

TD3 - SIGNAUX & SYSTÈMES
Décomposition en série de Fourier - Signaux à temps continu
Passage de la SF à la CFT

Travail à rendre

1. Décomposition en Série de Fourier d'un signal périodique en temps continu:
Soit $x(t)$ de période T ou de fréquence $F = 1/T$
 - Donnez la décomposition de $x(t)$ en série de Fourier
 - Donnez l'expression des coefficients de Fourier complexes X_k
2. Exercice 1: Question 1

Exercice 1

Soit le signal continu $x(t)$, périodique de période T et défini sur une période par :

$$x(t) = \begin{cases} a & \text{pour } 0 \leq t < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq t < T$$

- 1) Calculer les coefficients de Fourier X_k de la décomposition de ce signal avec les valeurs numériques suivantes : $a = 1$, $\alpha = 1/4$ s et $T = 1$ s
- 2) Représenter les spectres de raies (amplitude et phase) des coefficients X_k , multipliés par T .
(Représentation des: $T \cdot X_k$)
- 3) On introduit un décalage temporel avance $\theta < \alpha$. Que deviennent les spectres ?
Que se passe-t-il si $\theta = \alpha/2$?
- 4) A partir du signal précédent, centré sur l'origine, on augmente sa période T . Que devient le spectre d'amplitude d'abord si T est multiplié par 4 puis si T tend vers l'infini ?

Les relations précédentes concernant la décomposition en série de Fourier conduisent alors aux relations de la transformée de Fourier directe et inverse. Écrire ces relations.

- 5) Représenter le signal aperiodique $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$.

Calculer l'énergie E du signal temporel $x(t)$.

Montrer qu'elle est égale à l'énergie de sa transformée de Fourier $X(f)$ définie par :

$$E_{x(f)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

avec $|X(f)|^2$ densité spectrale d'énergie du signal $x(t)$

On utilisera le résultat suivant :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(x)|^2 dx = \pi$$

- 6) Que se passe-t-il si $a \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow 0$ de telle sorte que le produit $a \cdot \alpha$ reste constant et égal à C ?

Travail personnel: Sais-je répondre?

1. Quel signal obtient-on à la sortie d'un système linéaire temporellement invariant, lorsque le signal d'entrée est une sinusoïde de fréquence f_0 ?
2. Un signal rectangulaire de rapport cyclique $1/2$, d'amplitude $-2V$ $+2V$, est placé à l'entrée d'un filtre linéaire dont la fréquence de coupure est 5,5kHz, qu'obtient-on à la sortie du système lorsque le signal d'entrée à une fréquence de 1kHz, 1.5kHz, 3kHz ou 6kHz ? Représentez les signaux.