速度脉动值乘积的时均值,因而方程是不封闭的,必须补充以把三阶量

与低阶的量及时均变量联系起来的关系式,同时压力应变项等也须用低阶的量及时均量来模拟,方程组才能封闭。由于模拟方式不同,形成了不同的二阶矩应力方程模型,以三阶矩的模拟为例,说明如下:

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \quad \text{---Daly/Harlow}$$

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \quad \text{---Shir}$$

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad \text{---Hanjalic/Launder}$$

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad \text{---Mellor/Herring}$$

以上各式中的系数则通过与一定范围内的实验数据的对比来确定。

3.9.2b 热流密度方程的严格形式

采用导出应力方程的类似方法，可得下列 Reynolds 热流密度方程的严格形式：

3.9.3 二阶模型的封闭方程组

(1) 三维时均控制方程 16 个：

5 个时均控制方程与 5 个变量对应：u, v, w, p, T；6 个时均脉动应力方程，3 个附加热流密度方程；一个 k 方程，一个 ε 方程。二阶矩模型中，k-ε 方程的模拟形式与二方程 k-ε 模型中类似。

(2) 包括 9 个经验常数。

9 个系数的推荐值如表四所示：

表四 二阶 Reynolds 应力模型中的系数

c_k	c_1	c_2	c_ε	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	c_T	c_{T1}	c_{T2}
0.09	2.30	0.40	0.07	1.45	1.92	0.07	3.2	0.5

附：Fluent Reynolds 应力模型（24-27 页）

3.3.5 雷诺应力模型（RSM）

雷诺应力模型是求解雷诺应力张量的各个分量的输运方程。具体形式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \overline{u_k u_i u_j}) = & \\ & \text{对流项 } C_{ij} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\rho u_i u_j u_k} + \overline{p(\delta_{kj} u_i + \delta_{ik} u_j)} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right] \\ & \text{湍流扩散项 } D_{ij}^T \qquad \qquad \text{分子扩散 } D_{ij}^L \\ & - \rho \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) - \rho \beta (g_i \overline{u_j \theta} + g_j \overline{u_i \theta}) \\ & \text{应力产生项 } P_{ij} \qquad \qquad \text{浮力产生项目 } G_{ij} \\ & + \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - 2 \mu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \\ & \text{压力应变项 } \Phi_{ij} \qquad \qquad \text{耗散项 } \varepsilon_{ij} \\ & - 2 \rho \Omega_k \left(\overline{u_j u_m \varepsilon_{ikm}} + \overline{u_i u_m \varepsilon_{jkm}} \right) \qquad \qquad 3-42 \\ & \text{系统旋转产生项 } F_{ij} \end{aligned}$$

上面方程中， C_{ij} ， D_{ij}^L ， P_{ij} ， F_{ij} 不需要模拟，而 D_{ij}^T ， G_{ij} ， Φ_{ij} ， ε_{ij} 需要模拟以封闭方程。下面简单对几个需要模拟项的模拟。

D_{ij}^T 可以用 Delay and Harlow [L38] 的梯度扩散模型来模拟，即：

$$D_{ij}^T = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho \frac{\overline{k u_k u_l}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \qquad \qquad 3-43$$

但这个模型会导致数值不稳定，因此 FLUENT 程序中采用标量湍流扩散模型：

$$D_{ij}^T = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \qquad \qquad 3-44$$

式中,湍流粘性系数用 $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ 来计算,根据 Lien and Leschziner [L98], $\sigma_k = 0.82$,

这和标准 $k - \varepsilon$ 模型中选取 1.0 有所不同。

根据 Gibson and Launder [L58], Fu [L55], Launder [L88,L89], 压力应变项 Φ_{ij} 可以分解为三项,即:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij}^w \quad 3-45$$

$\Phi_{ij,1}$, $\Phi_{ij,2}$ 和 Φ_{ij}^w 分别是慢速项,快速项和壁面反射项。

$$\Phi_{ij,1} = -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right], \text{ 常数 } C_1 = 1.8。$$

$$\Phi_{ij,2} = -C_2 \left[(P_{ij} + F_{ij} + G_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (P + G - C) \right], \quad C_2 = 0.60, \quad P = \frac{1}{2} P_{kk},$$

$$G = \frac{1}{2} G_{kk}, \quad C = \frac{1}{2} C_{kk}。$$

壁面反射项用于重新分布近壁的雷诺正应力分布,主要是减少垂直于壁面的雷诺正应力,增加平行于壁面的雷诺正应力。该项模拟为:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^w = & C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i u_k n_j n_k} - \frac{3}{2} \overline{u_j u_k n_i n_k} \right) \frac{k^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \\ & + C'_2 \left(\Phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \Phi_{jk,2} n_i n_k \right) \frac{k^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \end{aligned} \quad 3-46$$

式中, $C'_1 = 0.5$, $C'_2 = 0.3$, n_k 是 x_k 在垂直于壁面方向上的单位分量, d 是到壁面的距离; $C_l = C_\mu^{3/4} / k$, $C_\mu = 0.09$, $k=0.41$ 。

默认设置时候, FLUENT 不计算 Φ_{ij}^w 。如果需要计算时候,在“粘性模型”面板中设置。

线性压力应变模型

对于小雷诺数流动,特别是用双层模型求解近壁流动问题时, FLUENT 中通过改进模型常数 C_1 , C_2 , C'_1 和 C'_2 来改进压力应变项 Launder [L91]。这一过程只有在选择双层流模型时候,在“粘性模型”面板上调节。

$$C_1 = 1 + 2.58 A \sqrt{A_2} \left(1 - e^{-(0.0067 \text{Re}_t)^2} \right)$$

$$C_2 = 0.75 \sqrt{A}$$

$$C_1' = -\frac{2}{3}C_1 + 1.67$$

$$C_2' = \max\left(\frac{\frac{2}{3}C_2 - \frac{1}{6}}{C_2}, 0\right)$$

其中, $\text{Re}_t = \rho k^2 / (\mu \varepsilon)$, 参数 A 和张量不变量 A_2, A_3 定义为:

$$A \equiv \left[1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)\right]$$

$$A_2 \equiv \alpha_{ik} \alpha_{ki}$$

$$A_3 \equiv \alpha_{ik} \alpha_{kj} \alpha_{ji}$$

式中, α_{ij} 是雷诺应力张量各向异性部分, 定义为:

$$\alpha_{ij} = -\left(\frac{-\overline{\rho u_i u_j} + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}}{\rho k}\right) \quad 3-47$$

二阶压力应变模型

二阶压力应变模型由 Speziale {L157} 等人提出。

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & -(C_1 \rho \varepsilon + C_1^* P) b_{ij} + C_2 \rho \varepsilon (b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{mn} \delta_{ij}) + (C_3 - C_3^* \sqrt{b_{ij} b_{ij}}) \rho k S_{ij} \\ & + C_4 \rho k (b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}) + C_5 \rho k (b_{ik} \Omega_{jk} + b_{jk} \Omega_{ik}) \end{aligned} \quad 3-48$$

式中, b_{ij} 是雷诺应力各向异性张量, 定义为:

$$b_{ij} = -\left(\frac{-\overline{\rho u_i u_j} + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}}{2\rho k}\right) \quad 3-49$$

平均应变率 S_{ij} 定义为: $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$; $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$; 模型常数

$$C_1 = 3.4, \quad C_1^* = 1.8, \quad C_2 = 4.2, \quad C_3 = 0.8, \quad C_3^* = 1.3, \quad C_4 = 1.25, \quad C_5 = 0.4。$$

二阶压力应变模型不需要考虑壁面反射影响去模拟对数区湍流边界层过程。

浮力对湍流的影响

浮力引起的产生项模拟为：

$$G_{ij} = \beta \frac{\mu_t}{\text{Pr}t} \left(g_i \frac{\partial T}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad 3-50$$

其中， $\text{Pr}t$ 是能量的湍流普朗特数，默认设置值为 0.85。

对于理想气体，把热膨胀系数的定义代入上式，得：

$$G_{ij} = -\frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}t} \left(g_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + g_j \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \quad 3-51$$

雷诺压力模型（RSM）

在 FLUENT 中 RSM 是最精细制作的模型。放弃等方性边界速度假设，RSM 使得雷诺平均 N-S 方程封闭，解决了关于方程中的雷诺压力，还有耗散速率。这意味着这在二维流动中加入了四个方程，而在三维流动中加入了七个方程。由于 RSM 比单方程和双方程模型更加严格的考虑了流线型弯曲、漩涡、旋转和张力的快速变化，它对于复杂流动有更高的精度预测的潜力。但是这种预测仅仅限于与雷诺压力有关的方程。压力张力和耗散速率被认为是使 RSM 模型预测精度降低的主要因素。RSM 模型并不总是因为比简单模型好而花费更多的计算机资源。但是要考虑雷诺压力的各向异性时，必须用 RSM 模型。例如飓风流动、燃烧室高速旋转流、管道中二次流。

Reynolds Stress

直接使用输运方程来解出雷诺应力，避免了其他模型的粘性假设；模拟强旋流相比于其他模型有明显优势。

事最复杂的 RANS 模型。避免了各向同性的涡旋粘性假设。占用较多的 CPU 时间和内存。较难收敛。对于复杂 3D 流动较适用（例如，弯曲管道，旋转，旋流燃烧，旋风分离器），尤其是强旋流运动。

3.10 湍流的大涡模拟方法

大涡数值模拟的基本思想是直接计算大尺度脉动,而只对小尺度脉动作模式假定。所以,实现大涡数值模拟的第一步是把小尺度脉动过滤掉。

3.10.1 大涡模拟的控制方程

由 N-S 方程,可以得到如下的方程:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} +$$

附: Fluent 中大涡模拟

3.3.6 大涡模拟 (LES)

湍流中包含了不同时间与长度尺度的涡旋。最大长度尺度通常为平均流动的特征长度尺度。最小尺度为 Komogrov 尺度。

LES 的基本假设: 1, 动量、能量、质量及其它标量主要由大涡输运; 2, 流动的几何和边界条件决定了大涡的特性, 而流动特性主要在大涡中体现; 3, 小尺度涡旋受几何和边界条件影响较小, 并且各向同性; 大涡模拟过程中, 直接求解大涡, 小尺度涡旋模拟, 从而使得网格要求比 DNS 低。

3.3.6.1 大涡模拟的控制方程

LES 的控制方程是对 Navier-Stokes 方程在波数空间或者物理空间进行过滤得到的。过滤的过程是去掉比过滤宽度或者给定物理宽度小的涡旋, 从而得到大涡旋的控制方程。

过滤变量(上横线)定义为:

$$\bar{\phi}(x) = \int_D \phi(x') G(x, x') dx' \quad 3-55$$

其中, D 表示流体区域; G 是决定涡旋大小的过滤函数。

在 FLUENT 中, 有限控制体离散本身暗中包括了过滤运算,

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{V} \int_V \phi(x') dx', \quad x' \in V \quad 3-56$$

其中 V 是计算控制体体积, 过滤函数为:

$$G(x, x') = \begin{cases} 1/V & x' \in V \\ 0 & x' \notin V \end{cases} \quad 3-57$$

目前, 大涡模拟对不可压流动问题得到较多应用, 但在可压缩问题中的应用还很少, 因此这里涉及的理论都是针对不可压流动的大涡模拟方法。在 FLUENT 中, 大涡模拟只能针对不可压流体(当然并非说是密度是常数)的流动。

过滤不可压的 Navier-Stokes 方程后, 可以得到 LES 控制方程:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u_i}{\partial x_i} = 0 \quad 3-58$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad 3-59$$

其中， τ_{ij} 为亚网格应力，定义为：

$$\tau_{ij} = \overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho u_i} \cdot \overline{u_j} \quad 3-60$$

很明显，上述方程与雷诺平均方程很相似，只不过大涡模拟中的变量是过滤过的量，而非时间平均量，并且湍流应力也不同。

3.3.6.2 亚网格模型

由于 LES 中亚网格应力项是未知的，并且需要模拟以封闭方程。目前，采用比较多的亚网格模型为涡旋粘性模型，形式为：

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\mu_t \overline{S_{ij}} \quad 3-61$$

式中， μ_t 是亚网格湍流粘性系数； $\overline{S_{ij}}$ 是求解尺度下的应变率张量，定义为：

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad 3-62$$

求解亚网格湍流粘性系数 μ_t 时，FLUENT 提供了两种方法。第一，Smagorinsky-Lilly 模型；第二，基于重整化群的亚网格模型。

最基本的亚网格模型是 Smagorinsky [L145] 最早提出的，Lilly [L99] 把它进行了改善，这就是今天的 Smagorinsky-Lilly 模型。该模型的涡粘性计算方程为：

$$\mu_t = \rho L_s^2 |\overline{S}| \quad 3-63$$

式中， L_s 是亚网格的混合长度； $|\overline{S}| \equiv \sqrt{2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}}$ 。 C_s 是 Smagorinsky 常数，则亚网格混合长度 L_s 可以用下式计算。

$$L_s = \min(kd, C_s V^{1/3}) \quad 3-64$$

其中， $k=0.42$ ， d 是到最近壁面的距离， V 是计算控制体体积。

Lilly 通过对均匀各向同性湍流惯性子区湍流分析，得到了 $C_s = 0.23$ 。但是研究中发现，对于有平均剪切或者过渡流动中，该系数过高估计了大尺度涡旋的阻尼作用。因此，对于比较多的流动问题， $C_s = 0.1$ 有比较好的模拟结果，该值是 FLUENT 的默认设置值。

我们再来看看基于重整化群思想的亚网格模型。人们用重整化群理论推导出了亚网格涡旋粘性系数[L182]，该方法得到的是亚网格有效粘性系数， $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ ，而

$$\mu_{eff} = \mu \left[1 + H \left(\frac{\mu_s^2 \mu_{eff}}{\mu^3} - C \right) \right]^{1/3} \quad 3-65$$

式中， $\mu_s = (C_{mg} V^{1/3})^2 \sqrt{2\overline{S_{ij}}\overline{S_{ij}}}$ ， $H(x)$ 是 Heaviside 函数，

$$H(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad 3-66$$

V 是计算控制体体积；重整化群常数 $C_{mg} = 0.157$ ，而常数 $C=100$ 。

对于高雷诺数流动（ $\mu_t \gg \mu$ ）， $\mu_{eff} \cong \mu_t$ ，基于重整化群理论的亚网格模型就与

Smagorinsky-Lilly 模型相同，只是模型常数有区别。在流动场的低雷诺数区域，上面的函数就小于零，从而只有分子粘性起作用。所以，基于重整化群理论的亚网格模型对流动转换和近壁流动问题有较好模拟效果。

3.3.6.3 大涡模拟的边界条件

对于给定进口速度边界条件，速度等于各个方向分量与随机脉动量的和，即：

$$\overline{u_i} = \langle u_i \rangle + I\psi \sqrt{u}$$

其中，I 是脉动强度， ψ 是高斯随机数，满足 $\overline{\psi} = 0$ ， $\sqrt{\overline{\psi'^2}} = 1$ 。

如果网格足够密并可以求解层流底层的流动的话，壁面切应力采用线性应力应变关系，即：

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \tag{3-67}$$

如果网格不够细，则假定与壁面邻近网格质心落在边界层对数区内，则：

$$\frac{\overline{u}}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln E \left(\frac{\rho u_\tau y}{\mu} \right) \tag{3-68}$$

其中，k=0.418，E=9.793。

表 3—1 雷诺平均模型的比较

模型名字	优点	缺点
Spalart-Allmaras	计算量小，对一定复杂程度的边界层问题有较好效果	计算结果没有被广泛测试，缺少子模型，如考虑燃烧或浮力问题
标准 $k-\varepsilon$	应用多，计算量合适，有较多数数据积累和相当精度	对于流向有曲率变化，较强压力梯度，有旋问题等复杂流动模拟效果欠缺
RNG $k-\varepsilon$	能模拟射流撞击，分离流，二次流，旋流等中等复杂流动	受到涡旋粘性各向同性假设限制
Realizable $k-\varepsilon$	和 RNG 模型差不多，还可以模拟圆口射流问题	受到涡旋粘性各向同性假设限制
雷诺应力模型	考虑的物理机理更仔细，包括了湍流各向异性影响	CPU 时间长（2~3 倍），动量和湍流量高度耦合。

壁面函数法

标准 $k-\varepsilon$ 模型等均是高 Re 数的湍流模型，是针对充分发展的湍流才有效的。对近壁区的流动， Re 数较低，湍流发展并不充分，因此在这个区域不能直接使用 $k-\varepsilon$ 模型进行计算。

有两种方法可以将 $k-\varepsilon$ 模型应用于粘性起主要作用的近壁面区域，它们是低 Re 数湍流模型和壁面函数法。低 Re 数湍流模型需要在近壁面区域布置大量的网格节点，越靠近壁面，网格越细，这就需要付出大量的计算时间和内存。FLUENT 采用了应用广泛而又简单有效的壁面函数法。壁面函数法即在粘性支层内不布置任何节点，把第一个与壁面相邻的节点布置在旺盛湍流区域内，也就是将与壁面相邻的第一个控制容积取得很大，这时壁面上的切应力与热流密度仍按第一个内节点与壁面上的速度和温度之差来计算，其关键是如何确定此处的有效扩散系数以及 k, ε 的边界条件，以使计算所得的切应力与热流密度能与实际情形基本相符。这种方法节省内存与计算时间，在工程湍流计算中应用较广。

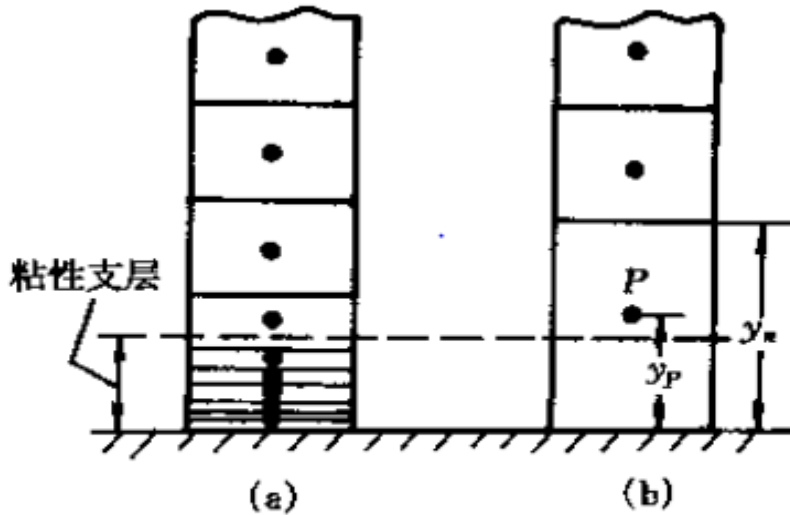


图 9-5 壁面附近区域的处理方法
(为清晰起见界面线改用实线画出)

壁面函数法的基本思想可归纳如下：

- (1) 假设在所计算问题的壁面附近粘性支层以外的地区，无量纲速度与温度分布服从对数分布律。由流体力学可知，对数分布律为：

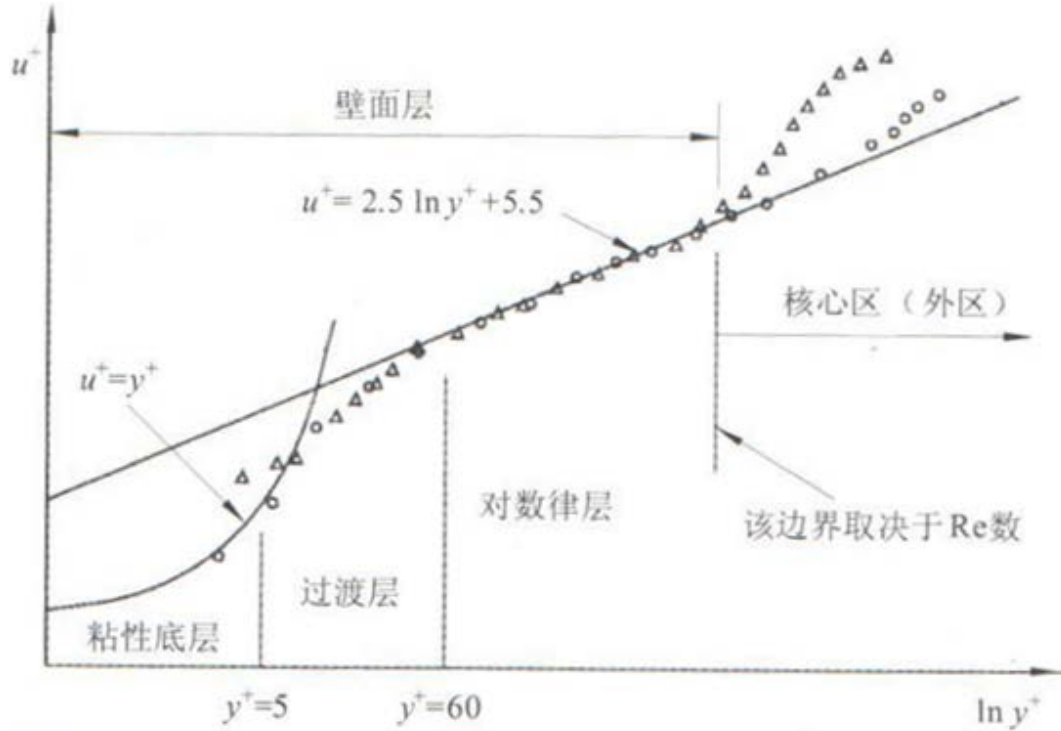
$$u^+ = \frac{u}{v_*^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y v_*^*}{\nu} \right) + B = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (9-29)$$

$$y^+ = \frac{y v_*^*}{\nu} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\tau_w}$$

其中 u 是流体的时均速度， $v_*^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ 为壁面的摩擦速度， τ_w 是壁面切应力， $\kappa = 0.4-0.42$

为卡门(Karman)常数， $B=5.0-5.5$ ， y 为到壁面距离。

以 y^+ 的对数为横坐标，以 u^+ 为纵坐标将壁面区内三个子层及核心区内的流动可表示在下图中。雨中小三角形及小空心圆代表在两种不同 Re 数下实测得到的速度值 u^+ ，直线代表对速度进行拟合后的结果。



壁面区 3 个子层的划分与相应的速度

当 $y^+ < 5$ 时，所对应的区域是粘性底层，这时速度沿壁面法线方向呈线性分布，即：

$$u^+ = y^+$$

当 $60 < y^+ < 300$ 时，流动处于对数律层，这时速度沿壁面法线方向呈对数律分布，即：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

B 和 E 是与表面粗糙度有关的常数，对于光滑壁面有 $\kappa=0.4$ ， $B=5.5$ ， $E=9.8$ ，壁面粗糙度的增加将使的 B 值减小。

在以上定义中只有时均值 u 而无湍流参数，为了反映湍流脉动的影响需要把 u^+ ， y^+ 的定义做一下扩展：

$$y^+ = \frac{y(\kappa_u^{1/4} - 1/2)}{\nu} \quad (9-30a)$$

$$u^+ = \frac{u(\kappa_u^{1/4} - 1/2)}{\tau_w/\rho} \quad (9-30b)$$

同时引入无量纲的温度：

$$T^+ = \frac{(T - T_w)(c_u^{1/4} k^{1/2})}{(q_w \kappa_P)}$$

在这些定义式中，既引入了湍流参数看，同时又保留壁面切应力 τ_w 及热流密度 q_w 。正是后面这两个量是工程计算中主要的求解对象。可以证明。上述关于 y^+ ， u^+ 的定义是常规定义的一种推广。当边界层流动中脉动动能的产生与耗散相平衡时，上述定义就与常规定义一致。采用上述定义，速度的对数分布律表示为：

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad 9-31a$$

$$T^+ = \frac{\sigma_P \sigma_T}{\kappa \sin \pi / 4} \ln(Ey^+) + \frac{1}{\sigma_T} \left(\frac{\pi/4}{\sin \pi / 4} \right) \left(\frac{A}{\sigma_T} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sigma_T} \right)^{-1/4} \quad 9-31b$$

其中 $\ln E \kappa B =$ ； σ_L 和 σ_T 分别是分子 Pr 数及湍流 Prandtl 数；A 为 van Driest 常数对于光滑圆管取为 26， κ 及 B 是对数分布律中的常数。如果去 $\kappa = 0.4$ ，则

$$\left(\frac{\pi/4}{\sin \pi / 4} \right) \left(\frac{A}{\sigma_T} \right)^{1/2} = 8.955 \cong 9$$

此式中等号右端第二部分是据实验结果整理出来的，它考虑了 Pr 数的影响。当 $\sigma_P = \sigma_T =$

时， $T^+ = u^+$ ，这就是 Reynolds 比拟成立的情形。

(2) 在划分网格时，把第一个内节点 P 布置到对数分布律成立范围内，即配置到旺盛湍流区域。

(3) 第一个内节点与壁面之间区域的当量粘性系数 μ_t ，及当量导热系数 k_t ，按下列方式确定：

$$\mu_t = \frac{u_P - u_w}{y_P} \quad 9-32a$$

$$q_w = k_t \frac{T_P - T_w}{y_P} \quad 9-32b$$

这里 q_w ， τ_w 由对数分布律所规定。 u_w ， T_w 为壁面上的速度与温度。据此式，可求得第一个内节点上的 μ_t 与 k_t 的计算式。在第一个内节点上与壁面相平行的流速及温度应满足对数分布律，即

$$\frac{u_P (c_u^{1/4} k^{1/2})}{\tau_w \kappa_P} = \ln \left[E y_P \frac{(c_u^{1/4} k^{1/2})^{1/2}}{\kappa_P} \right] \quad 9-33$$

$$\frac{(T_p - T_w)(c^{1/4} k^{1/2})}{q_w \rho c \kappa \nu_p} = \frac{\sigma_T}{P} \ln \left[\frac{y_p (c^{1/4} k^{1/2})^{1/2}}{P} \right] + T \quad 9-34$$

其中

$$P = 9 \left(\frac{\sigma_T}{\sigma_T} - 1 \right) \left(\frac{L}{T} \right)^{-1/4} \quad 9-35$$

将式 9-32a 与式 9-33 相结合，得节点 P 与壁面间的当量扩散系数 μ_t 为

$$\mu_t = \left[\frac{y_p (c^{1/4} k^{1/2})}{\nu} \right] \frac{\mu}{\ln(Ey_p^+)} = \frac{y_p^+}{P}$$

其中 μ 为分子粘性系数。类似地，将式 9-32b 同式 9-34 相结合，得：

$$k_t = \lambda \frac{y_p^+ \mu_c}{\frac{\sigma_T}{\kappa} \ln(Ey_p^+) + P} = \frac{y_p^+}{\frac{\sigma_T}{\kappa} \ln(Ey_p^+) + P} = \frac{y_p^+}{u_p^+} Pr$$

式 9-36, 9-37 所得出的 μ_t 与 k_t 就用来计算壁面上的切应力（按式 9-32a）及热流密度（式 9-32b）。可以看出，从计算上看壁面函数法的一个主要内容就在于确定壁面上温度的当量导热系数 k_t 及流速 u 的当量粘性系数 μ_t 。

(4) 对第一个内节点 P 上 k_p 及 ε_p 的确定方法作出选择， k_p 之值仍按 k 方程计算，其边界

条件取为 $\left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_w = 0$ (y 为垂直于壁面的坐标)。值得指出的是，如果第一个内节点设置在

粘性支层内且离开壁面足够的近，自然可以取 $k_w = 0$ 作为边界条件，但在壁面函数法中，P 点置于粘性支层之外。在这一个控制容积中， k 的产生与耗散都较向壁面的扩散大得多，因

而可以取 $\left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)_w \approx 0$ 。至于壁面上的 ε 值，按式 9-22b 很难确定，因为在壁面附近 k 及 l 同

时趋近于零。为避免给壁面的 ε 赋值的这一困难，P 点的 ε 值不通过求解离散方程，而是据代数方程来计算。按式 9-22b，已知 k_p 后，只要选定 l 的计算方法， ε_p 之值即可算出。常用的一种方法是按混合长度理论计算此处的 l ：

$$\varepsilon_p = \frac{C_{\mu}^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa y_p} \quad 9-38$$

在使用通用程序求解时，对 ε 求解区域仍可为整个区域，但采用大系数法？使 P 点的 ε 取得规定的值。

所谓壁面函数就是指式 9-33-9-38 这一类代数关系式。