

无痛苦N-S方程笔记

An Introduction of The Navier-Stokes Equation
Without Pain

李东岳

$$A = R^{-1} \Lambda R$$



前言 本笔记素材主要来源于为参加东岳流体CFD课程的同学准备的预习资料。本笔记一步一步的从最基本的守恒法则开始推导N-S方程，推导过程详实且不失简短（20余页），是非常易懂的CFD入门补充资料。因此非常适用于无CFD基础的初学者。注意是无CFD基础而不是CFD基础薄弱。同学们只要懂高等数学，直接上手学习本笔记即可。

Navier-Stokes方程（N-S方程）是CFD最基本的控制方程，其由守恒定律推导而来：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (2)$$

其中 ρ 为密度， \mathbf{U} 为速度， p 为压力， ν 为粘度， τ 为剪切应力。N-S方程具有以下特点：

- 方程(2)中左边第二项是关于 \mathbf{U} 乘积的偏导数，这种未知量和未知量乘积的问题构成非线性问题，CFD对非线性问题需要特殊处理。另一方面，非线性的双曲问题的解可能会存在间断（如激波）。激波通常存在于高超声速的欧拉问题求解中。同时，非线性项也是湍流在数学方程中的体现；
- 方程(2)的数学特征为抛物线。不同数学特征的问题需要调用不同的时间离散格式，隐性时间格式更有利于求解抛物线问题。若方程(2)中省略若干项则会改变方程的数学特征，例如若将方程右侧置为0，则变为双曲特征的欧拉方程。欧拉方程得益于其双曲特性，可采用迎风类显性算法推进，各种基于有限体积法的高分辨率格式因此而生（交错网格中心格式、中心-迎风格式等）；
- 方程(1)和(2)中存在未知量压力 p ，同时压力和速度是耦合在一起的（二者相互影响），但并没有单独的压力方程。这导致压力的求解需要特殊的策略。这也是CFD中压力基SIMPLE/PISO算法、密度基、耦合/解耦算法要处理的问题；
- N-S方程之源起：N-S方程为宏观方程，调用了宏观假定，其可从玻尔兹曼方程（又名动理学方程）推导而来。在更底层的介尺度研究领域，N-S方程也即从介尺度模型演化的宏观二阶矩模型。在无压力无粘性的条件下具备弱双曲特征。由于失去了高阶矩的统计学特征，因此N-S方程在某些情况下是不适用的；

结合上述特点可见N-S方程中存在大量的数学问题。初学者在这里肯定不明白其具体含义。同时方程中充满火星符号（如 ∇ ， ∂ ）。东岳流体CFD课程（主要是其中的General CFD课程）因此分为两步，第一步是基本的N-S方程入门，第二部是N-S方程求解。第一步需要同学们通过本笔记进行预习。第二部将在General CFD课程上讲授。

致谢 算法博大精深、作者水平有限，本笔记难免有不妥和错误之处，敬请各位老师同学批评指正。勘误、内容增补等基于本笔记的任何问题可前往[CFD中文网](https://www.dyfluid.com)讨论，或邮件联系勘误：li.dy@dyfluid.com

作者简介 李东岳，[东岳流体](https://www.dyfluid.com)、CFD界、[CFD中文网](https://www.dyfluid.com)创始人

本笔记采用 \LaTeX 制作，撰写工作由[东岳流体](#)提供赞助支持。电子版收发2019年2月14日发布，最新修订于2019年5月4日

- 增补: [2.4.3](#)节, 2019.02.20, 李东岳
- 勘误: 方程([1.31](#))左侧第二项 $\frac{\partial}{\partial t}$ 修正为 $\frac{\partial}{\partial x}$, 2019.02.22, 金国庆
- 增补: 增加方程([2.39](#)) - ([2.45](#)), 2019.02.25, 李东岳
- 增补: [2.1](#)节中关于计算流体力学和流体力学的区别, 2019.03.07, 李东岳
- 增补: [2.5.3](#)节; [2.5.4](#)节中关于 τ 在可压缩和不可压缩情况下的讨论, 2019.03.13, 李东岳
- 勘误: 修正很多图片与方程交叉引用的问题, 2019.03.14, [涂灿](#)
- 勘误: 修正一些错别字, 2019.05.04, [Frank0514](#)

目录

第一章 方程标识	1
1.1 矢量标识法	1
1.2 张量标识法	2
1.3 偏导标识法	4
1.4 运算符标识法	4
第二章 流体与N-S方程	5
2.1 导论	5
2.2 泰勒公式	6
2.3 流动模型	7
2.3.1 有限控制体模型	7
2.3.2 无穷小微团模型	7
2.3.3 物质导数	8
2.4 连续性方程	9
2.4.1 从空间位置固定的无穷小微团推导连续性方程	10
2.4.2 空间位置固定有限控制体推导的连续性方程	11
2.4.3 通量与速度散度的物理意义	12
2.4.4 从空间位置移动的无穷小微团推导的连续性方程	15
2.4.5 连续性方程小结	15
2.5 动量方程	16
2.5.1 受力分析	16
2.5.2 动量守恒	18
2.5.3 守恒/非守恒转化	19
2.5.4 封闭	19
2.5.5 积分观点	21
补充资料	25

第一章 方程标识

学习CFD理论首先遇到的就是各种各样的偏微分算符。能看懂、拆分CFD方程是研究算法的最基本步骤。给出一个CFD方程（如动量方程），可以不知道是怎么推出来的，但要能看懂。本章介绍CFD方程的各种写法，不涉及到任何的CFD算法。

1.1 矢量标识法

本笔记中主要采用矢量标识法讨论CFD方程，在矢量标识法中，标量全部采用斜体，如压力 p 。矢量采用正体加粗，如速度矢量 \mathbf{U} ，其具有三个分量 u_1, u_2, u_3 或 u, v, w 。二阶张量也采用正体¹，比如应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ ，其具备6个分量，其可表示为：

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

下面粘度 ν 为1的不可压缩流体动量方程为例对其进行拆分，这个方程若采用矢量标识法可以写为：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) \quad (1.2)$$

其中的 \mathbf{U} 为速度矢量， p 为压力， ρ 为密度。一般来讲，CFD文献中通常采用方程(1.2)的形式，而并不进行展开进而更加紧凑。下面介绍如何将其展开为3个方程。

- 方程(1.2)第一项表示 \mathbf{U} 对时间的偏导数，因为 \mathbf{U} 为矢量，故其导数的分量形式为：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

其中 u_1 表示 x 方向速度， u_2 表示 y 方向速度， u_3 表示 z 方向速度。这样拆分之后的方程，即为各个方向的速度针对时间的偏导数。如果理解方程(1.3)有困难，那么有必要预习一下《高等数学》（同济大学版）第二章。

- 方程(1.2)第二项 $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ 中的 $\mathbf{U}\mathbf{U}$ 是一种简写，完整形式为 $\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$ ， \otimes 是一个张量运算符。依据 \otimes 的定义， $\mathbf{U}\mathbf{U}$ 可以写为：

$$\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

接下来看 $\nabla \cdot$ ，其为散度算符，有时用 div 来表示。对一个矢量（1阶张量）做散度的结果为一个标量（0阶张量），对一个2阶张量做散度的结果为矢量（1阶张量）。因此，对任意 n 阶张量做散度操作之后，结果为 $n-1$ 阶

¹如果难以理解二阶张量的含义，可以这样尝试：矢量是一阶张量，具有三个分量，二阶张量则具有9个分量。

张量。举例，对一个矢量 \mathbf{U} 做散度有： $\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$ 。因此，方程(1.2)中的第二项 $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ 即为对一个2阶张量做散度：

$$\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2 u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3 u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2 u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3 u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1 u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2 u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3 u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

- 方程(1.2)第三项也存在 ∇ ，这一项中没有了 \cdot 符号。单独的 ∇ 表示梯度运算，有时也被写为grad。对一个标量（0阶张量）做梯度的结果为一个矢量（1阶张量），对一个矢量做梯度的结果为2阶张量。因此，【对任意 n 阶张量做梯度之后的结果为 $n+1$ 阶张量】。举例，对一个标量 p 做梯度有：

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

方程(1.2)第四项 $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{U})$ 为对速度 \mathbf{U} 先做梯度再做散度。 $\nabla \cdot \nabla$ 通常也写为 ∇^2 ，并称为拉普拉斯算子，有时也被写为laplacian。即 $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \nabla^2 \mathbf{U}$ 。现尝试对其进行展开：

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

结合方程(1.3)、(1.5)、(1.6)、(1.7)这四项，有三个方程。下面仅列出 x 方向（取各个项展开形式中的第一行）：

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2 u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3 u_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \quad (1.8)$$

方程(1.8)即为关于 u_1 的方程。仔细观察方程(1.8)，其只不过是各种导数的加和。除了 u_1 之外，如果所有的变量均为已知，那么就可以求出 u_1 关于时间的步进（看那个第一项速度关于时间的导数）。方程(1.8)的特点可参考前言部分的内容。

1.2 张量标识法

CFD中的偏微分方程除了用矢量标识法表示外，还可以用张量标识法表示，这种方法在SCI论文以及书籍中也非常常见[7]。在张量标识法中，符号的下标表示张量的阶数。如标量压力 p 可以记为（二者无区别）：

$$p \equiv p \quad (1.9)$$

矢量 \mathbf{U} 可以写为 u_i ：

$$u_i \equiv \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

二阶张量 $\boldsymbol{\tau}$ 定义为 τ_{ij} ：

$$\tau_{ij} \equiv \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

一定需要注意，在使用张量标识法的时候， u_i 表示矢量而不是某个具体的分量。举例说明：如果某文章【采用张量标志法，则 u_i 表示速度矢量， u_1 表示 x 方向速度分量】。这和上一节的写法是不同的。在本笔记中， \mathbf{U} 表示速度矢

量，【 u_i 表示各个方向的分量而不是速度矢量】，其中 $i = 1, 2, 3$ 。因此，遇到 u_i ，采用不同的数学表示方法，其含义可能不同。张量标志法通常结合爱因斯坦操作符使用变成非常强大的武器。举例说明：当在做乘积操作的时候，如果【某一项中下标重复，那么则需要进行加和】如：

$$a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (1.12)$$

$$\tau_{ij} \tau_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \tau_{ij} =$$

$$\tau_{11}\tau_{11} + \tau_{12}\tau_{12} + \tau_{13}\tau_{13} + \tau_{21}\tau_{21} + \tau_{22}\tau_{22} + \tau_{23}\tau_{23} + \tau_{31}\tau_{31} + \tau_{32}\tau_{32} + \tau_{33}\tau_{33} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \quad (1.13)$$

$$\tau_{ij} u_j = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} u_j = \begin{bmatrix} \tau_{11}u_1 + \tau_{12}u_2 + \tau_{13}u_3 \\ \tau_{21}u_1 + \tau_{22}u_2 + \tau_{23}u_3 \\ \tau_{31}u_1 + \tau_{32}u_2 + \tau_{33}u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \quad (1.14)$$

方程(1.14)中 $\tau_{ij}u_j$ 中的 j 出现两次，需要加和。 i 出现一次，表示矢量。

对于二阶张量，将在一项中最少出现两个下标如 i, j 。例如下文方程中 $D_{ik}E_{kj}$ 中的 i, j 表示二阶张量， k 表示加和：

$$\tau_{ij} = D_{ik} E_{kj} = \sum_{k=1}^3 D_{ik} E_{kj} = D_{i1}E_{1j} + D_{i2}E_{2j} + D_{i3}E_{3j} = \mathbf{D}\mathbf{E} \quad (1.15)$$

$$\tau_{ij} = D_{ki} E_{kj} = \sum_{k=1}^3 D_{ki} E_{kj} = D_{1i}E_{1j} + D_{2i}E_{2j} + D_{3i}E_{3j} = \mathbf{D}^T \mathbf{E} \quad (1.16)$$

张量标识法中还存在若干基本函数，如克罗内克函数 δ_{ij} ：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1.17)$$

很明显：

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \quad (1.18)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \quad (1.19)$$

同样的，对于偏微分方程组也可以进行类似的表示。例如对于下面的方程（即连续性方程）：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial z} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.20)$$

其中 $\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}$ 中出现两次 i ，则需要加和。对于下面的方程（即动量方程），其可以表示为：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.21)$$

其中 $\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}$ 中出现两次 j ，则需要加和。出现一次 i ，则表示分量。因此其为一个矢量的方程。现在随意从文献中抽取一个方程，如文献[7]中 $k - \varepsilon$ 模型的湍流动能方程，即方程(4.9)为：

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1.22)$$

对其分析可知首先其为一个标量方程而非矢量方程组，且其展开形式为：

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \rho u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1.23)$$

1.3 偏导标识法

CFD一个重要分支是高超音速动力学。在高超音速研究领域，大量的文章和书籍中均采用偏导标识法进行方程分析[4]。在偏导标识法中，方程(1.3)可以表示为：

$$\mathbf{U}_t \equiv \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (1.24)$$

同理，压力 p 对 x 的导数可以写为：

$$p_x \equiv \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.25)$$

一维连续性方程的偏导标识法可以写为：

$$\rho_t + (\rho u_1)_x = 0 \quad (1.26)$$

三维连续性方程的偏导标识法可以写为：

$$\rho_t + (\rho u_1)_x + (\rho u_2)_y + (\rho u_3)_z = 0 \quad (1.27)$$

方程(1.27)在矢量标识法中可以表示为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (1.28)$$

另外，在偏导标识法中，偏微分系统通常用下面的方程表示：

$$q_t + Aq_x = 0 \quad (1.29)$$

其中 q 可以为标量，也可以为矢量。如果 q 为矢量，且具备 m 个分量，那么 A 则表示 $m \times m$ 阶矩阵。例如下面的气动声学方程

$$\begin{cases} p_t + \rho c^2 u_x = 0 \\ u_t + (1/\rho)p_x = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

其中未知量为 p 和 u ， ρ 和 c 为密度和声速，其可以写为下面更好理解的形式：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c^2 \rho \\ 1/\rho & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

在这种情况下有：

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & c^2 \rho \\ 1/\rho & 0 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

偏导标识法的这种写法可以更好的用于分析偏微分方程系统的数学特征。

1.4 运算符标识法

运算符标识法在文章中比较少见，其只不过是将数学符号翻译为相应的英文名字。例如，在笛卡尔坐标系下有

$$\text{div } \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (1.33)$$

$$\text{grad } p = \nabla p \quad (1.34)$$

$$\text{laplacian } p = \text{div grad } p = \nabla \cdot (\nabla p) \quad (1.35)$$

$$\text{curl } \mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{U} \quad (1.36)$$

在这里需要注意的是，前文使用的 ∇ 算符在不同的坐标系下需要转换。但运算符标识法不需要转换。

第二章 流体与N-S方程

2.1 导论

流体通常泛指气体和液体。不同于固体，流体在施加剪切力的时候，会发生形变。且流体没有固定的形态。流体在快速变形的时候，也会存在一种抵抗的力，这种抵抗的力一旦流动停止，也即消失。流体这种抗拒本身发生变形的力称之为【粘性力】。不同的流体存在不同的粘性力。有些流体的粘性很大，有些流体的粘性很小。大部分日常生活中接触的为【牛顿流体】，其形变率和剪切力呈现线性的关系。部分流体为【非牛顿流体】，其剪切率和形变率呈现非线性的关系。

标准状态下，一立方毫米气体包含大约 2.43×10^{16} 个分子。由于气体分子之间的碰撞非常频繁，有效的将气体分子合理的进行了分布。因此这些粒子群表现的并不是单一的粒子而是连续介质。标准情况下，气体分子每秒钟大约进行 10^9 次碰撞，每一次碰撞导致移动的距离非常小（约 5×10^{-8} 米）。前者即所谓的【碰撞频率】，后者即所谓的【分子自由程】。

液体不同于气体的典型特征为其对体积变化的巨大抵抗力。例如我们不能把一瓶矿泉水压缩成一瓶盖的大小。然而气体对体积变化的抵抗力是相对小的。例如我们可以轻易地用手对一个封闭的空的矿泉水瓶进行压缩。基于流体的密度是否为常数，进一步可以分为【不可压缩流体】和【可压缩流体】。液体通常考虑为不可压缩流体。虽然气体比液体的可压缩性高很多，但是是否考虑气体的可压缩性主要取决于具体情况。比如在空气动力学中，如果我们的气流速度很小，气体的可压缩性对汽车的设计影响较小，但是对于飞机，其速度有可能和声速接近或者大于声速，在这种情况下气体的可压缩性对飞机的设计非常重要。有些高压容器中，即使是液体，也应该考虑可压缩性。因为只有考虑了可压缩性，才能解释某些奇怪的物理现象，比如水锤。

特殊的情况下存在一些特殊的现象。比如宇宙中的空气接近真空，这种通常被称之为【稀薄气体】。稀薄气体由于气体的分子数量太少，因此气体的碰撞并不均衡。另一种为基本无碰撞的颗粒流，在颗粒不相互碰撞的情况下，会发生【颗粒轨迹交叉】，也就是一个粒子从左向右移动，另一个粒子从右向左移动，在某个位置，两个粒子彼此穿过并不发生碰撞。以上两种情况为一些极端的情况，这些情况并不能用Navier-Stokes (N-S) 方程来描述。在这里需要表明的是N-S方程最重要的前提是【连续介质假定】。其可以理解为一个网格单元内存在大量的流体分子或固体颗粒。分子/颗粒之间碰撞均衡。这种情况下才能使用N-S方程来描述。在N-S方程不能描述的情况下，只能调用玻尔兹曼方程。本笔记仅仅考虑碰撞均衡的N-S方程¹。

计算流体力学（CFD）是采用计算机求解控制流体流动的偏微分方程组的学科。以日常生活中的电风扇吹风为例。电风扇吹出来的空气的流动看不见、摸不着，但是能明显的感觉出来吹得风不一样。风扇转的越快，风越大越凉快，相对应的能耗也越多。工业上的设计目标就是用最小的能耗，吹出最大的风让一群人都很凉快。在这物理现象的背后，风扇吹出来的风的速度、压力、温度等均遵循相关的物理定律，这个物理定律可以写成数学中偏微分方程的形式，其主要有两个方程：一个是【连续性方程】（表明流动着的空气质量是守恒的），另一个是【动量方程】（表明空气的流动满足牛顿第二定律）。在考虑传热的情况下，还应该附加【能量方程】（表明能量守恒定律）。暂且可以这样理解：求解这两个关于时间的方程，就可以求出风扇吹出来的风在某一时刻的流速。有了流速

¹若流体的特征长度 L 远远大于平均分子自由程 λ ，若流体的分子碰撞次数在标准状态下分子的碰撞频率左右（不远低于），则可用N-S方程进行描述。 λ 和 L 的比值为粒子克努森数。N-S方程只在克努森数远远小于1的情况下适用。

之后，同时通过风扇叶片表面的受力计算一下风扇的功率，就可以算出耗电量进行相关的设计。如果通过实验，工程师可以设计100个叶片的形状，检测风力的大小和能耗并做分析，取最优的叶片形状。通过CFD，工程师可以生成100个叶片的几何模型，用计算机求解这100个几何模型，就可以计算出风力的大小和能耗进行分析。在工业应用中，一个机翼的实验工作可能要花费上百万元，一个化工反应器的中试实验工作可能需要上亿。但是通过CFD计算模拟，可能需要几万元就可以了。可见，CFD的目标是让工程师从实验中解脱，并节省实验资金，进而进行工业设计。在有些情况下，可能会听到一些新词汇，如数值风洞、数值水池等，这实际上就是用CFD来模拟风洞内的流场、用CFD来模拟水池内水的流动。

问题在于，用于描述CFD的方程非常难解，甚至目前【解析解】（方程的准确解，比如 $x = -1$ 是 $x + 1 = 0$ 的解析解）的存在与否都无从考证。目前CFD在学术上的研究，即如何获得这些方程的解，这些解通常被称之为【数值解】。在理想的情况下，数值解无限趋近于解析解。然而，理想很丰满，现实很骨感。用户获得的数值解，总是和解析解存在或多或少的差距。

各种算法犹如各路神仙过河一样，总会通过各种奇葩的方法来获得CFD方程的数值解。比如CFD中有一种方法为光滑粒子法，其将流体看做是粒子，然后对这些粒子进行跟踪进行求解并获得数值解。最近，还有研究学者通过深度学习来模拟CFD的方程并求解。目前CFD求解方法中最广泛的，莫过于【有限体积法】。目前主流的CFD软件，均使用的有限体积法进行求解。

有限体积法的思想也很简单。举例，如果要分析整个河流的流动状态、整个房间的热流密度、血管内的血流状态，有限体积法是通过从局部到整体的方法进行分析。例如我们把整个房间分成一个个的小格子，如果要获得每个小格子内的流动速度，那么这些格子构成的整体就是整个房间的流动速度。格子的数量越多，格子的速度场越能代表整个房间的速度场。本文主要介绍有限体积法。

最后要强调的是CFD和流体力学之间的差异。二者之间存在不可割舍的联系，但差异也非常明显。流体力学着重研究【如何构建偏微分方程】，CFD着重研究【如何解偏微分方程】。因此，可以理解为首先通过流体力学研究构建对应的数学模型，然后通过CFD对模型进行求解的过程。流体力学侧重建模，CFD侧重求解。没有流体力学构建的模型CFD无用武之地，流体力学构建模型之后没有CFD则不可能获得解。举例，多相流体力学的研究者可能对两个气泡之间如何破碎感兴趣，因此这些研究学者可能是通过实验监控气泡周围的流场数据（如湍流动能），构建一个破碎频率关于湍流动能的关系式。多相计算流体力学的研究者在拿到这个关系式之后，需要用数值方法去对其进行求解。另一方面，流体力学研究者离不开实验，CFD研究者可以无实验进行研究。流体力学的顶级期刊是Journal of Fluid Mechanics等，CFD的顶级期刊是Journal of Computational Physics等。当然学术界对于二者并没有明显的区别划分。

2.2 泰勒公式

在推导N-S方程之前，有必要介绍一下泰勒公式。假设有函数 $f(x)$ ，其用来表示整个 x 的型线。泰勒公式可以理解为函数 $f(x)$ 可以表示为若干个函数的加和：

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \dots \quad (2.1)$$

当 $x = x_1$ 的时候，泰勒公式可用于求 $f(x_1)$ 的值：

$$f(x_1) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x_1 - x_0) + \dots \quad (2.2)$$

现以 $f(x) = x^3$ 举例，其导数为 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2$ 。取 $x_0 = 2$ ，有 $f(x_0) = 8$ ，则有：

$$f(x_1) = 8 + 3 \times 2^2(x_1 - 2) + \dots \quad (2.3)$$

如果 $x_1 = 3$ ，有 $f(x_1) = 14$ 。如果 $x_1 = 2.1$ ，有 $f(x_1) = 8.6$ 。可见 x_1 越来越趋向于 x_0 ，通过泰勒公式计算的值越精准。这在CFD中也反映了网格单元越小，结果越精准的特性。

泰勒公式也可用于多元函数，如有函数 $f(x, y, z, t)$ ，其位于 (x_1, y_1, z_1, t_1) 点的泰勒展开可表示为²：

$$f(x, y, z, t) = f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} (x - x_1) + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=y_1} (y - y_1) + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} (z - z_1) + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_1} (t - t_1) + \dots \quad (2.4)$$

2.3 流动模型

在谈具体的方程之前，首先需要介绍流动模型的概念。有限体积法是通过每一个具体的流动模型进行分析，进而获得整体解的过程。在这里来理解流动模型可能会觉得比较抽象。但是在阅读完本文之后，回过头再来看流动模型，会有柳暗花明的感觉。

2.3.1 有限控制体模型

如图2.1所示，有限控制体其进一步可以分为【空间位置固定的有限控制体】，和【随流线运动的有限控制体】。空间位置固定的有限控制体可以理解为一个空旷的房间（当然控制体的体积要小的多），它会流入、流出某些物理量（如质量能量等），这些量的产生和消失符合物理学基本定律。举例，这个房间内部充满了人（不能再容纳更多的人），如果挤进来10个人，那么必然会挤出去10个人。即为【质量守恒】。随流线运动的有限控制体可以理解为随风飘扬的一个气球，气球内部存在大量的空气，且空气和外界不发生交换（质量不变）。这个气球的运动当然满足物理的基本定律。在后续的讨论中，可以看出【从有限控制体推导的方程为积分形式】，且若采用空间位置固定的控制体，方程为【守恒型方程】。若采用随流线运动的控制，方程为【非守恒型】。要透彻的理解CFD中守恒和非守恒的概念，目前来讲并不容易。在此只需要知道有不同的方程的概念就可以。

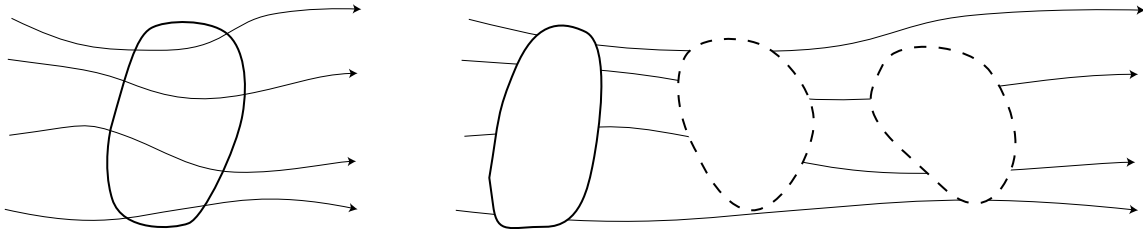


图 2.1: 左图：空间位置固定的有限控制体，流体流入控制体后继续流出。右图：空间位置移动的有限控制体，其沿着流体的流线进行移动。

2.3.2 无穷小微团模型

如图2.2所示，类似有限控制体，无穷小微团也可以进一步可以分为【空间位置固定的无穷小微团】，和【随流线运动的无穷小微团】。无穷小微团和有限控制体的重要区别在于无穷小微团的体积、质量等变量可以用数学中的 dV 、 dm 来表示。【有限控制体的体积要比无穷小微团要大】，也即有限控制体中包含了大量的 dV 。从数学的角度出发， dV 表示这个无穷小微团的体积足够小。但是需要注意的是，为了使得CFD方程适用于连续介质，这个 dV 还要包含一定量的流体分子³。正因为无穷小微团的各个属性可以用数学中的 $d\dots$ 来表示，同时有限控制体包含了大量的流体微团，这也就体现了从有限控制体推导出来的方程为积分形式，【从无穷小微团推导出来的方程为微分形式】。现在以空间位置固定的有限控制体或流体微团为例。我们要了解一个房间内流体的流动状况。如果房间内每

²更详细的关于泰勒公式的内容请参考文献[1]

³N-S方程并不是普适性的方程，更为底层的为玻尔兹曼方程。只有满足连续性假定，才能使得BGK假定成立，进而将玻尔兹曼方程简化为N-S方程。例如对于稀薄气体，由于并不满足连续性假定，因此N-S方程并不适用，只能通过数值方法求解玻尔兹曼方程（如矩方法[6]、离散速度法[8]、蒙特卡洛法[3]等）。对于多相流领域同样具有类似的情况，比如颗粒轨迹交叉问题就不满足连续介质假定[5]。

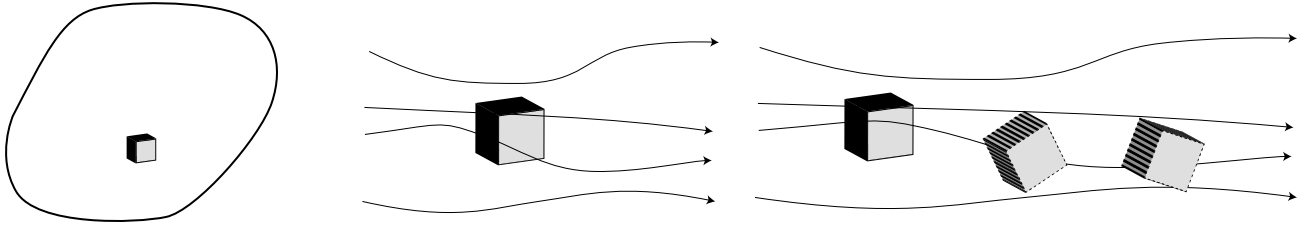


图 2.2: 左图: 有限控制体 (大圈) 和无穷小微团 (小正方体)。中图: 空间位置固定的无穷小微团, 流体流入微团后继续流出。右图: 空间位置移动的无穷小微团, 其沿着流体的流线进行移动。

个有限控制体或流体微团的流动均已知, 那么我们就可以获得这个房间完整的流体流动图像。更形象的, 我们把房间分为9个位置并用9个有限控制体或流体微团来表示, 如果采用实验的方法对这9个有限控制体或流体微团检测速度, 那么我们就可以认为这9个速度的场即为整个房间的速度场。如果我们把这个房间分为 N 块, 并用实验的方法检测这 N 个位置的速度, 我们会得到一个更精确的速度场。实际上, 房间内的 N 块, 即可以近似的理解为CFD中网格的概念。CFD要做的, 就是通过计算机, 求解这些划分的小块上的物理量。

2.3.3 物质导数

物质导数就是高等数学中的全导数。理解物质导数需要借助上文中提及的流动模型。现选取随流线运动的无穷小微团上的温度 $T(x, y, z, t)$ 进行分析。需要注意的是, 在上文中指出无穷小微团上的变量可以微分算符 d 来表示, 这里的温度并没有表示为 dT , 其原因在于温度并不是一个随物质的量变化而变化的量。不管存在多少的分子, 温度均为 T 。类似的这种量, 在CFD被称之为【强度量】。反之, 质量体积等为【广度量】。

在 t_1 时间点, 流体微团的位置在 (x_1, y_1, z_1) , 温度为 $T_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 。随着微团的移动, 在 t_2 时刻, 位置变为 (x_2, y_2, z_2) , 同时温度为 $T_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 。既然温度为时间和位置的函数, 则可参考方程(2.4)对温度进行泰勒展开:

$$T_2 = T_1 + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} (x_2 - x_1) + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y_1} (y_2 - y_1) + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_1} (z_2 - z_1) + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=t_1} (t_2 - t_1) \quad (2.5)$$

对方程(2.5)左右两边除以 $t_2 - t_1$ 有:

$$\frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=t_1} \quad (2.6)$$

接下来定义温度 T 在 (x_1, y_1, z_1) 点的物质导数为移动的无穷小微团通过 (x_1, y_1, z_1) 点的时候, 无穷小微团针对时间的温度瞬时变化率, 即:

$$\left. \frac{DT}{Dt} \right|_{x=x_1, y=y_1, z=z_1} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1} \quad (2.7)$$

依据速度的定义, 有 $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$, $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$, $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$, 代入到方程(2.6)有 (x_1, y_1, z_1) 点的物质导数:

$$\left. \frac{DT}{Dt} \right|_{x=x_1, y=y_1, z=z_1} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} u + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=y_1} v + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_1} w + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=t_1} \quad (2.8)$$

对于任意一点, 有

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

方程(2.9)即为【温度 T 在笛卡尔坐标系下的物质导数】定义。可见, 【物质导数即为数学上物理量对时间的全导数】。参考内积的数学定义, 方程(2.9)可写为:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T \quad (2.10)$$

上述以温度 T 举例说明物质导数的由来。类似的, 有速度 \mathbf{U} 的物质导数:

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (2.11)$$

【速度的物质导数表示流体微团的加速度】。除此之外，任何的流场数据都可以用物质导数来表示，如：

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + u \frac{\partial()}{\partial x} + v \frac{\partial()}{\partial y} + w \frac{\partial()}{\partial z} = \frac{\partial()}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla() \quad (2.12)$$

方程(2.12)中的 $\frac{\partial()}{\partial t}$ 又称为【局部导数】(local derivative)，第二项 $\mathbf{U} \cdot \nabla()$ 又称之为【对流导数】(convective derivative)。需要注意的是，如果求解器不调用拉格朗日粒子，方程(2.10)左边的物质导数项并不能够直接求出，其只能通过方程右边的方程计算而来。

方程(2.10)可以理解为：

$$\underbrace{\frac{D}{Dt}}_{\text{Lagrangian}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla}_{\text{Euler}} \quad (2.13)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial t}$ 表示对时间的变化率， $\mathbf{U} \cdot \nabla$ 表示对流的变化率。在这里增加一个对欧拉以及拉格朗日的解释，如图2.3所示，

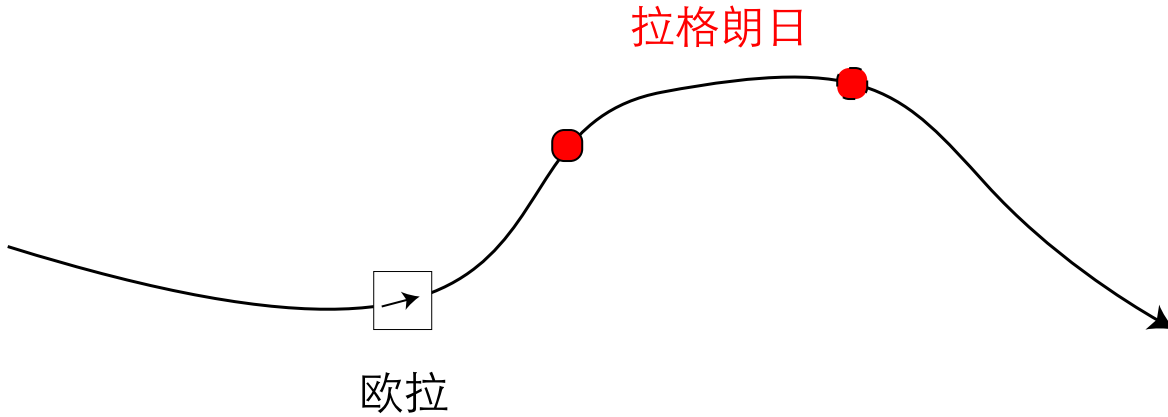


图 2.3: 欧拉与拉格朗日的描述。

欧拉方法描述一个固定点的变量值，如图中方框内的变量。拉格朗日方法描述一个移动的粒子的变量（如图中红色粒子的移动）。以温度举例，欧拉方法描述方框内温度随着时间的变化，拉格朗日方法描述移动的粒子的温度在不同的位置处产生的变化。另外，拉格朗日方法的自变量通常为 t ，欧拉方法的自变量通常为 (x, y, z, t) 。例如，有粒子的位置矢量定义为：

$$\mathbf{S} = (x, y, z) = (t^2, 2t, 0) \quad (2.14)$$

则有

$$x = t^2, y = 2t, z = 0 \quad (2.15)$$

那么拉格朗日框架下的粒子的速度矢量通常表示为：

$$\mathbf{U}(t) = (2t, 2, 0) \quad (2.16)$$

欧拉框架下的速度矢量通常表示为：

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = (2t, 2, 0) = (2\sqrt{x}, \frac{y}{2}, 0) \quad (2.17)$$

另外从方程(2.17)可以看出，针对本例子在固定的网格位置处的速度不变。从物理意义来讲，即粒子均以同样的速度通过某固定网格点。

2.4 连续性方程

CFD的控制方程无论具有什么形式，都是建立在流体力学基本控制方程：【连续性方程】、【动量方程】、【能量方程】的基础之上。他们主要来源于质量守恒定律、牛顿第二定律、能量守恒定律。【N-S方程最基本的假设为：把

流体看做是连续介质】。当从宏观尺度来分析的时候（比如一微米），流体的随机分子运动可以忽略。这样，就可以描述流体的一些宏观物理量如速度、压力、密度和温度等。因为这些物理量可以看做大量分子的平均。

本节一步一步的对连续性方程进行推导，旨在让同学们了解CFD中基本控制方程的来源，做到在CFD模拟的时候有理有据。复杂的方程离散、对流格式、双曲特征以及激波等将在GCFD课程中进行讲述。

2.4.1 从空间位置固定的无穷小微团推导连续性方程

连续性方程可以在上文中的4种流动模型基础上进行推导而来，本节从空间位置固定的无穷小微团角度出发，对连续性方程进行推导。这种推导形式是最容易理解的，只涉及到高等数学中的泰勒方程。从空间位置固定的角度来分析的方法，通常被称之为【欧拉观点】。【欧拉观点下的质量守恒意味着位置固定无穷小微团质量的变化=流入无穷小微团质量-流出无穷小微团质量】。也即为：位置固定无穷小微团质量的变化率=（流入无穷小微团质量-流出无穷小微团质量）的变化率。图2.4为一个质量守恒的实例。

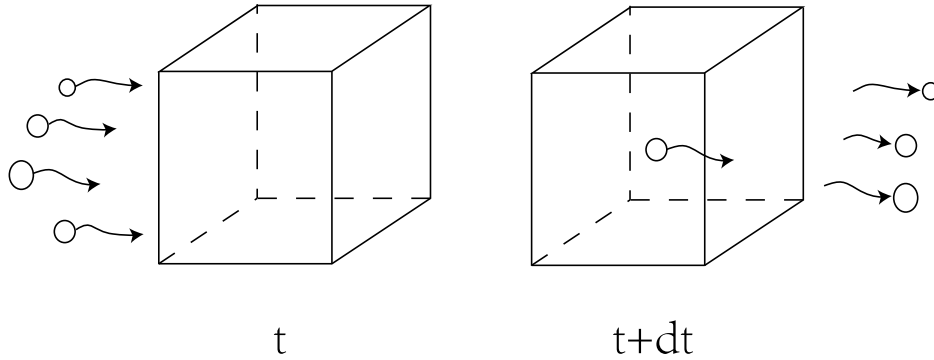


图 2.4: 质量守恒实例。在 t 时刻，有4单位的流体要流入无穷小微团（左图）。在 $t+dt$ 时刻，有3单位的流体流出了无穷小微团（右图）。那么这个无穷小微团的变化，即为增加了1单位的流体（右图无穷小内增加1单位流体）。

下面首先看无穷小微团的质量的变化率。如上文所述，流体微团的体积可以表示为 $dV = dx dy dz$ 。同时，有密度 ρ ，则对应的无穷小微团质量为

$$dm = \rho dx dy dz \quad (2.18)$$

依据质量变化率的定义（质量的变化除以时间的变化），其可以表示为

$$\frac{\partial dm}{\partial t} = \frac{\partial \rho dx dy dz}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.19)$$

下面考虑无穷小微团的流入和流出。在这里介绍一下泰勒方程的另一个形式：如果对于一个函数， x_0 点的值为 $f(x_0)$ ，那么 $x_0 + h$ 的值可以通过下述方程求得⁴：

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \quad (2.20)$$

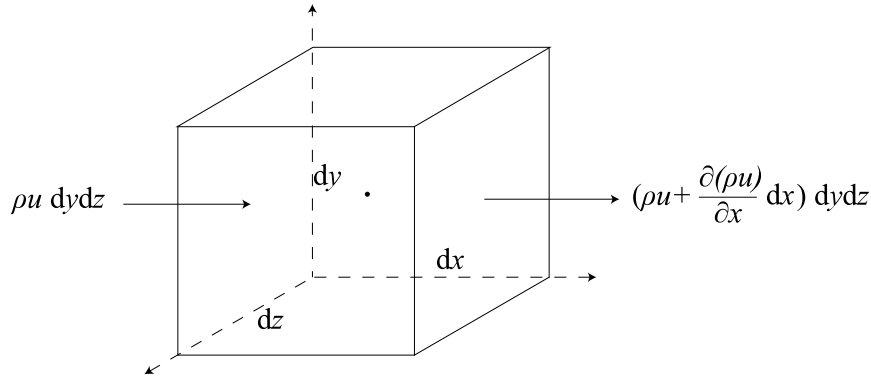
现在看图2.5中的无穷小微团，定义立方体左侧【单位面积】的质量流量为 ρu ，其表示【单位时间】内流入【单位面积】的质量（注意其中的单位时间和单位面积）。同时立方体左侧的面积为 $dy dz$ ，因此有【单位时间】内流入的质量为

$$\rho u dy dz \quad (2.21)$$

对于立方体右侧的面，在已知立方体左侧面 ρu 的定义的时候，右侧可以通过泰勒方程求出，即【单位时间】内流出立方体右侧的【单位面积】的质量为 $\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx$ 。同样的，立方体右侧的面的面积为 $dy dz$ ，因此有【单位时间】内流出的质量为

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (2.22)$$

⁴在这里假定函数是连续可微的。然而对于某些特殊问题这种假定并不成立（例如存在激波的问题）。这种情况下需要从积分的角度推导连续性方程（参见下节）。

图 2.5: 无穷小微团 x 方向的通量。

结合无穷小微团单位时间的流出质量，即方程(2.22)，和无穷小微团单位时间的流入质量，即方程(2.21)，有单位时间的 x 方向的净质量变化率为

$$\rho u dy dz - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz \quad (2.23)$$

同理，有 y 方向的净质量变化率为

$$- \frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz \quad (2.24)$$

z 方向的净质量变化率为

$$- \frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz \quad (2.25)$$

将各个方向的质量变化率加和有

$$- \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.26)$$

同时，结合方程(2.19)，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.27)$$

也即为连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

方程(2.28)在CFD中至关重要，其直接关系到压力泊松方程的导出。在这里，同学们应该尝试去多次的理解连续性方程推导的本源，即连续性方程表示的是质量守恒。

2.4.2 空间位置固定有限控制体推导的连续性方程

上文中从空间位置固定的无穷小微团推导的连续性方程是最容易理解的。下面考虑从空间位置固定有限控制体推导的连续性方程。本节涉及到高等数学的散度定律。若难以理解可跳过本节且不失去连续性。本节只不过是另一种推导连续性方程的途径。要提前强调的是，有限控制体和无穷小微团的关系可以理解为有限控制体包含着很多的无穷小微团（如图2.2左图所示）。因此，有限控制体中的量都需要用积分来进行计算。对于空间位置固定的有限控制体，其质量可通过下面的方程进行计算：

$$\int \rho dV \quad (2.29)$$

其实际上就是高等数学中，质量的计算方程。其对应的质量变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \quad (2.30)$$

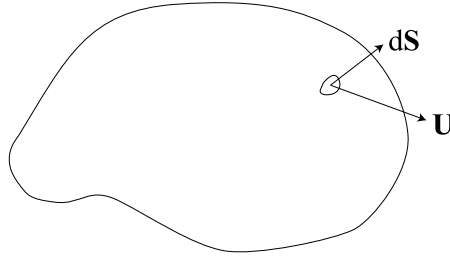


图 2.6: 有限控制体上的速度和面矢量。

下面考虑空间位置固定的有限控制体由于流入流出引起的质量变化。图2.74中的通量可以定义为

$$\rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.31)$$

那么整个有限控制体上的净通量可以表示为

$$-\int \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.32)$$

其中负号的引入是因为考虑的为流入减去流出的通量（而不是流出减去流入）。结合方程(2.32)和方程(2.30)，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \int \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.33)$$

也即⁵

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} = 0 \quad (2.34)$$

方程(2.34)即为【通过空间位置固定的有限控制体推导的连续性方程】，其和(2.28)是等价的。在这里需要注意的是，从方程(2.33)推导至(2.34)的时候，需要假定函数是光滑的连续的。因此积分形式的方程(2.33)是比微分形式的方程(2.34)更基础的控制方程。

2.4.3 通量与速度散度的物理意义

在这里有必要介绍通量的概念。因为初学者经常将对流项引申的量理解为通量。然而CFD控制方程中离散后很多项都可以称之为通量，比如对流项 $\nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U})$ 在做线性化后会出现对流通量。扩散项 $\nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{U})$ 离散后同样会出现通量（扩散通量）。进一步的，通量可区分为体积通量和质量通量。体积通量的物理意义为单位时间内流经某个网格单元面流体的体积，单位为 m^3/s 。质量通量的物理意义为单位时间内流经某个网格单元面流体的质量，单位为 kg/s 。不同的场合通常选取不同的通量。对于不可压缩流体，通常选取体积通量，对于可压缩流体，通常选取质量通量。从数学的角度来理解更为简单：速度 \mathbf{U} 乘以面积 \mathbf{S} 就是体积通量，即每单位时间流经某个网格单元面多少立方米的流体：

$$\phi_f = \mathbf{U}_f \cdot \mathbf{S}_f \quad (2.35)$$

其中 ϕ_f 表示网格单元面 \mathbf{S}_f 上的通量， \mathbf{S}_f 也被称之为面矢量， \mathbf{U}_f 为定义在网格单元面上的速度。图2.7中左中右三个网格单元的最上方的网格单元面对应的三个面矢量，方向相同，大小不同。面矢量 \mathbf{S}_f 的大小可通过下式计算：

$$|\mathbf{S}_f| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \quad (2.36)$$

其中 S_x, S_y, S_z 表示面矢量 \mathbf{S}_f 的分量。

CFD中另外一个重要的概念是面法向矢量 \mathbf{n}_f ，其用于定义面的法向，面法向矢量的特点是其模均为1，计算公式为：

$$\mathbf{n}_f = \frac{\mathbf{S}_f}{|\mathbf{S}_f|} \quad (2.37)$$

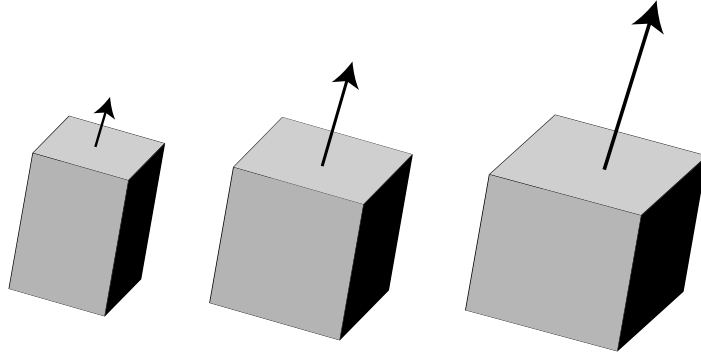


图 2.7: 上图中表示了相同方向，不同大小（箭头长度不同）的面矢量。

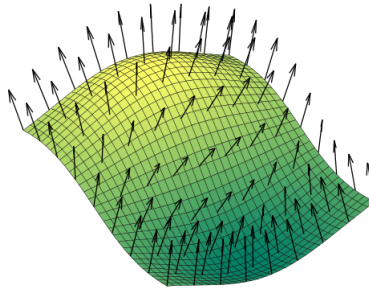


图 2.8: 任意的弯曲几何的面法向矢量。

如图2.8所示，在一个网格的边界区域，通常由若干个网格单元面构成，每个网格单元面则分别对应一个面矢量和面法向矢量。

除了边界面，网格的内部面也存在面矢量。图2.9表示为网格内部面的面矢量定义。图中的 \mathbf{S} 为两个网格连接面的矢量，其垂直于网格面，大小等于面的面积。由宿主网格（图中P点）指向相邻网格（图中N点）。同时可以看出，连接P网格体心和N网格体心的矢量方向和 \mathbf{S}_f 的方向并不相同。这会导致梯度的计算差异，也即CFD中的非正交修正算法，在此不做介绍。回到通量的计算公式，有：

$$\phi_f = \mathbf{U}_f \cdot \mathbf{S}_f = |\mathbf{U}_f| |\mathbf{S}_f| \cos\theta \quad (2.38)$$

其中 θ 为面矢量和面速度矢量的夹角。很明显通量的大小取决于夹角的大小。图2.10形象的表示了这一特性。左图中速度矢量和面矢量方向平行，则其中的虚线表示单位时间内通过面的体积。中图中的速度矢量和面矢量存在一定的夹角，因此体积有所减小。右图中速度矢量和面矢量垂直，因此没有任何流体通过这个面，因此通量为零。

附加几点有关通量的总结和评价：

- 通量的计算不仅和面的大小以及速度的大小有关，并且和面的方向以及速度的方向有很大关系；
- 有限体积法中的守恒表示为通量的守恒，然而通量上的面速度和网格单元体心处的速度是有区别的；
- 本文中面速度均为给定，但是在CFD计算中，一些通量需要从体心速度差值而来，一些通量需要通过压力速度耦合算法计算而来；
- 对于图2.9中的非矩形网格以及高偏斜网格，需要对应的非正交修正算法，或者采用最小二乘法计算梯度；

⁵其中要调用高斯定律 $-\int \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = -\int \nabla \cdot \rho \mathbf{U} dV$

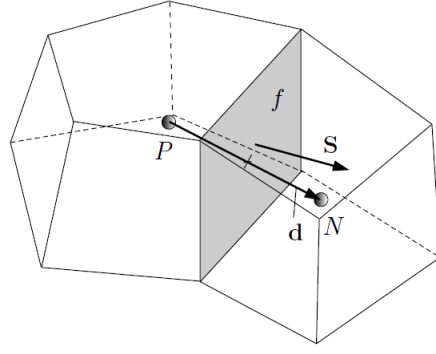


图 2.9: 网格单元内部面矢量与网格体心点连线示意图。

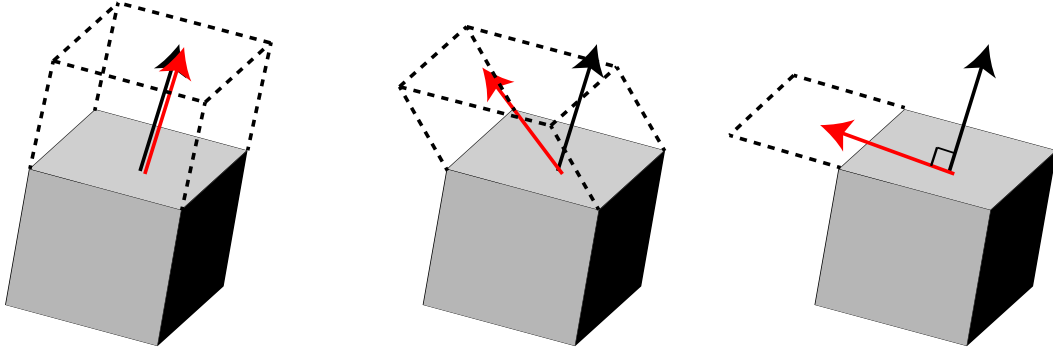


图 2.10: 不同速度矢量对应的通量大小，其中黑色箭头表示面矢量，红色箭头表示速度矢量。

下面介绍速度散度的物理意义，需要一些高等数学中积分的内容，若难以理解可不失去连续性的略过后续本节内容⁶。在考虑体积通量 ϕ_f （单位时间内流经某个面的流体体积）的物理意义的基础上。如果在体积通量的基础上乘以时间 Δt ，则表示体积为 V 的流动控制体，由于其中的面 $d\mathbf{S}$ 以 \mathbf{U} 的速度移动，在 Δt 时间内体积的变化量：

$$dV = \phi_f \Delta t = \mathbf{U}_f \cdot d\mathbf{S}_f \Delta t \quad (2.39)$$

因此，整个流动控制体的体积变量需要在方程(2.39)的基础上做积分：

$$\Delta V = \int_V dV = \int_S \mathbf{U}_f \cdot d\mathbf{S}_f \Delta t \quad (2.40)$$

体积 V 的物质导数定义为

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_S \mathbf{U}_f \cdot d\mathbf{S}_f \quad (2.41)$$

依据高等数学的散度定律有

$$\int_S \mathbf{U}_f \cdot d\mathbf{S}_f = \int_V \nabla \cdot \mathbf{U} dV \quad (2.42)$$

即

$$\frac{DV}{Dt} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{U} dV \quad (2.43)$$

如果考虑 dV 足够小， $\nabla \cdot \mathbf{U}$ 在此 dV 上都相等，因此可以这样提出：

$$\frac{DV}{Dt} = \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{U}) = V \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (2.44)$$

有

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} \quad (2.45)$$

即速度散度的物理意义：流动着的控制体的体积变化的时间变化率。

⁶但2.4.4节以此为基础展开。

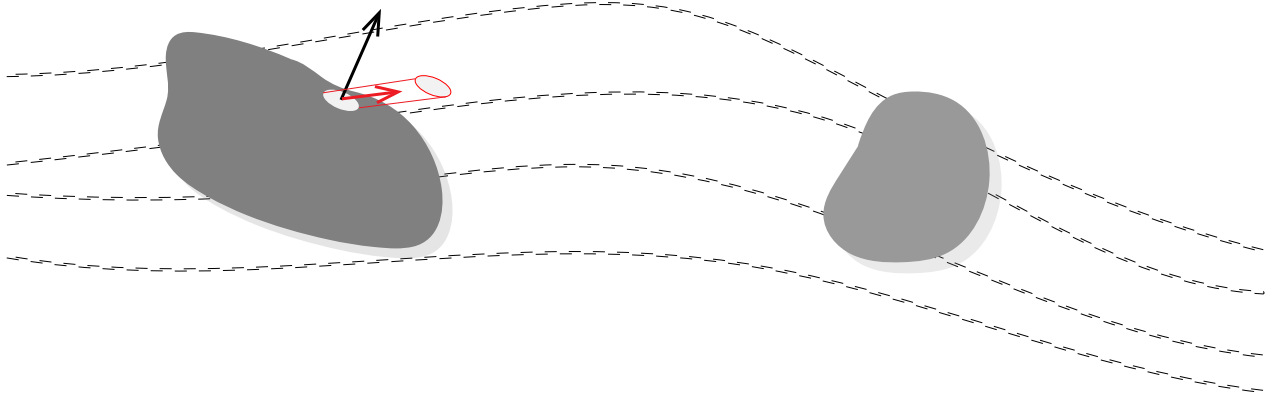


图 2.11: 流动的控制体由于速度的变化导致形状体积的改变, 左图中面 $d\mathbf{S}$ 以 \mathbf{U} 的速度移动, 在 Δt 时间间隔内引起的体积变化为圆柱体体积。右图为最终的控制体形状。

2.4.4 从空间位置移动的无穷小微团推导的连续性方程

上文是从空间位置固定的有限控制体以及无穷小微团下推导的连续性方程的。下面讨论另一种推导形式：从空间位置移动的无穷小微团推导的连续性方程。这种方式偏向于拉格朗日思想。若难以理解可跳过本节且不失连续性。本节只不过是另一种推导连续性方程的途径。

在拉格朗日框架下，随流线运动无穷小微团质量的变化=0。参考前文物质导数的定义，即

$$\frac{D}{Dt}dm = 0 \quad (2.46)$$

其中采用 dm 是因为跟踪的为无穷小微团。依据物质导数的定义，方程(2.46)可以化简为

$$\frac{D}{Dt}dm = \frac{D(\rho dV)}{Dt} = \rho \frac{D(dV)}{Dt} + dV \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.47)$$

即

$$\frac{\rho}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.48)$$

依据上一节介绍的物质导数和速度散度的物理意义，有

$$\frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (2.49)$$

代入到方程(2.47)，有

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.50)$$

2.4.5 连续性方程小结

方程(2.28)、(2.34)以及(2.50)均表示连续性方程，但各自的推导采用了不同的流动模型。有的模型出发点和推导比较容易理解，有的方法比较复杂。这些方程可以相互的转换。且各种教材中书写并不统一。例如，下面的方程均为采用不同书写方式书写的连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.53)$$

$\nabla \cdot$ 和 div 等价，均表示散度操作。方程(2.53)则是另一种表示方式。初学CFD可能对方程中的这些符号感到很生疏，在此记住下面最根本的连续性方程形式即可：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.54)$$

2.5 动量方程

本节讨论动量方程。动量方程依然可以通过上面四种不同的流动模型进行推导。由于篇幅所限本节不再一一推导，仅介绍一种较为容易理解的推导方法，即从【空间位置移动的无穷小微团进行分析】。在推导之前，需要介绍一些基础的知识。

2.5.1 受力分析

对动量方程进行推导，就需要对无穷小微团进行受力分析。正是因为流体的受力，才会引致流体的流动。无穷小微团的受力可区分为【体积力】和【表面力】。【表面力】为作用在无穷小微团面上的力，如压力、表面张力，海洋表面上的风也可以认为是表面力。【体积力】作用在无穷小微团全部的体积上（不仅表面有，体积内也有），例如重力、电磁力，或者一切引起旋转的力（科氏力）。在这些力中，最重要的表面力为压力和应力（后续会对应力进行介绍），最重要的体积力为重力（若不考虑其他源项力）。

首先看压力，如图2.12所示，CFD中的压力用 p 来表示（其实际为压强），且这个压力表示静压。其作用主要导致流体的压缩和膨胀，而不是切应力引致的变形。另外，压力为一种【正应力】（不同于下文中要介绍的切应力），其永远【作用于无穷小微团的面的垂直的方向】。同时，如图2.13所示，无穷小微团还受到【剪切应力】的作用。

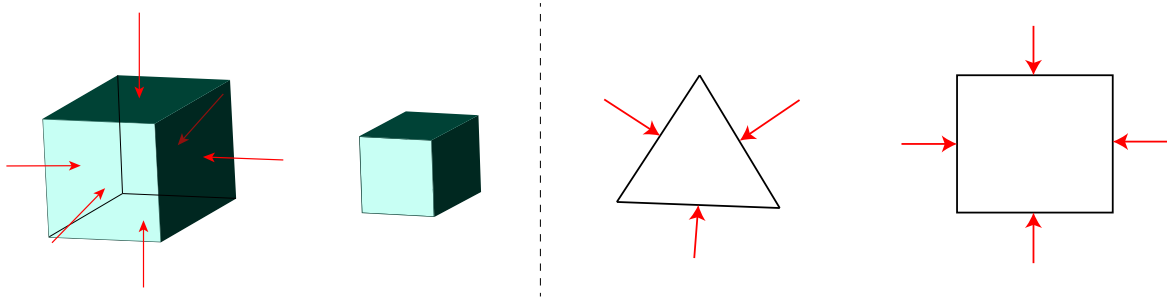


图 2.12: 左图：无穷小微团由于压力的作用导致体积的压缩。右图：三角形网格和四边形网格受到的垂直的压力。

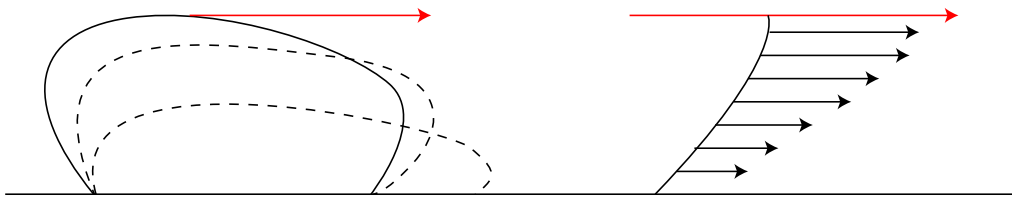


图 2.13: 左图：一块蜂蜜由于剪切应力的作用导致的变形。右图：流体由于上方剪切力作用导致的流速区别，壁面附近速度较小。红色的箭头表示剪切应力，黑色的箭头表示速度大小和方向。

其主要体现为流体的粘性。可以很明显的注意到，蜂蜜要比水要粘。这就是因为要获得同样大的形变率，施加给蜂蜜的剪切应力需要更大。【剪切应力的作用导致流体产生形变】。这个应力不是和形变成正比，而是【和形变的速率成正比】。也就是说，【应力越大，形变的速度越快】。如图2.14左图所示，一个二维四边形无穷小微团所受的剪切应力分量分别为

$$\tau_{yy}, \tau_{yx}, \tau_{xx}, \tau_{xy} \quad (2.55)$$

其中的 τ 表示剪切应力，【第一个下标表示作用于与某方向垂直的平面】，【第二个下标表示力的方向】。比如 τ_{yy} 表示作用于和 y 垂直的平面的剪切应力分量，其方向为 y 方向。 τ_{yx} 表示作用于和 y 垂直的平面的剪切应力分量，其方向为 x 方向。图2.14右图表示了流体由于剪切应力作用发生的形变。图2.15则是三维的无穷小微团受到的剪切应力。在三维的情况下，剪切应力的分量可以表示为

$$\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz} \quad (2.56)$$

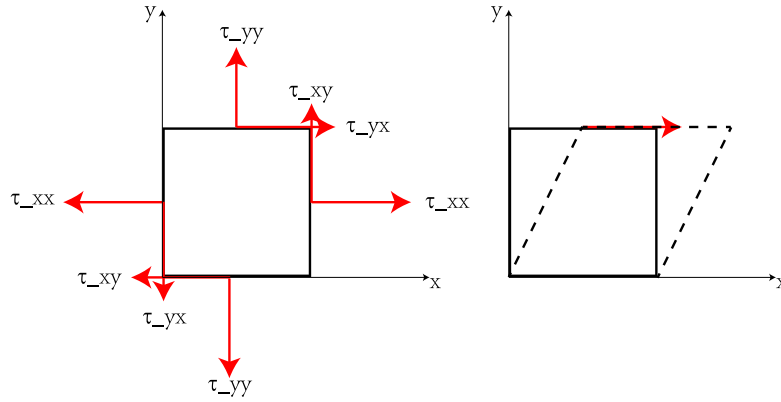


图 2.14: 左图：一个四边形无穷小微团所受的剪切应力。右图：一个四边形有限控制体受到剪切应力导致形变。

其通常写成下面的形式：

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

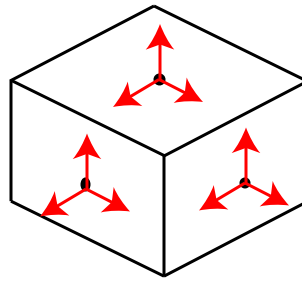


图 2.15: 三维剪切应力。

在这里，同学们应该知道方程(2.57)中的剪切应力分量的定义是什么？分别作用在哪个面？哪个方向？其会引起什么样的物理过程。下面来分析一个具体的无穷小微团受到的力。图2.16表示施加在无穷小微团 x 方向上的全部表面力⁷。在面 $abcd$ 上，仅仅存在由切应力引起的 x 方向的分量 $\tau_{yx}dx dz$ 。面 $efgh$ 和面 $abcd$ 的距离为 dy ，所以 $efgh$ 面上的 x 方向的切应力为 $(\tau_{yx} + \partial\tau_{yx}/\partial y dy)dx dz$ 。对于面 $abcd$ 和面 $efgh$ 上的切应力，要注意他们的方向。在底面， τ_{yx} 是向左的（与 x 轴方向相反），在顶面， $\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy$ 是向右的（与 x 轴方向相同）。这与下面的约定是一致的：即速度的三个分量的正的增量与坐标轴的正向一致。例如，图2.16中的平面 $efgh$ ，因为 u 沿着 y 轴正向是增加的，所以在稍微高于平面 $efgh$ 的地方，速度 u 要比平面 $efgh$ 上的 u 大。于是就形成了“拉”的动作，试图将流体微团向右拉向 x 轴的正向。相反，若考虑平面 $abcd$ ，则在稍稍低于平面 $abcd$ 的地方，速度 u 要比平面 $abcd$ 上的 u 小。于是对流体形成了一个阻碍的作用，作用在 x 轴的负向。图2.16中其他剪切应力的方向，都可以用相同的方式进行判断。特别是在面 $dcgh$ 上， τ_{zx} 指向 x 轴负向，而在面 $abfe$ 上， $\tau_{zx} + (\partial\tau_{zx}/\partial z)dz$ 指向 x 轴正向。在垂直于 x 轴的面 $adhe$ 上， x 方向的力有压力 $p dy dz$ ，指向流体微团的内部；还有沿 x 轴负向的应力 $\tau_{xx} dy dz$ 。依据前面提到的速度增量方向的约定，我们可以解释为什么在图2.16中，面 $adhe$ 上 τ_{xx} 是指向左边的。依据规定，速度 u 的正增量和 x 轴的正向一致，所以稍微离开面 $adhe$ 左面一点点， u 的值比面 $adhe$ 上的 u 要小。因此，正应力的粘性作用在面 $adhe$ 上就好像是一个吸力，产生一个向左拉的作用，想要阻止流体微团的流动。与此相反，在面 $bcfg$ 上，压力 $(p + (\partial p/\partial x)dx) dy dz$ 指向流体微团的内部（沿着 x 轴负向）。而由于在稍微离开面 $bcfg$ 右面一点点的地方， u 的值比面 $bcfg$ 上的 u 要大，就会产生一个由正应力引起的吸力，将流体微团向右拉，这个力的大小为 $(\tau_{xx} + (\partial\tau_{xx}/\partial x)) dy dz$ ，方向指向 x 轴正向。如果上面的描述同学们感觉难以理解，下面的结论要知悉。通过对流体微团 x 方向的受力做分析，有 x 方向所受到的表面力（压

⁷图2.16看起来是非常复杂的。如果感觉理解有困难，可以进一步参考文献[2]第47页的描述。

力和剪切应力贡献)为:

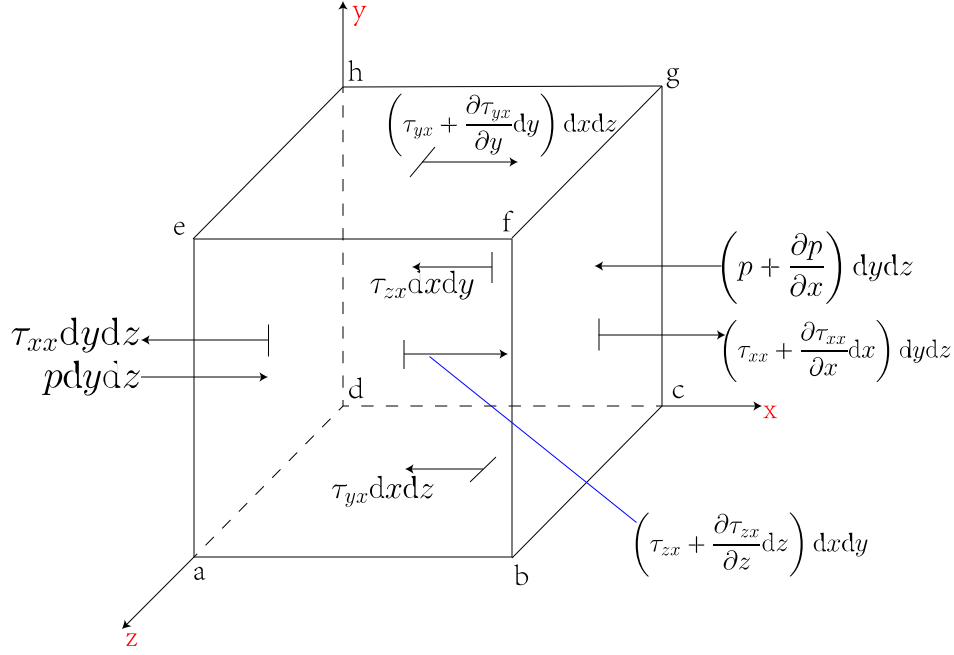


图 2.16: x 方向各个面受到的力。

$$F_x = \left(p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right) dy dz + \left(\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right) dy dz + \left(\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right) dx dz + \left(\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right) dx dy \quad (2.58)$$

即

$$F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.59)$$

同理, 有 y 方向和 z 方向:

$$F_y = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.60)$$

$$F_z = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.61)$$

方程(2.59)、(2.60)和(2.61)即为流体微团在三个方向上的受力(为一个矢量):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \\ \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

2.5.2 动量守恒

在分析完受力之后, 回到牛顿第二定律, 即【力等于质量乘加速度】。力已经在方程(2.62)中给出, 现在来看质量和加速度。在上文中, 已经知道流体微团的质量可以表示为 $dm = \rho dx dy dz$, 同时, 流体微团的加速度为 $\frac{D\mathbf{U}}{Dt}$ (参考物质导数一节), 其分量形式为

$$\left[\frac{Du}{Dt}, \frac{Dv}{Dt}, \frac{Dw}{Dt} \right]^T \quad (2.63)$$

那么有 x 方向的动量方程为

$$\rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.64)$$

同理， y 方向和 z 方向可以类似导出。即

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.65)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.66)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (2.67)$$

方程(2.65)、(2.66)和(2.67)即动量方程。同学们应该结合上文介绍的相关知识，将方程(2.65)、(2.66)和(2.67)左边项写成欧拉形式（参考物质导数一节）。然后，再将这三个分量形式的动量方程写成矢量形式（结合张量一节）⁸：

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.68)$$

也即为

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.69)$$

2.5.3 守恒/非守恒转化

方程(2.69)为动量方程的非守恒形式。这是因为上述动量方程是从空间位置移动的无穷小微团进行推导的。非守恒控制方程可通过结合连续性方程转化为守恒的控制方程。将连续性方程(2.51)左右乘以 \mathbf{U} 有

$$\mathbf{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.70)$$

随后将方程(2.70)与(2.69)相加有

$$\mathbf{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) + \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.71)$$

即守恒形式的动量方程：

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.72)$$

连续性方程可以进行类似的转化。考虑从空间位置移动的无穷小微团进行推导的连续性方程(2.50)，依据物质导数的定义将其展开有

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} = 0 \quad (2.73)$$

其中 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{U}$ 为非守恒形式， $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U}$ 为守恒形式。

2.5.4 封闭

方程(2.65)、(2.66)和(2.67)还不能求解，因为其中的未知量为方程左边的速度，但方程右边还存在未知量 $\boldsymbol{\tau}$ ，这种【待求未知量之外还存在未知量的情况，被称之为封闭问题】。为了将其封闭，需要将 $\boldsymbol{\tau}$ 表示为 \mathbf{U} 的函数。剪切应力 $\boldsymbol{\tau}$ 和速度 \mathbf{U} 的关系，被称之为【本构关系】。他们的方程，被称之为【本构方程】。17世纪末牛顿指出，流体的剪切应力和速度的梯度成线性关系。这种流体因此也被称之为【牛顿流体】。还存在一些不符合牛顿流体定义的流体，被定义为【非牛顿流体】，会展现一些不常见的流动特性。

⁸另一种常见的写法为

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ 。在这种情况下 $\boldsymbol{\sigma}$ 考虑的为总应力（剪切应力 $\boldsymbol{\tau}$ 和正应力 p 的和）。

下面讨论一个新的CFD变量：形变率，其也被称为剪切速率。未知量 τ 可以表示为形变率的函数，形变率进一步可以表示为速度的函数。这样，方程(2.65)、(2.66)和(2.67)就可以封闭。形变率和剪切应力类似，是一个二阶张量，一般用 \mathbf{S} 来表示。但由于在CFD中，形变率本身并不会封闭方程（而是形变率和速度的关系封闭了方程），因此在CFD方程中往往不会出现形变率这一项⁹。若 \mathbf{S} 符号表示形变率，即：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

对于【各向同性流体，形变率的9个分量有6个是独立的】：

$$S_{xy} = S_{yx}, S_{xz} = S_{zx}, S_{yz} = S_{zy} \quad (2.75)$$

当然也存在一些各向异性流体，如一些聚合物。对这些流体的研究会导致问题更加复杂。在以后的学习中，各位同学们也会发现，很多模型都是从各向同性假定出发的。形变率进一步的可以表示为速度的方程：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

若写成矢量形式，有：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (2.77)$$

很明显，方程(2.76)可以写成 \mathbf{S} 和 \mathbf{U} 的关系。

对于牛顿流体，其定义【剪切应力和形变率为线性的关系】。进一步考虑不可压缩流体（忽略体膨胀率）：

$$\tau = 2\mu \mathbf{S} = \mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (2.78)$$

其中 μ 是粘度，其为一个物理属性。将方程(2.78)代入到方程(2.72)中，其中的 τ 就被速度表示出来进而被封闭（其中的密度 ρ 被除掉）：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (\nu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)) \quad (2.79)$$

其中 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 。方程(2.79)中的 $\nabla \cdot (\nu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T))$ 在大量文献中被写为 $\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U})$ ，下面我们来看一下为什么。首先有¹⁰

$$\nabla \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

对其转置操作有

$$\nabla \mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

然后求散度有

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}^T) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.82)$$

⁹ \mathbf{S} 这个符号在有限体积法中更倾向于被定义为面矢量。

¹⁰值得注意的是 $\nabla \mathbf{U}$ 的定义并不唯一，在流体力学中通常采取本文的定义。

这是因为对于任何一个标量 a ，有

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right) \quad (2.83)$$

因此，动量方程(2.79)可写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U}) \quad (2.84)$$

这个封闭的方程若展开，为4个方程，且存在未知项速度 \mathbf{U} 和压力 p 共4个未知量，即可求解。

对于可压缩流体， τ 可表示为

$$\tau = \mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \quad (2.85)$$

完整的动量方程为

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{U}) \mathbf{I} \right) \quad (2.86)$$

注意其中的 $\nabla \mathbf{U}^T$ 并不能化简，因为可压缩流体的 $\nabla \cdot \mathbf{U} \neq 0$ 。

同学们应该仔细观察动量方程的3个分量方程，观察矢量形式下的散度、梯度算法如何和分量形式的方程对应。做到对动量方程不陌生、不恐惧。其只不过是各种偏导数放在了一起。具体如何通过有限体积法离散、数值格式以及算法稳定性等内容将在GCFD课程上介绍。

2.5.5 积分观点

动量的定义为质量和速度的乘积，若将动量除以体积，即 ρu 表示为动量密度。考虑一维的区域， (x_1, x_2) 的区间范围内的动量可以表示为：

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u dx \quad (2.87)$$

其变化率可表示为：

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx \quad (2.88)$$

(x_1, x_2) 内的动量变化率取决于流入和流出的通量。如何表示动量的通量？参考质量通量的定义，对于质量通量，其为密度和速度的乘积。那么动量的通量即为动量密度和速度的乘积，即 $\rho u u$ ，动量的变化率为。另外，压力也会引致动量的变化，因此， $\rho u u + p$ 表示动量的通量， (x_1, x_2) 内流入减去流出的通量为

$$-(\rho u u + p)|_{x_1}^{x_2} \quad (2.89)$$

结合方程(2.88)，有

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx = -(\rho u u + p)|_{x_1}^{x_2} \quad (2.90)$$

上式即为积分观点下推导的一维动量方程。

如果进一步假定 $\rho u u + p$ 是光滑的，方程(2.90)可以写为：

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\rho u u + p) dx \quad (2.91)$$

进一步操作有

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\rho u}{dt} + \frac{d}{dx} (\rho u u + p) \right) = 0 \quad (2.92)$$

即

$$\frac{d\rho u}{dt} + \frac{d}{dx} (\rho u u + p) = 0 \quad (2.93)$$

方程(2.93)即不考虑剪切变形（ τ 的非对角线元素为0）的一维的动量方程。本节呈现的是另一种动量方程的推导形式，更好的展现了从积分的角度推导动量方程的思想。

在这里需要注意的是，积分形式的方程和微分形式的方程有重要的区别。积分形式的方程(2.90)可以在控制体内出现间断。因为数学上并没有要求被积分的函数不能出现间断。但微分形式的方程(2.93)要求函数是连续的（上文中引入假定 $\rho u u + p$ 是光滑的），否则不可导。积分形式的CFD方程更加基础，更加普适性。同时，在网格变形的情况下，自动满足体积守恒方程。积分形式的CFD方程也适用于各种不同的网格形状。但之所以将积分形式的方程放在最后是因为积分形式的方程中会出现面积分，例如三维的连续性方程可以写为

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{S_f} \rho_f \mathbf{U}_f d\mathbf{S}_f = 0 \quad (2.94)$$

看起来对初学者并不友好。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学. 高等教育出版社, 2007.
- [2] 约翰.安德森. 计算流体力学基础及其应用. 机械工业出版社, 2007.
- [3] G.A. Bird. Molecular gas dynamics. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 76, 1976.
- [4] R.J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002.
- [5] D.L. Marchisio and R.O. Fox. *Computational models for polydisperse particulate and multiphase systems*. Cambridge University Press, 2013.
- [6] H. Struchtrup. *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows*. Springer, 2005.
- [7] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW industries La Canada, CA, 1998.
- [8] K. Xu. A gas-kinetic BGK scheme for the Navier–Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method. *Journal of Computational Physics*, 171:289–335, 2001.

补充资料

本笔记是笔者觉得最简单的CFD入门资料。小部分人如果依旧感觉晦涩难懂，在这里只能推荐学习一下高等数学：

- 《高等数学》同济大学版：【第2章】导数/微分部分：CFD控制方程即为导数和微分的结合；【第3章第3节】泰勒方程部分：大量的CFD方程基于泰勒方程；【第8章】向量部分：了解CFD中的矢量操作；【第9章第7节】梯度部分：了解CFD中的梯度操作；【第11章第6节】：有限体积法中的高斯积分以及通量；

同时，参加东岳流体OpenFOAM Knowledge Share课程的同学推荐学习下列内容获得更好的授课效果：

- 《C++ Primer Plus》：【第7-8章】函数部分：学习OpenFOAM中大量的类使用，需要首先了解函数的概念；【第10章】类部分：务必要详细学习C++中的类；【第11-12章】类的高级用法部分：在OpenFOAM中类的使用不仅多，而且还很高级，因此类的高级使用也需要了解；【第13章】类继承部分：在OpenFOAM中所有的类均使用了继承用法；

结尾彩蛋：本笔记封面的方程为双曲系统中重要的基本方程之一。其与双曲系统相结合可推导出 m 个解耦的对流方程。完整的推导如下：

$$q_t + Aq_x = 0$$

$$A = R^{-1}\Lambda R$$

$$w = R^{-1}q$$

$$w_t + \Lambda w_x = 0$$