

Chantal MULLER



Signaux et systèmes

Support de cours

SIS : Capacités, connaissances visées

Caractériser un **signal** en temps et en fréquence : Signal déterministe à énergie ou à puissance finie

- Signal Dirac, échelon, sinusoïde, exponentielle complexe
- Signal échantillonné
- Signal périodique
- Mesure de ressemblance des signaux : autocorrélation, intercorrélation
- Analyse fréquentielle : Spectre (Série / Transformées de Fourier : CFT, DtFT, DFT)
- Densité spectrale d'énergie ou de puissance

Caractériser un **système** en temps et en fréquence : Système Linéaire Temporellement Invariant (SLTI)

- Propriétés : Stabilité, causalité, linéarité, invariance temporelle
- Réponses impulsionnelle, indicielle,
- Réponse fréquentielle (Transformée de Fourier)
- Fonction de transfert d'un système temps discret (TZ)
- Filtres du 1^{er} et 2nd ordre

Calculer la **sortie** d'un SLTI

- Dans le domaine temporel: opération de convolution / Equations différentielles, aux différences
- Dans l'espace des Transformées : Fourier, TZ

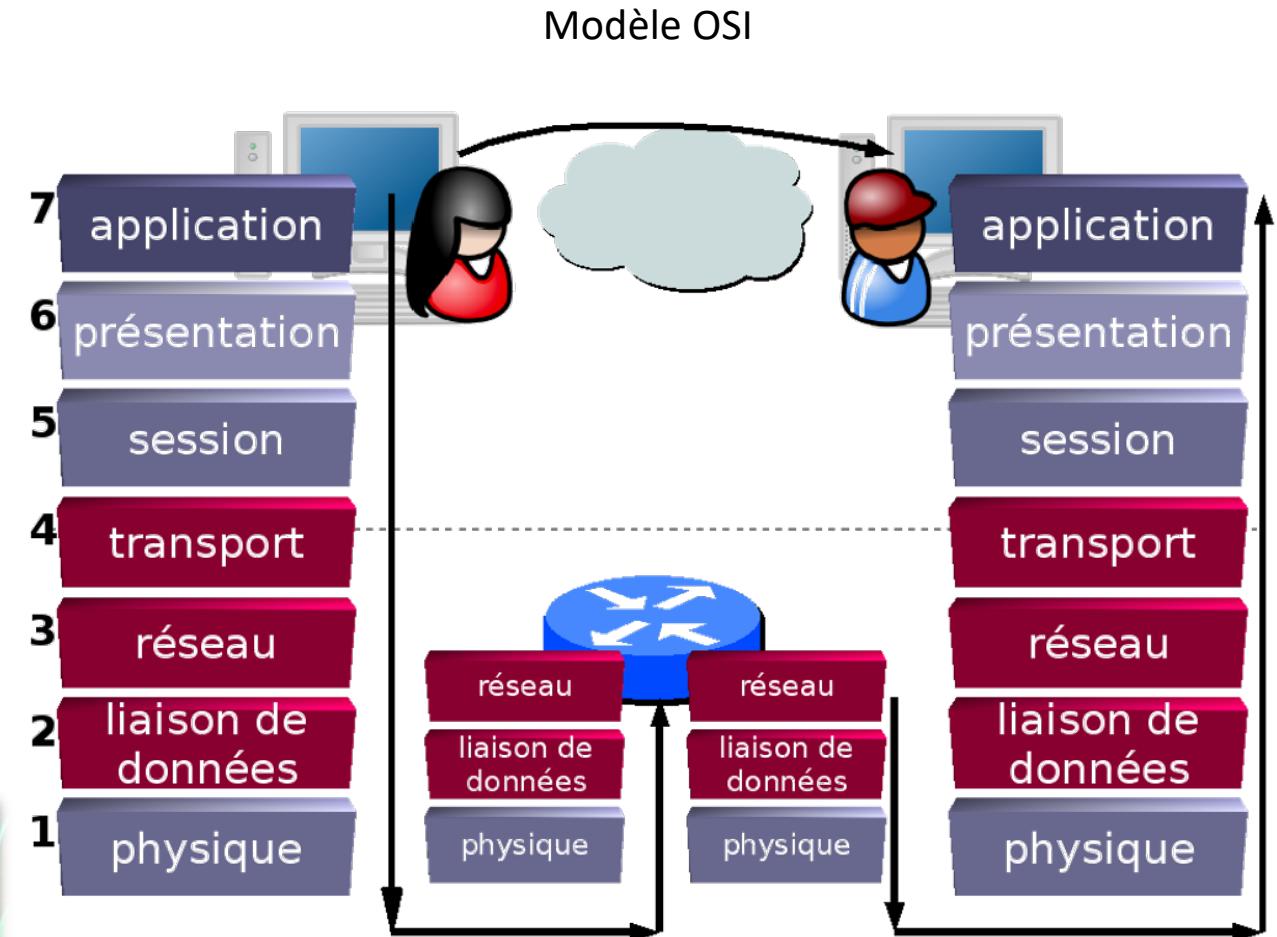
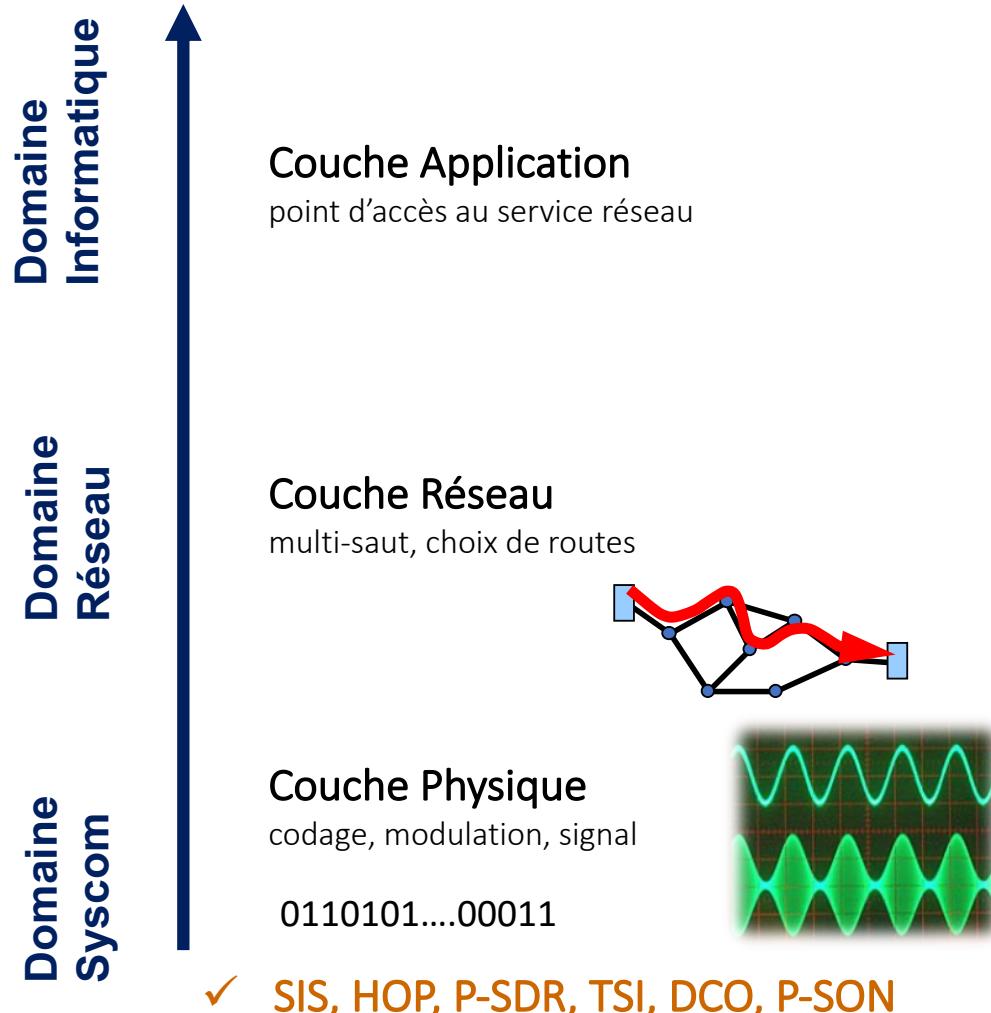
Maitriser un outil de traitement numérique du signal : Matlab et son environnement

- Ecriture de scripts, tracé de signaux, utilisation de Symbolic Maths Toolbox, Signal Processing Toolbox et de filterDesigner.

1. Introduction

Les domaines techniques du département Télécommunications

✓ Positionnement du Domaine Syscom



✓ SIS, HOP, P-SDR, TSI, DCO, P-SON

Qu'est-ce qu'un **signal** ?

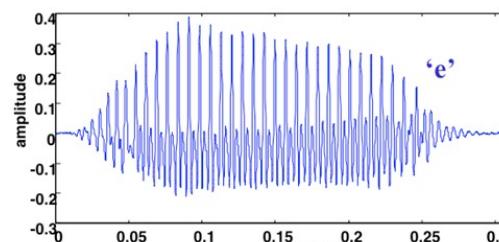
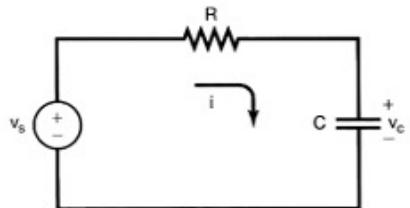
Qu'est -ce qu'un signal ?

Signal = toute entité qui **véhicule** une **information**

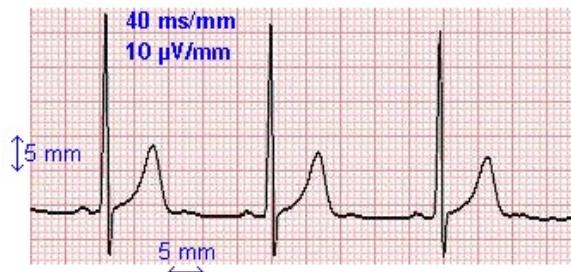
Signaux analogiques temps continu : $x(t)$

Variation dans le temps continu d'une grandeur physique $x(t)$
Tension, courant, pression acoustique, température, pression,
force... toute grandeur issue d'un capteur

Tension aux bornes d'un dipôle électrique
=> charge ou décharge d'un condensateur



Courant électrique délivré par un microphone
=> musique, parole



Tension aux bornes d'une électrode
=>ECG

Signaux numériques temps discret : $x[n]$

Vecteurs ou matrice de nombres appelés échantillons $x[n]$,
associé à un temps discret
... 0.01 -0.2 10.25 -23.94 193.41 -0.12 ...

Nombres stockés dans des fichiers
.mp3, .jpg, .wav etc.

De 3 types

- 1- Obtenus à partir d'études statistiques, de nature discrète
- 2- Obtenus par une opération d'acquisition via un capteur et d'échantillonnage par un convertisseur analogique numérique (ADC)
- 3 – Générés directement par un ordinateur

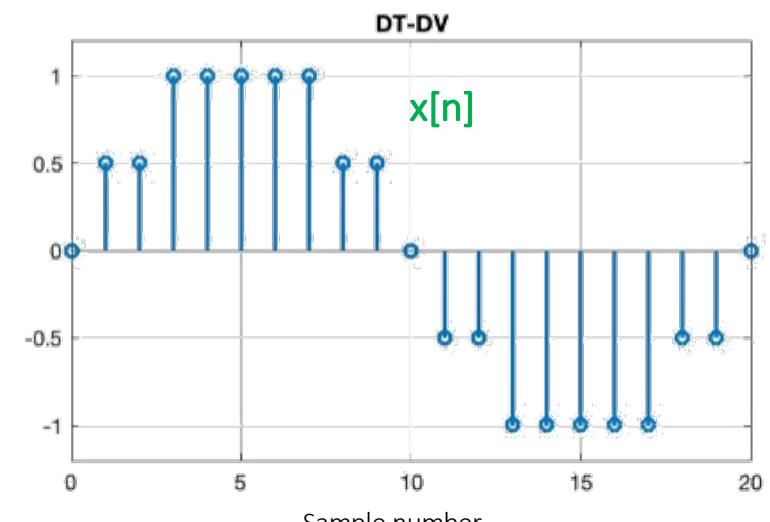
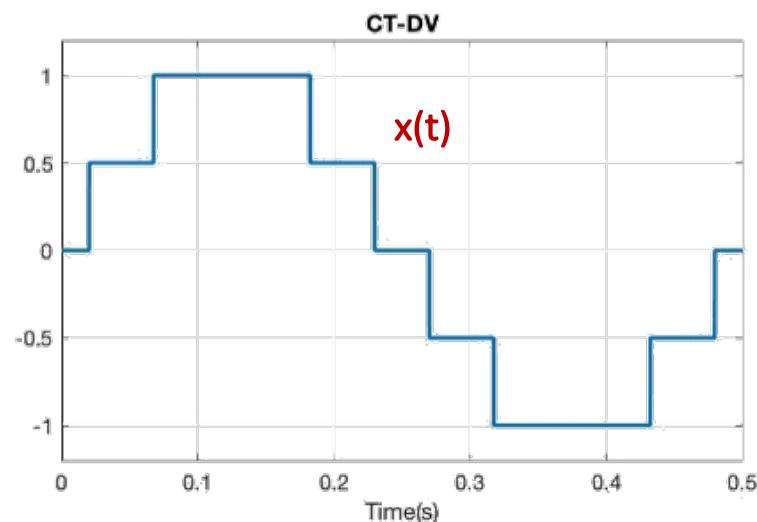
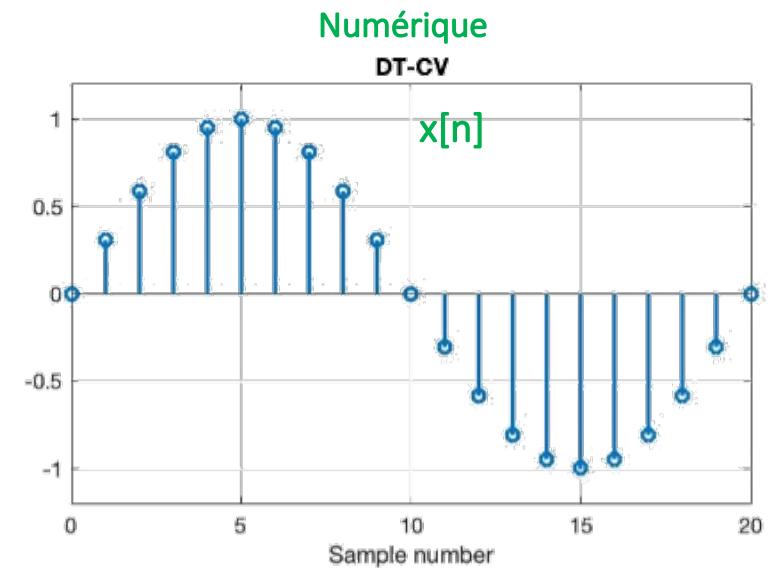
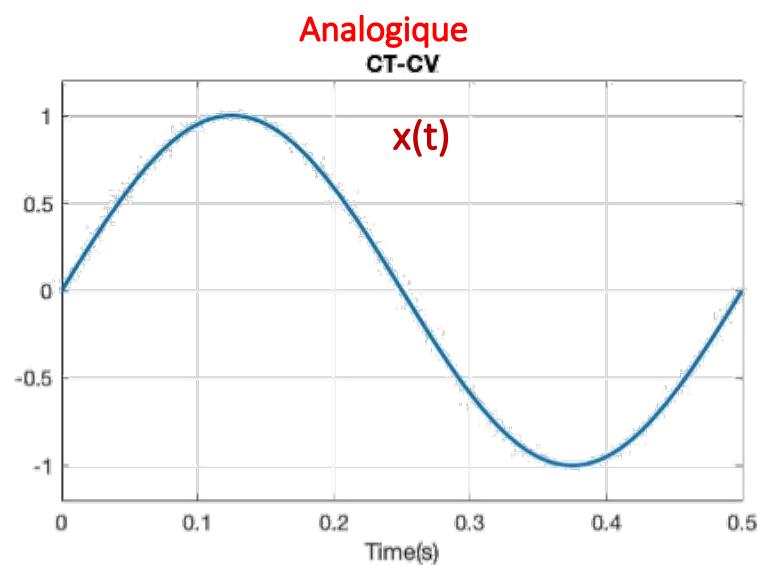
Différentes classes de signaux

CT-CV :
Continuous Time - Continuous Value

CT-DV:
Continuous Time - Discrete Value

DT-CV:
Discret Time- Continuous Value

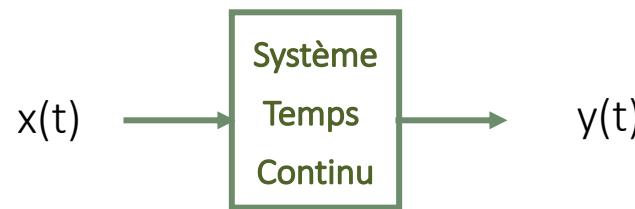
DT-DV:
Discrete Time - Discrete Value



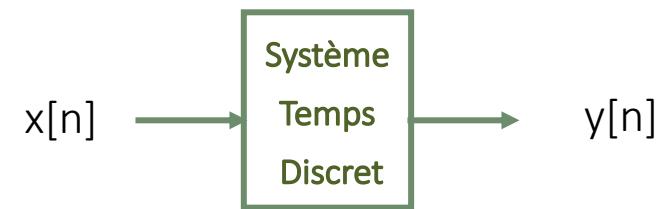
Qu'est-ce qu'un **système** ?

Systèmes Temps Continu et Temps Discret

$$x(t) \rightarrow y(t)$$



$$x[n] \rightarrow y[n]$$



Exemples:

- Relation entre la tension aux bornes d'un condensateur et la tension d'entrée
- Relation entre la vitesse d'un véhicule et la force appliquée
- Équations différentielles linéaires du 2^{ème} ordre
(système temps continu)
- Équation aux différences du 1^{er} ordre (système temps discret)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t)$$

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]$$

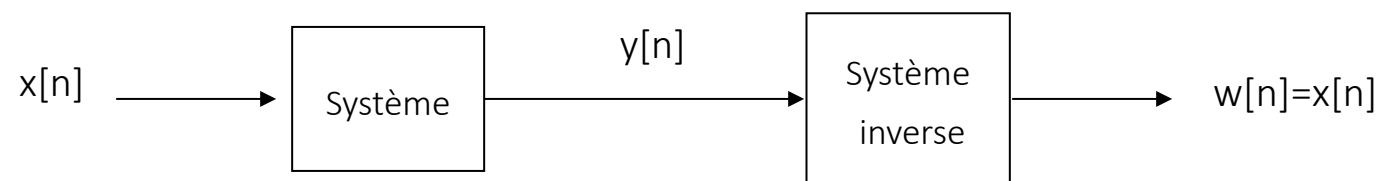
Systèmes particuliers

Système sans mémoire

La sortie y à l'instant t ou n ne dépend que de l'entrée x à ce même instant

Système inversible

Des entrées distinctes conduisent à des sorties distinctes



Système causal

La sortie à **n'importe quel instant** ne dépend que des valeurs de l'entrée aux instants présent et passés

$$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[n]$$

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

$$y[n] = x[-n]$$

Système stable

A une entrée bornée: $|x(t)| \leq M \quad \forall t$ correspond une sortie bornée $|y(t)| \leq N \quad \forall t$

$$y(t) = x(t) - x(t+1)$$

$$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[n]$$

Système causal au repos

Un système causal est initialement au repos, si sa sortie est nulle tant que son entrée est nulle

$$x(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq t_0, \quad \text{alors} \quad y(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq t_0$$

SLTI : systèmes linéaires et temporellement invariants

Système temporellement invariant

Un décalage temporel sur le signal d'entrée entraîne le même décalage temporel sur le signal de sortie



Système linéaire \Leftrightarrow Propriété de superposition : fondamentale pour déterminer la réponse à n'importe quel signal pouvant se décomposer en une combinaison linéaire de signaux élémentaires

Soit

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

Alors

$$a.x_1(t) + b.x_2(t) \rightarrow a.y_1(t) + b.y_2(t)$$

Un système Temps Continu régi par une équation différentielle à coefficients constants **initiallement au repos** est un **SLTI**

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Soit

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

Alors

$$a.x_1[n] + b.x_2[n] \rightarrow a.y_1[n] + b.y_2[n]$$

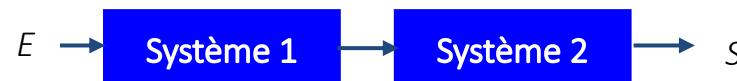
Un système Temps Discret régi par une équation aux différences à coefficients constants **initiallement au repos** est un **SLTI**

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Interconnexions de systèmes

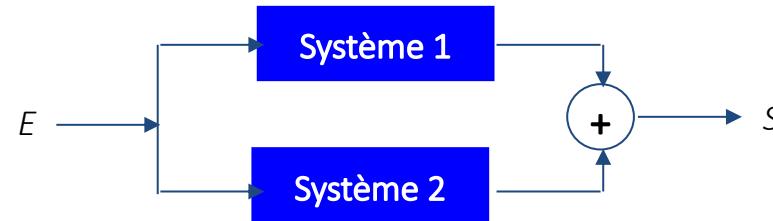
Des systèmes complexes peuvent être construits en interconnectant des sous ensembles plus simples...

Interconnexion Série



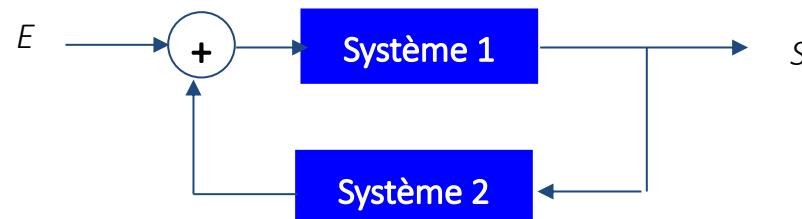
Systèmes en cascade, chaîne d'amplification

Interconnexion Parallèle



Traitement en parallèle : systèmes à base de codes orthogonaux, GPS, UMTS...

Interconnexion Rétro-actionnée

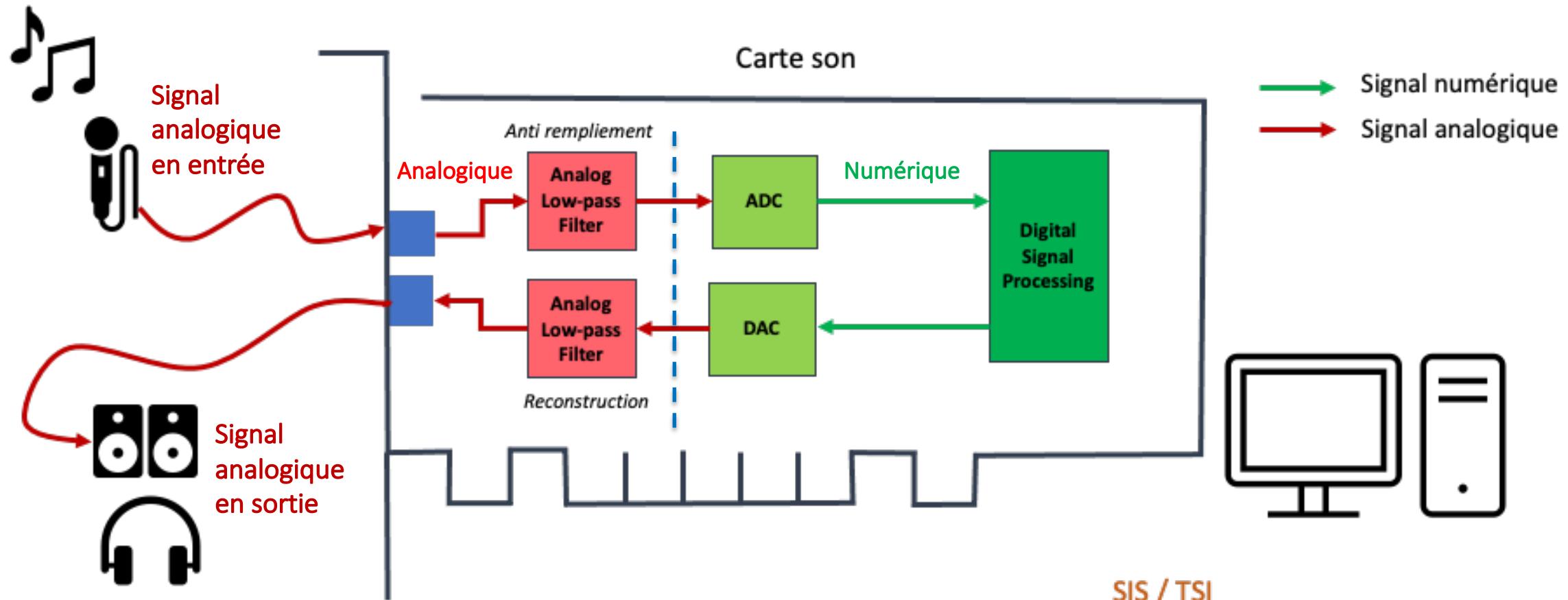


Systèmes asservis : maintien d'une vitesse, d'une phase...

Qu'est-ce qu'une chaine de traitement
numérique ?

Exemple de chaîne de traitement du signal numérique

Cas 1: Chaîne de traitement d'un signal audio

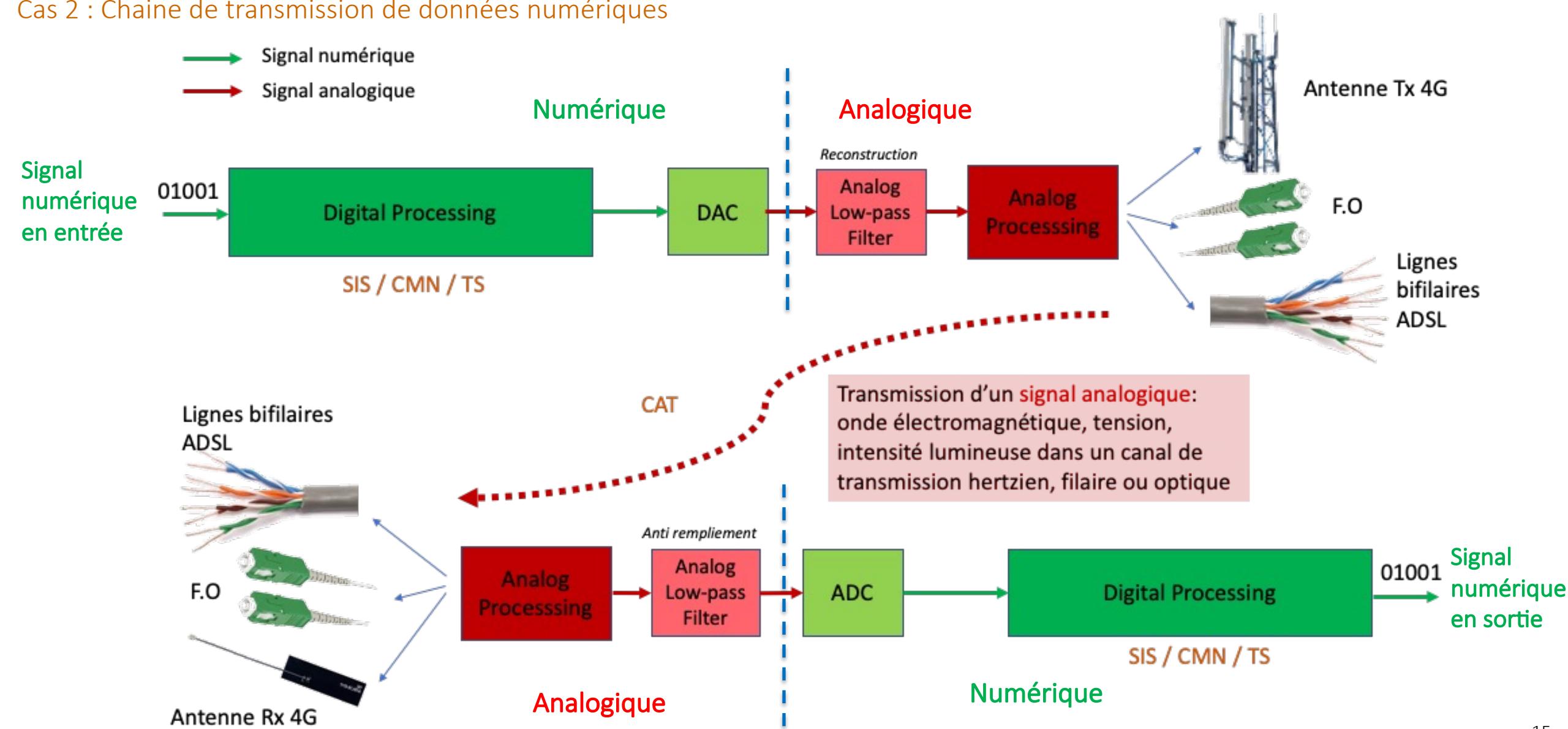


ADC : convertisseur Analogique / Numérique

DAC : convertisseur Numérique / Analogique

Exemple de chaîne de traitement du signal numérique

Cas 2 : Chaîne de transmission de données numériques



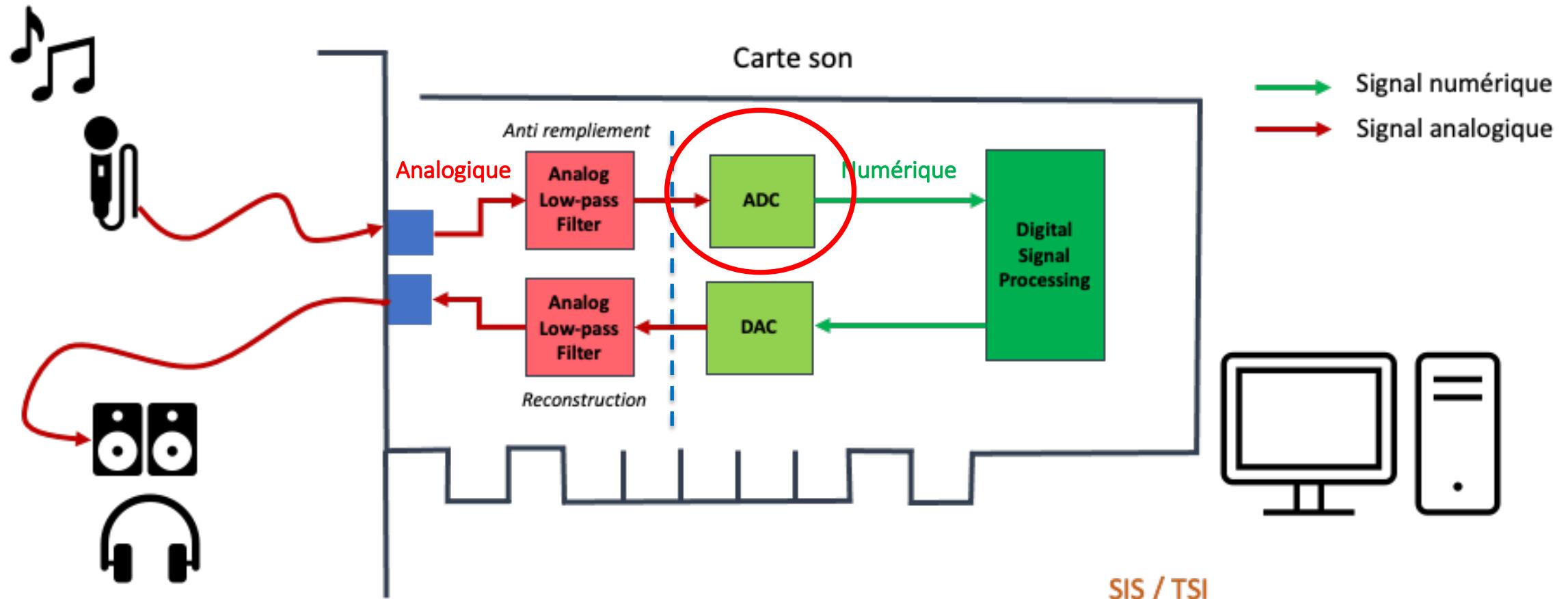
Les différents éléments d'une chaîne de traitement numérique

Les différents éléments d'une chaîne de traitement
numérique

Le Convertisseur Analogique Numérique ADC

Exemple de chaîne de traitement du signal numérique

Cas 1: Chaîne de traitement d'un signal audio

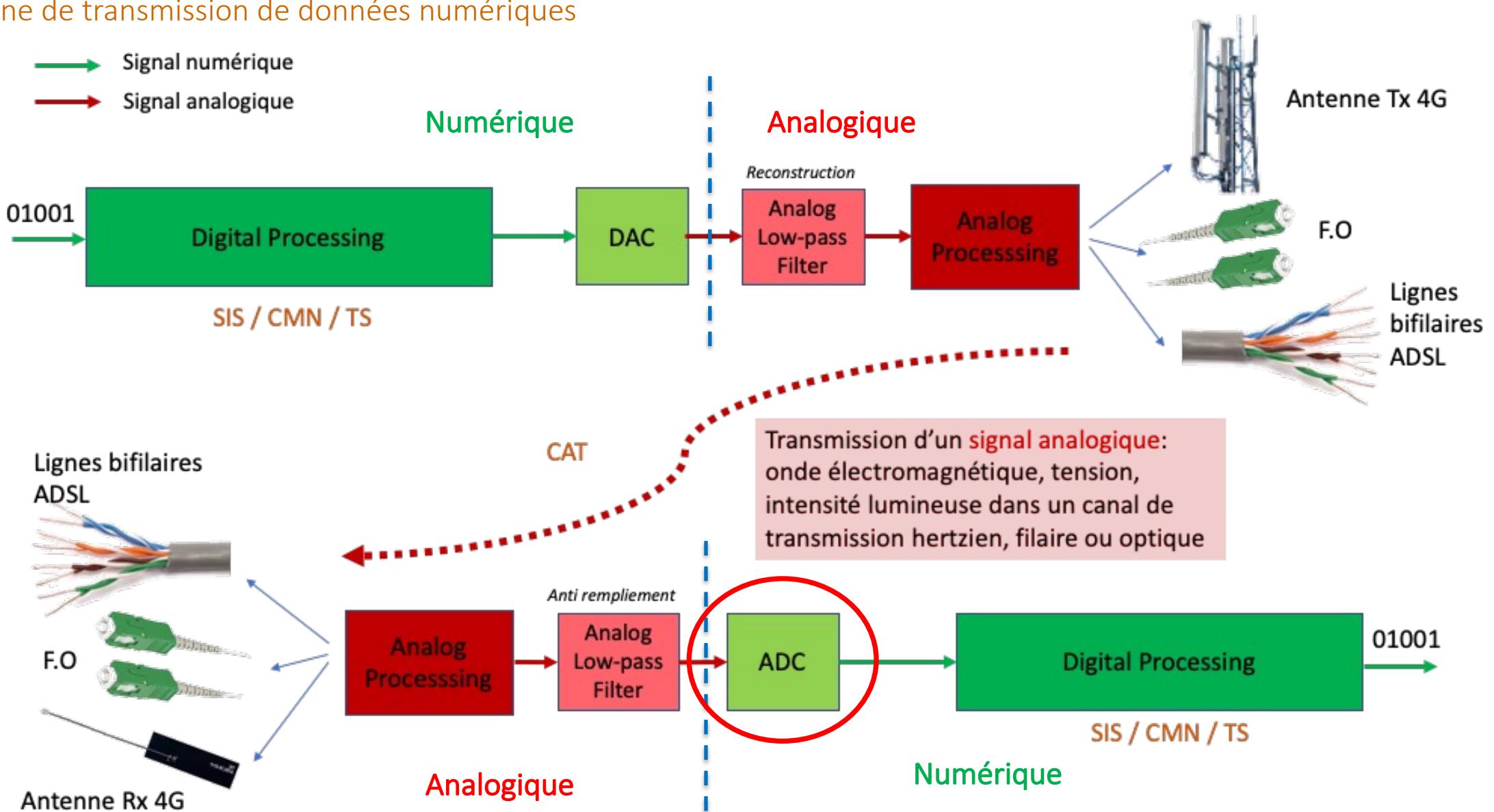


ADC : convertisseur Analogique / Numérique

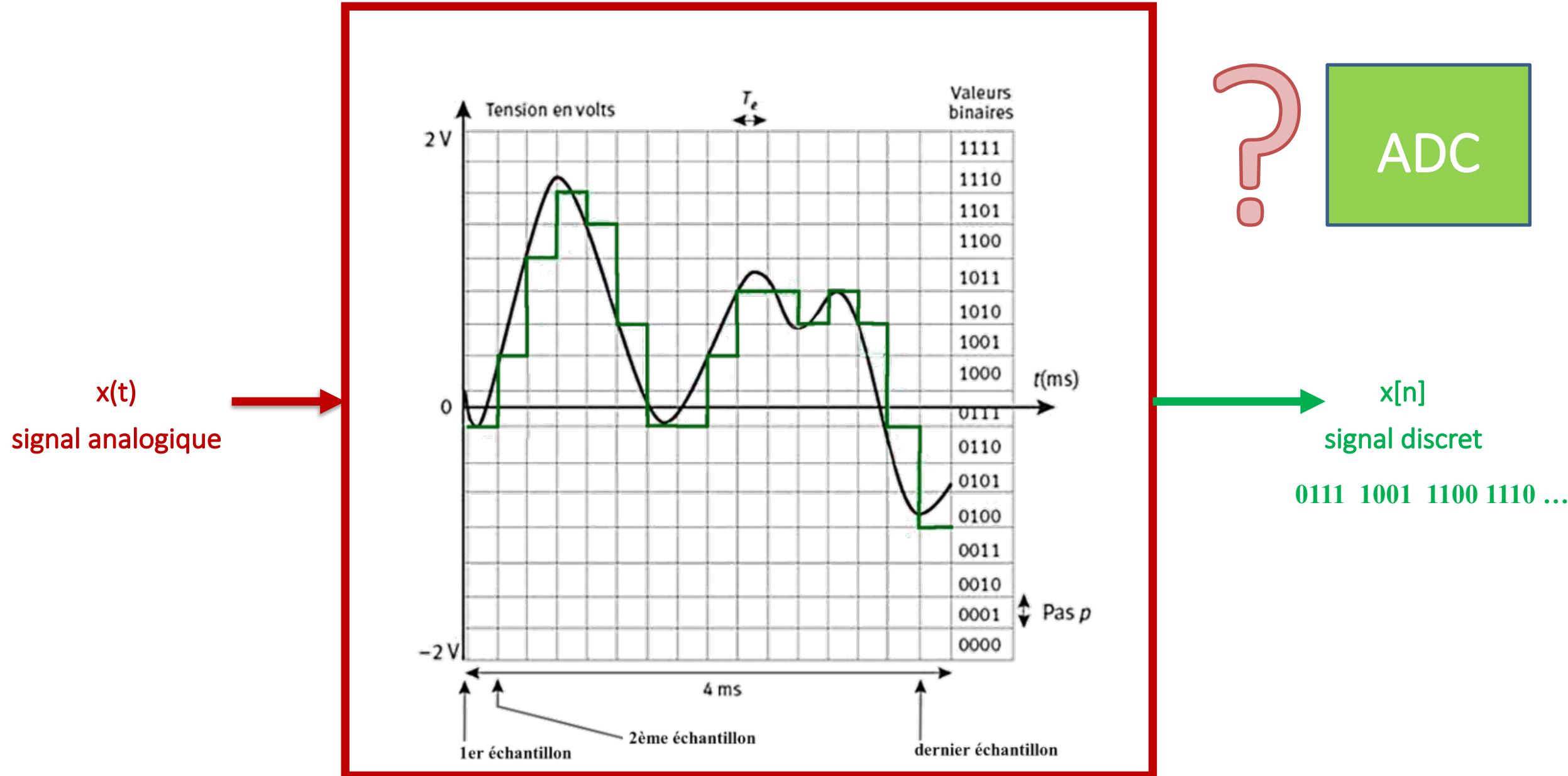
DAC : convertisseur Numérique / Analogique

Exemple de chaîne de traitement du signal numérique

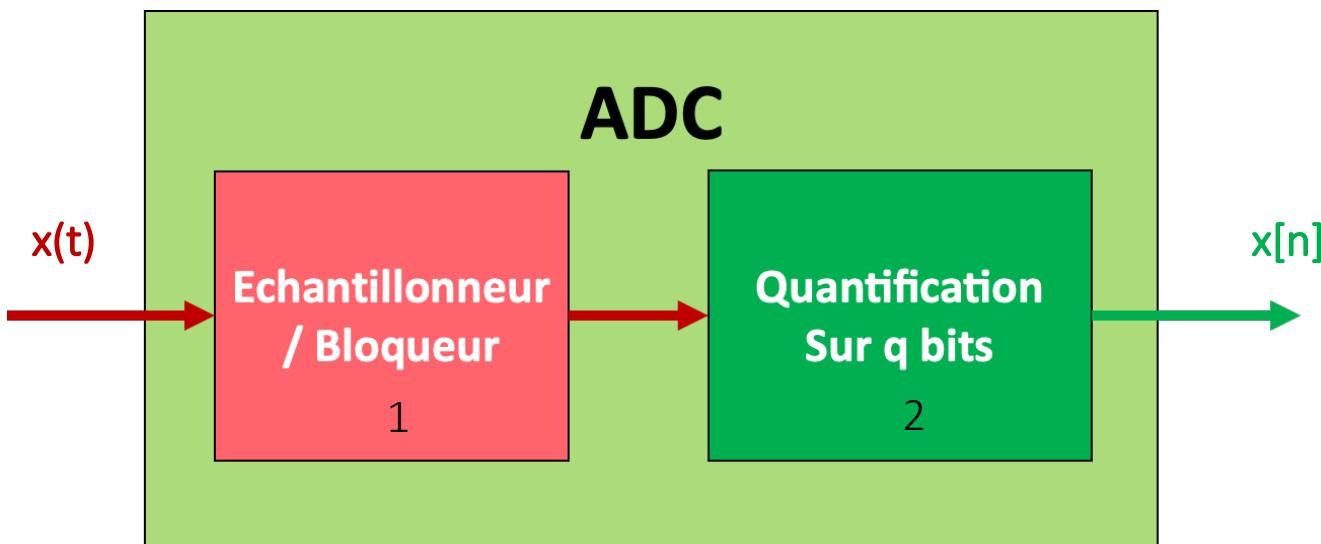
Cas 2 : Chaîne de transmission de données numériques



Numérisation: une conversion analogique numérique



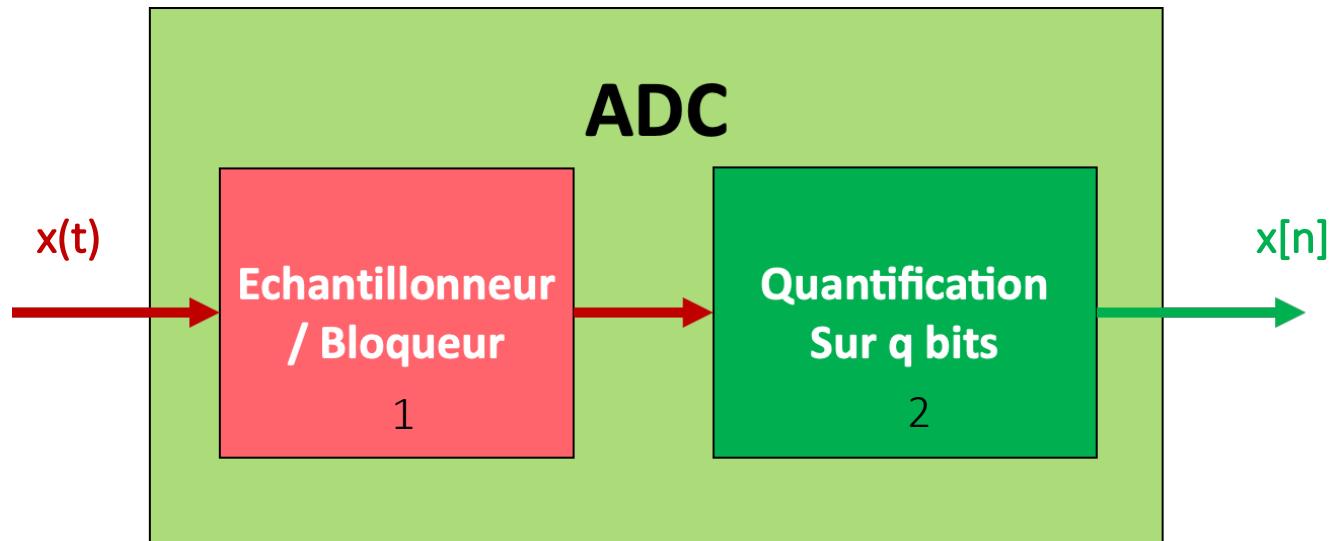
ADC Convertisseur Analogique Numérique



La numérisation d'un signal en deux étapes :

1. **Echantillonnage** (discrétisation du temps), qui consiste à prélever la valeur du signal à des instants précis (instants d'échantillonnage).
2. **Quantification ou codage** (discrétisation des valeurs), qui associe un code numérique à la valeur échantillonnée précédemment.

1^{ère} étape de l'ADC: Echantillonneur bloqueur



- ✓ **Echantillonneur / bloqueur** = Entrée de l'ADC
- ✓ Circuit électronique constitué dans sa forme la plus simple d'un interrupteur commandé et d'un condensateur.
- ✓ Prélever le signal d'entrée aux instants d'échantillonnage et maintenir une valeur de tension constante entre deux instants d'échantillonnage
- ✓ Instants d'échantillonnage à intervalle de temps régulier => **période d'échantillonnage** T_s
- ✓ Fréquence d'échantillonnage ou Sample rate : **$F_s = 1/T_s$**

Echantillonnage

Valeurs continues de tension, courants, etc.

$$x_c(t) = \sin(2\pi F_0 t) + 1$$

$$F_0 = 2 \text{ Hz}$$

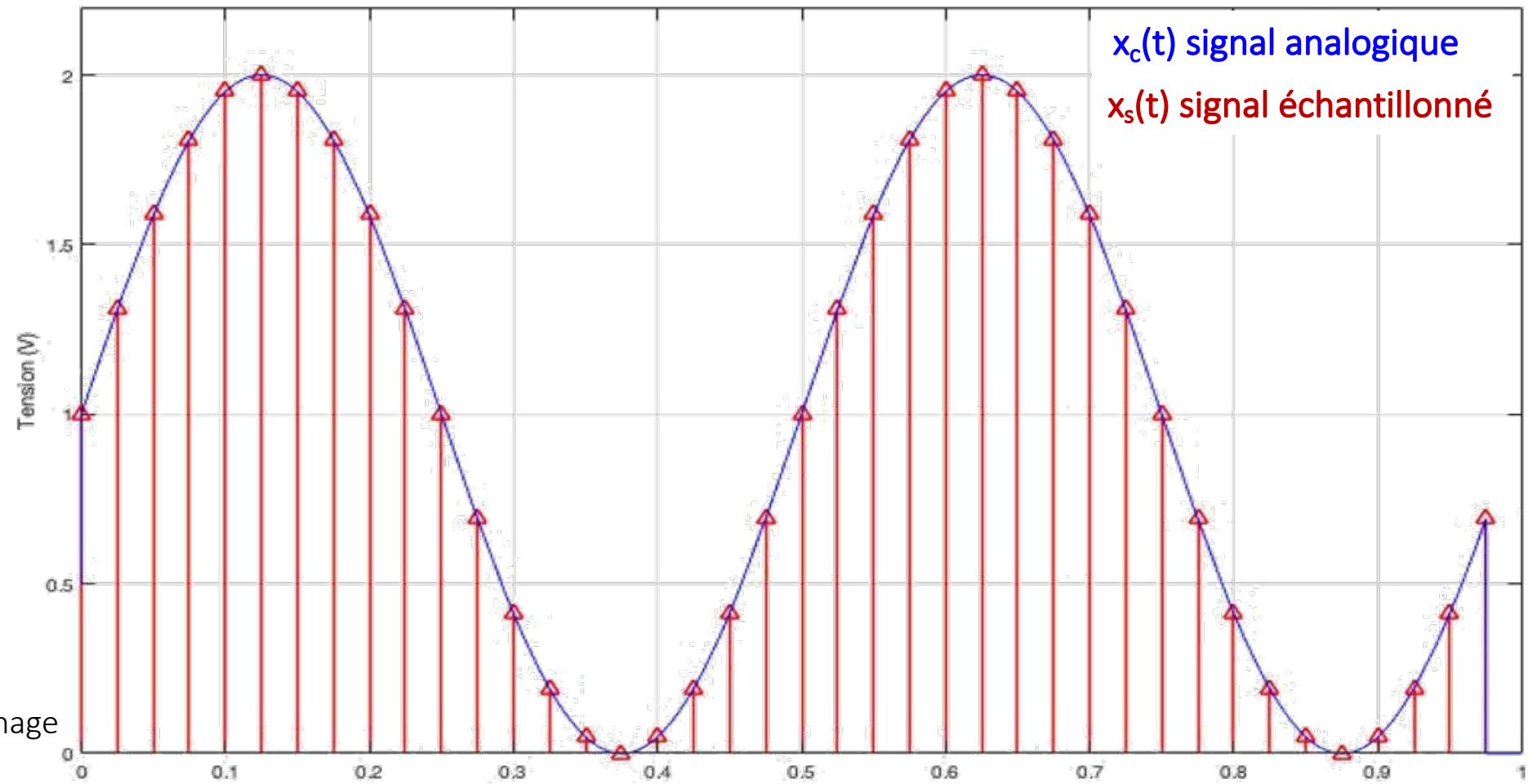
Prélever les valeurs du signal $x_c(t)$ aux instants d'échantillonnage nT_s

$$x_s(nT_s) = \sin(2\pi F_0 nT_s) + 1$$

$$F_s = 40 \text{ Hz}$$

T_s : période d'échantillonnage

$$T_s = 0.025 \text{ s}$$



Temps discret

Echantillonage

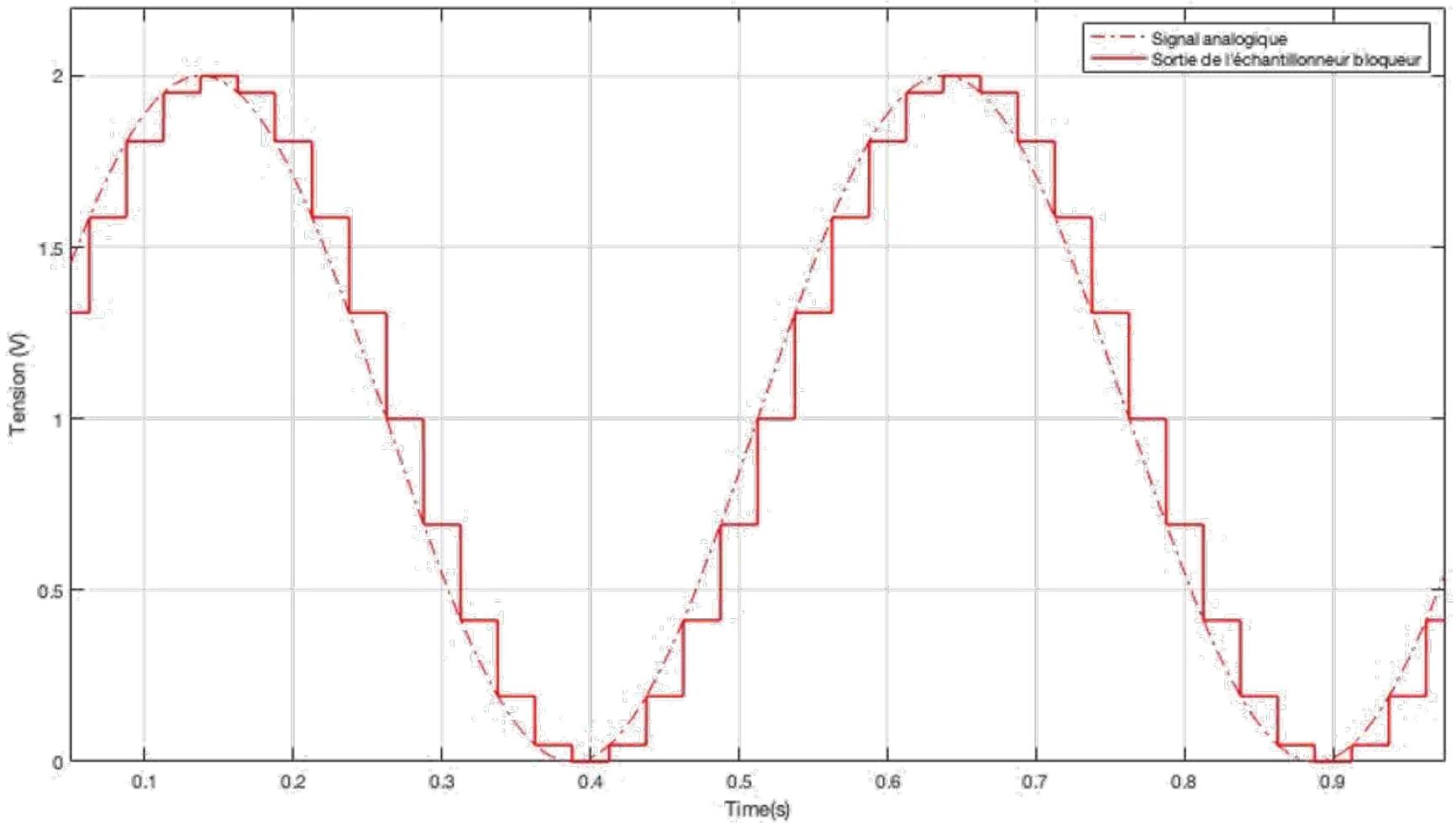
$T_s=0.025 \text{ s} \quad F_s=40 \text{ Hz}$

Bloqueur

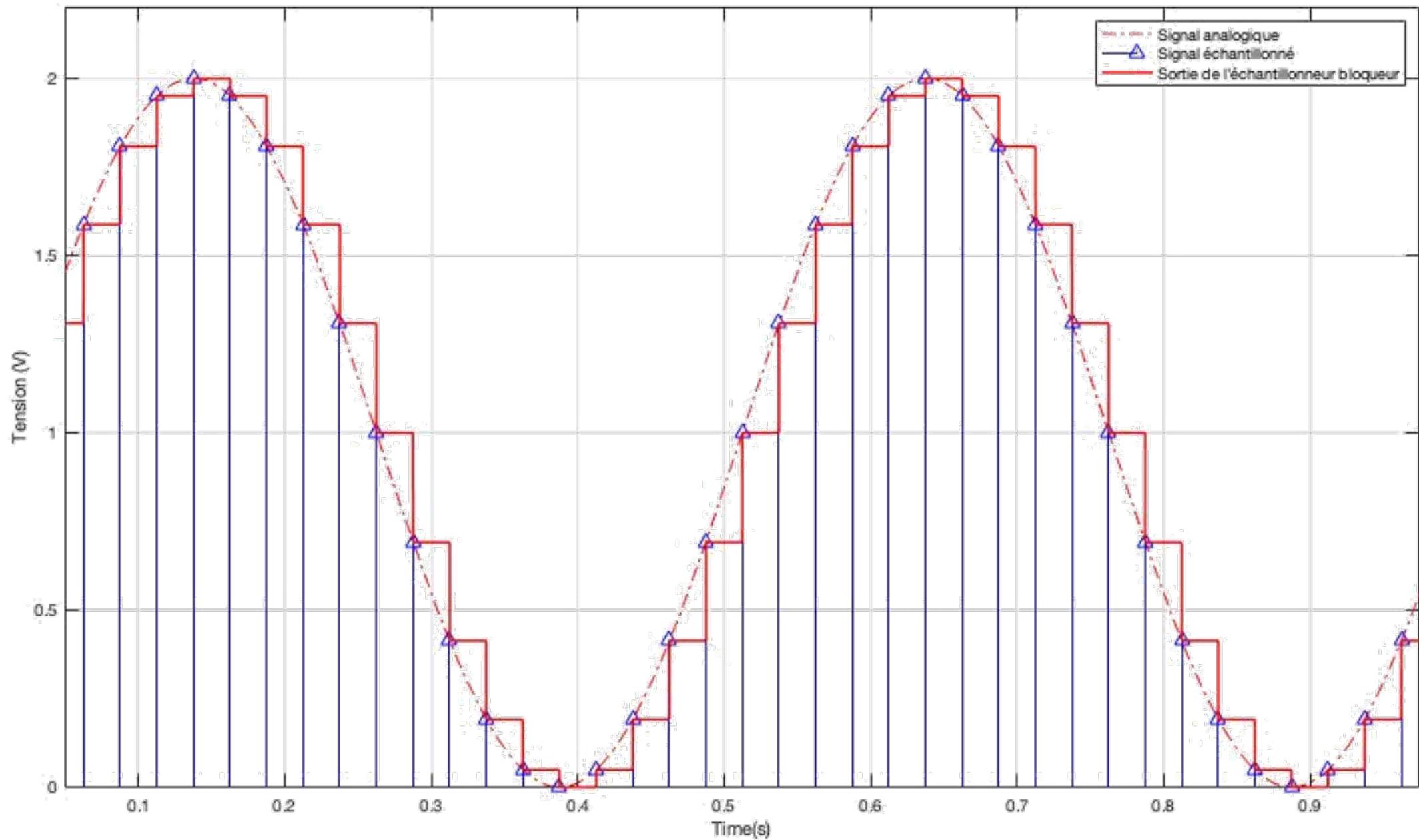
Valeurs continues de tension, courants, etc.

Bloqueur

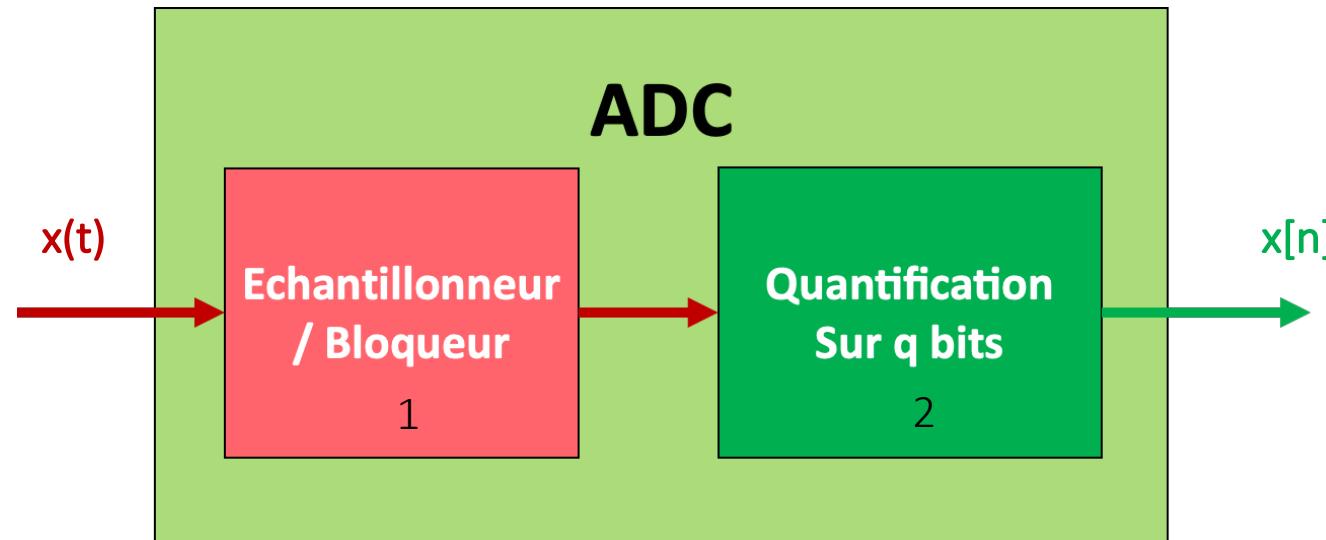
Maintient une valeur
de tension constante entre
deux instants d'échantillonnage
 nT_s et $(n+1)T_s$



Echantillonneur / Bloqueur



2^{ème} étape de l'ADC : Quantification



En traitement du signal, la **quantification** est le procédé qui permet d'approximer un signal continu (ou à valeurs dans un ensemble discret de grande taille) par des valeurs d'un ensemble discret d'assez petite taille.

Lors de la numérisation de données analogiques, la quantification est complétée par un codage en symboles binaires de chaque échantillon.

Quantification

Codage des valeurs numériques
avec une grande précision

=

Quantification avec un nombre de
bits élevés

Grande résolution $\Leftrightarrow \Delta q$ petit

$x = [1.0000 \quad 1.3090 \quad 1.5878 \quad 1.8090 \quad 1.9511 \quad 2.0000 \quad 1.9511 \quad 1.8090 \quad 1.5878 \quad 1.3090 \quad 1.0000 \quad 0.6910 \quad 0.4122 \quad 0.1910 \quad 0.0489 \dots]$

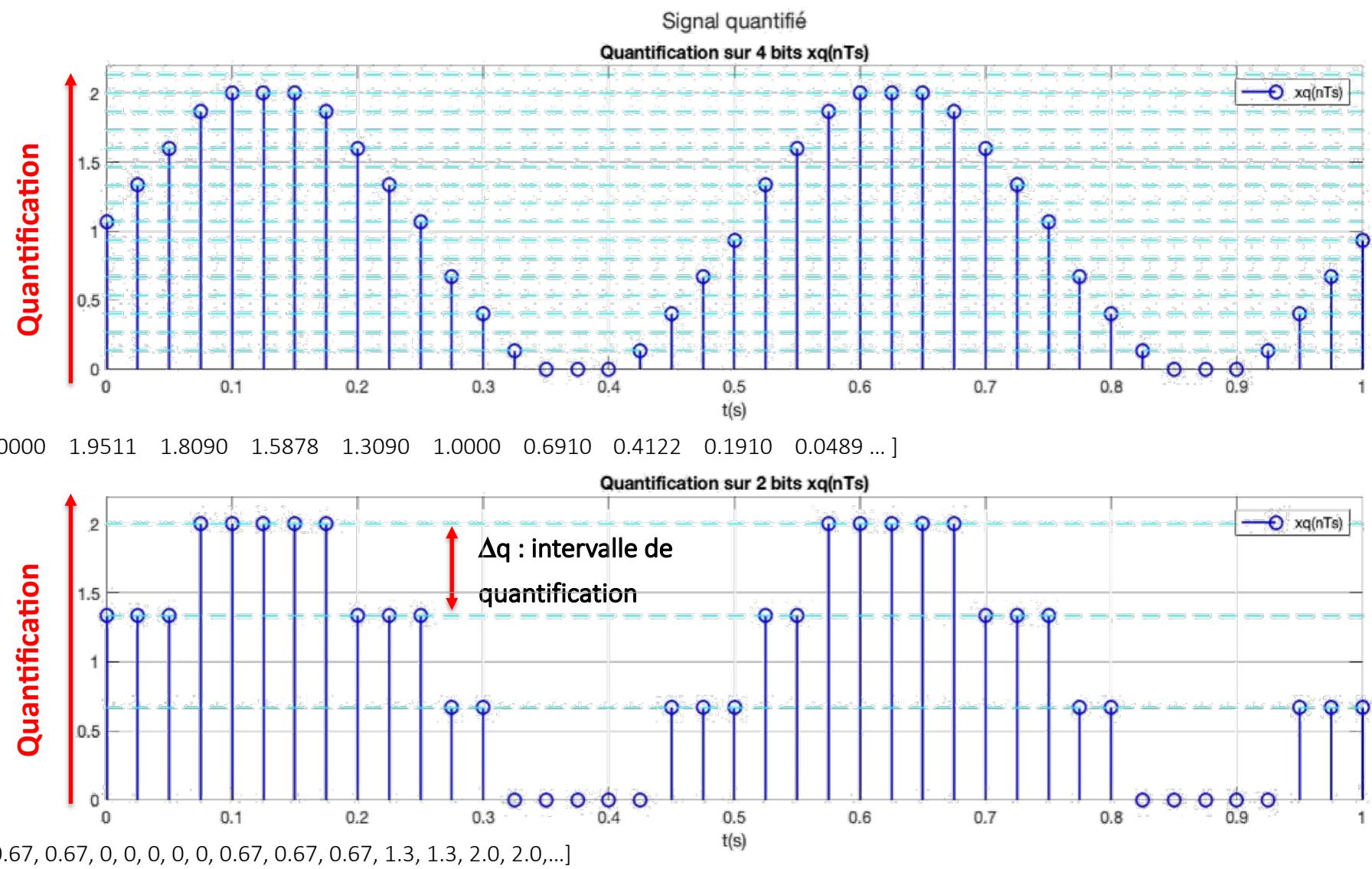
Codage des valeurs numériques
avec une faible précision

=

Quantification avec un faible
nombre de bits
Faible résolution $\Leftrightarrow \Delta q$ grand

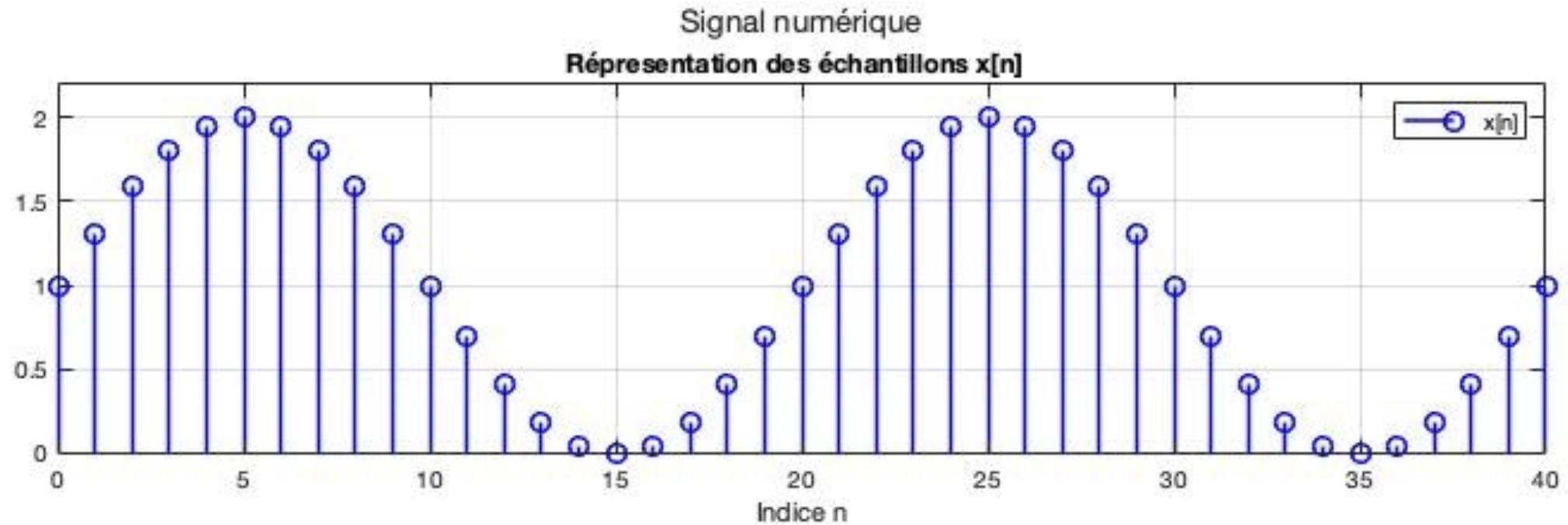
[quantization_modélisation.mlx](#)

[quantization_sampling_2.mlx](#)



Signal numérique

Valeurs numériques des échantillons en fonction de leur indice



$x = [1.0000 \quad 1.3090 \quad 1.5878 \quad 1.8090 \quad 1.9511 \quad 2.0000 \quad 1.9511 \quad 1.8090 \quad 1.5878 \quad 1.3090 \quad 1.0000 \quad 0.6910 \quad 0.4122 \quad 0.1910 \quad 0.0489 \dots]$

$x[n] = x_s(nT_s)$ Valeur du signal échantillonné à l'instant nT_s

En pratique sous Matlab, avec un ordinateur, erreur de quantification négligeable (format float, double)

Représentation d'un signal sinusoïdal continu et d'un signal échantillonné sous matlab

```
% signal temps continu xc(t) de durée T
F0=2
T=1;
syms t
xc= (sin(2*pi*F0*t))*rectangularPulse(0,T,t); % symbolic toolbox
% signal temps continu

% paramètre de l'échantillonnage
Fs= 20*F0; % Fs >> 2F0
Ts=1/Fs;

N=Fs*T; % nombre d'échantillons du signal dans le temps T
n=0:N-1;
td=n*Ts; % vecteur de temps d'échantillonnage
sigld=sin(2*pi*F0*td); % définition du signal temps discret

figure
f=fplot(xc, 'r'); % tracé pour un signal défini par la Symbolic Toolbox
xlabel("Time(s)")
hold on;
stem(td,sigld, 'b' , "lineWidth",1.5, "MarkerSize",8, "Marker", '^') % tracé pour un signal échantillonné
axis([0 T -1.2 1.2]);grid;
legend("Signal temps continu x(t)", "Signal échantillonné")
figure
stem(n,sigld,'b') % tracé pour un signal temps discret
axis([0 N-1 -1.2 1.2]);grid;
legend("Signal temps discret")
xlabel("Indice n")
```

[sampled_signal_discrete_signal mlx](#)
[S_29.m](#)

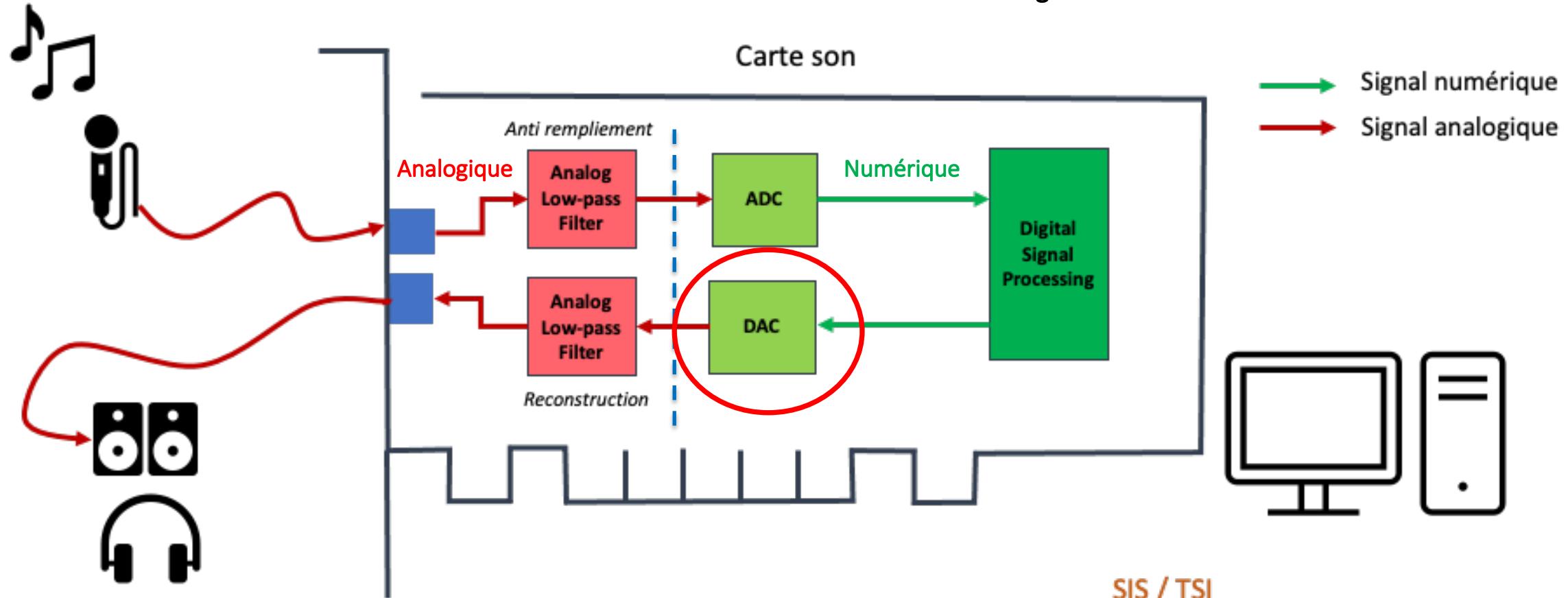
Les différents éléments d'une chaîne de traitement
numérique

Le Convertisseur Numérique Analogique DAC

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 1 : Chaine de traitement d'un signal audio

=> Cas d'un signal discret échantillonné

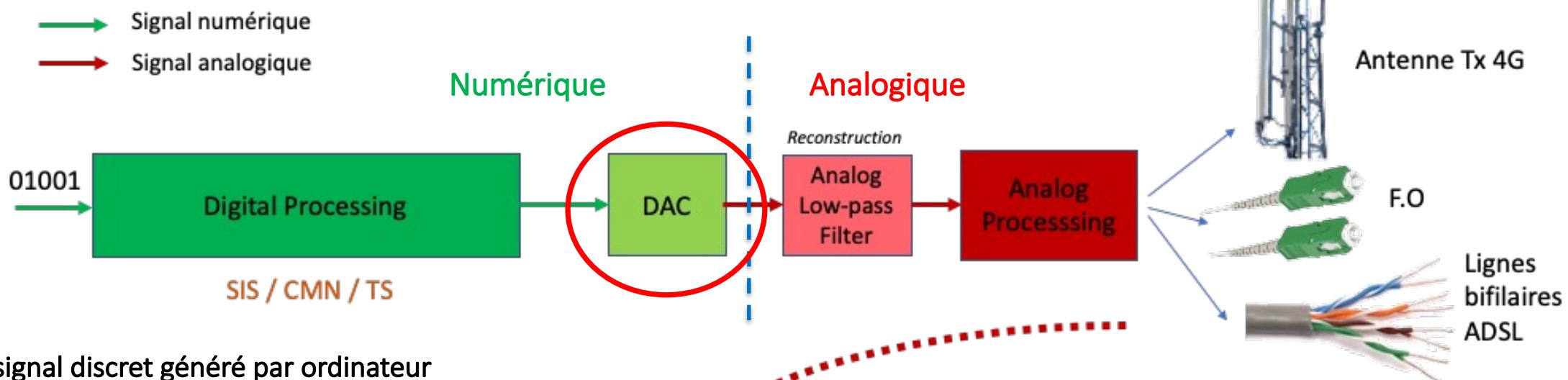


ADC : convertisseur Analogique / Numérique

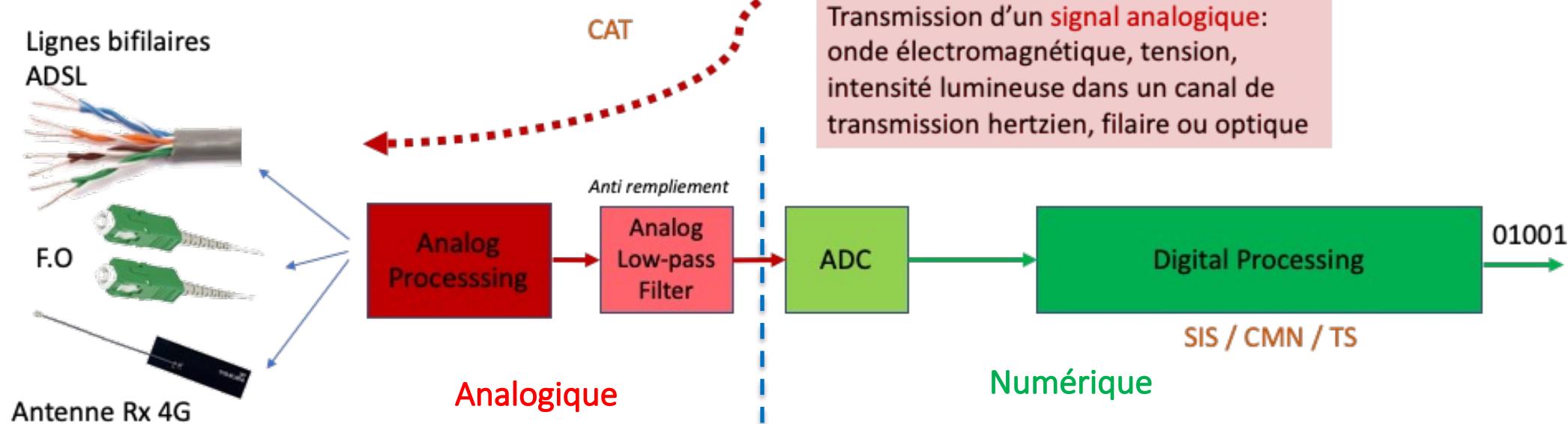
DAC : convertisseur Numérique / Analogique

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 2 : Chaine de transmission de données numériques



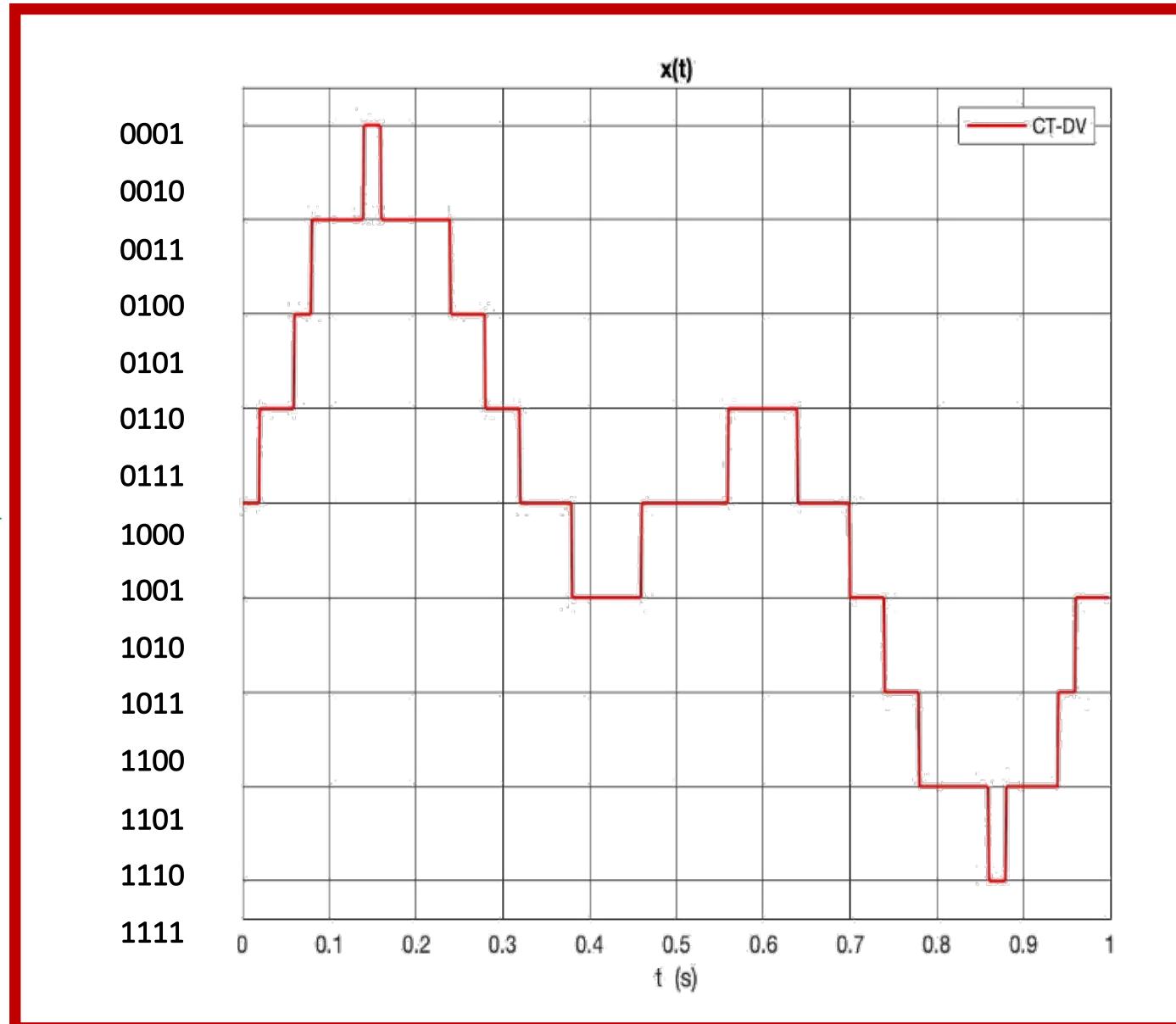
=> Cas d'un signal discret généré par ordinateur



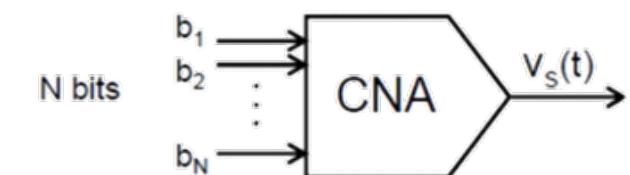
Reconstruction d' un signal analogique : conversion numérique analogique

$x[n]$
signal discret

0111 1001 1100 1110 ...



$x(t)$
signal analogique



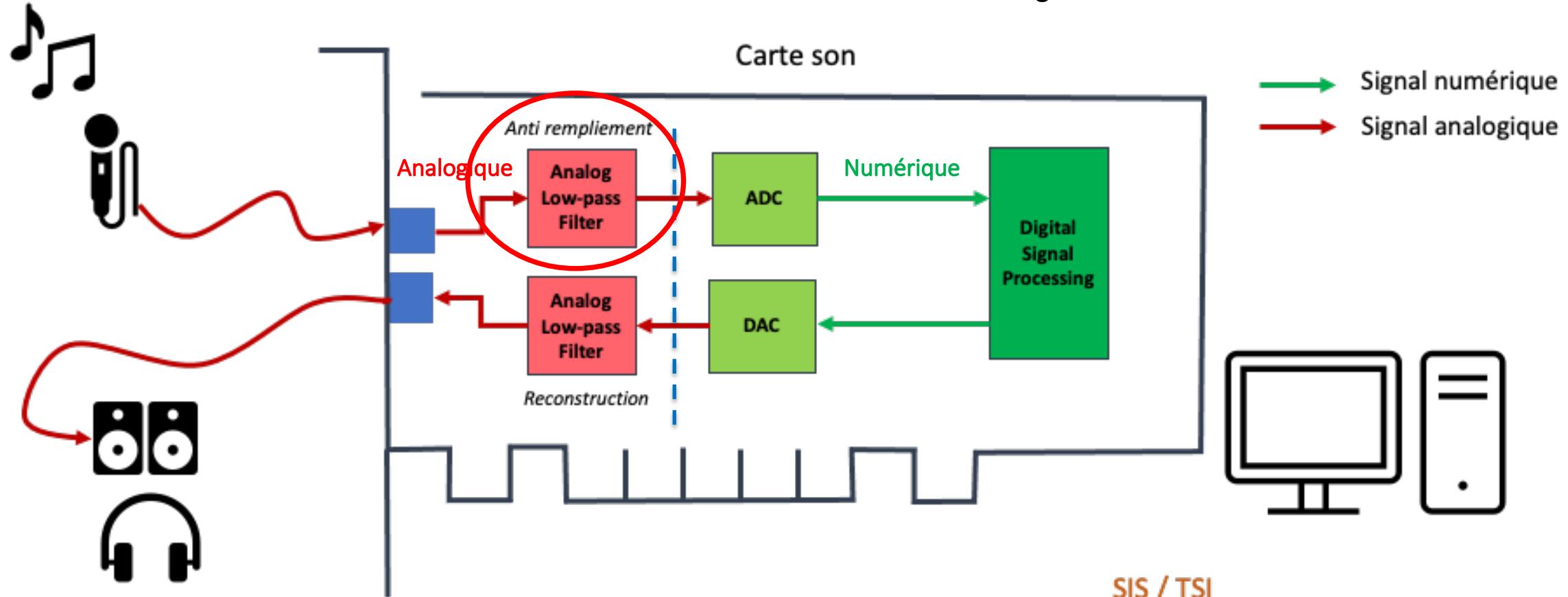
Les différents éléments d'une chaîne de traitement
numérique

Le filtre anti-repliement ou filtre anti-aliasing

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 1: Chaine de traitement d'un signal audio

=> Cas d'un signal discret échantillonné

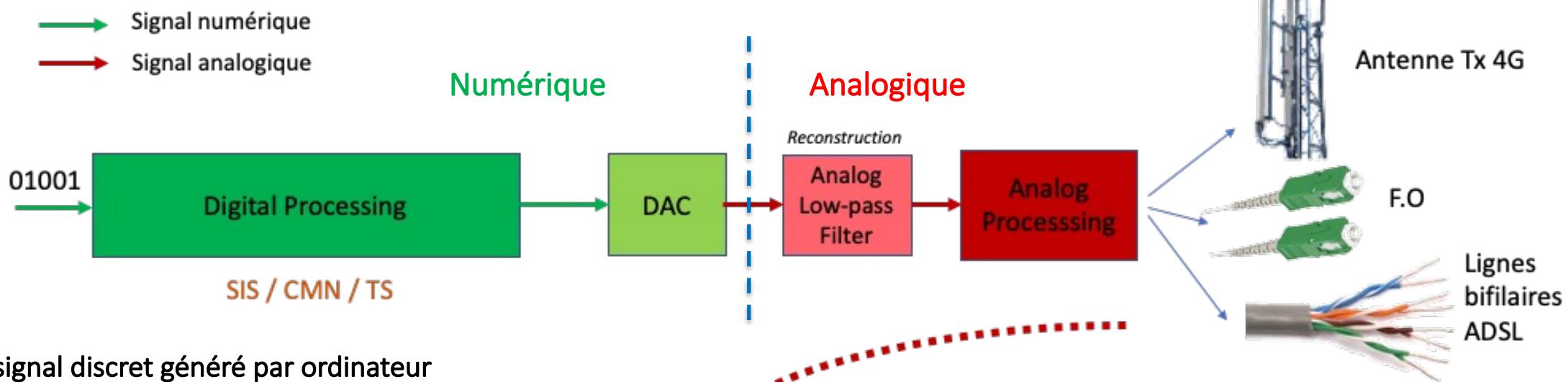


ADC : convertisseur Analogique / Numérique

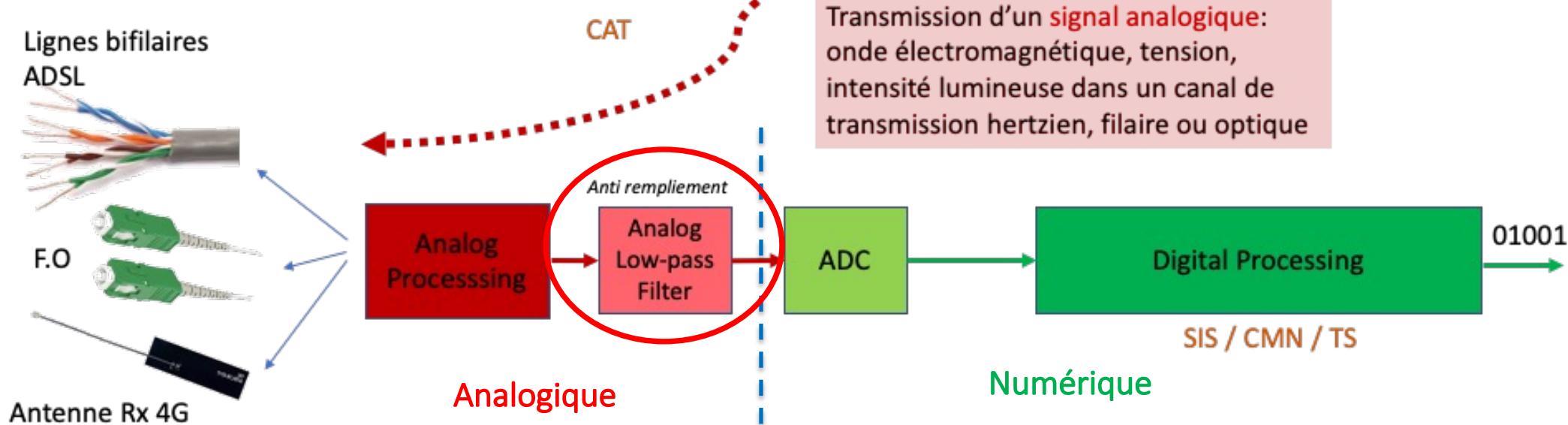
DAC : convertisseur Numérique / Analogique

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 2 : Chaine de transmission de données numériques



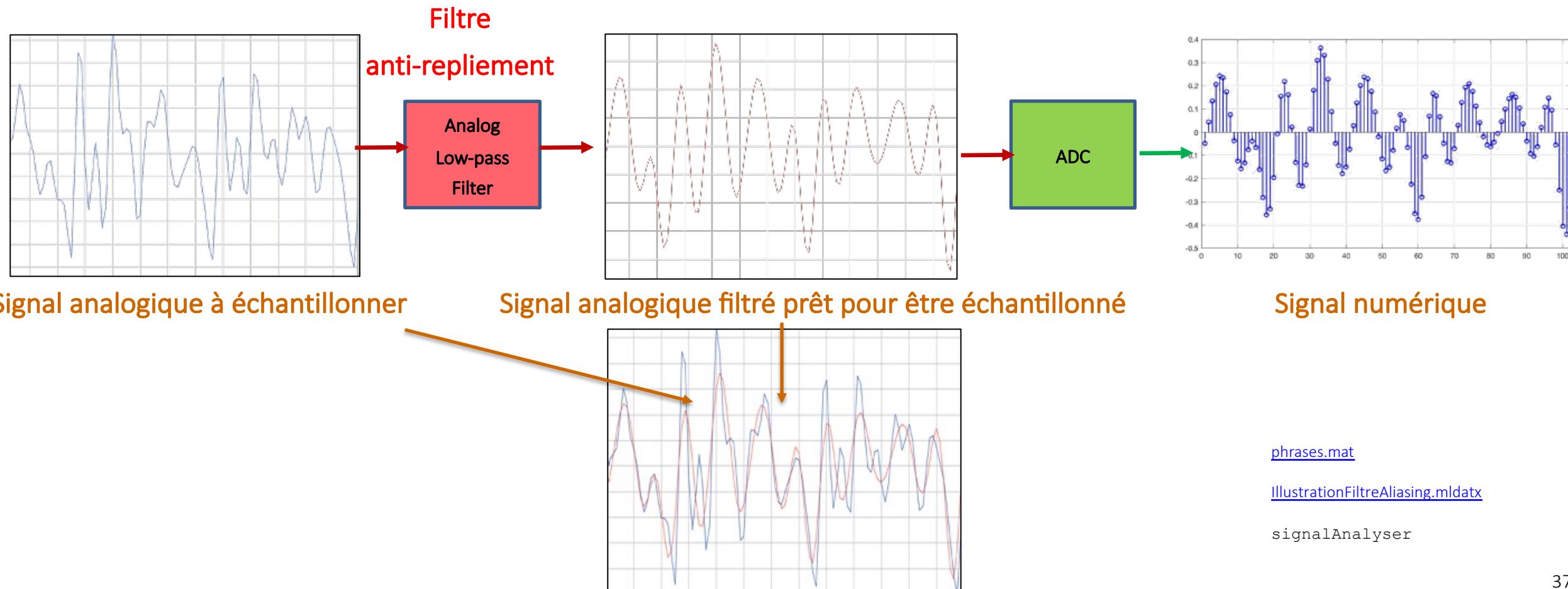
=> Cas d'un signal discret généré par ordinateur



Filtre anti-repliement ou anti-aliasing : AVANT L'ADC

Filtre anti-repliement

Avant le ADC : Suppression des hautes fréquences indésirables (oscillations rapides) dans le signal, trop hautes par rapport à la fréquence d'échantillonnage



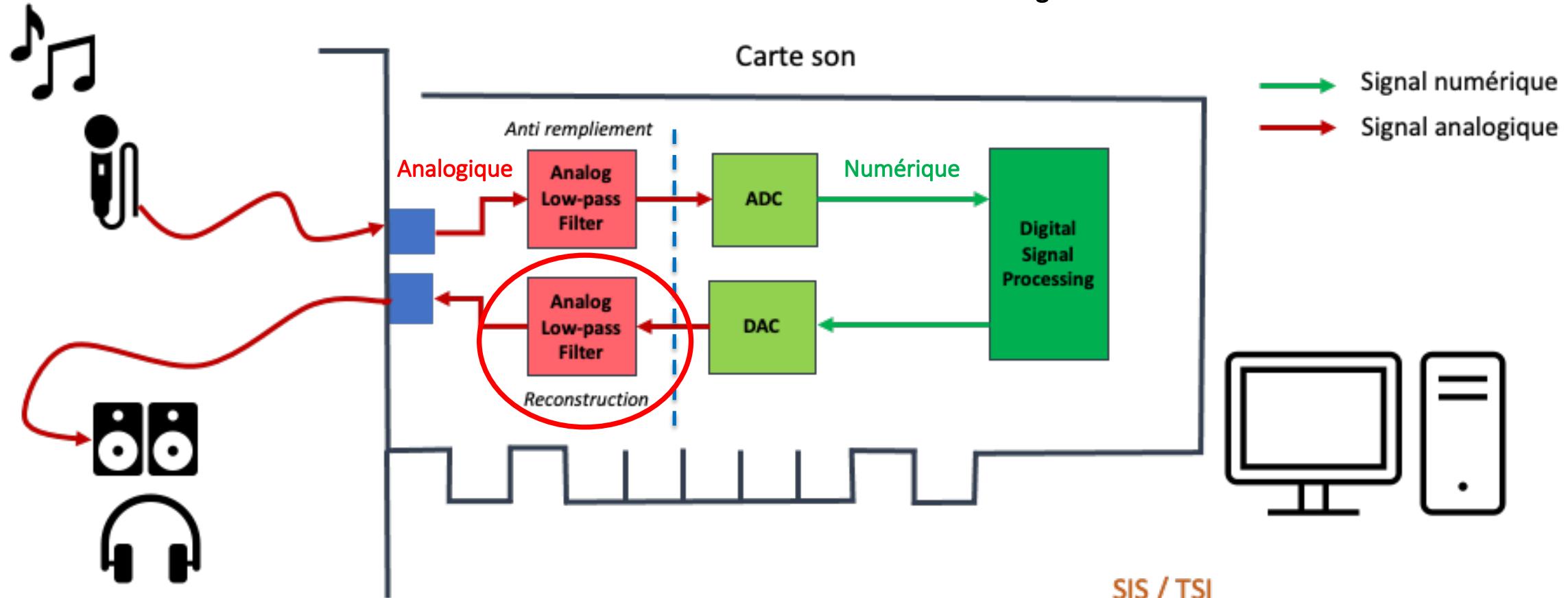
Les différents éléments d'une chaîne de traitement
numérique

Le filtre de reconstruction

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 1: Chaine de traitement d'un signal audio

=> Cas d'un signal discret échantillonné

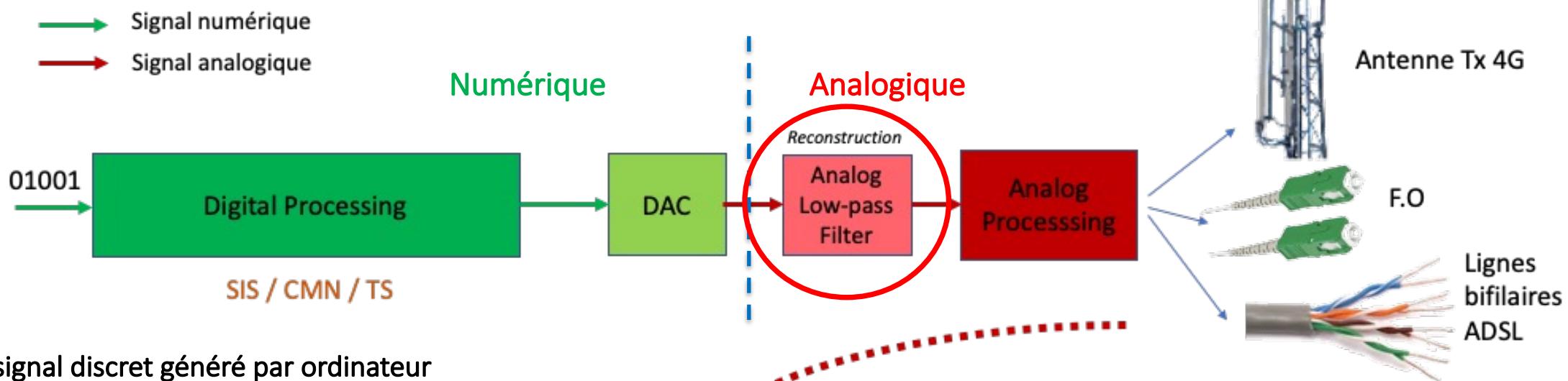


ADC : convertisseur Analogique / Numérique

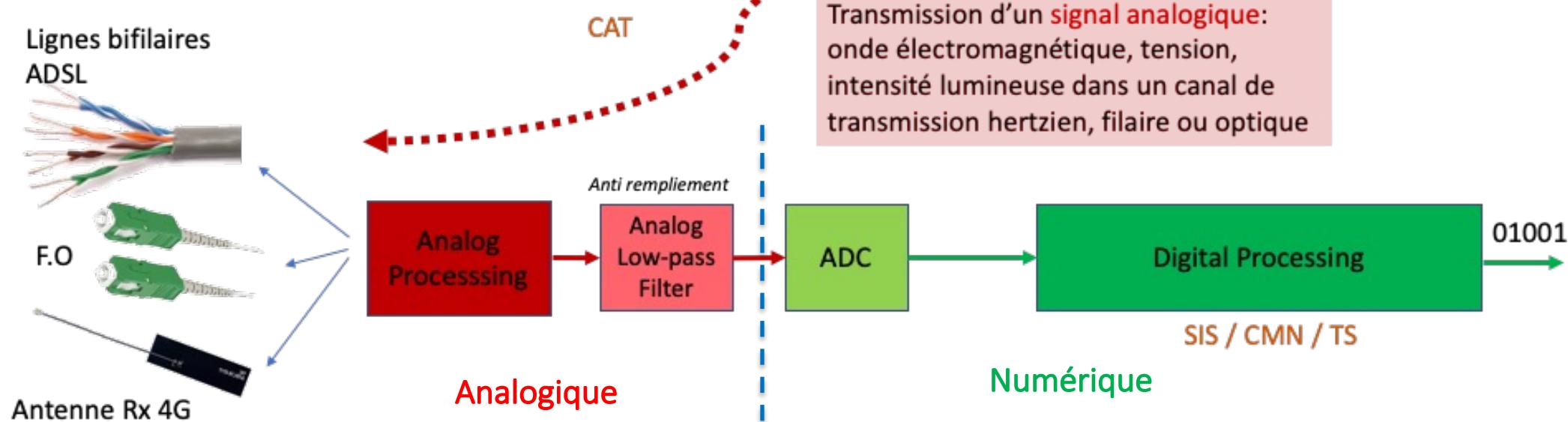
DAC : convertisseur Numérique / Analogique

Chaine de traitement du signal numérique

Cas 2 : Chaine de transmission de données numériques



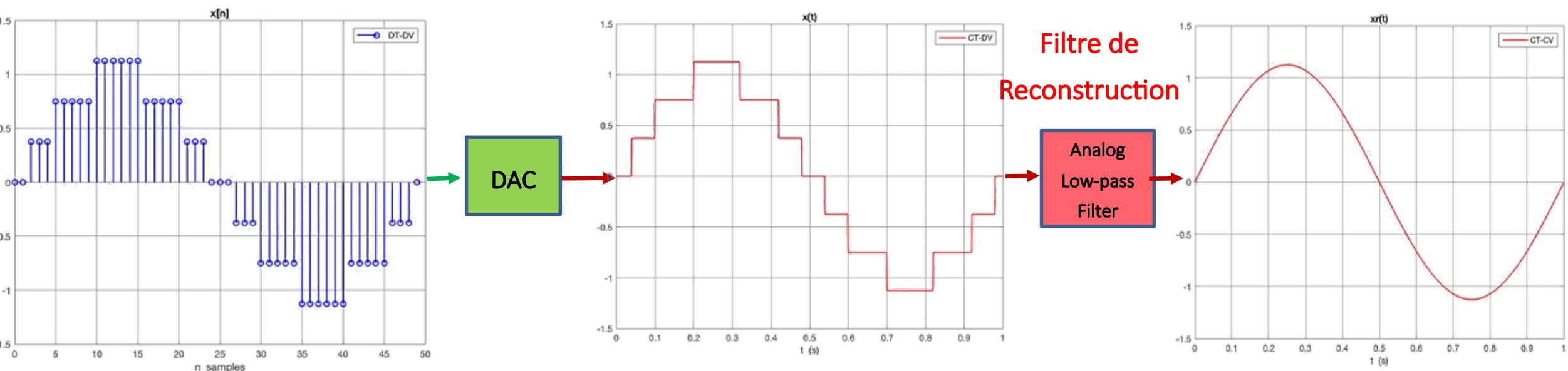
=> Cas d'un signal discret généré par ordinateur



Filtre de reconstruction : APRES LE DAC

Filtre de reconstruction

Après le DAC : filtre de lissage du signal



Exemple : étage RF d'une carte USRP => TP CMN

Filtre de lissage du signal : supprime les discontinuités après le DAC

Focus sur l'échantillonnage d'une sinusoïde

Pourquoi s'intéresser aux signaux sinusoïdaux ?

On le verra plus tard dans le cours, mais il y a **2 raisons** principales

1. Les signaux sinusoïdaux permettent **de construire une grande classe de signaux** (L^1 et L^2) par simple combinaison linéaire de sinusoïdes de différentes fréquences => série de Fourier ou Transformée de Fourier.
2. **Les réponses des SLTI** aux signaux sinusoïdaux sont suffisamment **simples** pour pouvoir déduire la réponse à n 'importe quel signal d 'entrée construit à partir de ces signaux de base.

Après l'étape d'échantillonnage, il est donc important qu'une sinusoïde échantillonnée représente parfaitement la sinusoïde en temps continu de départ.

Question: est-ce toujours le cas ?...

Echantillonnage d'une sinusoïde : attention au choix de la fréquence d'échantillonnage...

$x(t)$ signal à échantillonner

$$x(t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t + \pi/6)$$

$$f_0 = 1 \text{ Hz}$$

$$f_s < 2 f_0$$

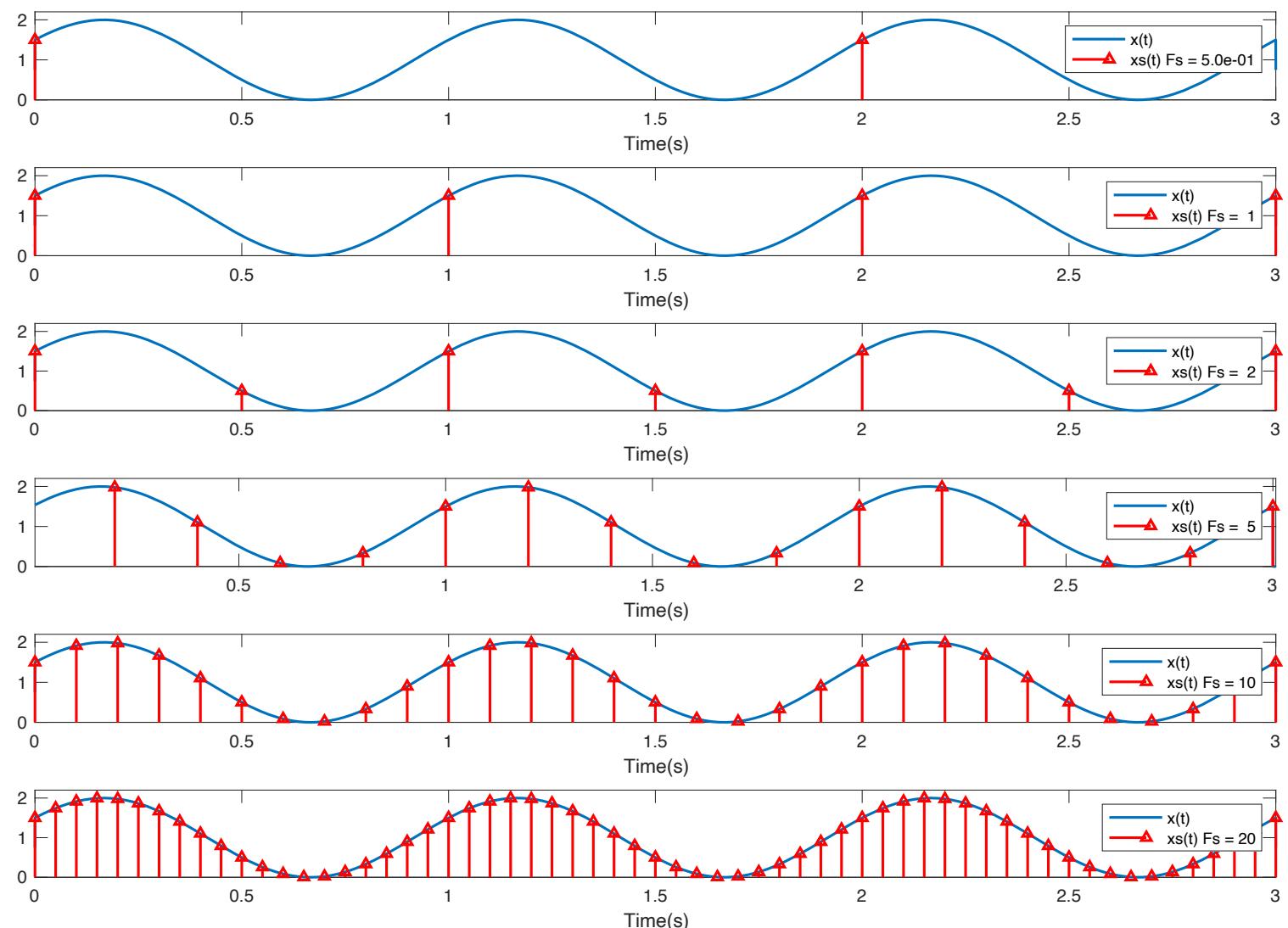
Impossible de retrouver la fréquence de la sinusoïde

$$f_s >> 2 f_0$$

On peut retrouver la fréquence de la sinusoïde

En pratique, on choisit f_s très supérieure à f_0 pour décrire correctement la sinusoïde

$$f_s > 10 f_0$$



Attention: Signal échantillonné identique pour des sinusoïdes de fréquence F_0+kF_s

$k \in \mathbb{N}$

$F_s=10\text{Hz}$

10 échantillons par seconde

Echantillonage correct

$F_s = 10.F_0 \Leftrightarrow F_0 = F_s/10$

$F_0 = 1\text{Hz} F_s=10\text{Hz}$

Echantillonage incorrect

F de la sinusoïde bleue $> F_s/2$

$F_1 = F_0 + F_s$

$F_1=11\text{Hz} F_s=10\text{Hz}$

$F_2 = F_0 + 2F_s$

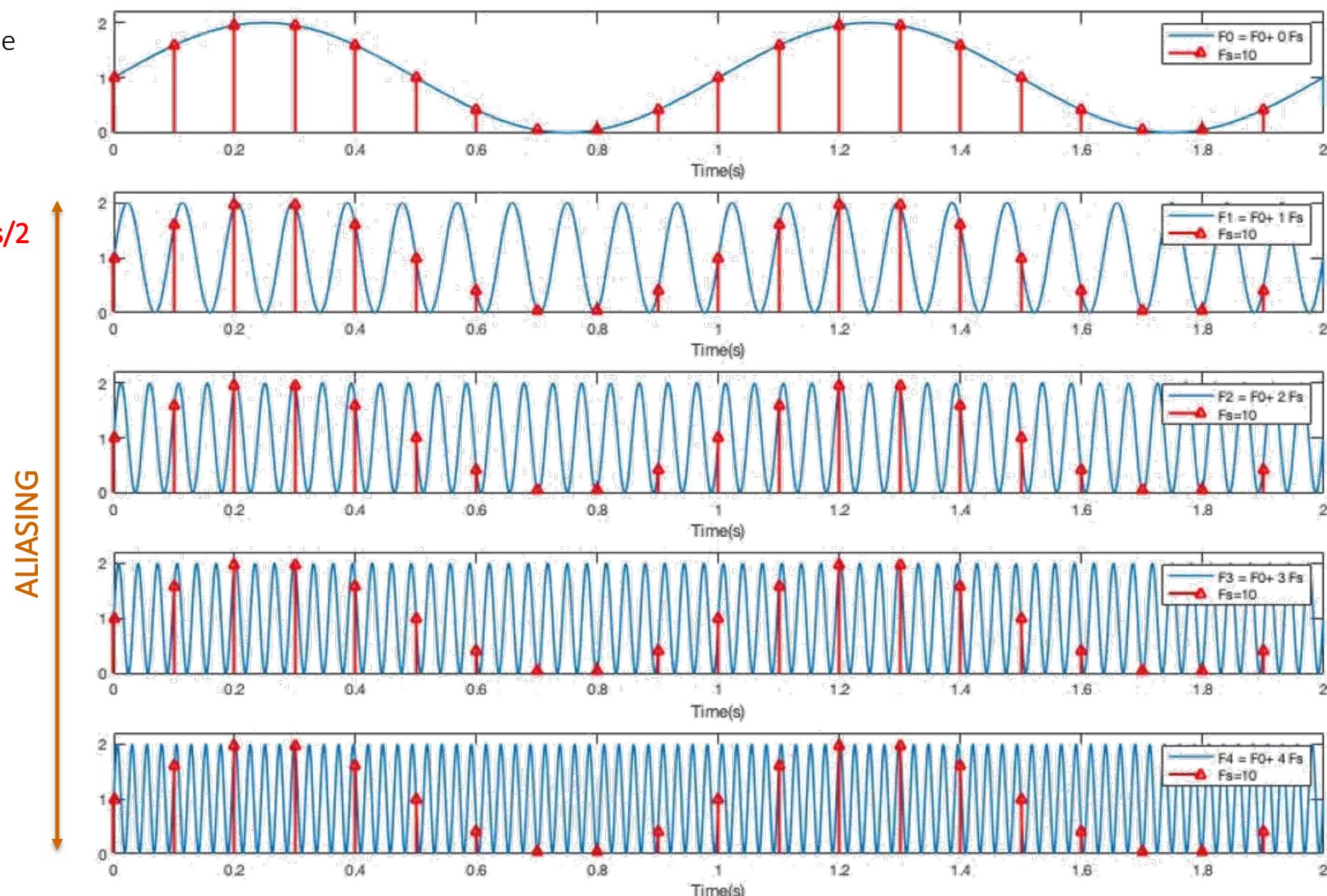
$F_2=21\text{Hz} F_s=10\text{Hz}$

$F_3 = F_0 + 3F_s$

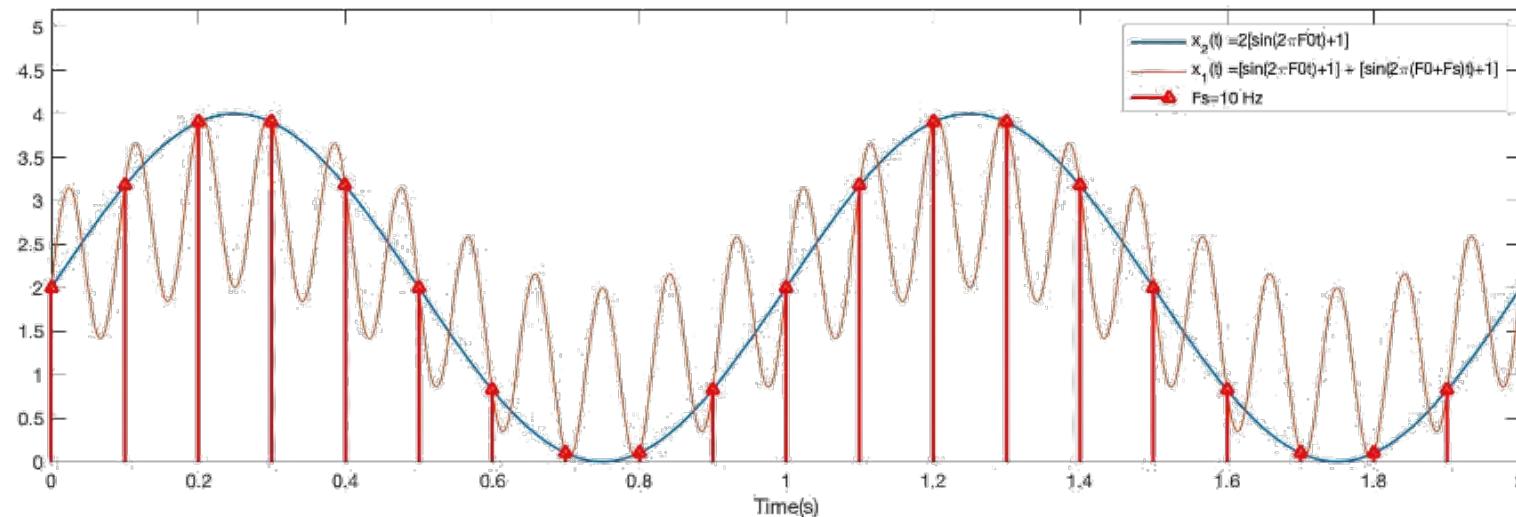
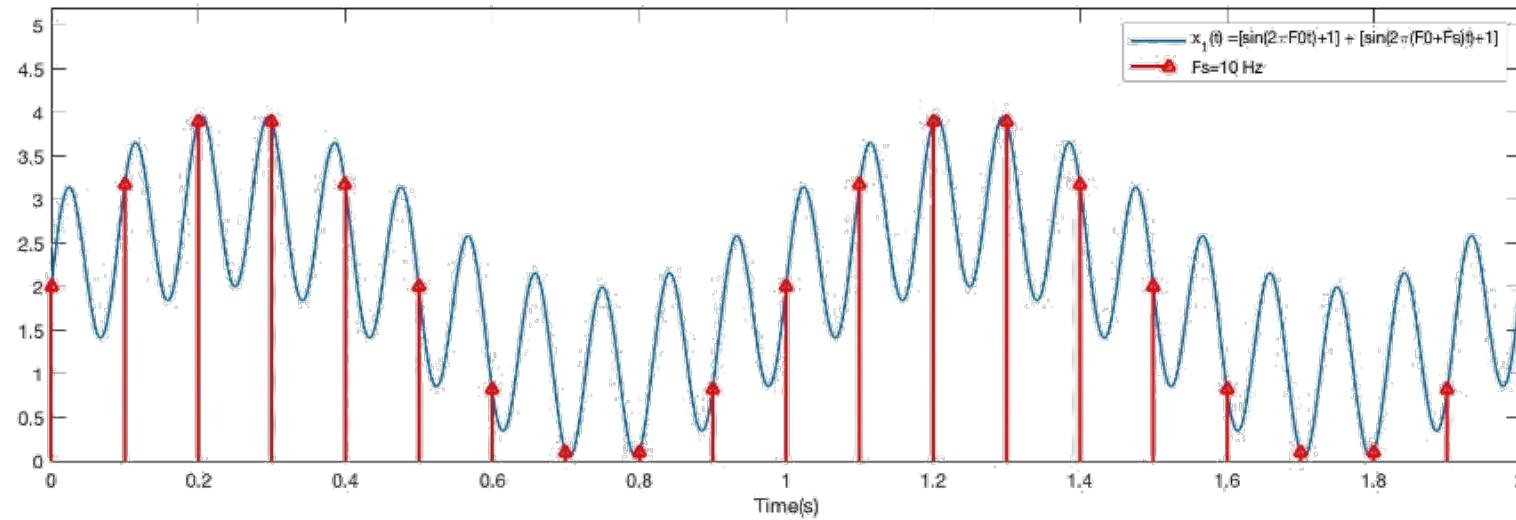
$F_3=31\text{Hz} F_s=10\text{Hz}$

$F_4 = F_0 + 4F_s$

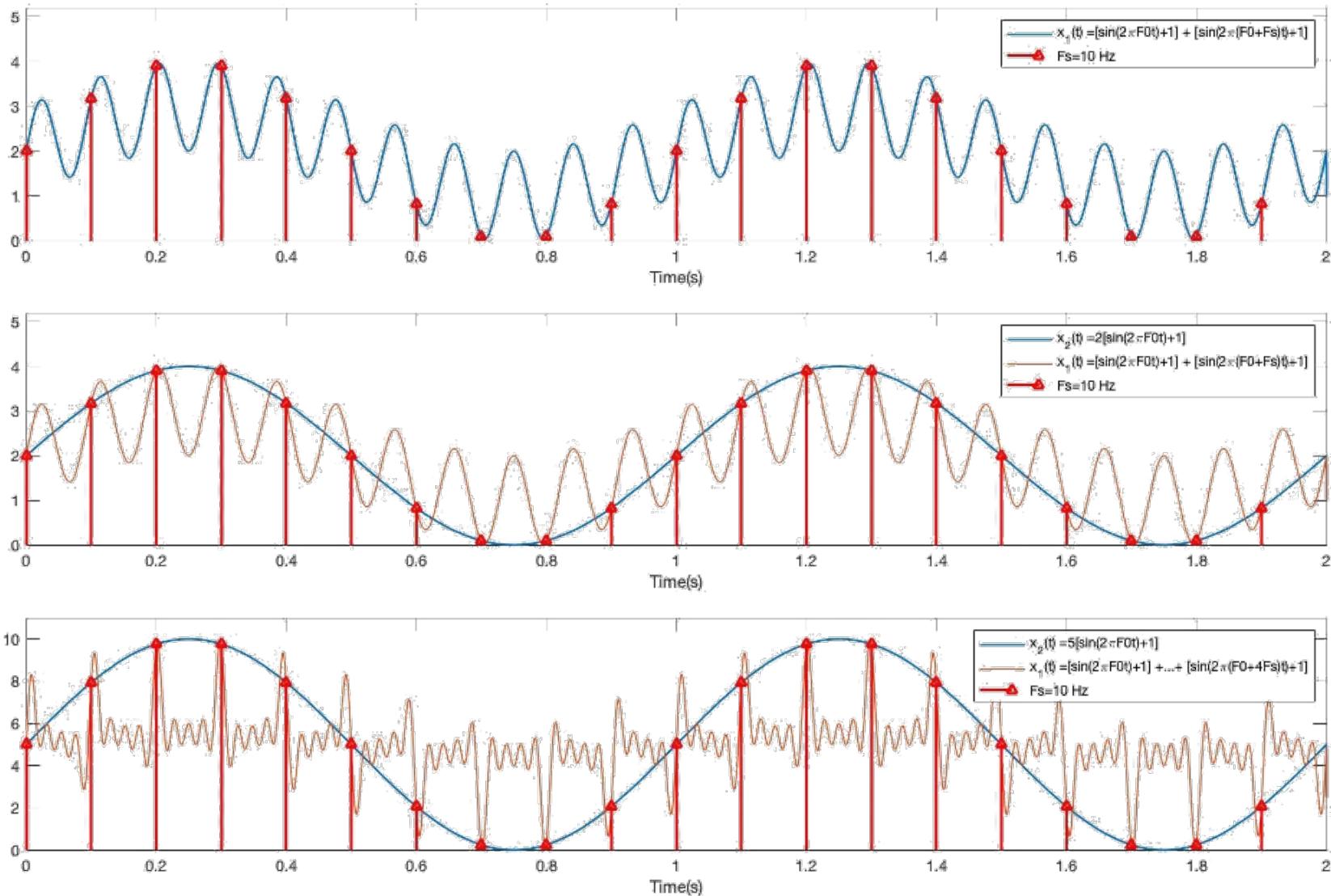
$F_4=41\text{Hz} F_s=10\text{Hz}$



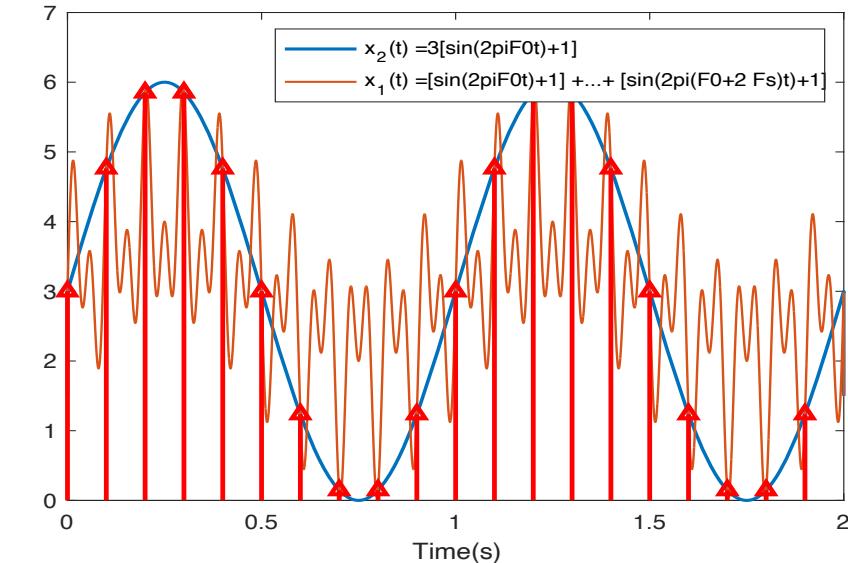
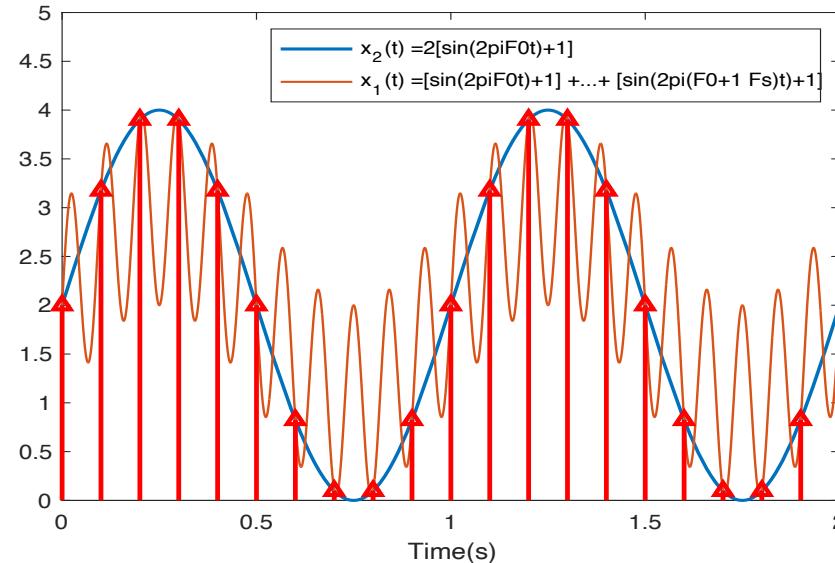
Un seul signal échantillonné pour une infinité de signaux temps continu



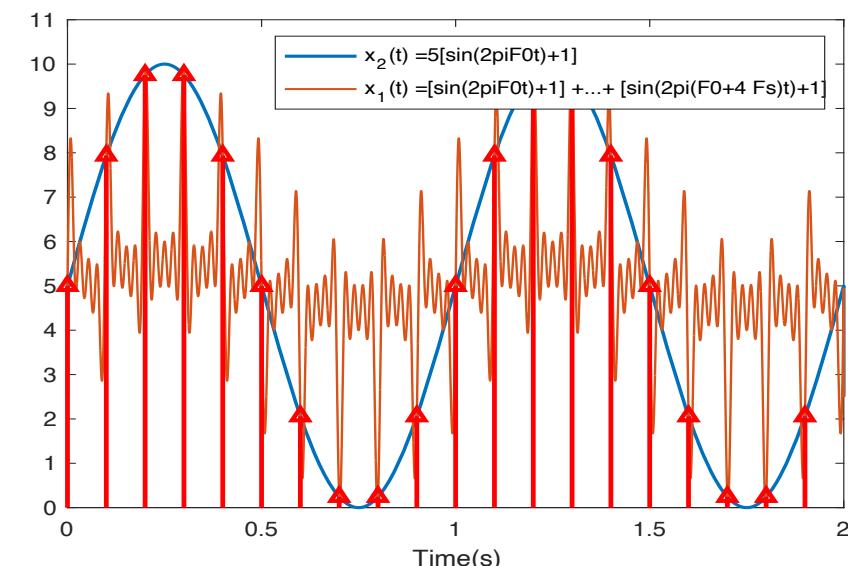
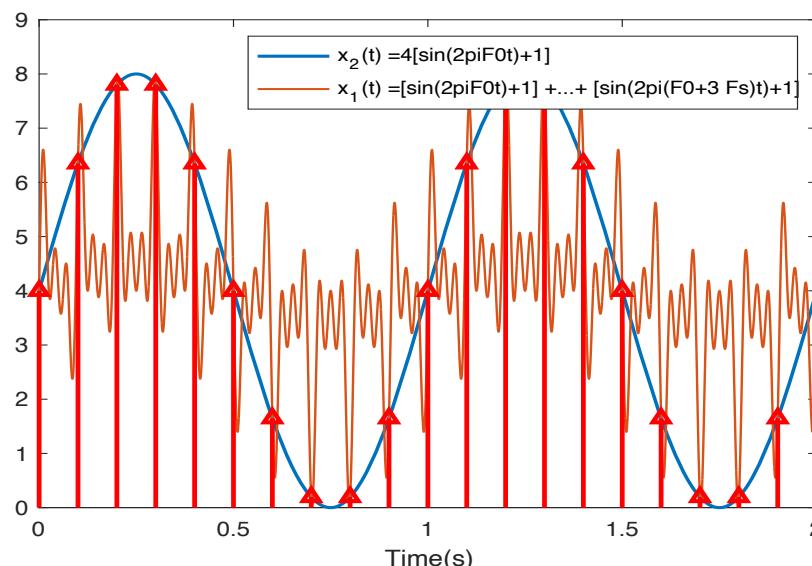
Un seul signal échantillonné pour une infinité de signaux temps continu



Un seul signal échantillonné pour une infinité de signaux temps continu



Toutes les sinusoïdes de fréquence F_0+kF_s $k \in \mathbb{Z}$ ont la même contribution que la sinusoïde de fréquence F_0 pour le signal échantillonné



Signaux déterministes / Signaux aléatoires

Signaux déterministes

Les signaux déterministes

- parfaitement connus, peuvent s'exprimer en fonction de t
- signaux sinusoïdal, exponentiel, gaussien, exponentiel amorti, combinaison de signaux, etc.

Générés par un générateur de signal en CT

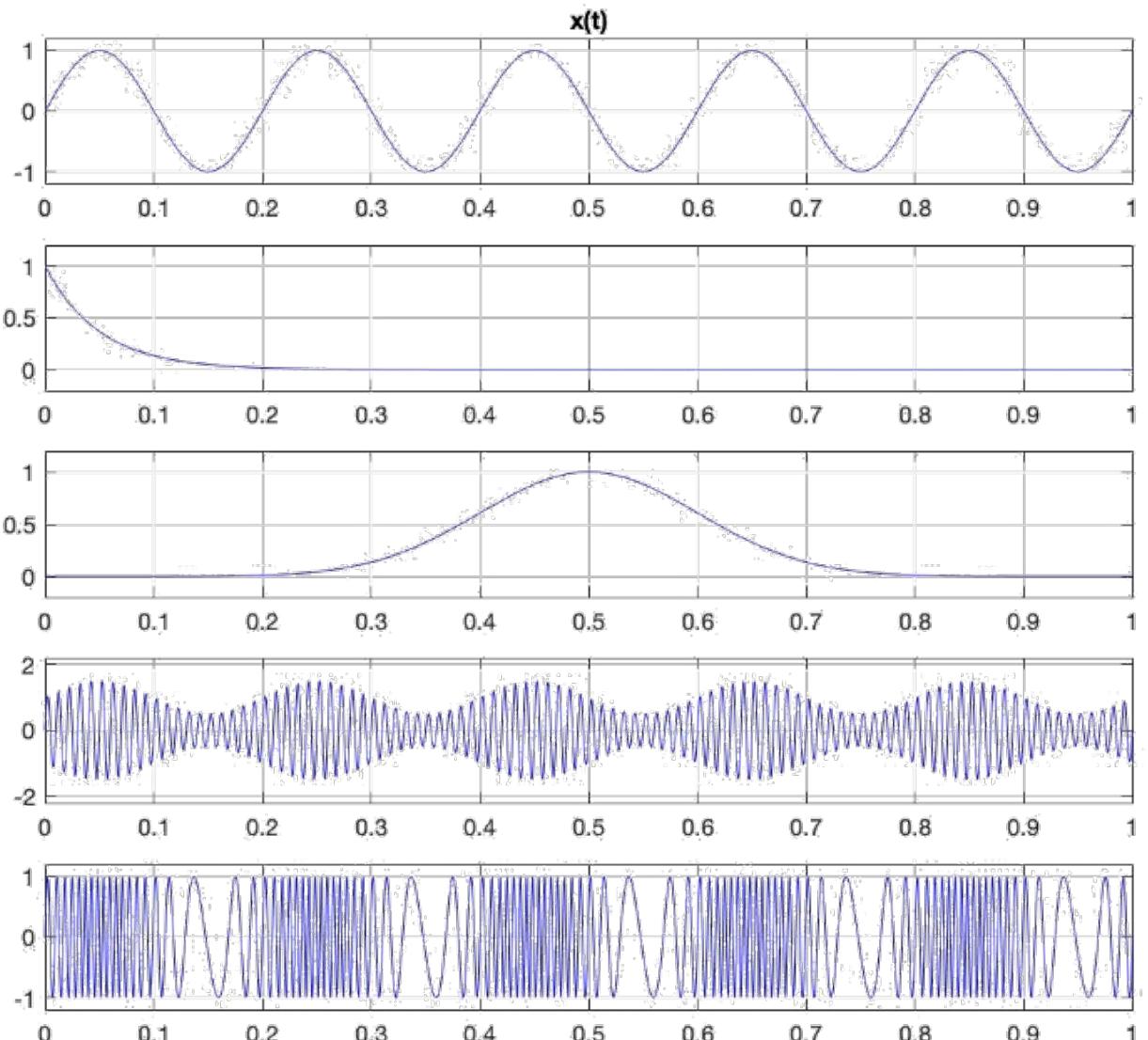
Générés directement par ordinateur en DT

- Précision float (32 bits) ou double (64 bits) => signaux de type CV (continuous value)

2 possibilités sous Matlab

- utilisation de la Symbolic toolbox, définir une fonction correspondant au signal
- créer un signal discret avec une fréquence d'échantillonnage très grande pour s'approcher du temps continu.

[lab02_ex_deterministic_2.m](#)



Signaux aléatoires

Signaux imprédictibles

Superposition d'oscillations de fréquences variées

Obtenu par enregistrement

Expl : Voix, guitare, Piano note C...

Trame d'un signal télécom

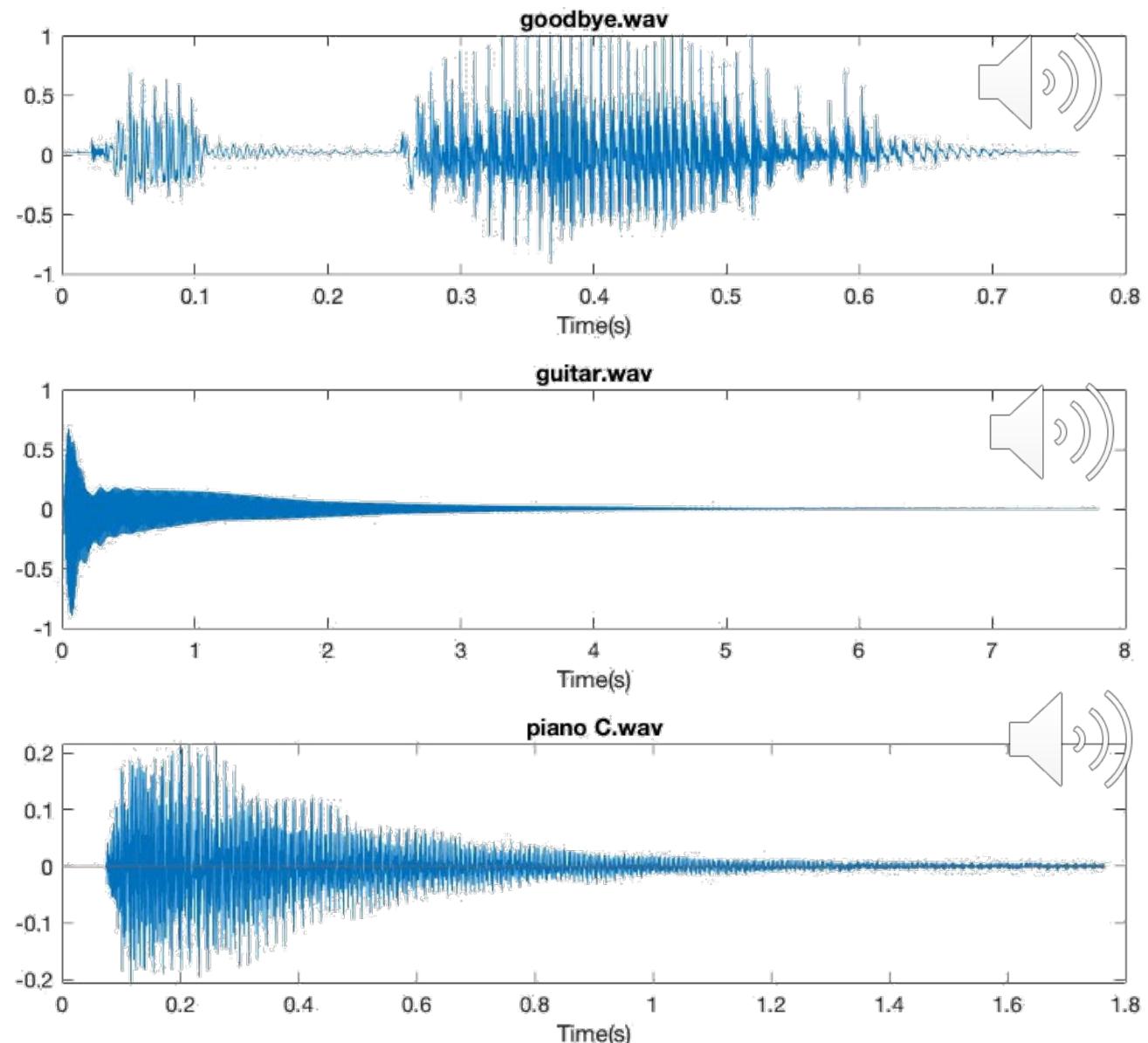
Généré par une séquence pseudo-aléatoire sous Matlab

randn() : bruit blanc gaussien avec une densité de probabilité de Loi normale $\bar{x} = 0$ et $\sigma=1$

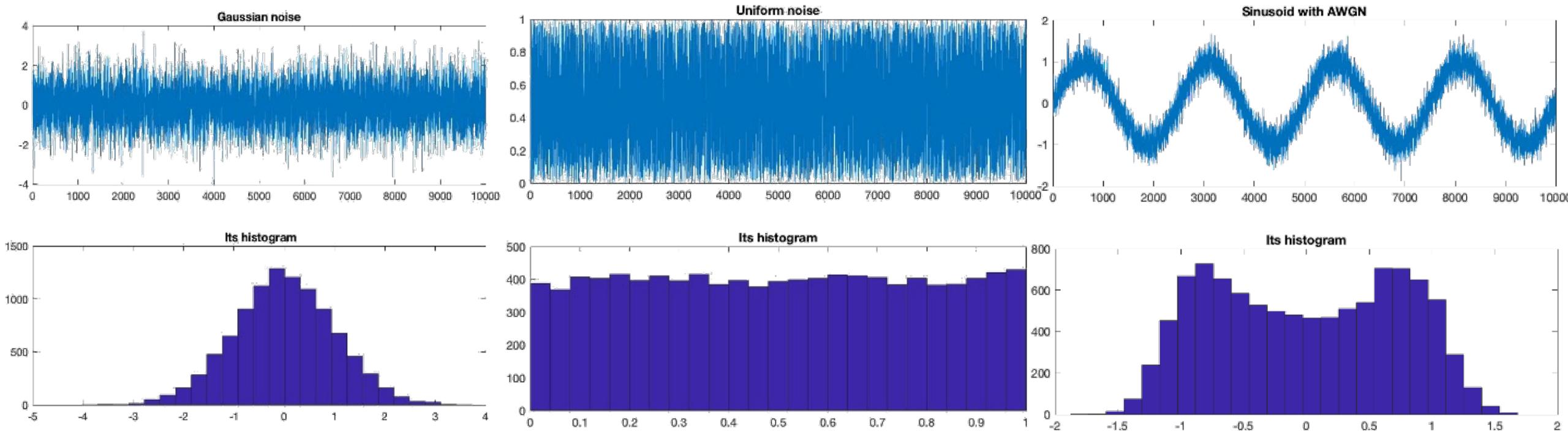
rand() : bruit uniforme avec une densité de probabilité de Loi uniforme dans **[0,1]**.

awgn() : fonction qui ajoute un bruit blanc gaussien à un signal

=> PBS



Séquences Pseudo-aléatoires



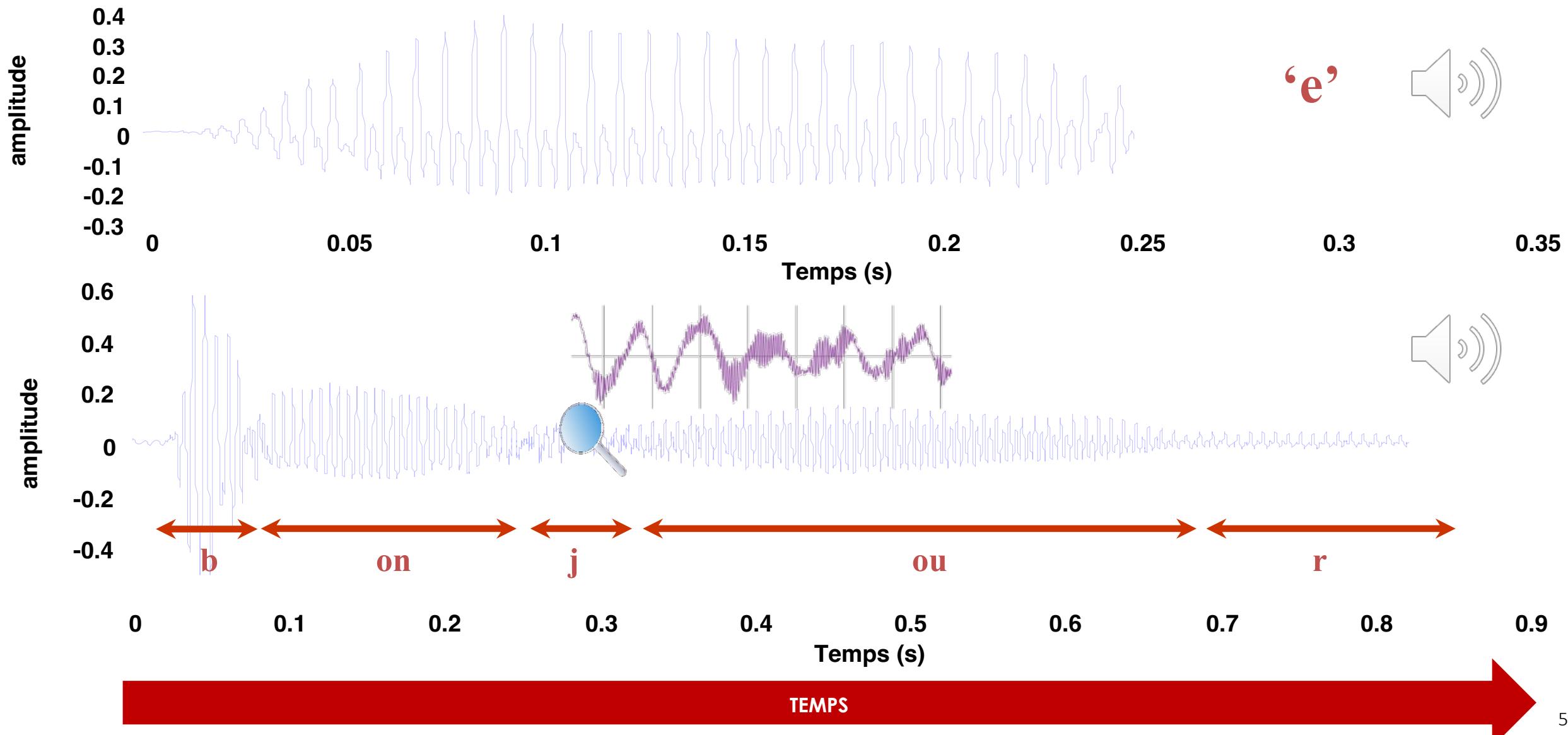
Signaux aléatoires caractérisés par leur histogramme.

Histogramme-> Répartition des échantillons en fonction de leur valeur, nombre d'échantillons par sous-intervalle

=> PBS

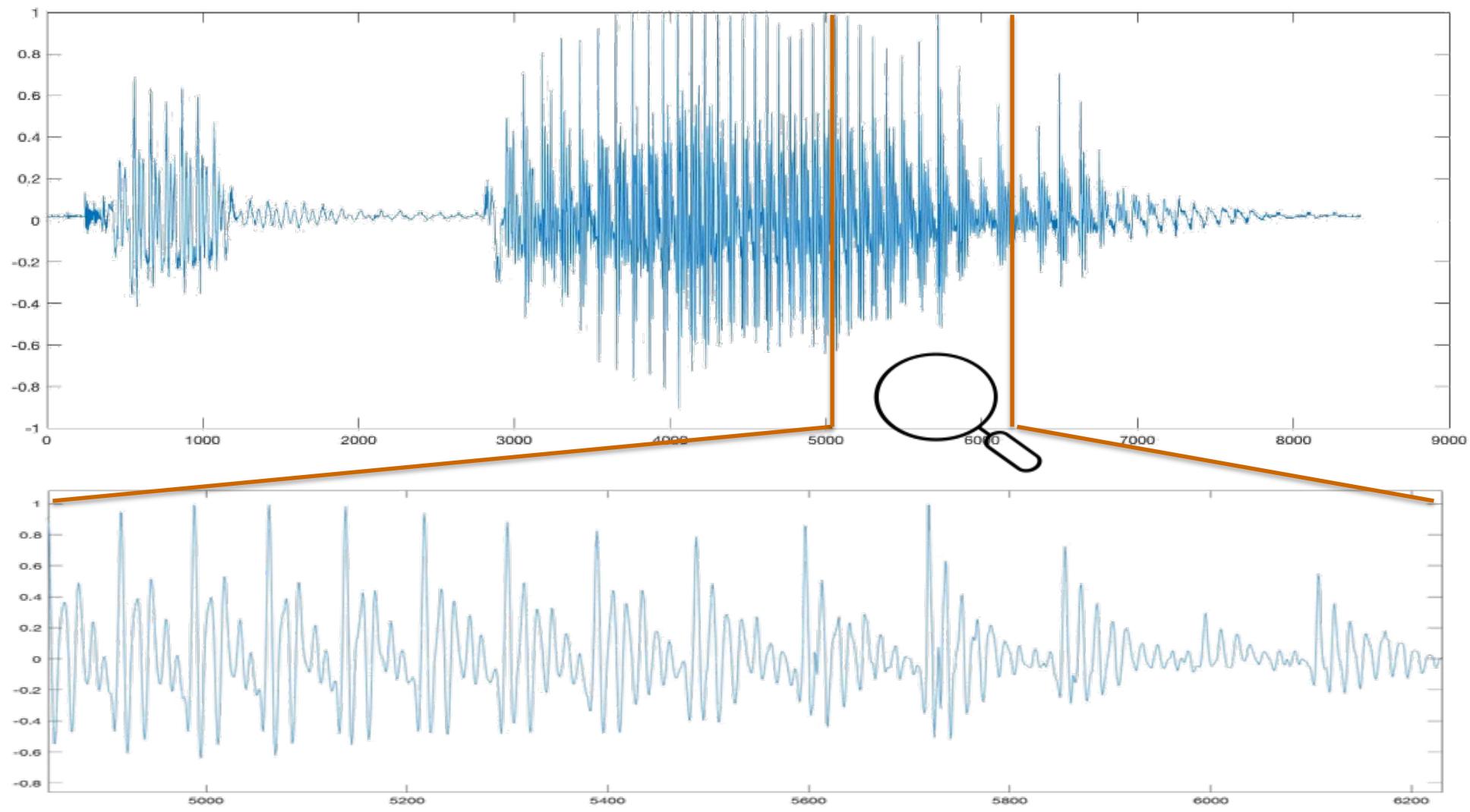
Les différentes représentations d'un signal

Représentation en fonction du temps



Représentation en fonction du temps

« Goodbye »



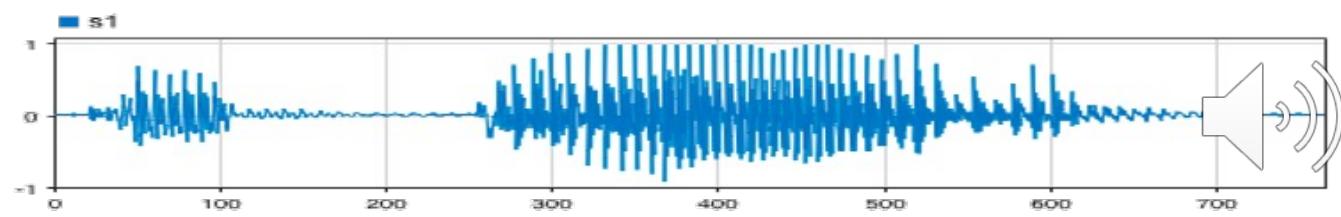
Temps

Un signal = superposition d'oscillations de différentes fréquences

Voix

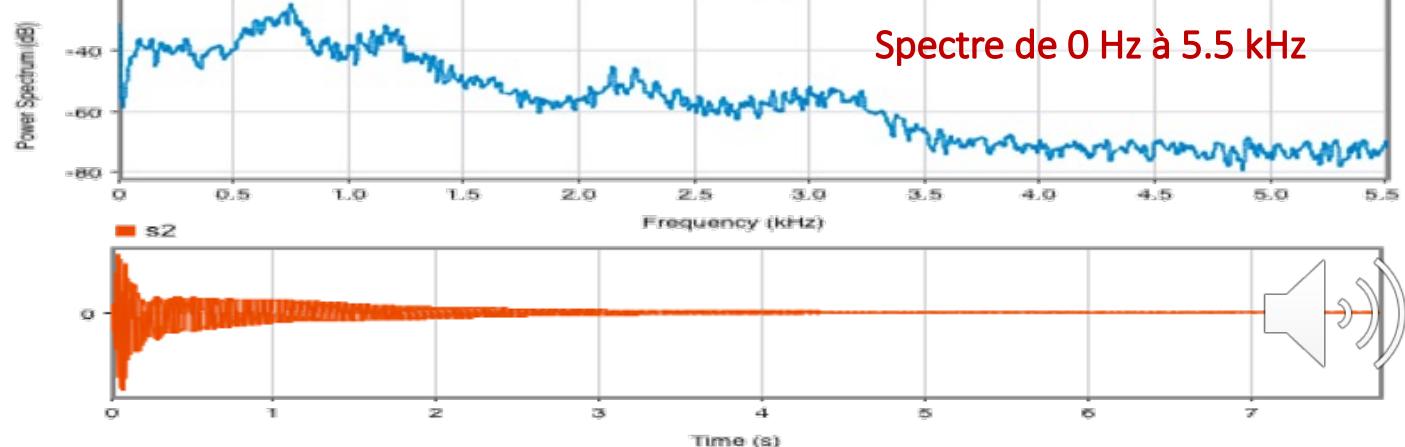
$$f \in [0, 5.5 \text{ kHz}]$$

« Goodbye »



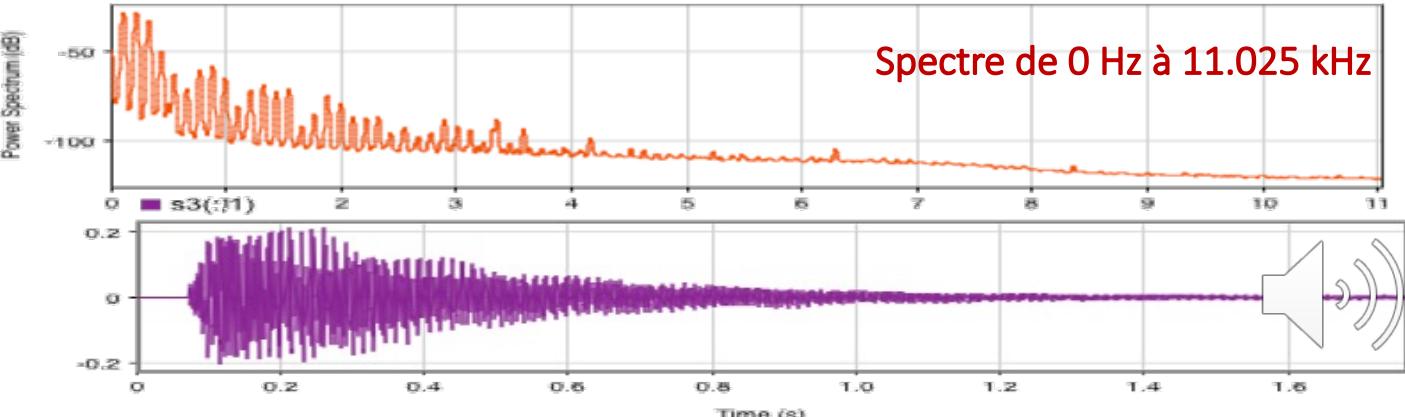
Guitare

$$f \in [0, 11.025 \text{ kHz}]$$

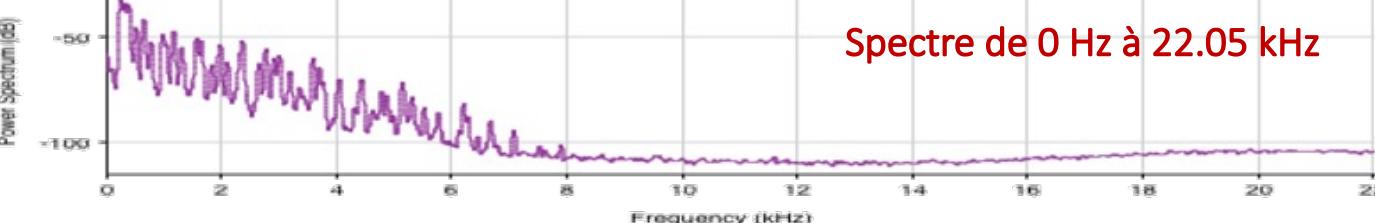


Piano note C

$$f \in [0, 22.05 \text{ kHz}]$$



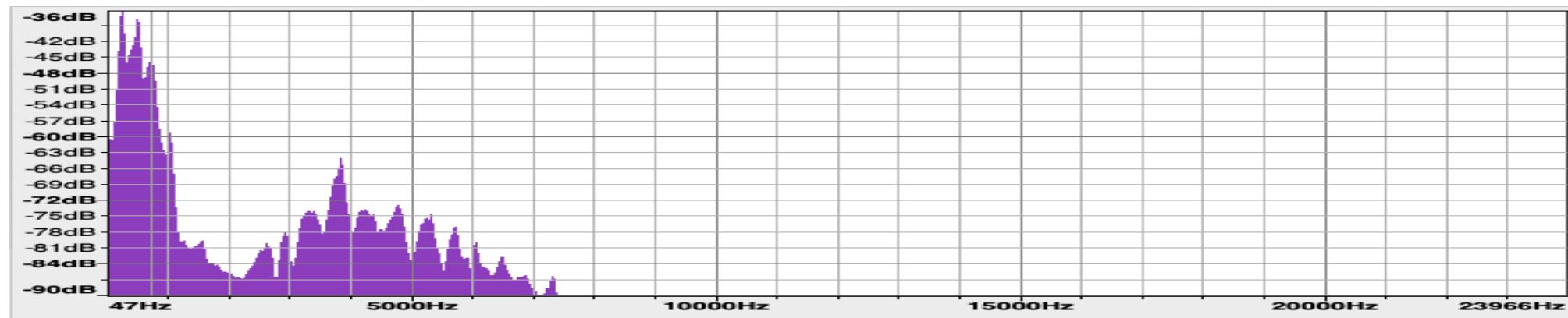
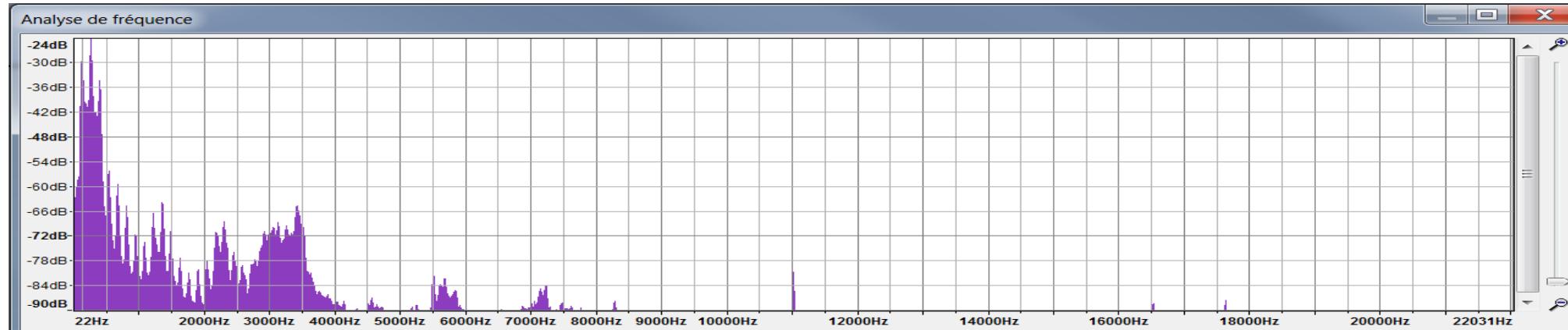
[signaux_aleatoires.m](#)



Représentation des signaux en fonction des **fréquences**

Signal de parole

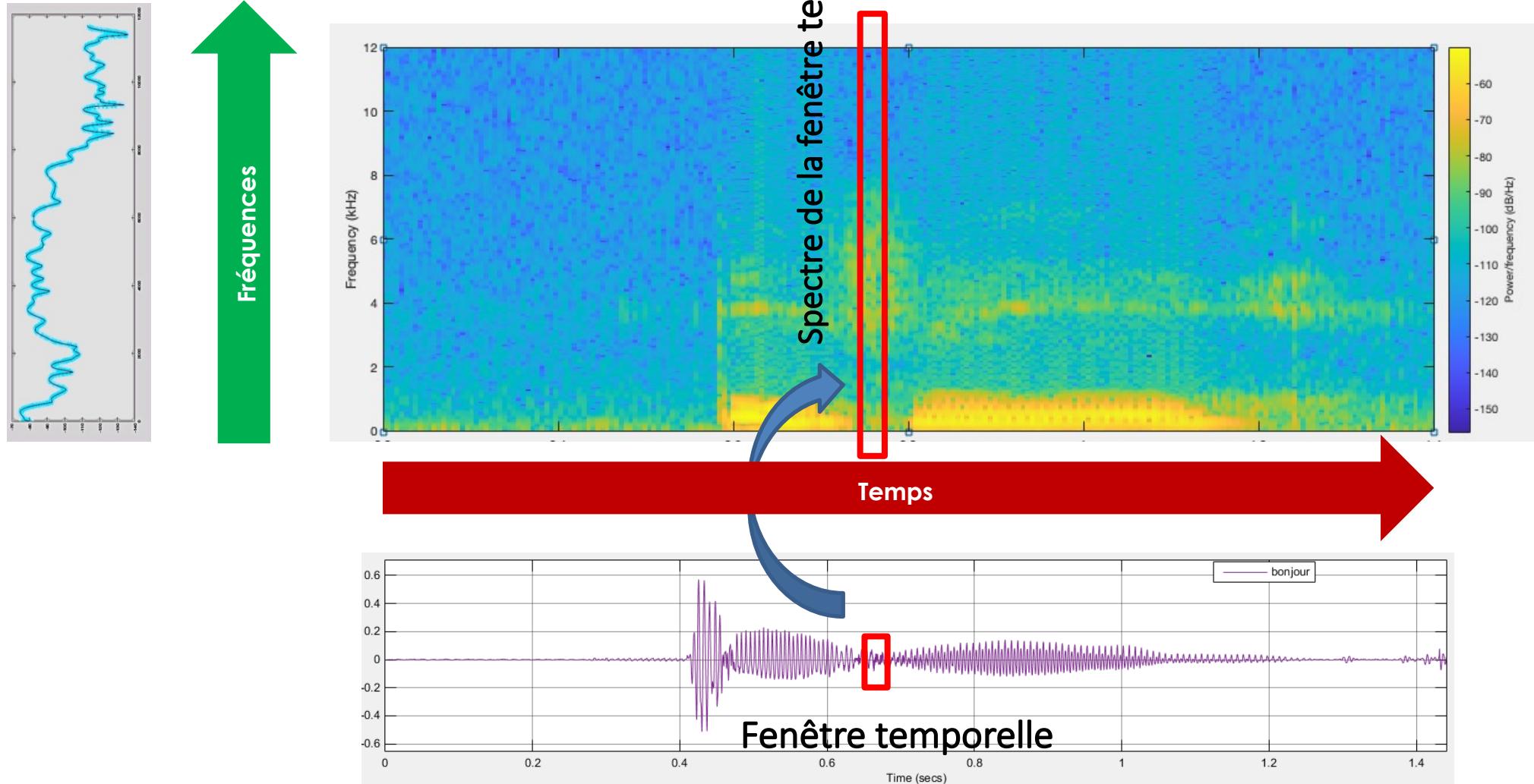
Spectres de 20 Hz à 20 KHz



Fréquences

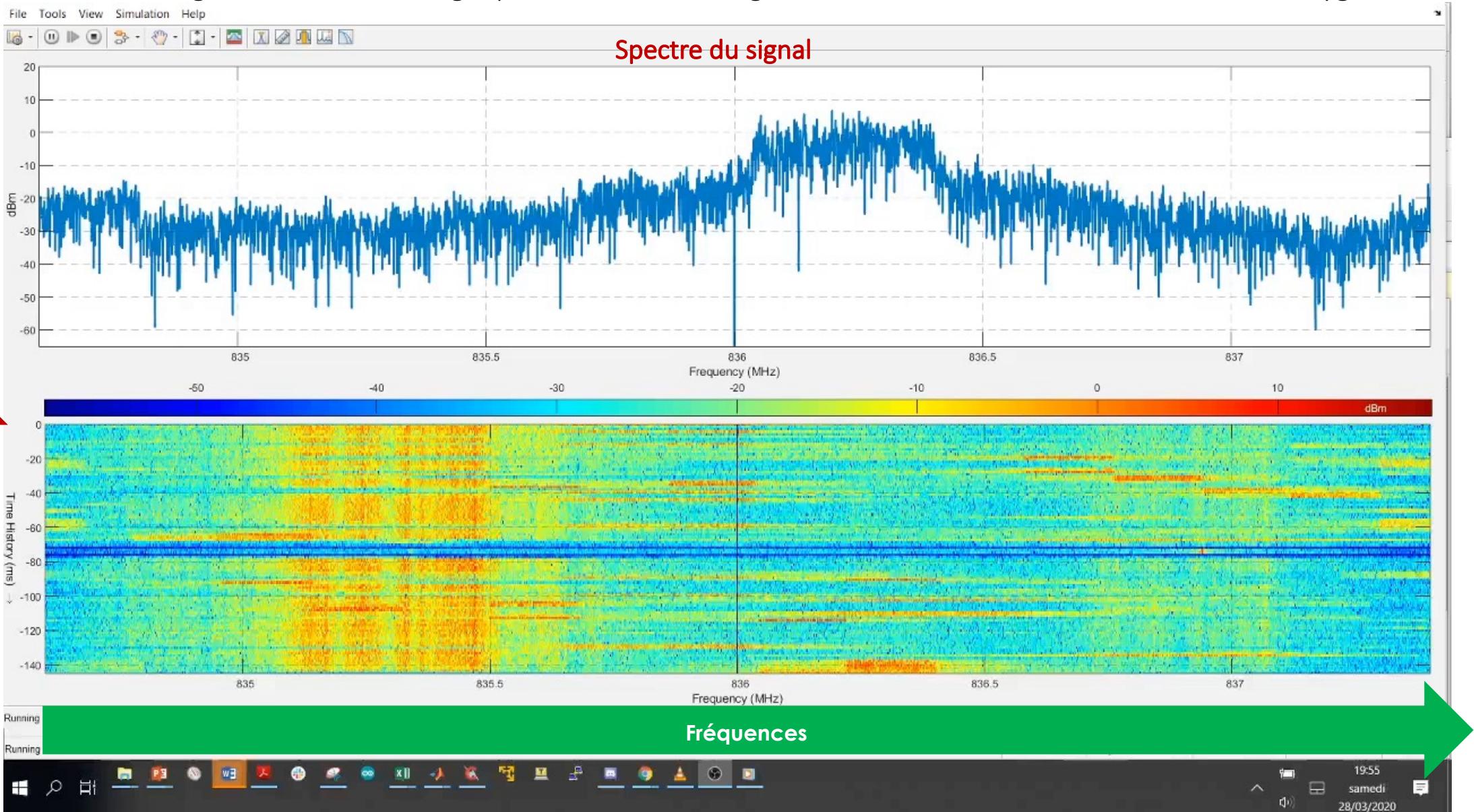
Représentation des signaux en **temps et en fréquences**

Spectrogramme d'un signal de parole



Représentation du signal en **Waterfall**

Enregistrement d'un signal RF avec un dongle pendant le téléchargement d'une vidéo Youtube - 836MHz Bouygues - DL - 4G

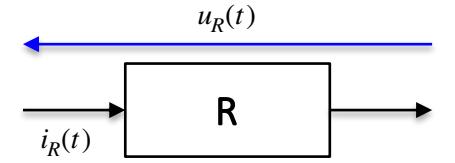


2. Etude temporelle des signaux et outil de comparaison des signaux

Caractéristiques temporelles d'un signal

Rappels d'électricité

Des courants et des tensions : $i_R(t)$ $u_R(t)$



La puissance instantanée aux bornes d'une résistance : $p(t) = u_R(t) i_R(t)$

$$p(t) = \frac{u_R(t)^2}{R} = R i_R(t)^2$$

La puissance moyenne aux bornes d'une résistance : $P_M = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$

La valeur efficace d'un courant ou d'une tension = courant ou tension continue qui provoque une même dissipation d'énergie que la tension variable $x(t)$ appliquée aux bornes d'une résistance

L'énergie dissipée dans une résistance (effet Joule):

$$E = \int_0^T p(t) dt = \int_0^T \frac{u_R(t)^2}{R} dt = \int_0^T R i_R(t)^2 dt$$

Puissance – Energie – Autres paramètres quantitatifs

[Energy_Power_CT.mlx](#)

Paramètre	Définition mathématique en temps continu	Code Matlab (symbolic maths toolbox)
Moyenne	$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt$	<pre>syms t T T0 = sym('T0', 'positive'); T = sym('T', 'positive'); M=limit(1/T*int(x, -T, T), T,+inf)</pre>
Variance	$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (x(t) - \bar{x})^2 dt$	
Energie (J)	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt$	<pre>E=limit(int(abs(x)^2, -T, T), T,+inf)</pre>
Puissance moyenne (W)	$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) ^2 dt$	<pre>Pm1=limit(1/T*int(x1^2, -T, T), T,+inf)</pre>
Valeur efficace ou RMS value	$x_{eff} = rms_x = \sqrt{P_x} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) ^2 dt}$	<pre>Veff=sqrt(Pm)</pre>

Puissance – Energie – Autres paramètres quantitatifs

Paramètre	Définition mathématique en temps discret	Code Matlab
Moyenne	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n]$	<code>mean(x); sum(x)/length(x)</code>
Variance	$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x[n] - \bar{x})^2$	<code>var(x); sum(x-mean(x)).^2/length(x)</code>
Energie	$E_x = T_s \sum_{n=1}^N x[n] ^2$	<code>Ts*sum(x.^2); Ts*sum(abs(x).^2);</code>
Power	$P_x = \frac{E_x}{NT_s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n] ^2$	<code>sum(x.^2)/length(x); sum(abs(x).^2)/length(x);</code>
Valeur efficace ou RMS value	$x_{eff} = rms_x = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n] ^2}$	<code>sqrt(sum(x.^2)/length(x)); sqrt(sum(abs(x).^2)/length(x));</code>

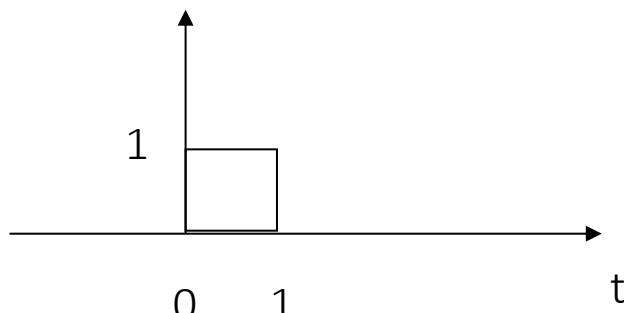
Trois classes de signaux

- Signaux à **Energie finie (J)**
- Signaux à **Puissance moyenne finie (W =J/s)**
- Signaux à Energie et Puissance moyenne infinies

- Signaux à **Energie finie**

(Espace L^2)

ex :signaux de durée finie

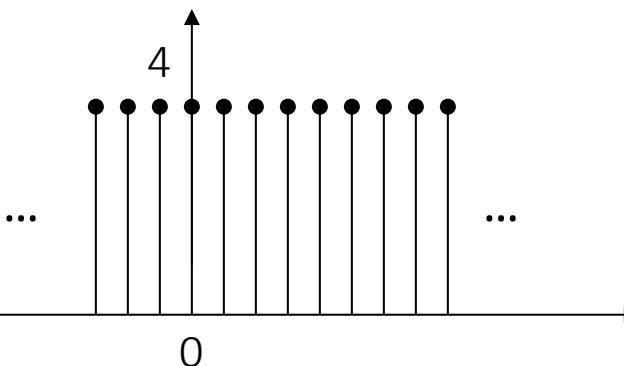


$$E_x < \infty \quad P_x = 0$$

- Signaux à **Puissance moyenne finie**

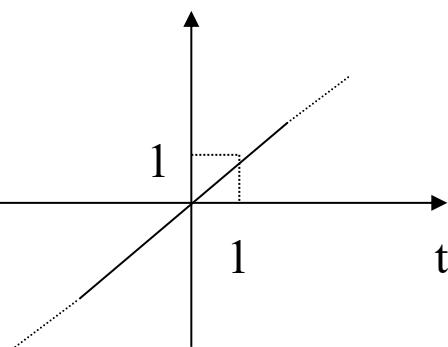
(Espace L^1)

ex : signaux périodiques



$$P_x < \infty \quad E_x = \infty$$

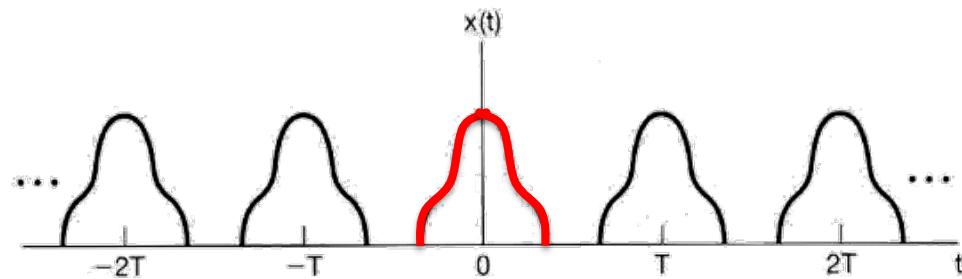
- Signaux à Energie et Puissance moyenne infinies
N'existent pas en pratique...



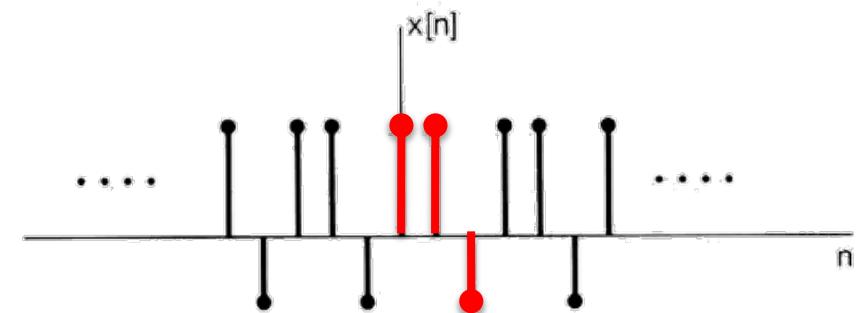
$$P_x = \infty \quad E_x = \infty$$

Signaux périodiques

$$x(t) = x(t + T) \quad T \in \mathbb{R}^{+*}$$



$$x[n] = x[n + N] \quad N \in \mathbb{N}^*$$



$P_x < \infty \quad E_x = \infty$

Remarques: T_0 = période fondamentale = plus petite valeur possible de T

Signal sinusoïdal

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2\pi f_0 t) \\ x(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

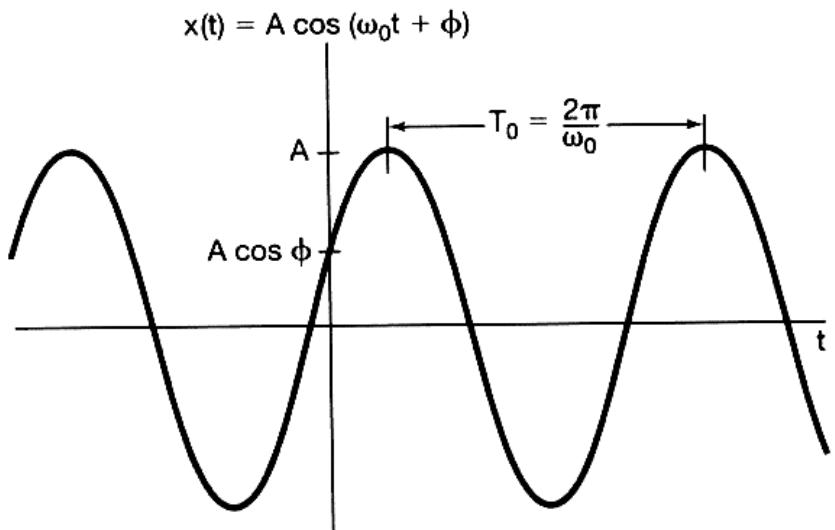
$$M_x = 0 \quad P_x = 1/2 \quad E_x = \infty \quad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

Signal exponentiel complexe

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$M_x = 0 \quad P_x = 1 \quad E_x = \infty \quad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

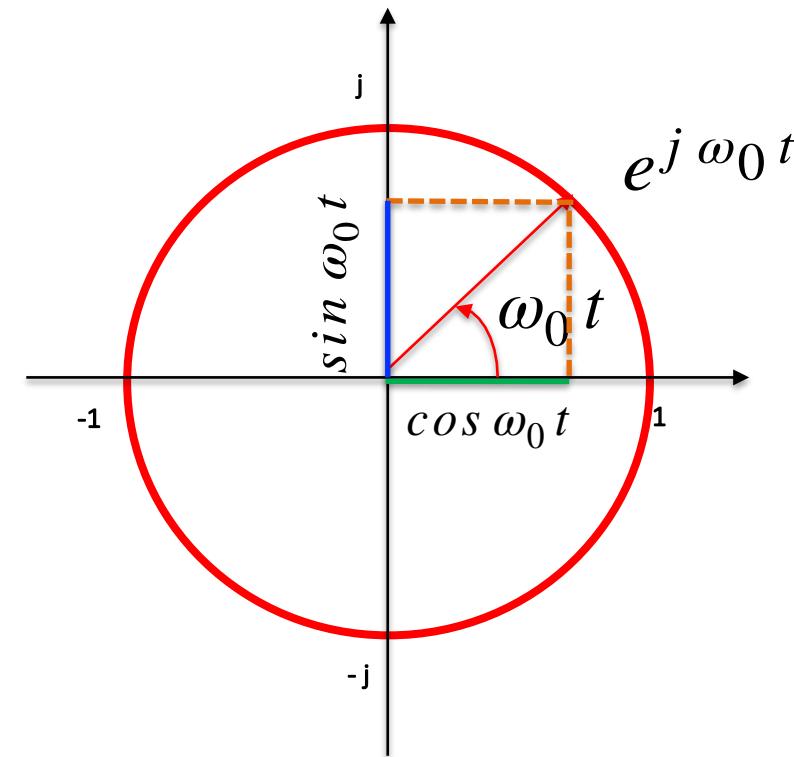
Signaux sinusoïdaux et signaux exponentiels complexes



$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi) = A \Re e \left\{ e^{j(\omega_0 t + \Phi)} \right\}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \Phi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} e^{j\Phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\Phi}$$



Formules de Euler

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$e^{j 2\pi f_0 t} = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t} e^{j 2\pi} = e^{j\omega_0 t}$$

Signaux périodiques

	$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt$	Valeur moyenne de $x(t)$
Si $x(t) \in \mathbb{R}$	$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} x^2(t) dt$	Puissance moyenne de $x(t)$
	$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} x^2(t) dt}$	Valeur efficace de $x(t)$
Si $x(t) \in \mathbb{C}$	$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) ^2 dt$	Puissance moyenne de $x(t)$
	$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) ^2 dt}$	Valeur efficace de $x(t)$

Rappels pour les sinus et cosinus :

$x(t) = X_m \cos(2\pi f_0 t)$	Moyenne	$\langle x \rangle = 0$
$x(t) = X_m \sin(2\pi f_0 t)$	Puissance moy.	$\langle x^2 \rangle = \frac{Xm^2}{2}$
	Valeur efficace	$X_{eff} = \frac{Xm}{\sqrt{2}}$

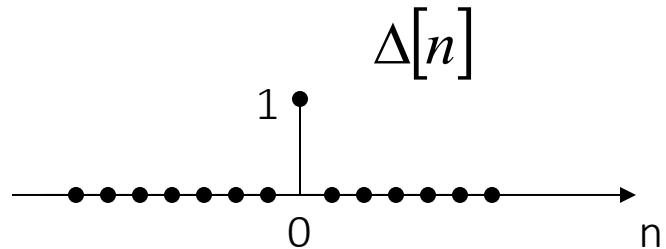
Quelques signaux super star...

Impulsion unité - Echelon unité

En temps discret

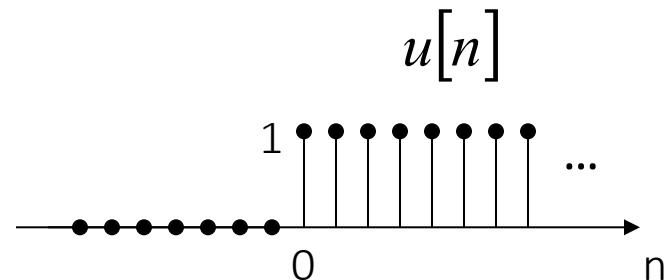
Impulsion Unité :

$$\Delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



Echelon Unité :

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Relations importantes :

$$\Delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad x[n]\Delta[n] = x[0]\Delta[n] \quad x[n]\Delta[n-n_0] = x[n_0]\Delta[n-n_0]$$

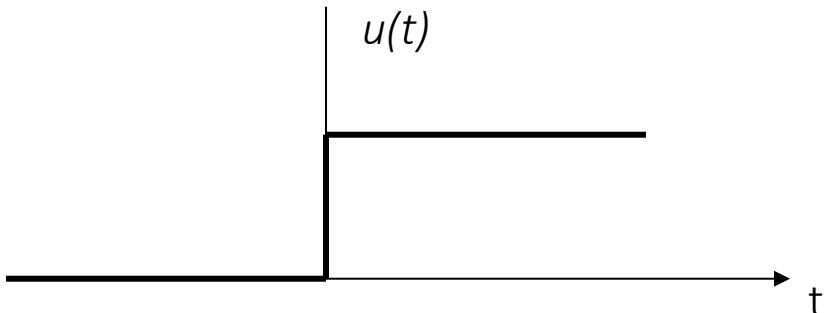
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta[n-k] = \Delta[n] + \Delta[n-1] + \dots + \Delta[n-k] + \dots$$

Suite d'impulsions unité

En temps continu

- Echelon Unité :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

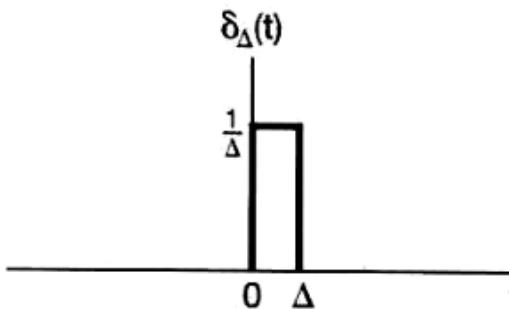
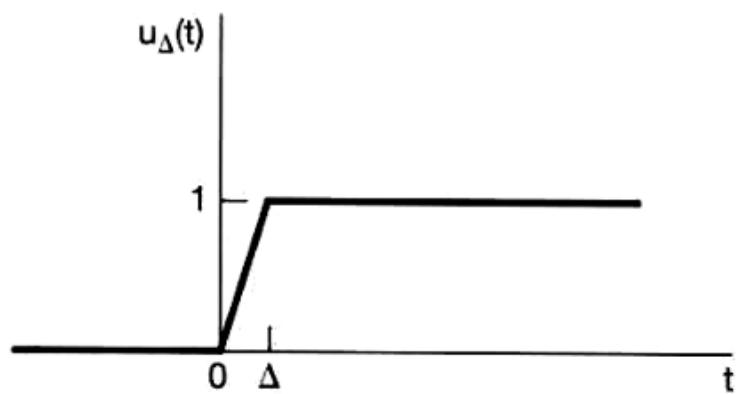


- Impulsion Unité ou Dirac :

On veut:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Problème!...



$$\delta_\Delta(t) \quad \text{Signal Pulse}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\Delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t)$$

Impulsion de Dirac

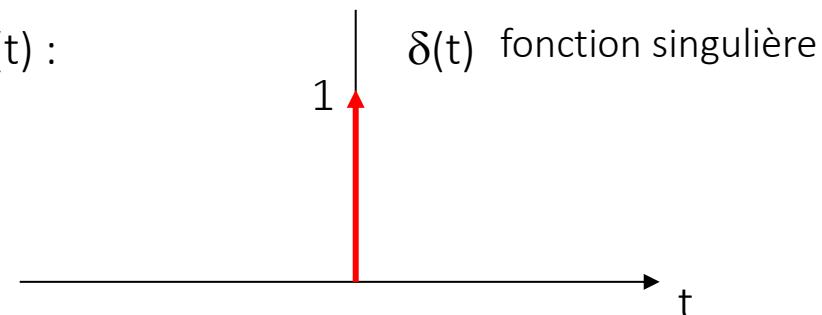
Propriétés du Dirac

Modélisation mathématique issue de la théorie des distributions (Laurent Schwartz)...

- $\delta(t)$ n'a pas de durée, sa hauteur est infinie et son aire est égale à l'unité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Représentation de $\delta(t)$:



- $\delta(t)$ peut être pondéré par un scalaire $\Rightarrow k.\delta(t)$ a une aire de k

Besoin des physiciens : $\delta(t)$ modélise par exemple le courant $i(t)$ d'un filtre RC lors de la charge d'un condensateur si l'on considère que la résistance est quasi nulle dans le circuit.

A l'instant $t = 0$, $u_c = 0$ (condensateur déchargé), on ferme l'interrupteur K

Loi des mailles : $E = u_R(t) + u_c(t)$

$$\text{Rappels: } q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$u_R(t) = R i(t) = RC \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$E = RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t)$$

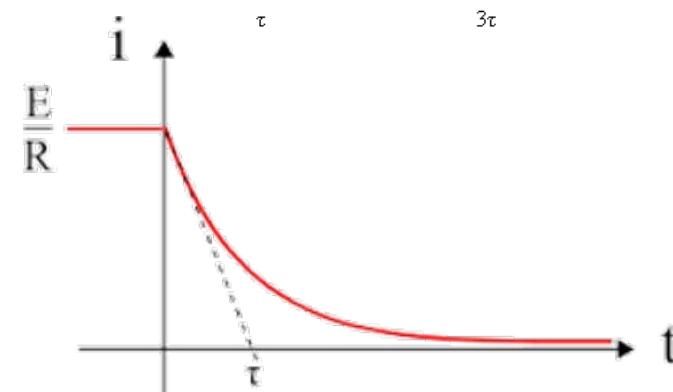
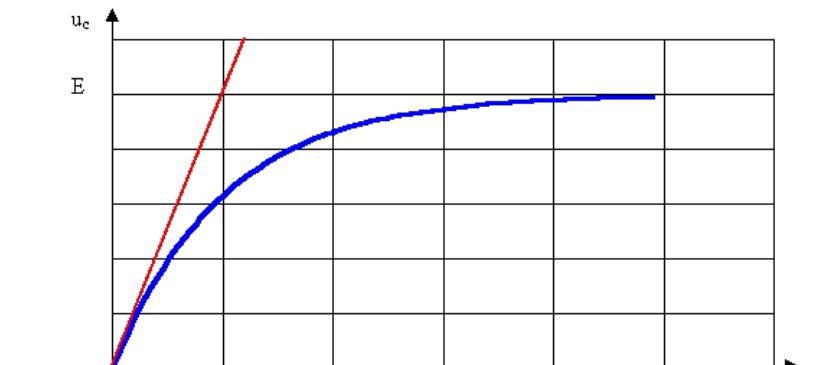
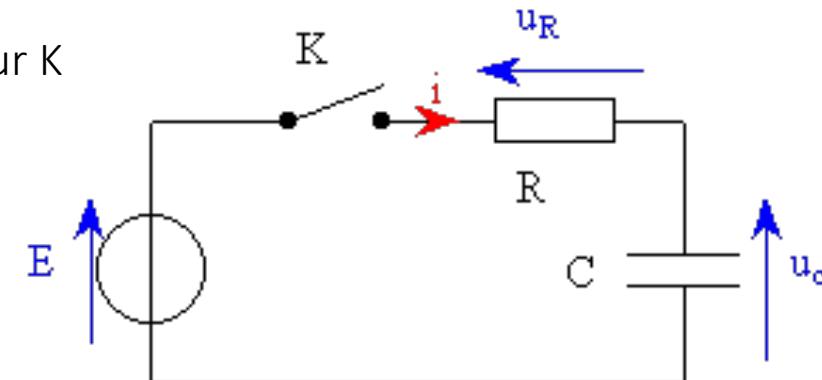
$$u_c(t) = E(1 - e^{-t/RC}) \quad t \geq 0$$

$$i_R(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} i_R(t) = +\infty \text{ en } t = 0$$

$$0 \text{ en } t \neq 0$$

$$\text{mais } Q = \int_{-\infty}^{+\infty} i_R(t) dt = CE$$



Propriétés du Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

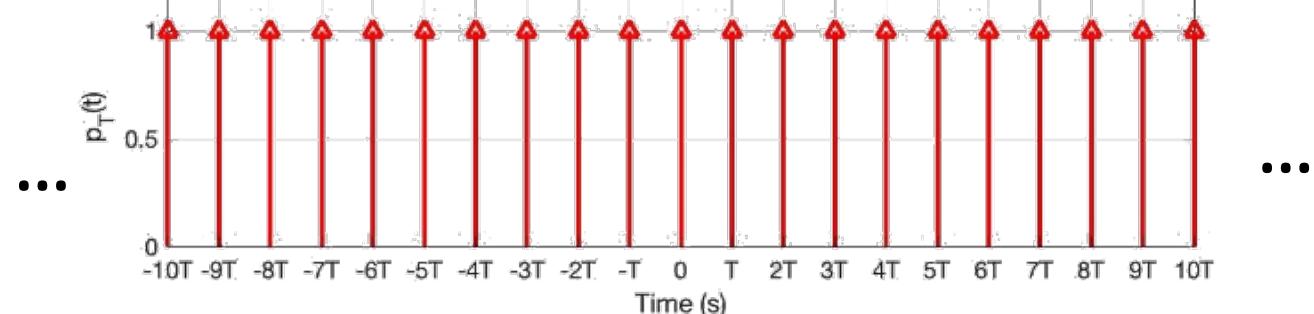
$$u(t) = \int_0^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

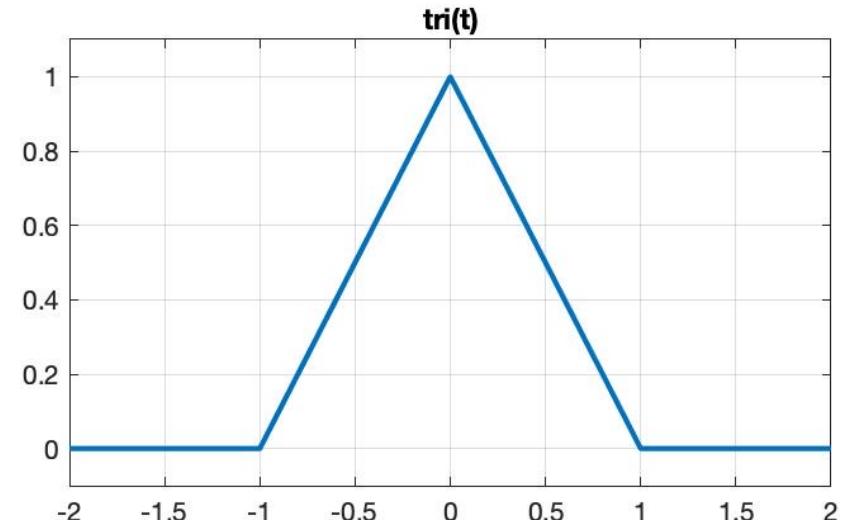
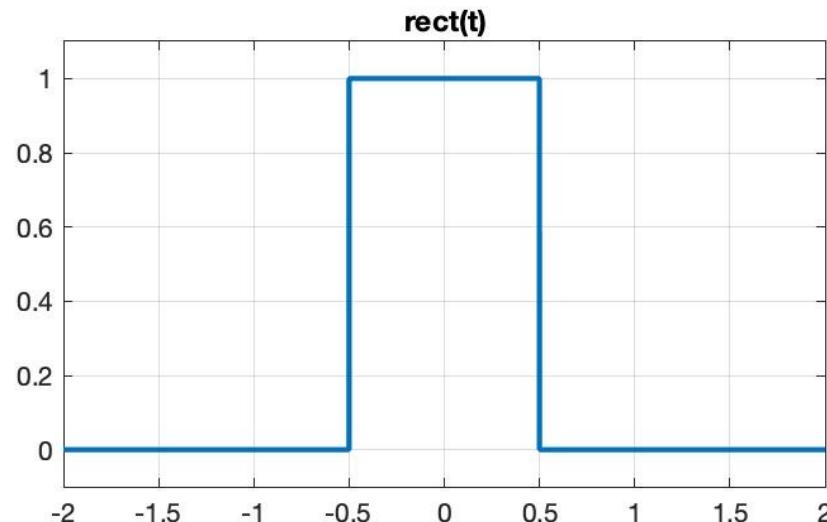
✓ Peigne de Dirac

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



« Somme » pondérée d'impulsions de Dirac décalées temporellement

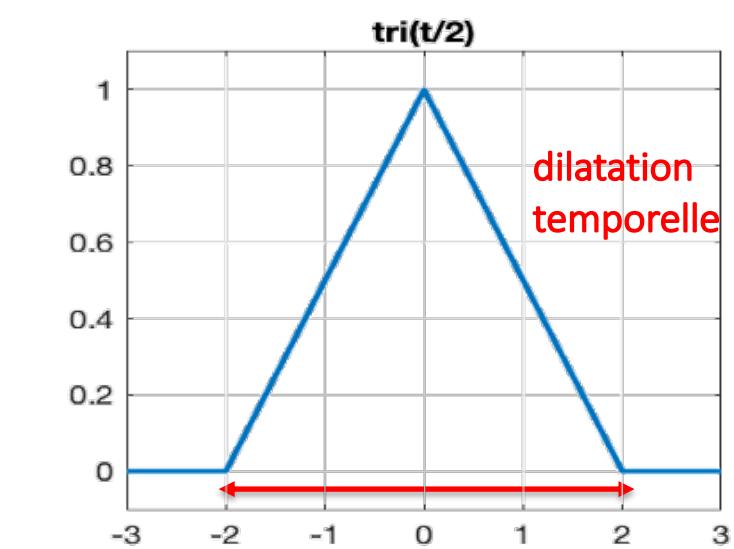
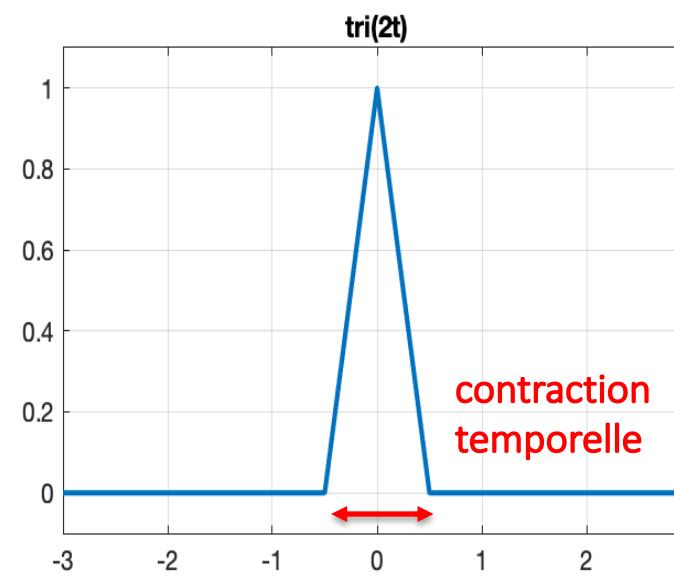
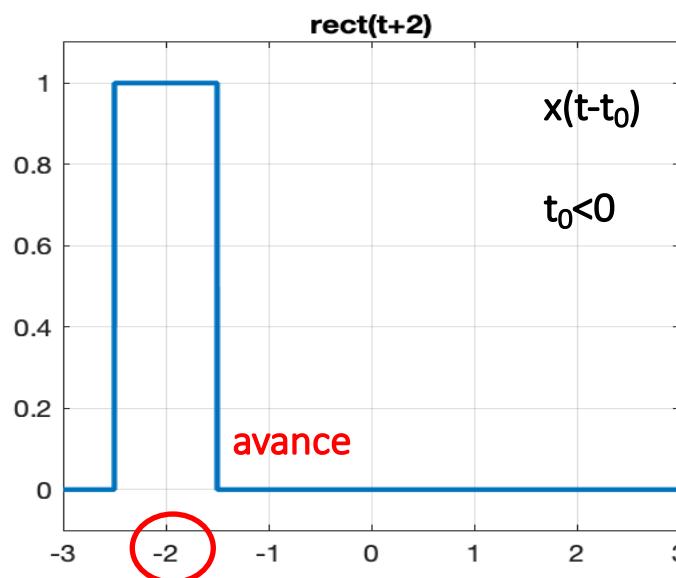
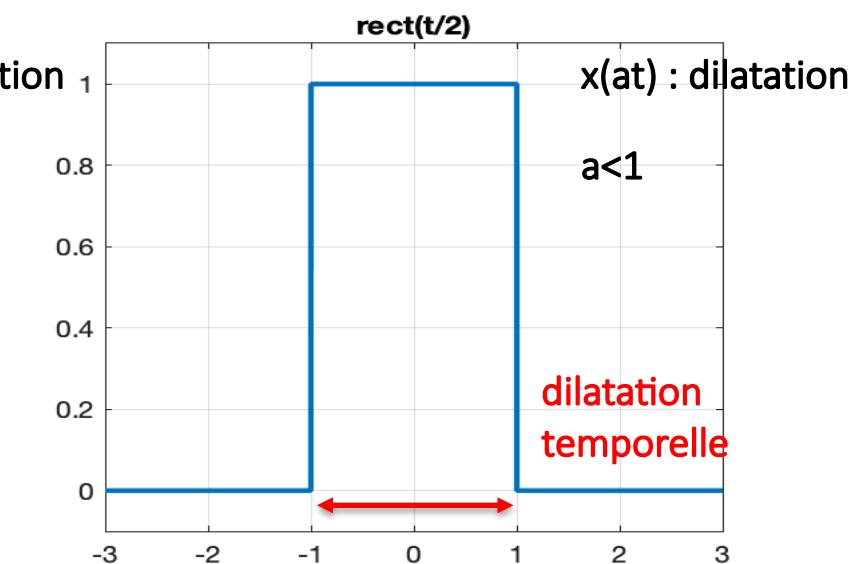
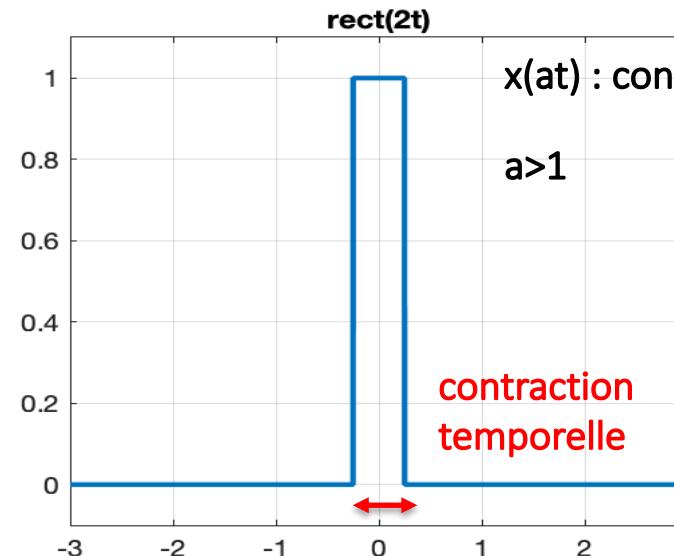
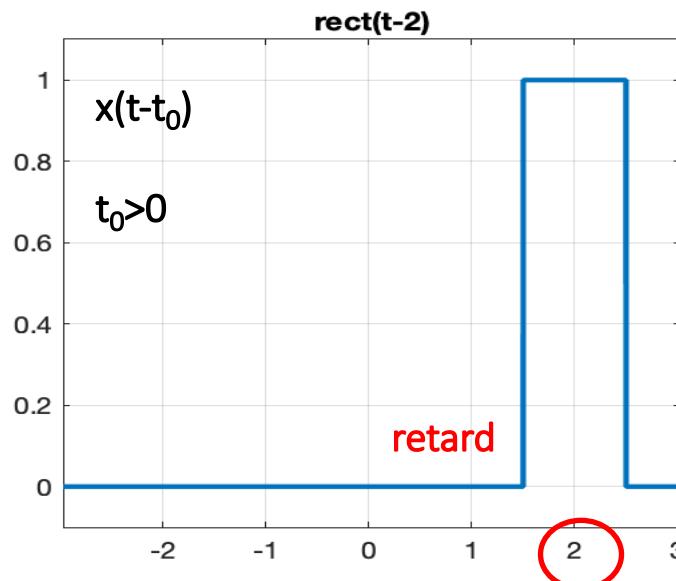
Signaux rectangulaires ou portes – Signaux triangulaires



Transformation de la variable temporelle

- Décalage temporel : $x(t-t_0)$: avance si $t_0 < 0$ $x(t-t_0)$: retard si $t_0 > 0$
- Changement d'échelle: $x(at)$: dilatation si $a < 1$
 $x(at)$: contraction si $a > 1$

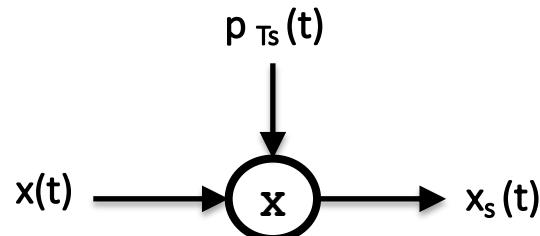
Transformation de la variable temporelle



Modélisation de l'échantillonnage dans le domaine temporel

Modélisation de l'opération d'échantillonnage

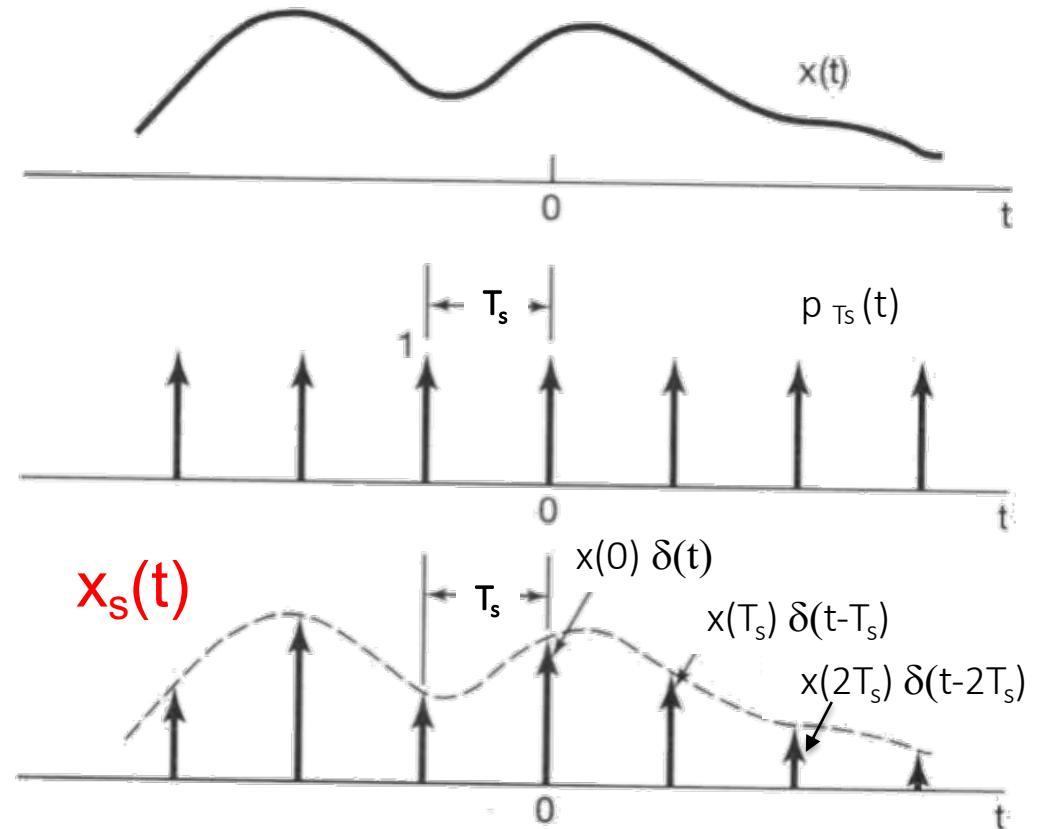
Multiplication par un Peigne de Dirac



$$x_s(t) = x(t) \cdot p_{T_s}(t)$$

$$p_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

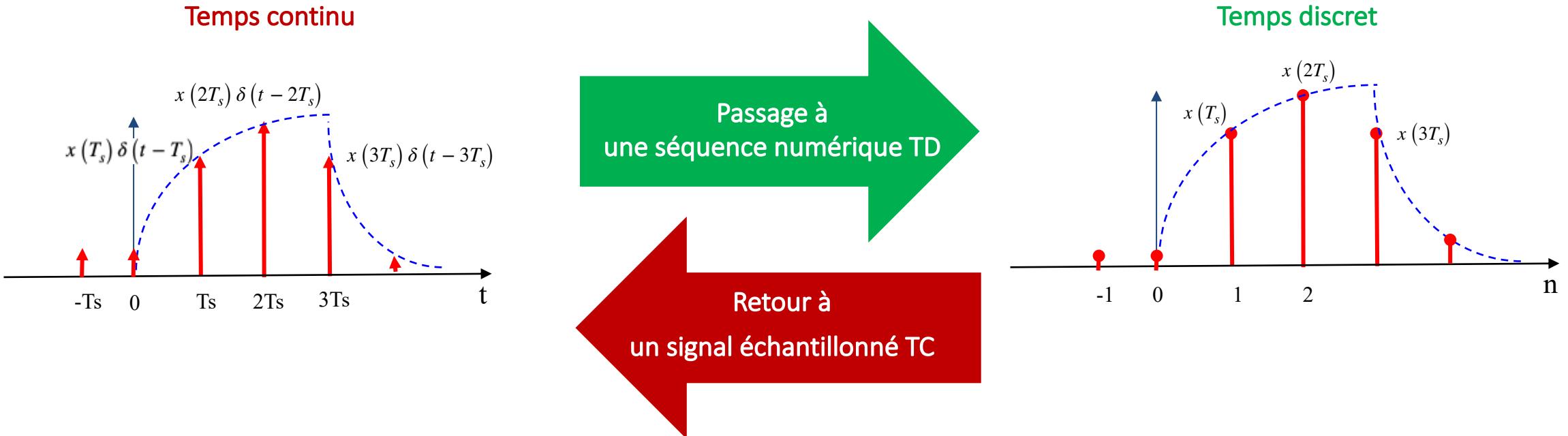
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$



L'opération d'échantillonnage revient à multiplier le signal continu par un peigne de Dirac.

La période du peigne T_s fixe la fréquence d'échantillonnage $F_s = 1/T_s$

Passage du signal échantillonné au signal numérique discret



$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$x[n] = x(nT_s)$$

Comparaison de signaux : Intercorrélation temporelle

Produit scalaire

Outil mathématique

Mesure la similarité de 2 signaux

Dans l'espace des signaux à Energie finie L²

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$

Dans l'espace des signaux à Puissance finie L¹

$$\langle x, y \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t) dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Pour les signaux périodiques, calcul sur une période seulement.

A l'origine de 2 opérations fondamentales : l'autocorrélation et l'intercorrélation

Autocorrélation temporelle

Signaux déterministes

- Signaux à énergie finie
- Signaux à puissance finie

Mesure de ressemblance \Leftrightarrow Autocorrélation temporelle

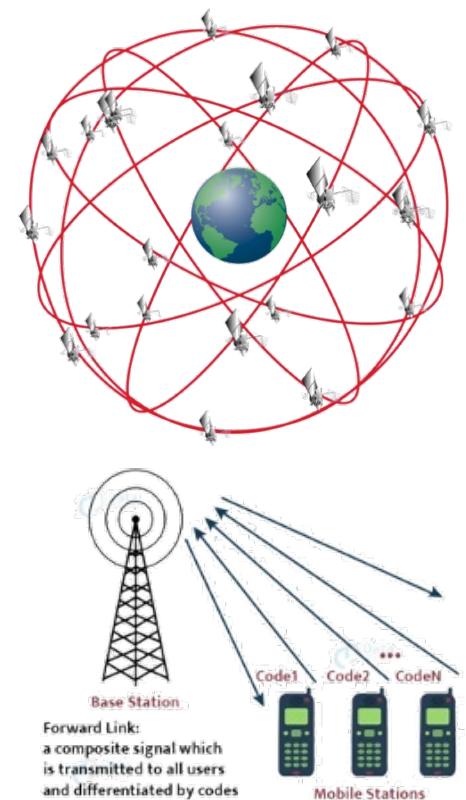
Processus aléatoires

- Statistique du second ordre
- Caractérisation fréquentielle des signaux aléatoires (Densité spectrale)

Autocorrélation statistique \Rightarrow pas traité en SIS mais en PBS

De très nombreuses utilisations

- Synchronisation, GPS, UMTS CDMA, watermarking, tracking de cibles, Big data ...



Autocorrélation temporelle des signaux à Energie finie

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[n-k]$$

Mesure de ressemblance entre le signal et lui-même +/- décalé

- C'est un produit scalaire hermitien, projection de $x(t)$ sur $x(t)$ décalé de τ
- Si $x(t) \in \mathbb{C}$ Autocorrélation à Symétrie hermitique $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}^*(\tau)$ $R_{xx}[-k] = R_{xx}^*[k]$
- Si $x(t) \in \mathbb{R}$ Autocorrélation réelle et paire $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ $R_{xx}[-k] = R_{xx}[k]$
- $R_{xx}(\tau)$ est maximale en $\tau = 0$. Rien ne ressemble plus au signal que lui-même !

Pour $t = 0$, on retrouve l'énergie du signal :

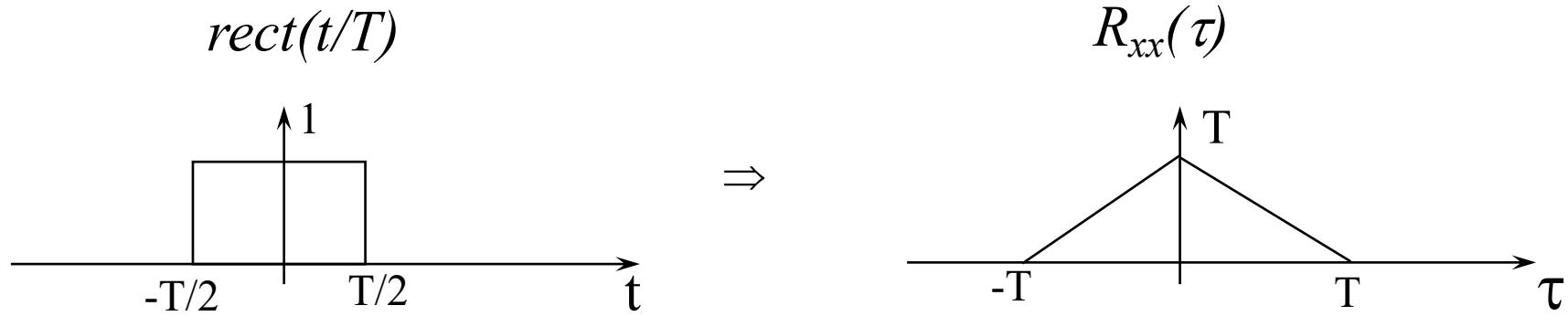
$$R_{xx}(0) = E_x$$

Exemple :

$$x(t) = \text{rect}(t/T)$$

\Rightarrow

$$R_{xx}(\tau) = T \text{ tri}(\tau/T)$$



Propriété :
 $R_{xx}(\tau)$ réelle et paire

Autocorrélation des signaux à Puissance moyenne finie

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xx}[k] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n]x^*[n-k]$$

Cas particulier des signaux périodiques

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xx}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n-k]$$

Le calcul sur une seule période suffit

*L'autocorrélation d'un signal périodique est elle-même **périodique**.*

Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui même, décalé d'une ou plusieurs périodes

Pour $t = 0$, on retrouve la puissance du signal :

$$R_{xx}(0) = P_x$$

Intercorrélation des signaux à Energie finie

Mesure du degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage fixé par τ ou k

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n - k]$$

Propriété de symétrie hermitique

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}^*(\tau)$$

$$R_{xy}[-k] = R_{yx}^*[k]$$

Attention à l'inversion de x et y dans le deuxième membre des équations

= Projection de $x(t)$ sur $y(t - \tau)$: produit scalaire hermitien

Mesure du degré de ressemblance entre deux signaux x et y en fonction d'un décalage fixé par τ ou k

Démonstration : Symétrie hermitienne

$$x(t) \in \mathbb{C}$$

$$y(t) \in \mathbb{C}$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt$$

$$u = t - \tau \quad t = u + \tau. \quad dt = du$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u + \tau) x^*(u) du$$

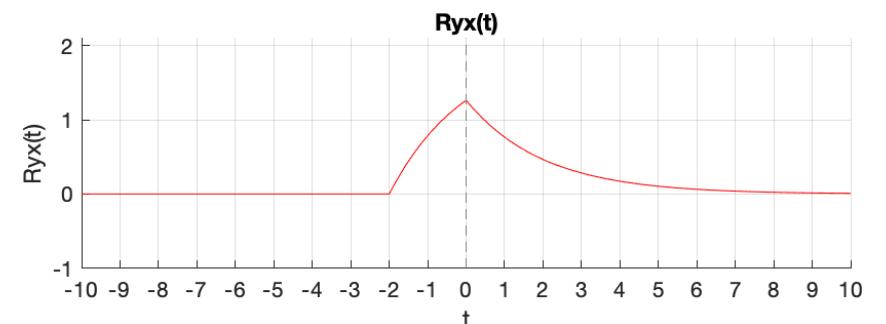
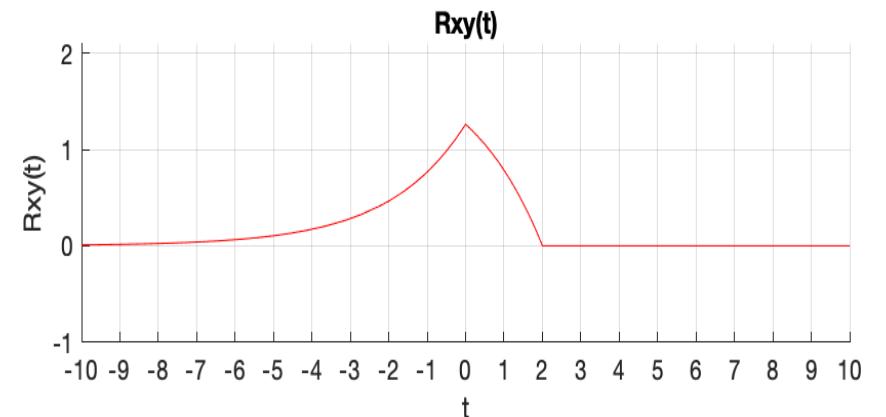
$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) y(u + \tau) du$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}$$

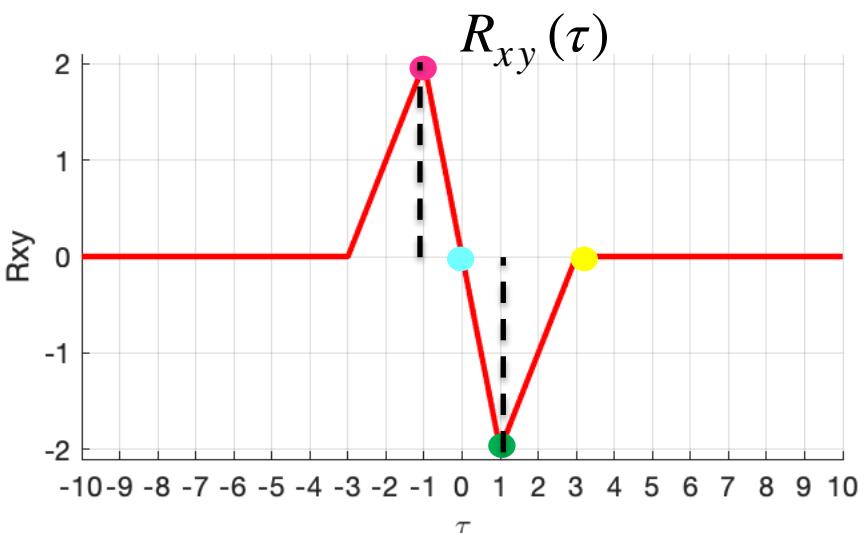
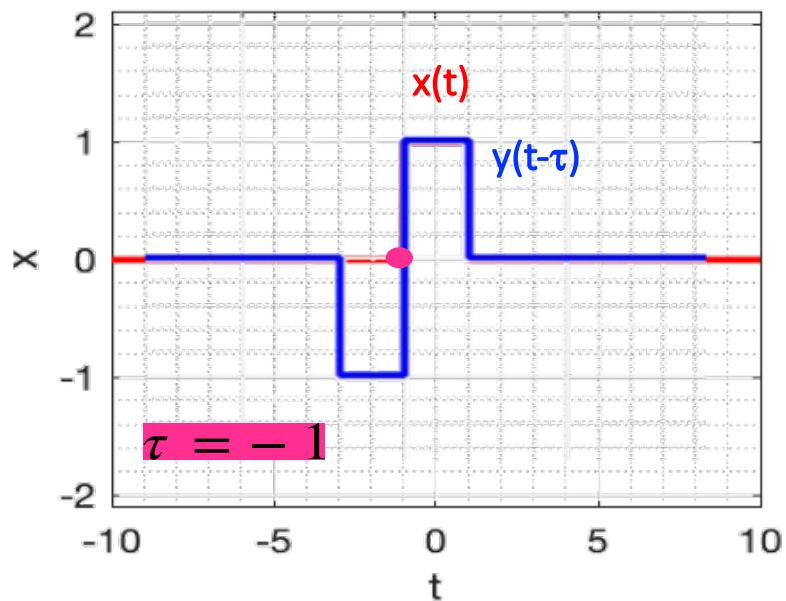
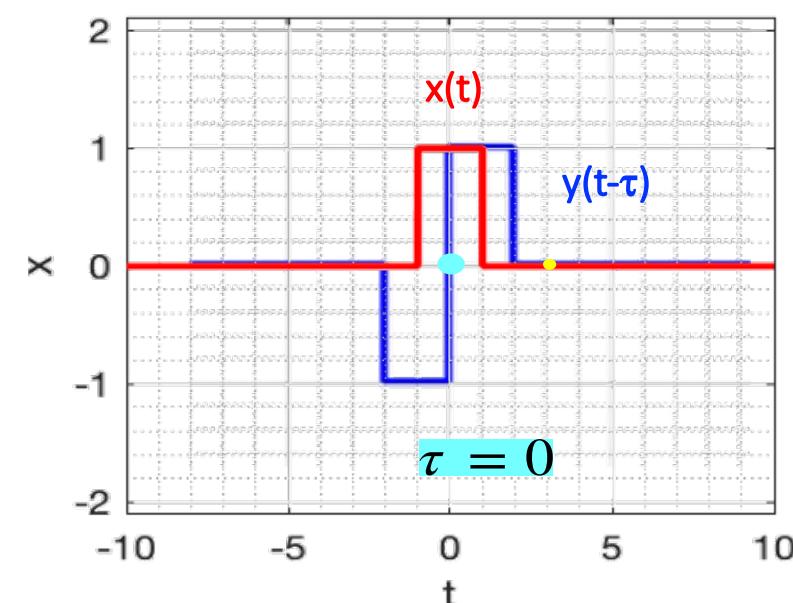
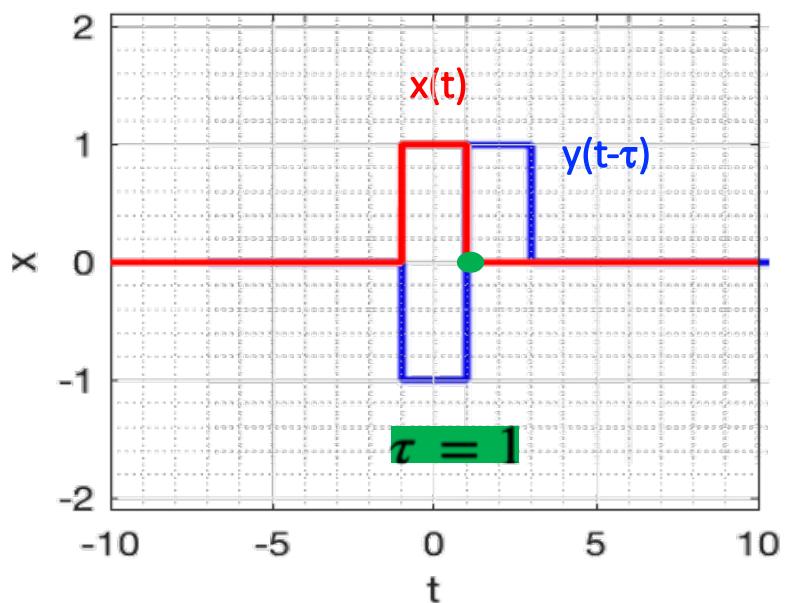
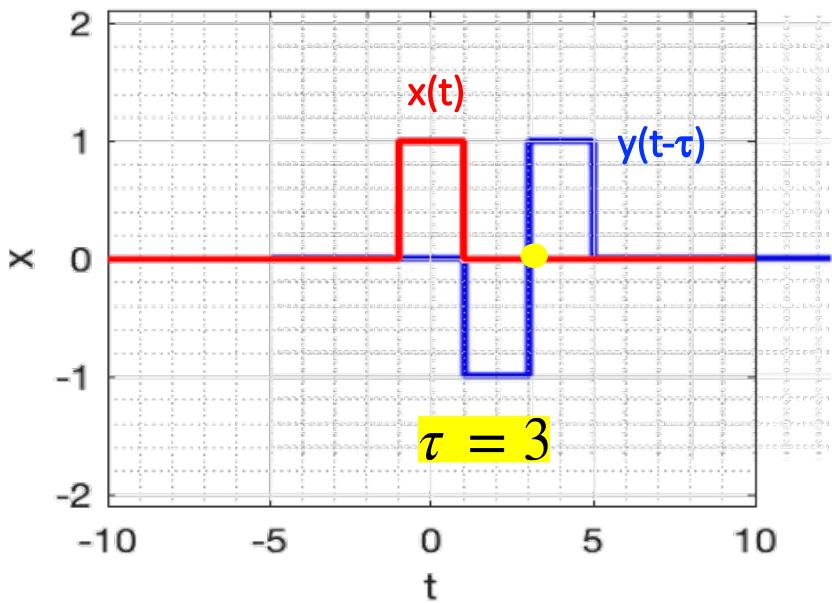
$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

$$y(t) \in \mathbb{R}$$



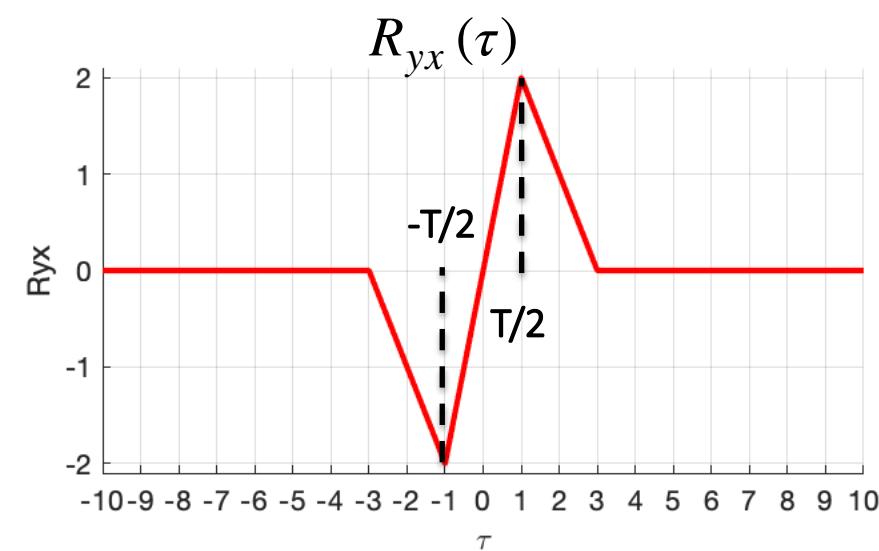
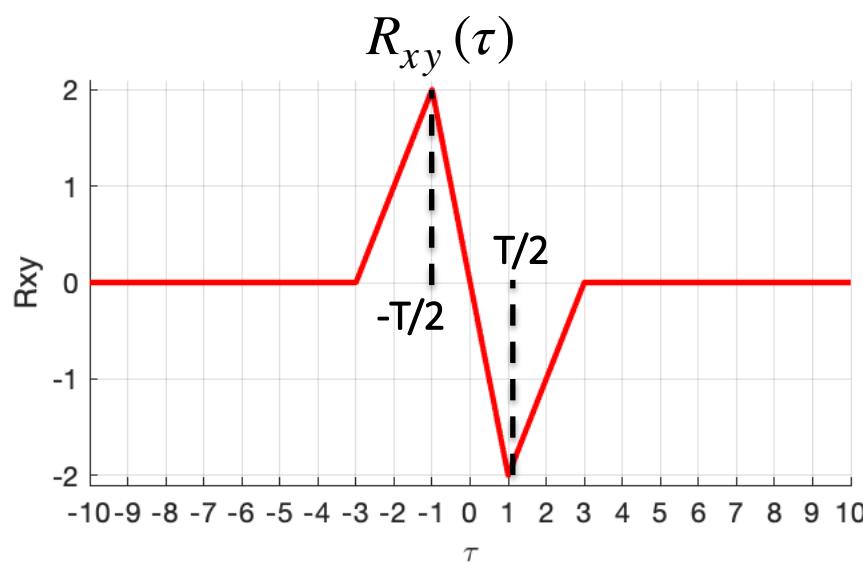
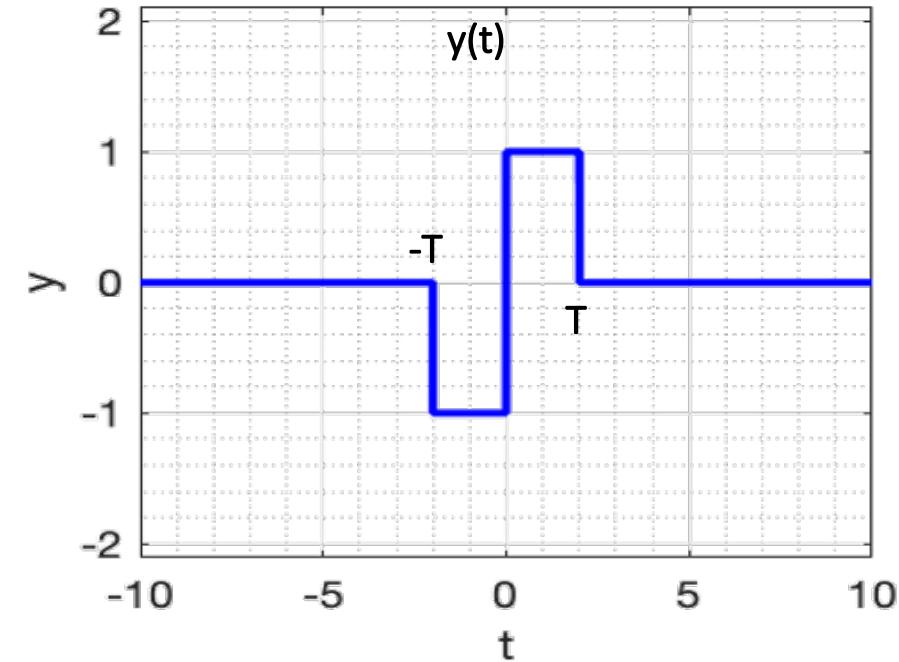
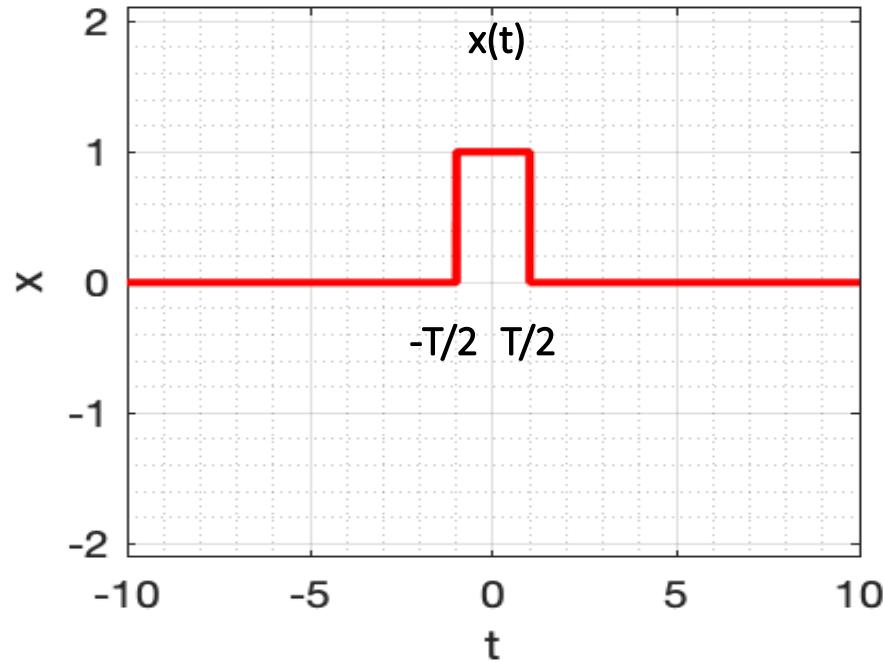
[correlation_convolution.m](#)

Exemple d'intercorrélation temporelle



- Le signal $x(t)$ ressemble le plus à $y(t - \tau)$ pour le décalage $\tau = -1 = -T/2$.
- Le signal $x(t)$ ressemble le moins à $y(t - \tau)$ pour le décalage $\tau = 1 = T/2$.
- En $\tau = 0$, $x(t)$ ne ressemble pas du tout à $y(t - \tau)$: ils sont **orthogonaux**, produit scalaire nul.

Exemple d'intercorrélation temporelle : symétrie hermitienne



Intercorrélation temporelle des signaux à Puissance moyenne finie

Intercorrélation temporelle des **signaux à puissance finie**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xy}[k] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n]y^*[n-k]$$

=> Problème de convergence des intégrales et des sommes

Intercorrélation des signaux périodiques

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t - \tau) dt$$

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n-k]$$

Analogie entre intercorrélation temporelle et convolution

- **Intercorrélation** (signaux continus réels) : $R_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)x(u-t)dt$

Ici, on a échangé t et τ pour comparer avec la formule de la convolution

- **Convolution** (signaux continus réels) $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$ **PAR DEFINITION**

Par changement de variable ($-v = u - t$) dans l'intercorrélation R_{yx} , on obtient :

$$R_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-v)x(-v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-v)y(t-v)dv = x(-t) * y(t)$$

=> L'intercorrélation de **y et x** est égale à la convolution de **x(-t)** avec **y(t)**

$$R_{yx}(t) = x(-t) * y(t)$$

Analogie entre intercorrélation temporelle et convolution

- **Intercorrélation** (signaux continus réels) : $R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(u-t)du$

Ici, on a échangé t et τ pour comparer avec la formule de la convolution

- **Convolution** (signaux continus réels): $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du$

Par changement de variable ($-v = u-t$) dans l'intercorrélation R_{xy} , on obtient :

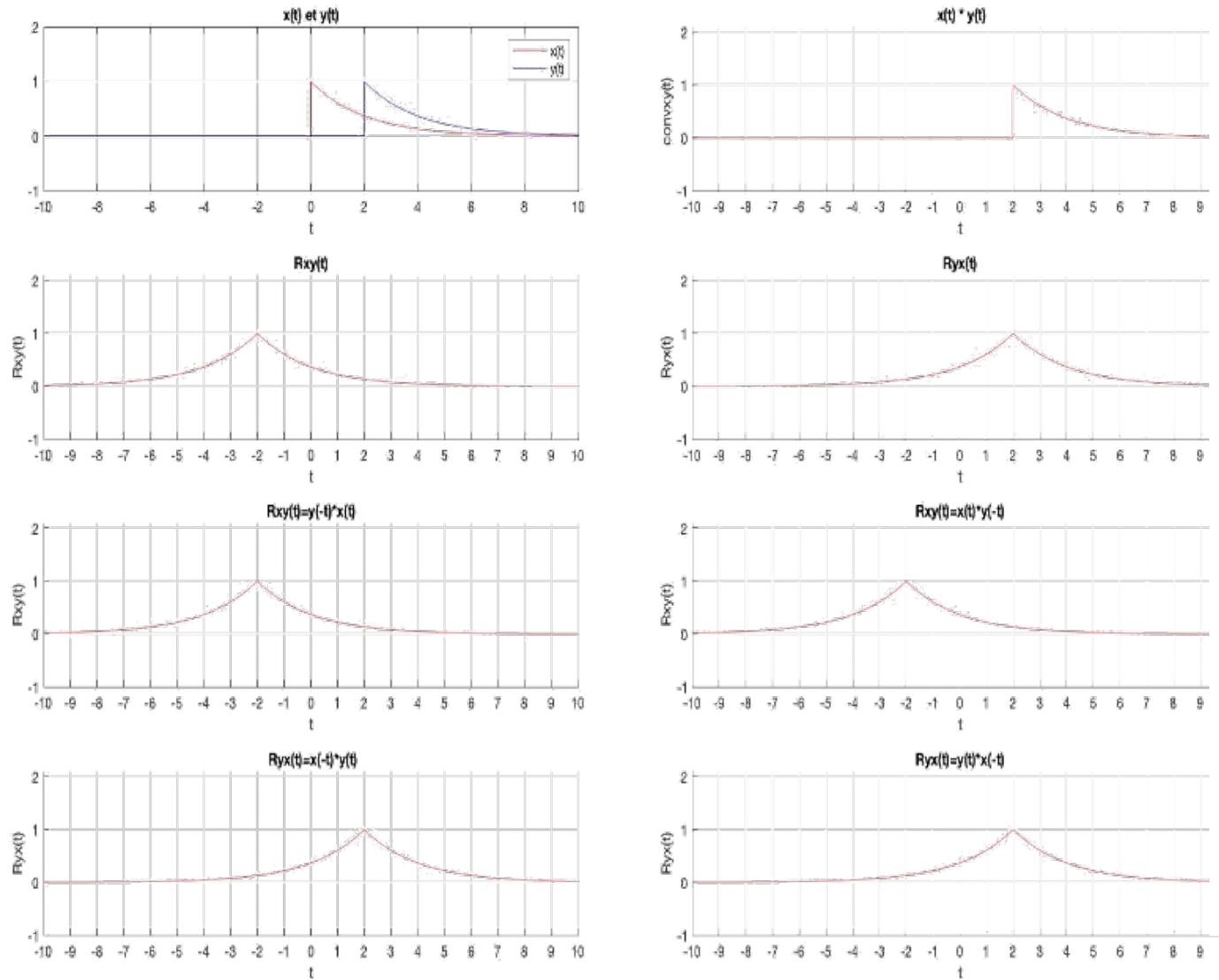
$$R_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)y(-v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-v)x(t-v)dv = y(-t) * x(t)$$

=> L'intercorrélation de **x et y** est égale à la convolution de **y(-t)** avec **x(t)**

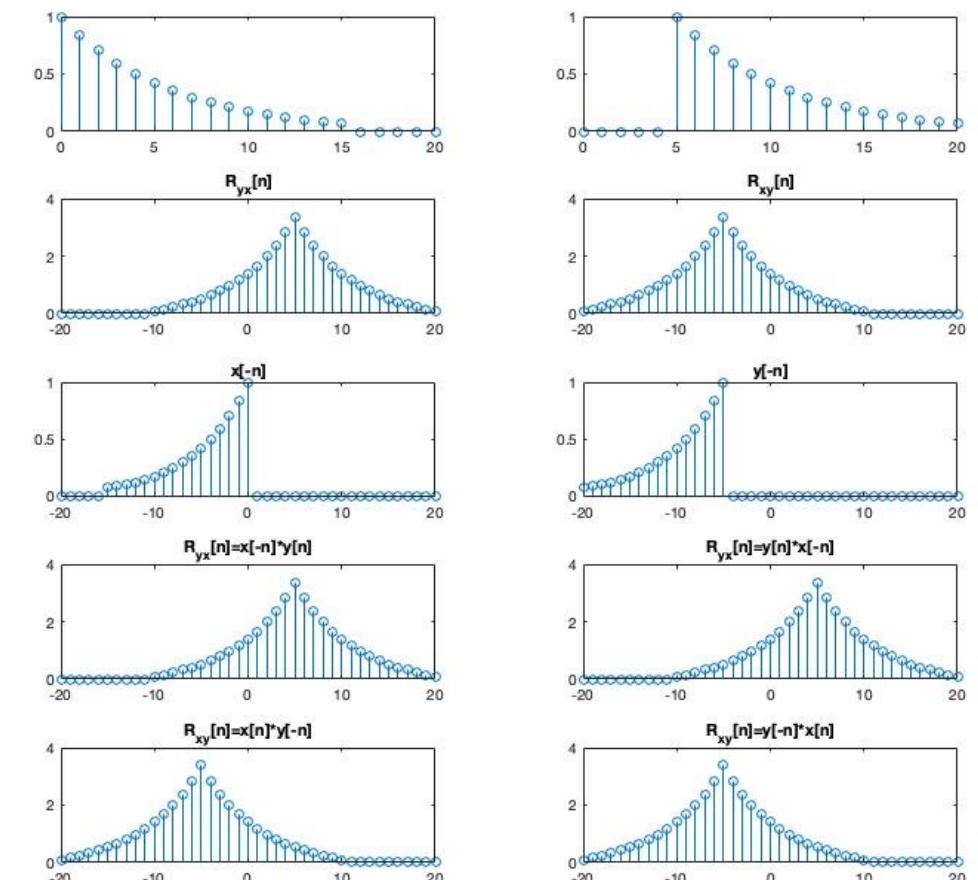
$$R_{xy}(t) = y(-t) * x(t)$$

Intercorrélation temporelle avec Matlab en TC et TD

[convolution_intercorrelation.m](#)



[CrossCorrelation_Convolution.m](#)



3. Analyse fréquentielle d'un signal périodique et apériodique en temps continu SF et CFT

Décomposition en SF des signaux périodiques TC

Pour plus de détails [SMA.pdf](#)

Formulaires de trigonométrie

Forme trigonométrique: Tout signal périodique réel de puissance finie peut être représenté par une combinaison linéaire de sinus et de cosinus harmoniquement reliés, appelée Série de Fourier

a_k et b_k : Coefficients de Fourier réels

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

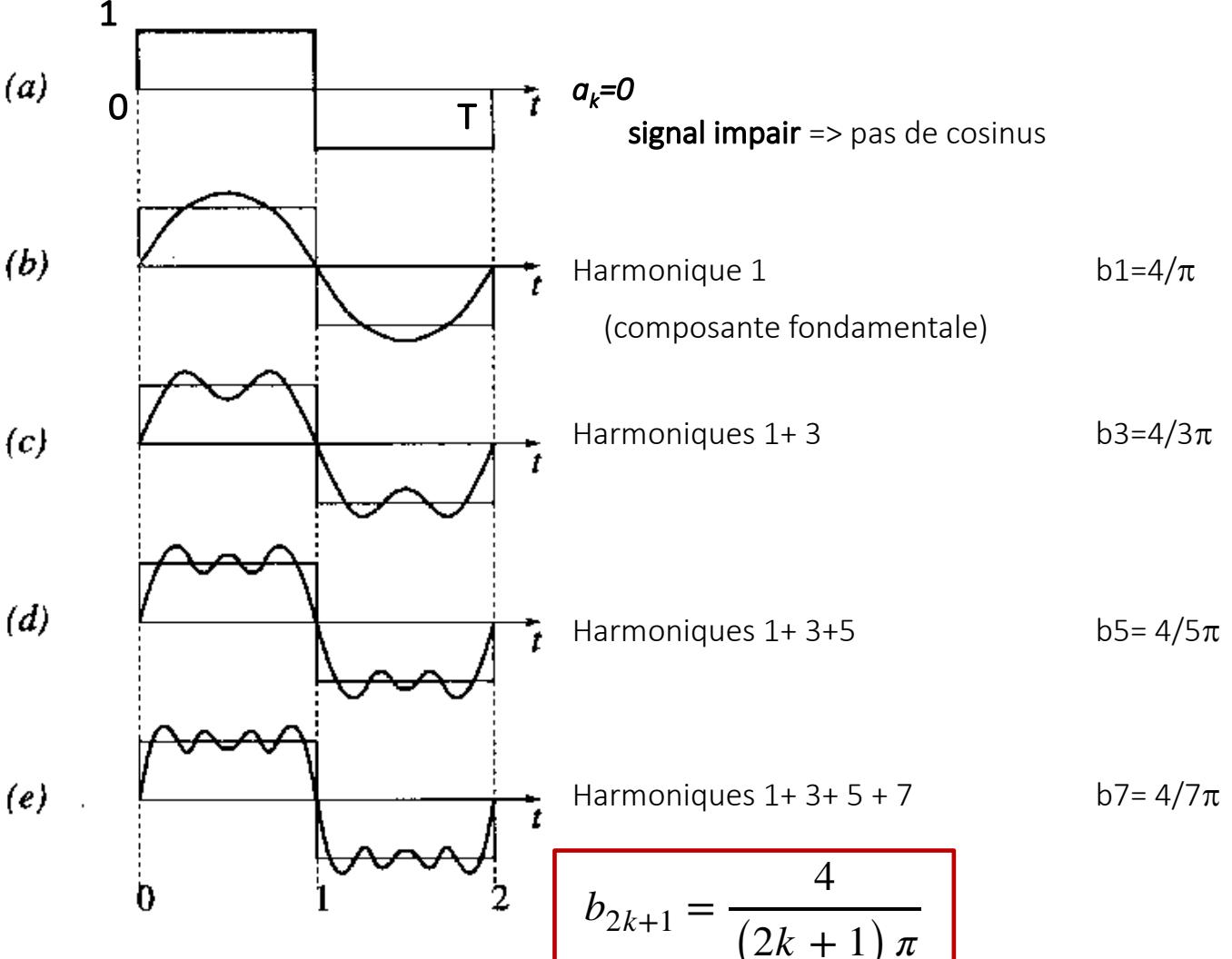
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fréquence fondamentale: $f_0 = \frac{1}{T}$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Composante continue
(valeur moyenne): a_0

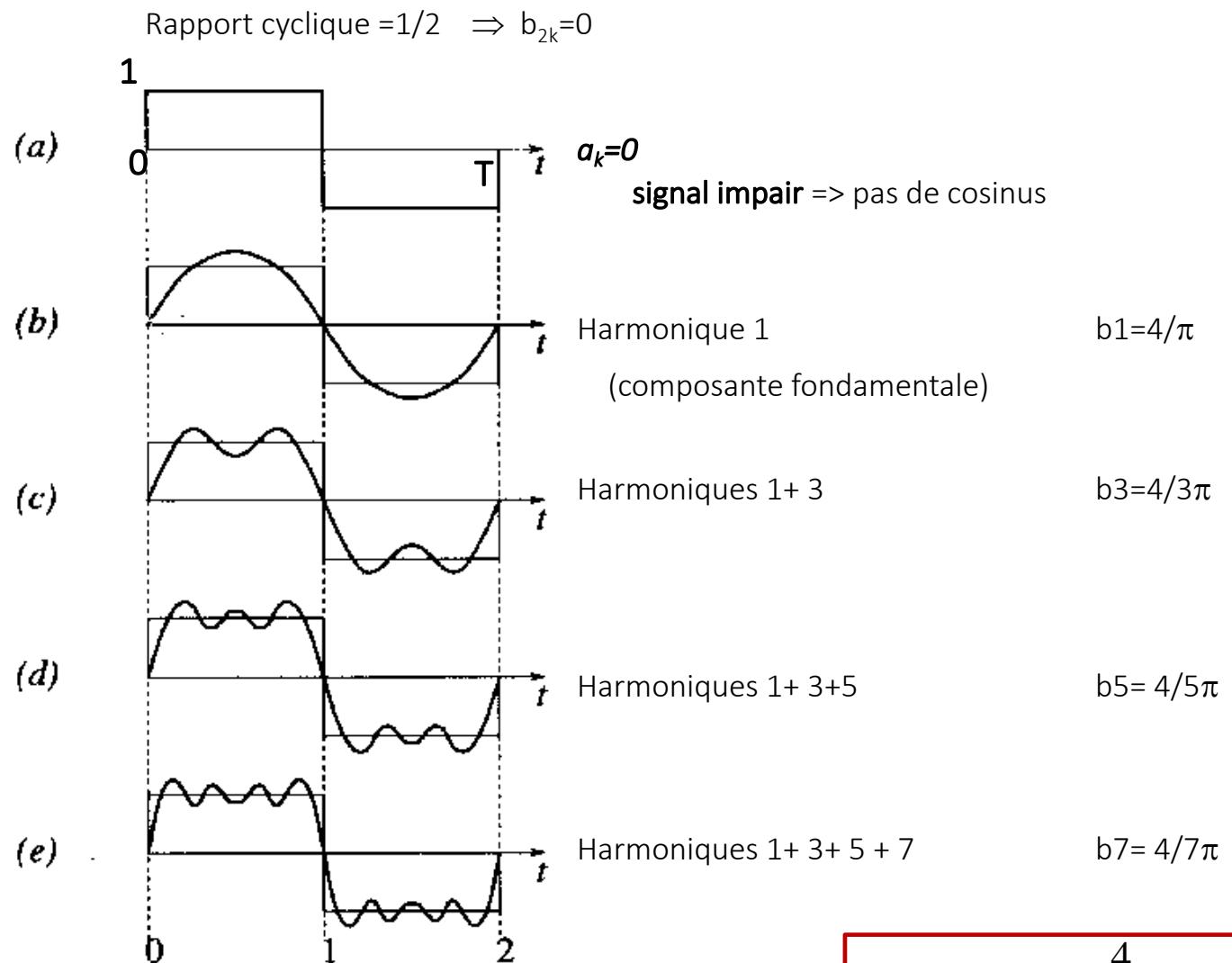
Rapport cyclique = $1/2 \Rightarrow b_{2k}=0$



Décomposition en Série de Fourier d'un signal carré

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1} \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(2\pi \cdot 3f_0 \cdot t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(2\pi \cdot 5f_0 \cdot t) + \frac{1}{7} \cdot \sin(2\pi \cdot 7f_0 \cdot t) + \dots + \frac{1}{2k+1} \cdot \sin(2\pi \cdot (2k+1)f_0 \cdot t) + \dots \right]$$

Valeur moyenne nulle
Pas de cosinus
Pas d'harmonique de rang pair (rapport cyclique de 50%)



$$b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

Autre représentation d'une Série de Fourier d'un signal réel périodique

On peut écrire :

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Avec:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}$$

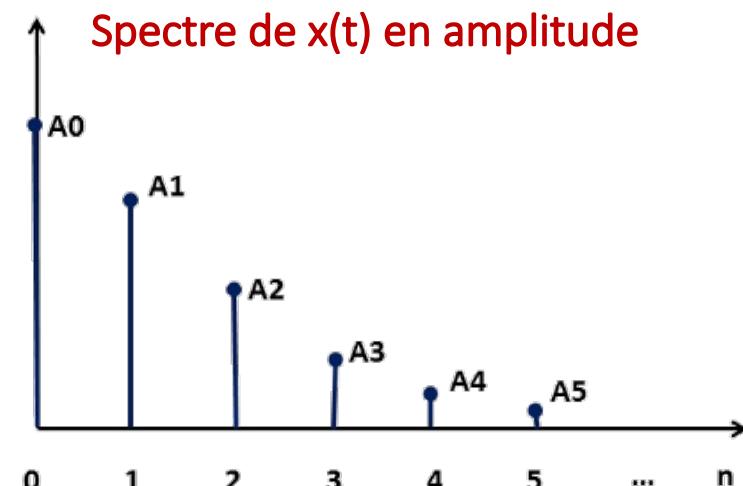
Une autre représentation de la série de Fourier pour $x(t)$ réel est la suivante:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Le graphique: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto A_n$$

est un diagramme de raies et s'appelle spectre de $x(t)$.



En généralisant aux signaux périodiques complexes...

Tout signal périodique de puissance finie peut se représenter sous la forme d'une combinaison linéaire d'**exponentielles complexes** reliées harmoniquement, il s'agit de la Série de Fourier en notation complexe.

$$f_0 = 1/T$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

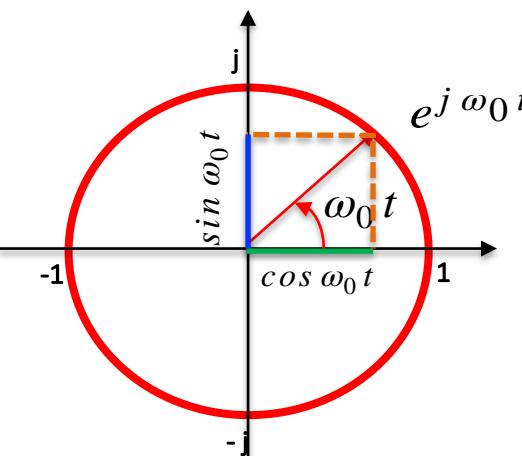
$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$
Synthèse

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$
Analyse

coefficient de Fourier ou coefficient spectral $X_k = \langle x(t), e^{jk\omega_0 t} \rangle$

mesure la portion du signal $x(t)$ à chaque harmonique de la fréquence fondamentale...



$$\exp(j\omega_0 t) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

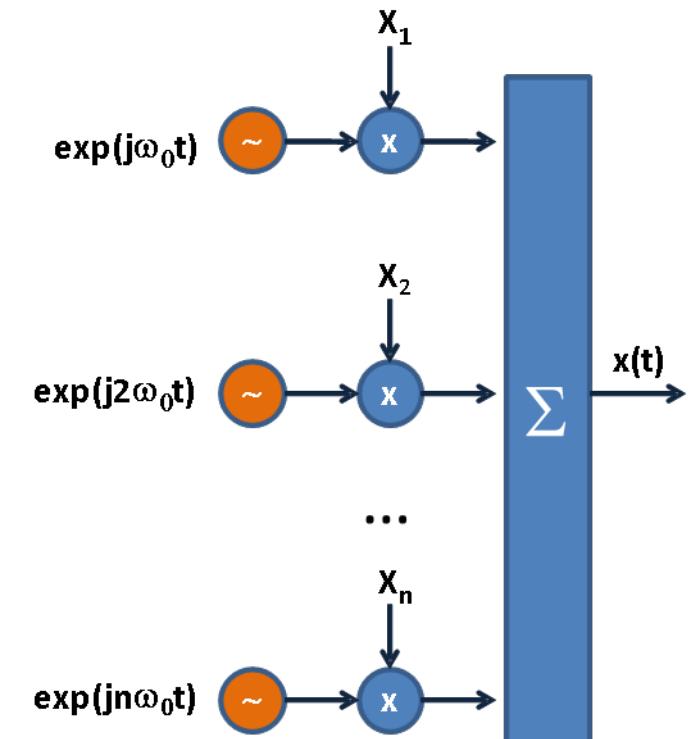
$$\cos \omega_0 t = \operatorname{Re}(e^{j\omega_0 t})$$

$$\sin \omega_0 t = \operatorname{Im}(e^{j\omega_0 t})$$

Euler:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}$$



et aussi les exponentielles aux fréquences négatives...

- Composante moyenne :

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

Valeur moyenne du signal sur une période T

- Composante du fondamental ou composante du 1er harmonique:

$$x_{fondamental}(t) = x_{harm1}(t) = X_{-1}e^{-j\omega_0 t} + X_1e^{j\omega_0 t}$$

\Rightarrow Signal de même fréquence que le signal périodique $f_0 = 1/T$

- Composantes du k^{ième} harmonique:

$$x_{harm-k}(t) = X_{-k}e^{-jk\omega_0 t} + X_k e^{jk\omega_0 t}$$

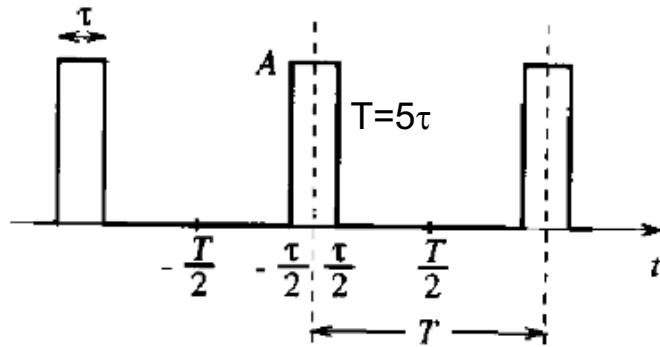
\Rightarrow Signal de fréquence $f = kf_0$ $T_k = T/k$

- Exercices:

Trouver les développements en série de Fourier complexe de:

$$x(t) = \cos \omega_0 t \qquad x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

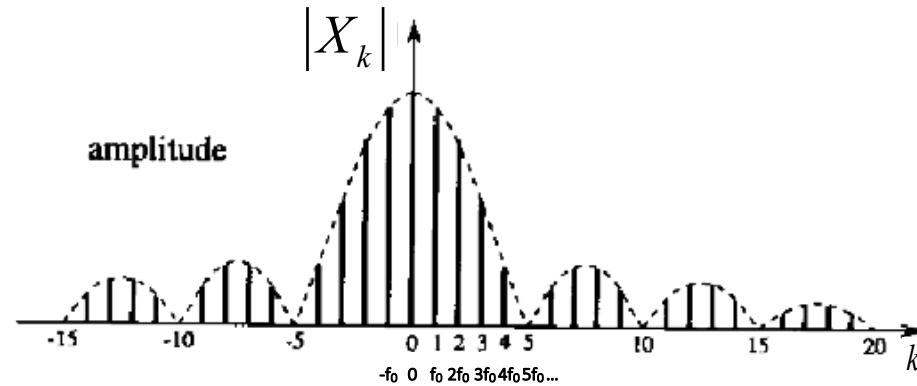
Exemple de coefficients de Fourier



$$X_k = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}$$

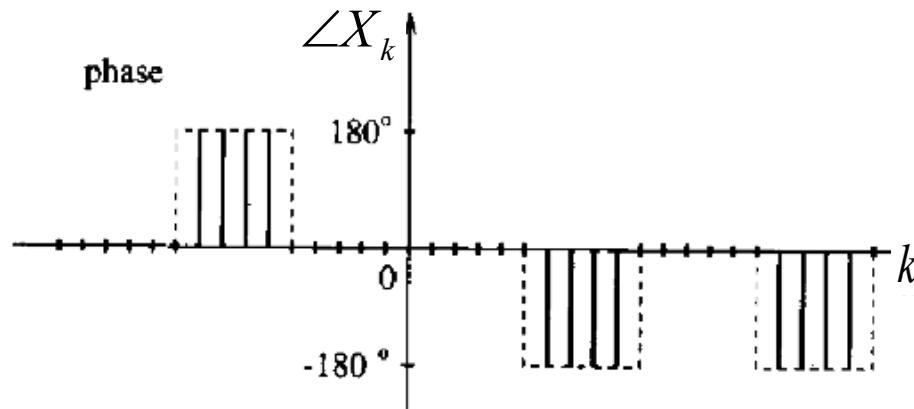
$$X_k = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(\pi kf_0\tau)}{\pi kf_0\tau}$$

Spectre du signal



Pour une graduation en fréquences :

$$f = k F_0 = k/T$$



Exercice : retrouver l'expression de X_k

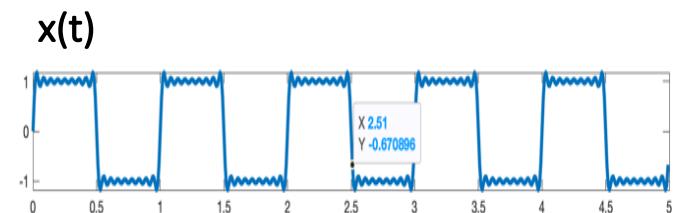
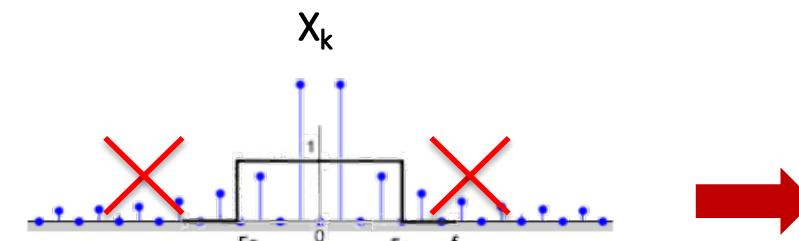
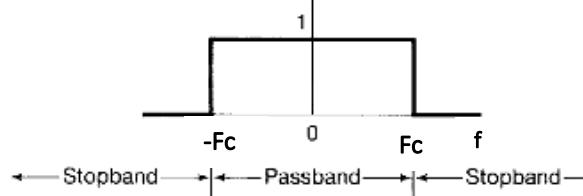
Application – Mon premier filtrage

Opération de filtrage :

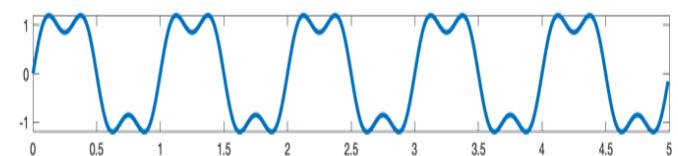
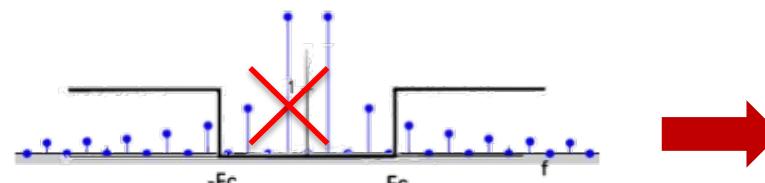
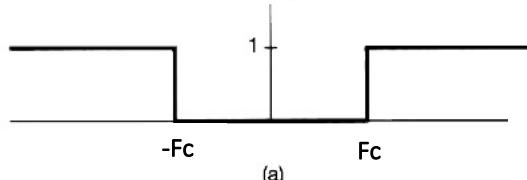
- changer les composantes fréquentielles d'un signal = modification de son spectre
- laisser passer certaines fréquences et en atténuer ou éliminer d'autres
- Différents types de filtres

Filtres idéaux Temps Continu

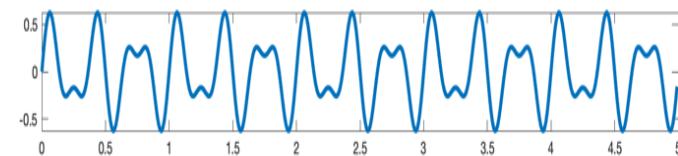
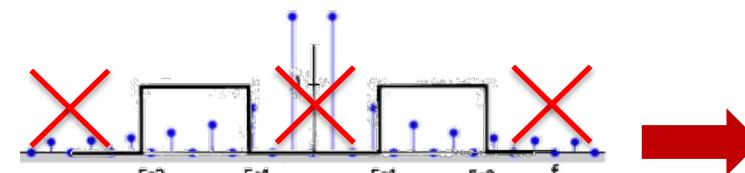
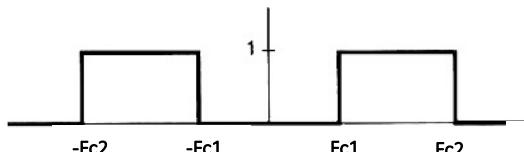
Passe Bas



Passe Haut



Passe Bande



Propriétés des Séries de Fourier en Temps Continu

Linéarité

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{FS} Z_k = \alpha X_k + \beta Y_k$$

Décalage temporel

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FS} X_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

Inversion temporelle

$$x(-t) \xleftrightarrow{FS} X_{-k}$$

$x(t)$ paire	$\Rightarrow X_k$ paire
$x(t)$ impaire	$\Rightarrow X_k$ impaire

Conjugaison

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FS} X_{-k}^*$$

$$x(t) \text{ réel} \Rightarrow \begin{cases} X_{-k} = X_k^* & \text{Symétrie conjuguée} \\ Re(X_k): \text{paire} & |X_k|: \text{paire} \\ Im(X_k): \text{impaire} & \angle X_k: \text{impaire} \end{cases}$$

$x(t)$ réel et impair $\Rightarrow X_k$ imaginaire et impaire
 $x(t)$ réel et pair $\Rightarrow X_k$ réel et pair

Relation de Parseval

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$P_{moy(k)} = \frac{1}{T} \int_T |X_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = |X_k|^2$$

La puissance moyenne d'un signal périodique est égale à la somme des puissances moyennes de toutes ses composantes harmoniques

Pour les signaux réels : lien entre SF réelle et SF complexe

Lien entre coefficients a_n , b_n , A_n et X_n pour $x(t)$ réel

Valeur moyenne:

$$a_0 = A_0 = X_0$$

$$X_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} A_n &= \boxed{2} |X_n| \\ \varphi_n &= -\text{Arg}(X_n) \end{cases}$$

Formule de Parseval pour $x(t)$ réel

$$\begin{aligned} P_{moy} = X_{eff}^2 &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \\ &= a_0^2 + \boxed{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \\ &= X_0^2 + \boxed{2} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

Analyse spectrale => spectre mono bilateral

Si $x(t)$ est réel et pair : $X_{-n} = X_n$

Si $x(t)$ est réel : $X_{-n} = X_n^*$

Transformée de Fourier des signaux TC **CFT** Continuous Fourier Transform

$$X_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0\tau / 2)}{n\omega_0\tau / 2} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau}$$

On fait tendre un signal périodique de période T vers un signal apériodique...

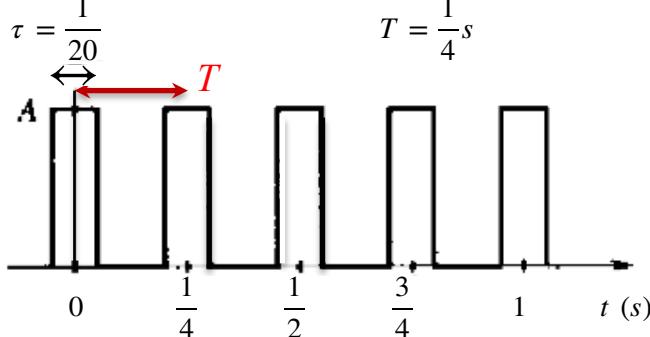
$$T \rightarrow \infty$$

Graduation de l'axe en fonction de la fréquence au lieu de l'indice du coefficient ...

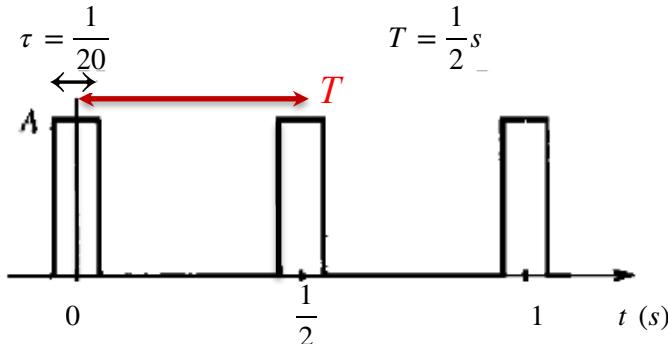
$$\mathbb{N}(\text{indice}) \rightarrow \mathbb{R}(\text{fréquence en Hz})$$

$$n \mapsto n f_0$$

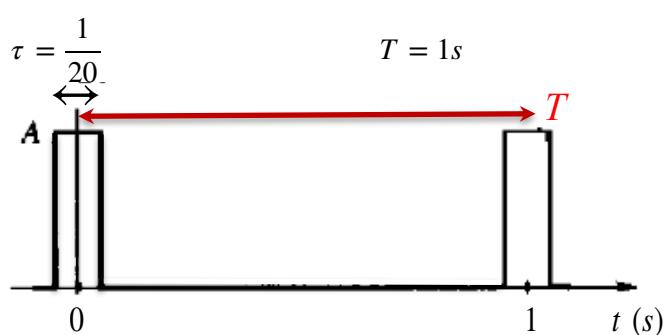
$$\boxed{\frac{T}{\tau} = 5}$$



$$\boxed{\frac{T}{\tau} = 10}$$

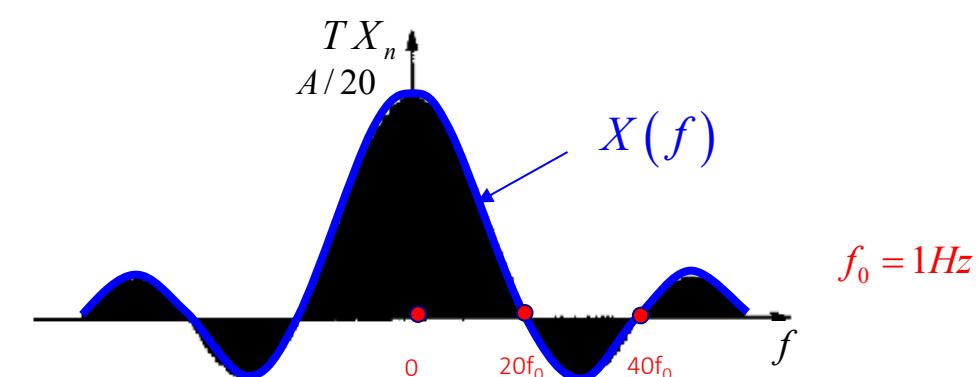
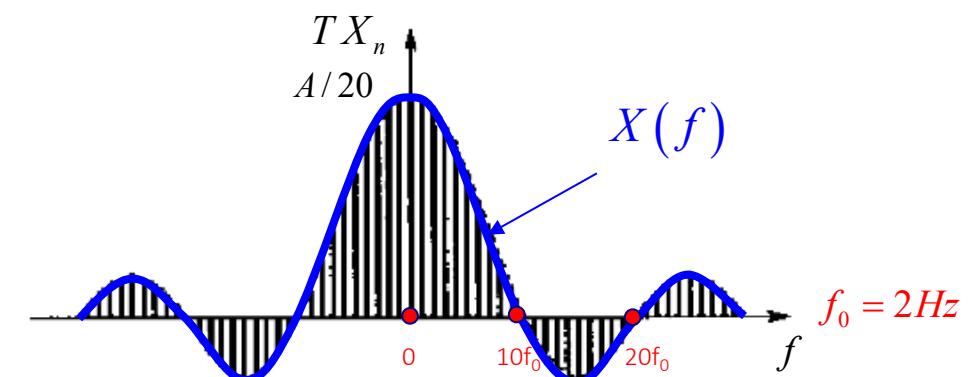
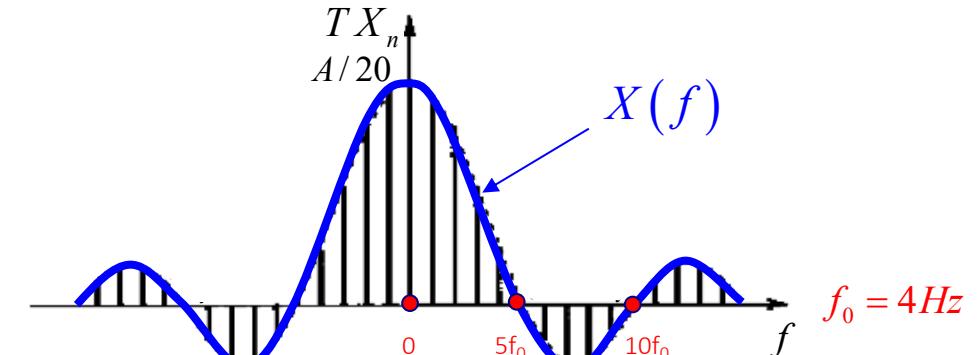


$$\boxed{\frac{T}{\tau} = 20}$$



Enveloppe des échantillons TX_n

$$X(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$



CFT: une généralisation aux signaux apériodiques

Signaux périodiques (T) à puissance finie - Série de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi kf_0 t} \quad (1)$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt$$

Somme infinie d' exponentielles complexes reliées harmoniquement- Spectre discret

Or:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt \quad (2)$$

Soit:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3)$$

Enveloppe des échantillons T.X_k

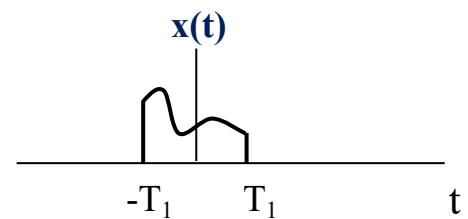
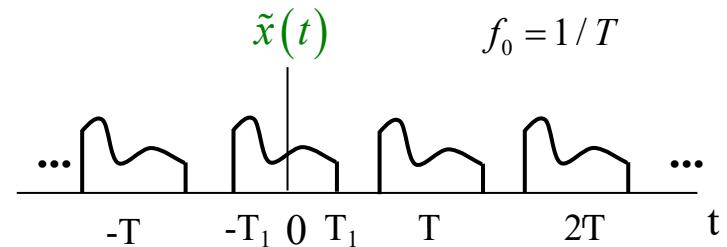
$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow X_k = \frac{1}{T} X(kf_0) \quad (4)$$

(4) et (1) \Rightarrow

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(kf_0) e^{j2\pi kf_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{j2\pi kf_0 t} f_0$$

Si $T \rightarrow \infty$ alors

$$\tilde{x}(t) \rightarrow x(t) \quad f_0 \rightarrow df \quad kf_0 \rightarrow f$$



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{Intégrale de Fourier}$$

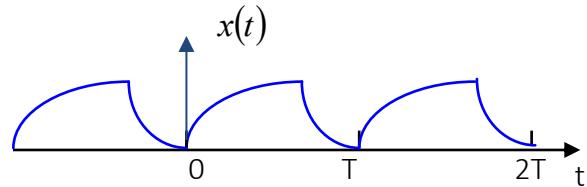
Série de Fourier TC

Signaux **périodiques continus**

Période T

$$f_0 = 1/T$$

Puissance Finie

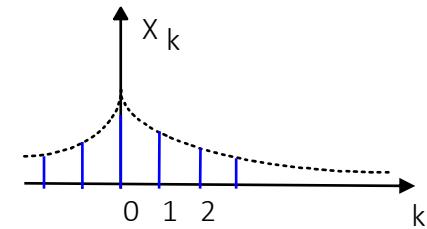


$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Somme infinie d '**exponentielles complexes** reliées harmoniquement

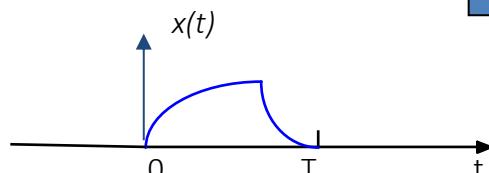
Spectre **discret apériodique**



Signaux **apériodiques continus**

Période $T \rightarrow \infty$

Energie Finie



CFT

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

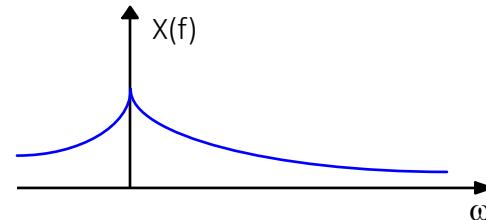
Transformée de Fourier Inverse

(Synthèse)

Intégrale infinie

d '**exponentielles complexes**

Spectre **continu apériodique**



Transformée de Fourier Directe (Analyse)

CFT pour tous les signaux à énergie finie

TF⁻¹

TF inverse en temps continu

Formule de **Synthèse**

= Reconstruction

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Fréquence en Hz
(notation française)

TF

TF directe en temps continu

Formule d'**Analyse**

= Décomposition

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Pulsation ou fréquence
angulaire en Rad/s
(notation anglo-saxonne)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Paires de CFT

Signaux	TF fréquence	TF pulsation
$\delta(t)$	1	1
1	$\delta(f)$	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos(2\pi f_0 t) = \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t) = \sin(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$x(t) \begin{cases} 1, & t < a/2 \\ 0, & t > a/2 \end{cases}$ <i>rectangle</i>	$a \operatorname{sinc}(\pi f a)$ <i>sinus cardinal</i>	$a \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}a\right)$
$P_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} P_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ <i>aussi un peigne de Dirac</i>	$\frac{2\pi}{T} P_{\frac{2\pi}{T}}(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$

4. Propriétés de la **CFT**

Propriétés de la CFT

Linéarité

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{TF} \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$$

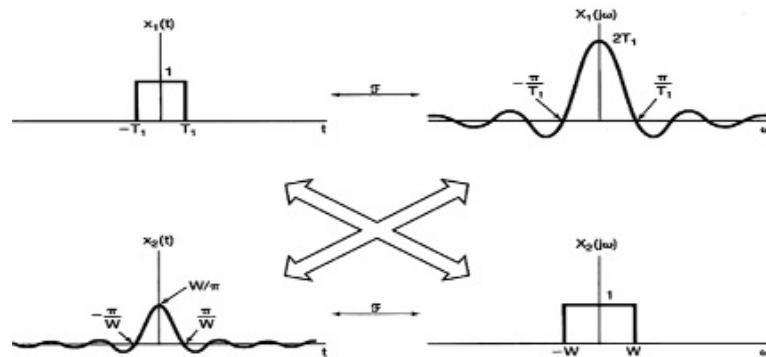
Changement d'échelle

$$x(\alpha t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|\alpha|} X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$x(-t) \xrightarrow{TF} X(-j\omega) \Rightarrow \text{Conservation de la parité}$$

Contraction Temporelle ($\alpha > 1$) \Rightarrow Dilatation Fréquentielle

Dualité temps fréquence



Décalage

Décaler un signal, ne change que sa phase, normal puisque décaler des sinusoïdes revient à changer leur phase !

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{TF} X(j(\omega - \omega_0))$$

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} |X(j\omega)| e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_0]}$$

Dérivation

Outil pour obtenir la réponse fréquentielle à partir d'une éq. diff.

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\omega X(j\omega)$$

$$-jt x(t) \xrightarrow{TF} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

Conjugaison

$$x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-j\omega)$$

Cas particulier: $x(t)$ réel \Rightarrow Symétrie conjuguée: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

$Re\{X(j\omega)\}$: paire	$ X(j\omega) $: paire
$Im\{X(j\omega)\}$: impaire	$\angle X(j\omega)$: impaire

$x(t)$ réel et paire \Rightarrow $X(j\omega)$ réel et paire

$x(t)$ réel et impaire \Rightarrow $X(j\omega)$ imaginaire et impaire

Relation de Parseval : l'énergie se conserve lorsqu'on passe dans le domaine de Fourier

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Energie totale d'un signal = Energie par unité de temps intégrée sur tous les temps
= Densité spectrale d'énergie intégrée sur toutes les fréquences
[V² . s / Hz] ou [A² . s / Hz]

Densité spectrale d'énergie et fonction d'autocorrélation

- Notation pour la densité spectrale d'énergie: $S_{xx}(f) = |X(f)|^2$
- La densité spectrale d'énergie est **la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle dans L^2** (*)

$$S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\} \text{ avec } R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Fonction réelle et positive.
- Fonction paire si le signal est réel
- Dimension V²s/Hz ou A²s/Hz

$$\begin{aligned} TF : \quad S_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t)e^{-j2\pi ft}dt \\ TF^{-1} : \quad R_{xx}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)e^{j2\pi ft}df \end{aligned}$$

- L'énergie est **l'intégrale de la densité spectrale**, aussi égale à **l'autocorrélation à t = 0**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = R_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)e^{j2\pi f0}df$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df$$

(*) dans L^1 on l'appelle densité spectrale de puissance

Démonstration

$$S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\}$$

$$\begin{aligned}
 TF\{R_{xx}(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t - \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt \\
 &\text{avec} & u = t - \tau & du = -d\tau \\
 && \tau = t - u & \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) e^{-j2\pi f(t-u)} du \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) e^{+j2\pi fu} du \right) dt \\
 &\text{or} & X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u) e^{+j2\pi fu} du \\
 TF\{R_{xx}(\tau)\} &= X^*(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= X^*(f) X(f) \\
 &= |X(f)|^2
 \end{aligned}$$

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f)$$

Deux propriétés fondamentales de la CFT

Propriété fondamentale de la CFT N°1

Convolution
en temps

$$x(t) * h(t) \Leftrightarrow X(f).H(f)$$

Multiplication
en fréquences

Application 1: Filtrage fréquentiel

Application 2: Signaux périodiques / spectres discrets

Démonstration de la propriété de convolution

Origine de la convolution : on verra plus tard...

Convolution :

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

On pose :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

On cherche :

$$Y(f) = TF\{y(t)\}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) H(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = H(f) X(f)$$

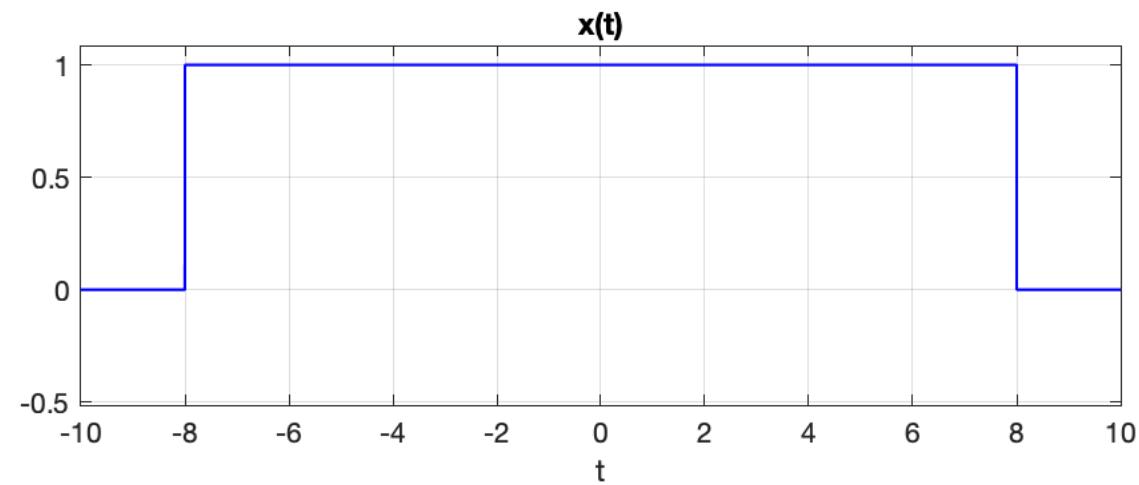
Attention: $H(f)$ existe si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

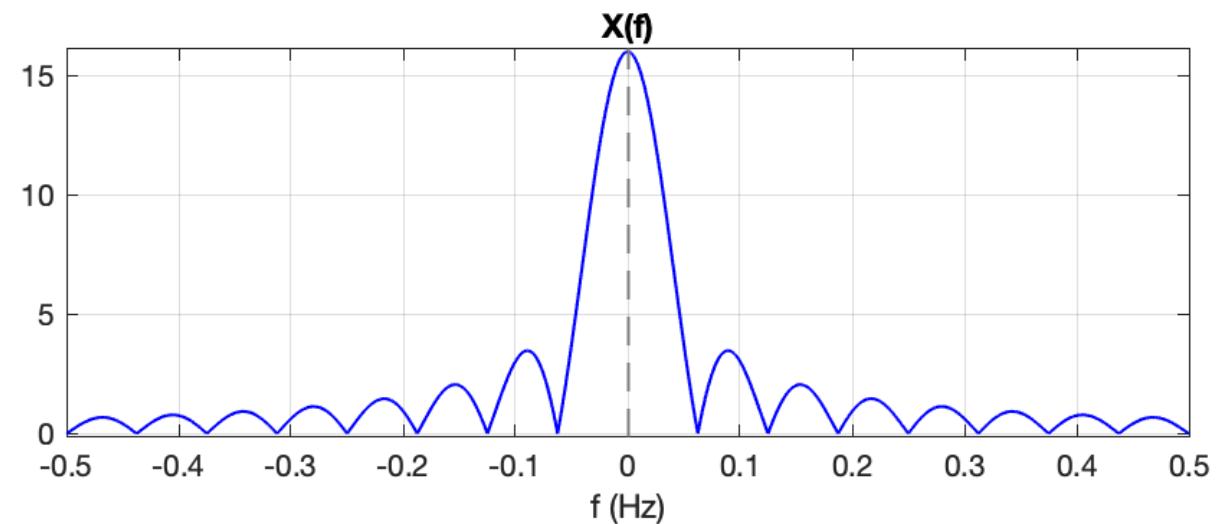
$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} Y(f) = X(f) H(f)$$

Application 1: Filtrage fréquentiel

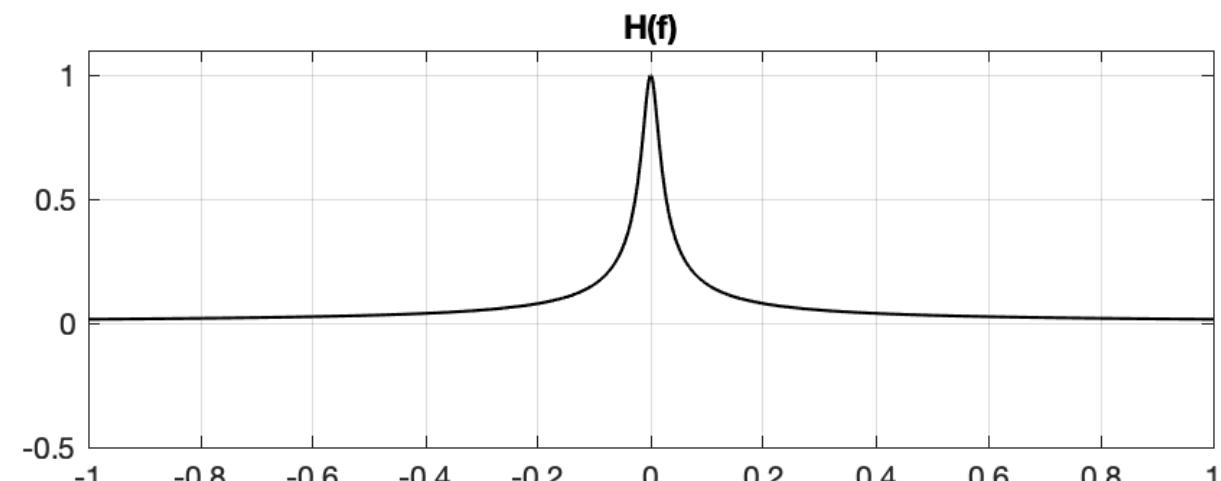
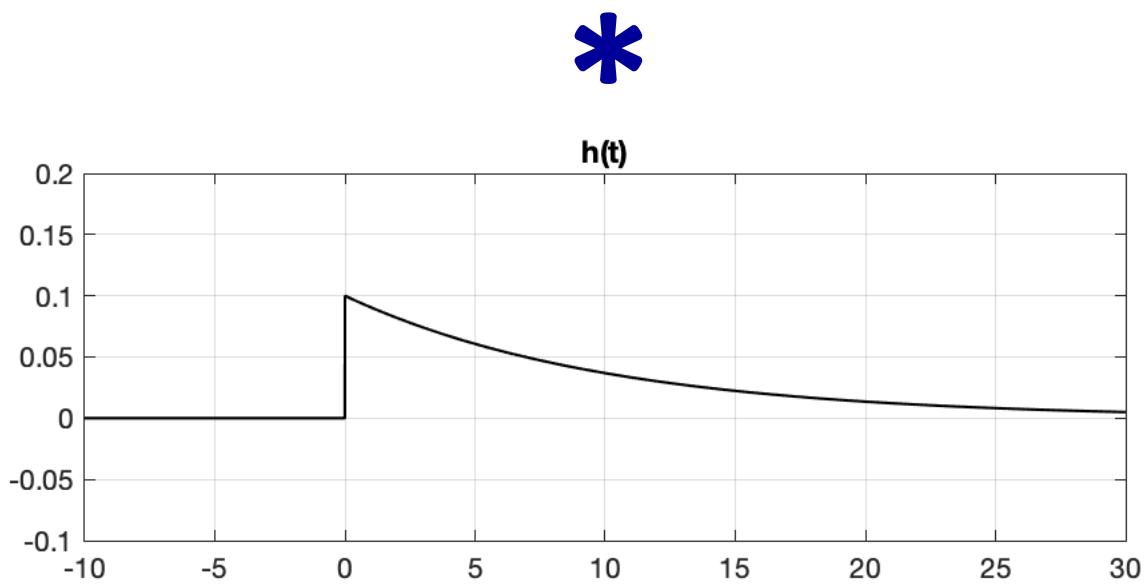
Temps



Filtrage



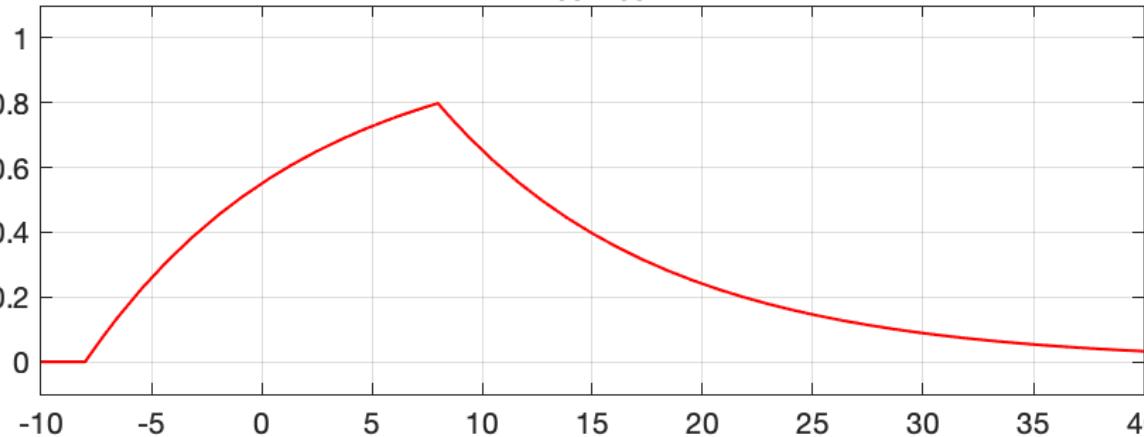
Fréquences



*

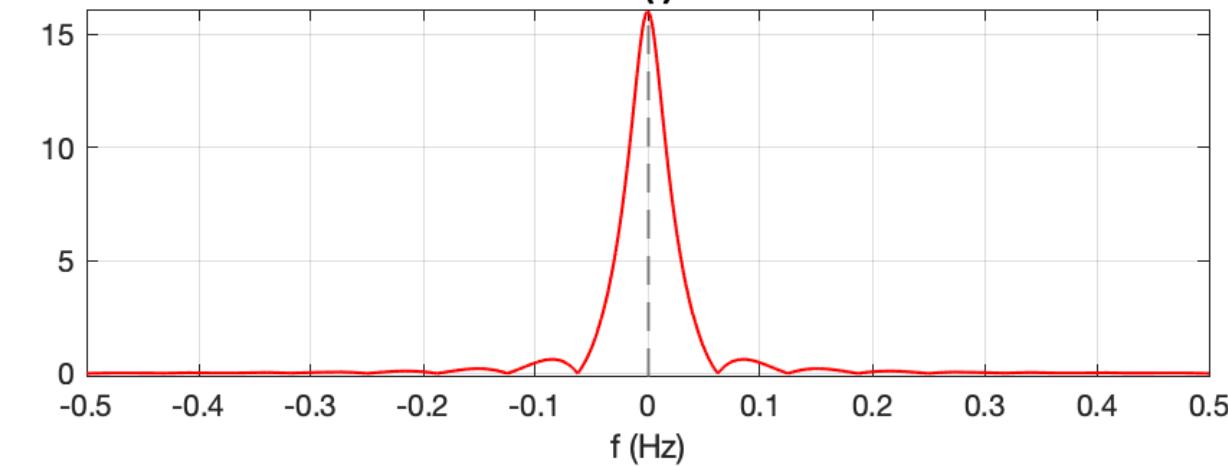
•

Temps

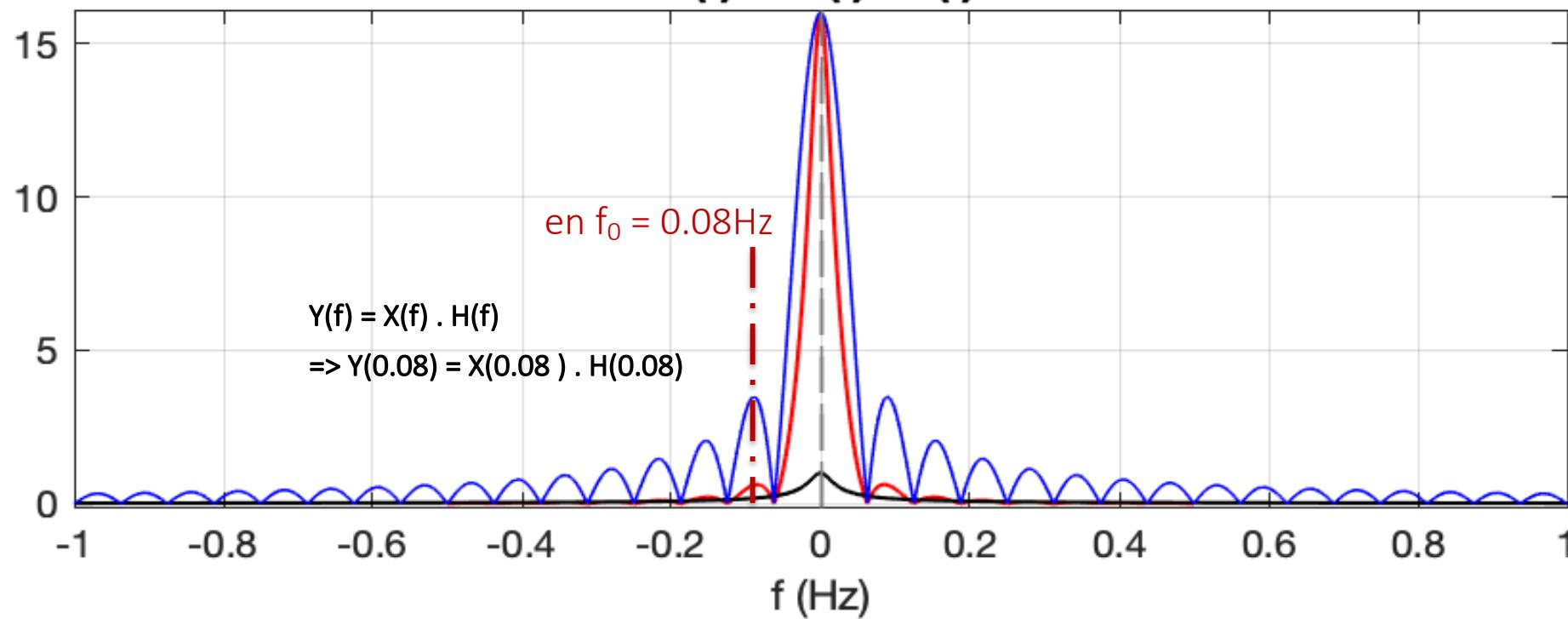
 $x(t) * h(t)$ 

Filtrage

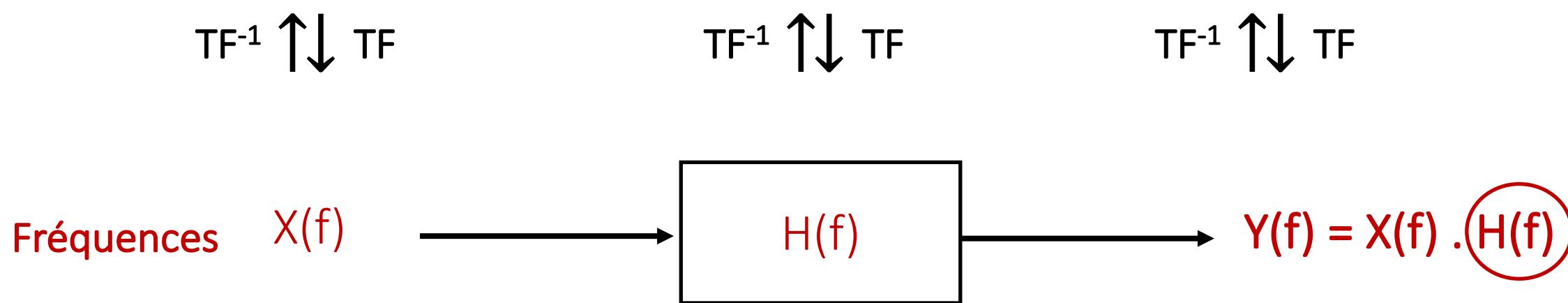
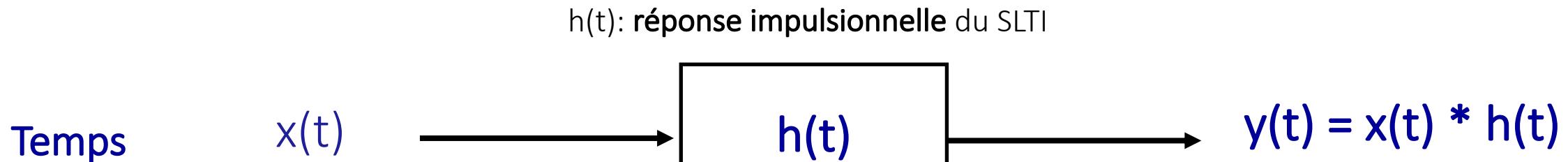
Fréquences

 $Y(f)$ 

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$



Convolution et Filtrage fréquentiel



SLTI = système linéaire et temporellement invariant

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$H(f) \in \mathbb{C}$$

\Rightarrow Modification du spectre de $x(t)$ en amplitude et en phase

= Filtrage

Application 2 : Signaux périodiques / Spectre discret

Prérequis à l'application 2 :
convolution d'un signal avec un Dirac

Dirac et opération de convolution

Convolution

$$\text{TC: } x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Convolution

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ u = t - \tau &\quad \tau = t - u \quad du = -d\tau \\ x(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u) \delta(u) du \\ x(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - 0) \delta(u) du \\ x(t) * \delta(t) &= x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du \\ x(t) * \delta(t) &= x(t) \end{aligned}$$

$$\text{TD: } x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n-k]$$

même démo pour le TD

Dirac = élément neutre

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x[n] * \Delta[n] = x[n]$$

Décalage temporel

Très important

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

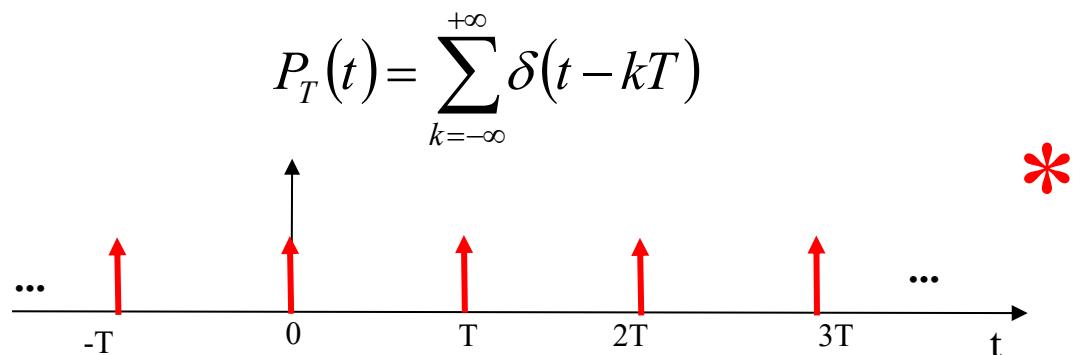
$$x[n] * \Delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Cette propriété du Dirac s'applique aussi en fréquence

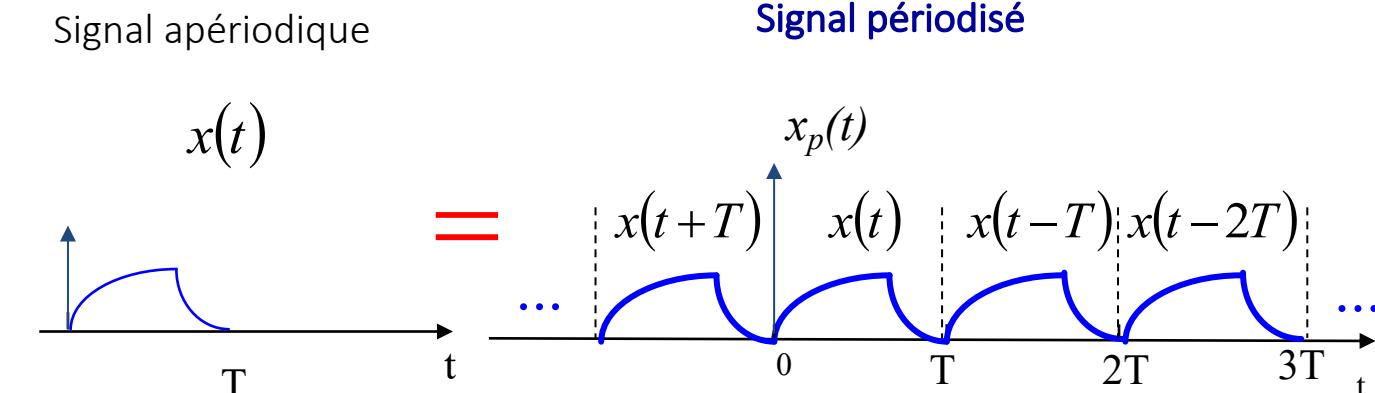
Modélisation d'un signal périodique en TC

Tout signal périodique $x_p(t)$ peut être représenté comme la somme d'une suite infinie de translatées de $x(t)$ motif élémentaire sur $[0, T]$.
 T= période du signal $x_p(t)$

Convolution par un peigne de Dirac en Temps

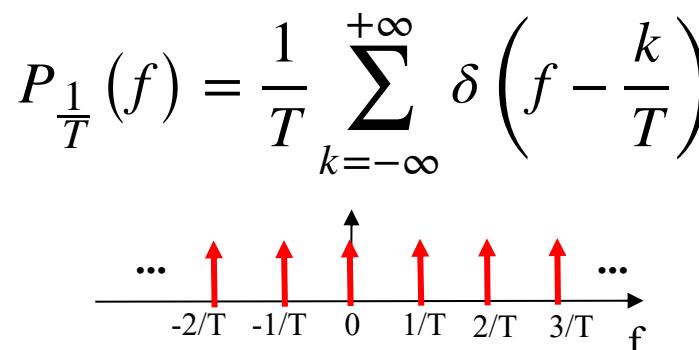


Signal apériodique



Signal périodisé

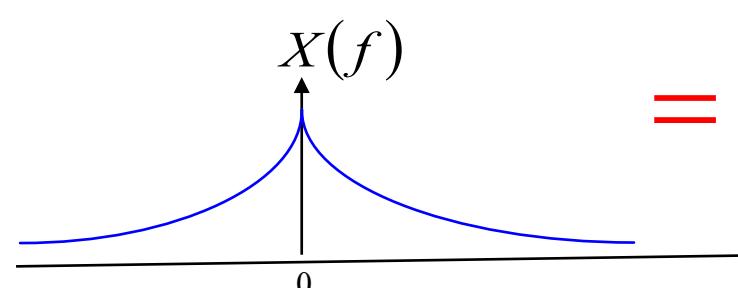
Multiplication par un peigne de Dirac en Fréquences



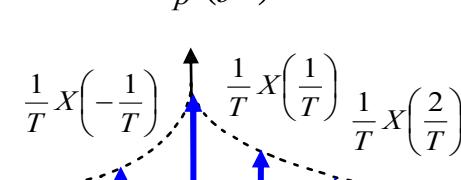
TF

Spectre du signal périodique

\times Spectre du signal apériodique



X_p(f)



$$\frac{1}{T} = f_0$$

Lien avec la décomposition en Série de Fourier

Rappel :Tout signal périodique à puissance finie se décompose en Série de Fourier c'est-à-dire en une combinaison linéaire d'exponentielles complexes harmoniquement reliées à $f_0 = 1/T$

Les coefficients de Fourier sont **les poids des Dirac de la transformée de Fourier du signal périodique**

Ils s'expriment simplement à la l'aide de la **transformée de Fourier du signal apériodique** correspondant au motif élémentaire du signal périodique

$$X_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} X(k f_0)$$

Exercice : retrouver les coefficients de Fourier du signal carré d'amplitude -1 et 1 et de rapport cyclique 1/2

Propriété fondamentale de la CFT N°2

Multiplication
en temps

$$x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow X(f)^* Y(f)$$

Convolution
en fréquences

Application 1: Modulation AM

Application 2: Echantillonnage / périodisation du spectre

Application 3: Spectre d'un signal tronqué

Démonstration de la propriété de la multiplication

Convolution en fréquence

$$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y(f - \nu) d\nu$$

On cherche la transformée de Fourier inverse

$$\begin{aligned} TF^{-1}\{X(f) * Y(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) Y(f - \nu) d\nu \right) e^{j2\pi ft} df \\ &\text{avec} \quad u = f - \nu \quad f = \nu + u \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(u) e^{j2\pi ut} du \right] \\ &= x(t) \cdot y(t) \end{aligned}$$

$$X(f) * Y(f) \Rightarrow x(t) \cdot y(t)$$

Prérequis pour l'application 1 : notion de modulation (HOP)

Modulation

- Définition courante de la modulation : changements de ton, d'accent, d'intensité, de hauteur dans l'émission d'un son (inflexion de la voix)
- En télécommunications, processus par lequel une grandeur caractéristique (fréquence, amplitude, phase) d'une oscillation (dite porteuse) est astreinte à suivre les variations d'un signal (modulant)**
- C'est aussi le processus qui permet de changer la forme du signal de **manière à le placer dans la bande de fréquences voulue pour sa transmission**.
Le signal transportant une information doit passer par un moyen de transmission entre un émetteur et un récepteur. Le signal est rarement adapté à la transmission directe par le canal de communication choisi, hertzien, filaire, ou optique.
La modulation peut être définie comme le processus par lequel le signal est transformé de sa forme originale en une forme adaptée au canal de transmission, par exemple en faisant varier les paramètres d'**amplitude** et d'**argument** (phase/fréquence) d'une onde sinusoïdale appelée **porteuse**.

- Différents types de modulation**

Signal modulant	Porteuse à moduler	Signal modulé	Type de modulation
$s(t)$	$A_0 \sin(2\pi f_c t + \varphi_0)$	$A(s(t)) \sin(2\pi f_c t + \varphi_0)$	AM : Amplitude
$s(t)$	$A_0 \sin(2\pi f_c t + \varphi_0)$	$A_0 \sin(2\pi f_c t + \phi_0 + \phi(s(t)))$	Phase
$s(t)$	$A_0 \sin(2\pi f_c t + \varphi_0)$	$A_0 \sin\left(2\pi f_c t + 2\pi \int_{-\infty}^t f_i(s(\theta)) d\theta\right)$	FM: Fréquence

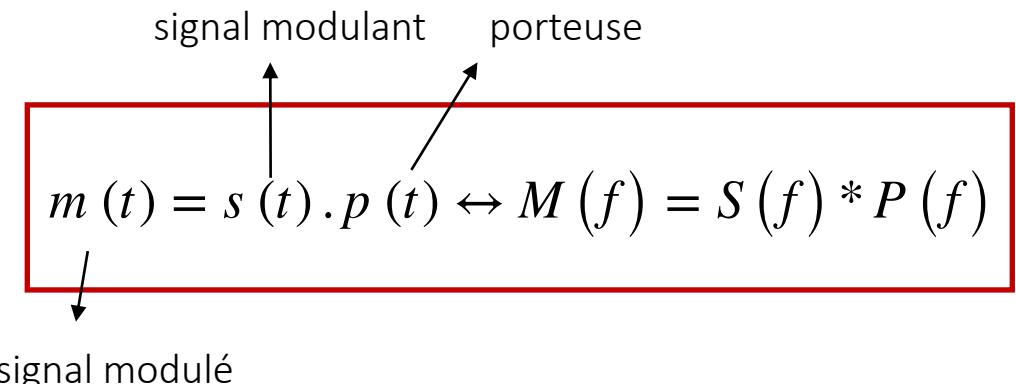
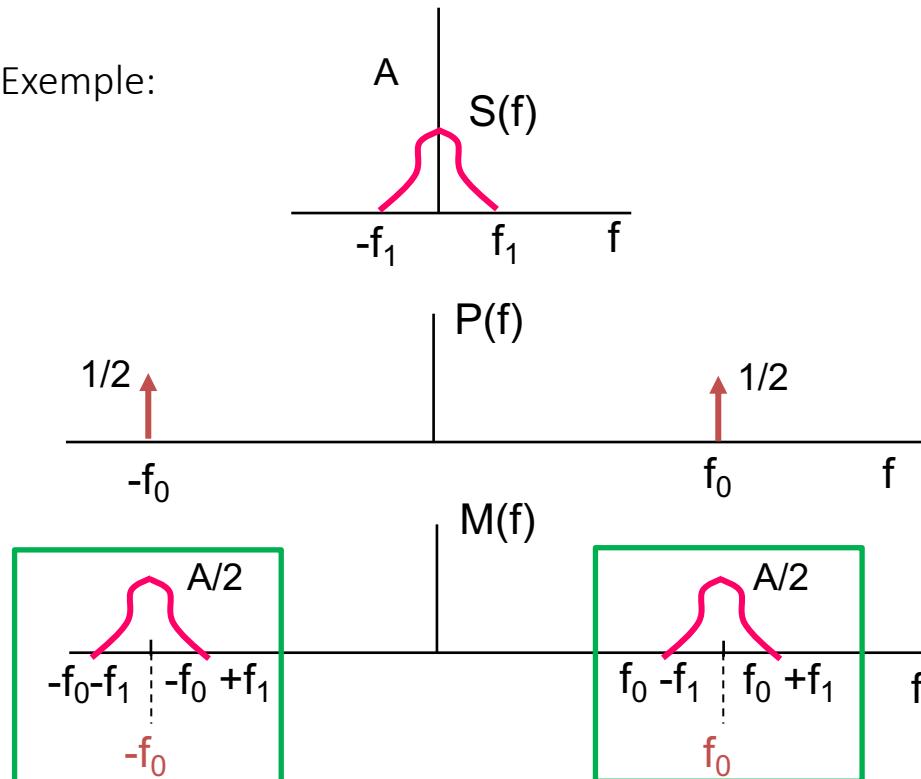
Application 1 : Modulation d'amplitude AM

Modulation d'amplitude

Porteuse: $p(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

On multiplie l'**amplitude** de la porteuse par le signal modulant que l'on veut transmettre

Exemple:



$$P(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Spectre du cosinus

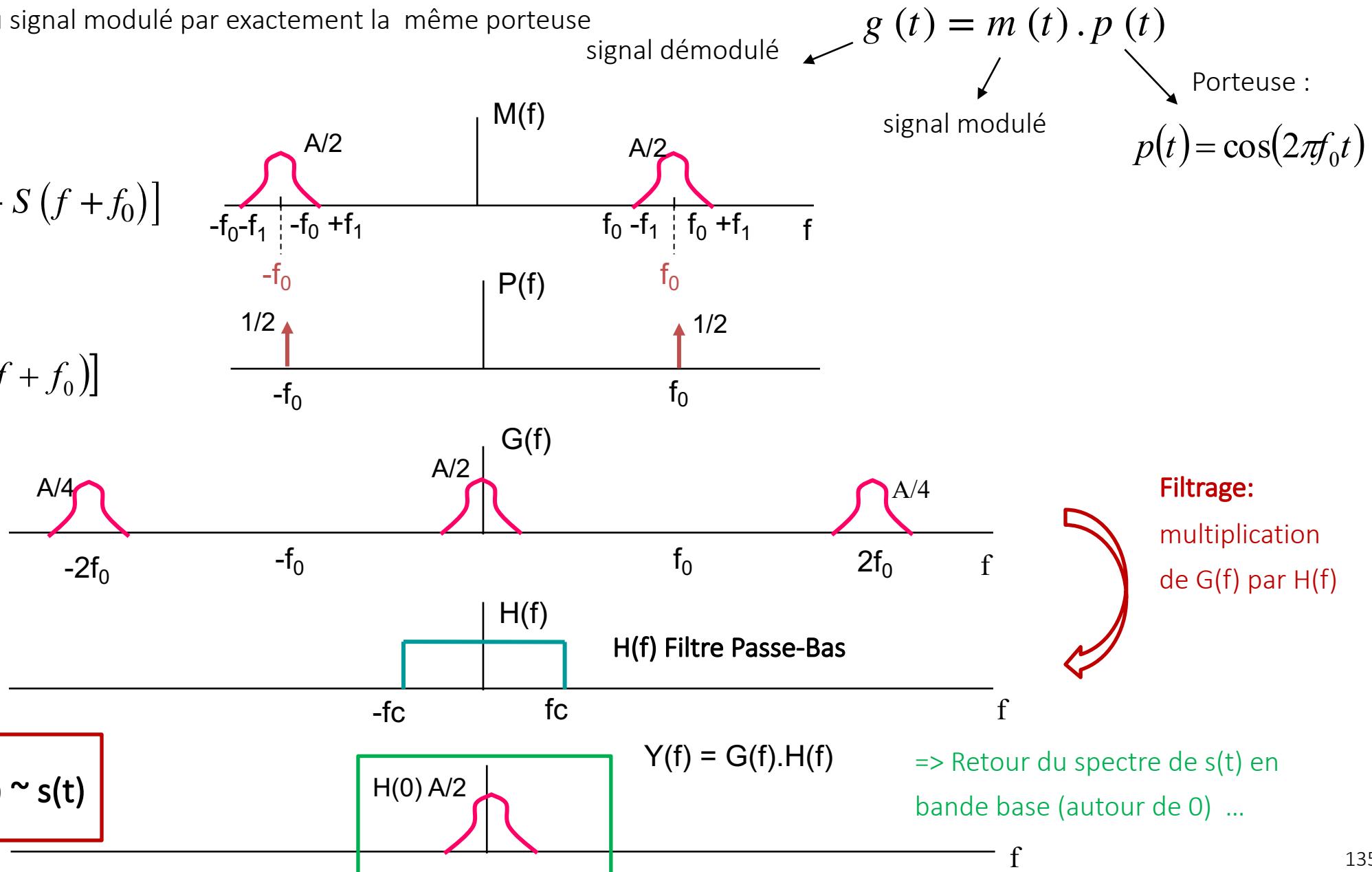
$$M(f) = \frac{1}{2} (S[f - f_0] + S[f + f_0])$$

Propriété du décalage
Convolution avec 2 Dirac décalé en fréquence

=> Adaptation du spectre de s(t) à la bande passante du canal de transmission ...

Démodulation d'amplitude (mode synchrone)

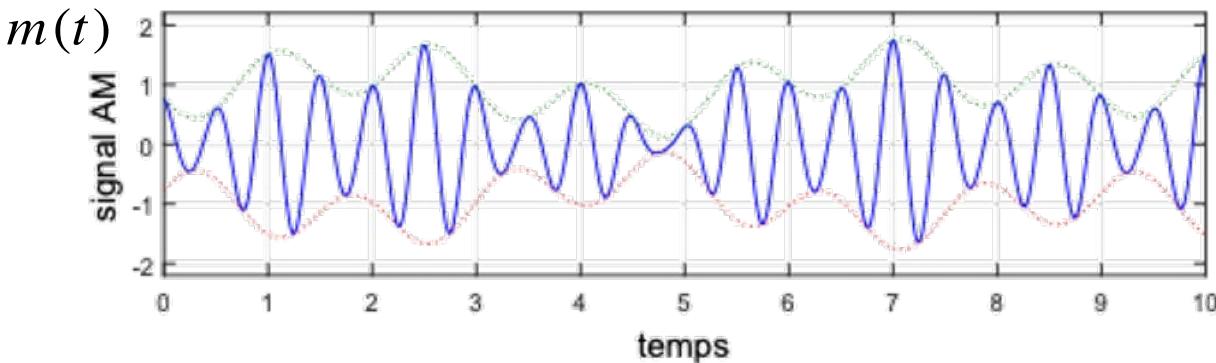
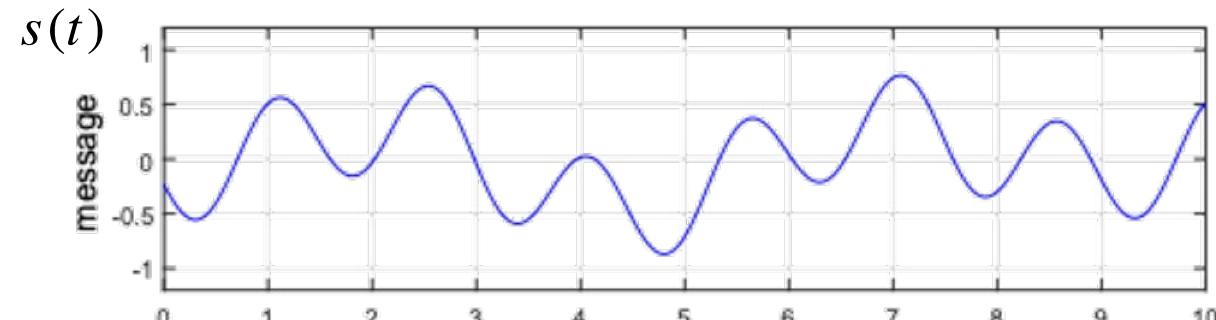
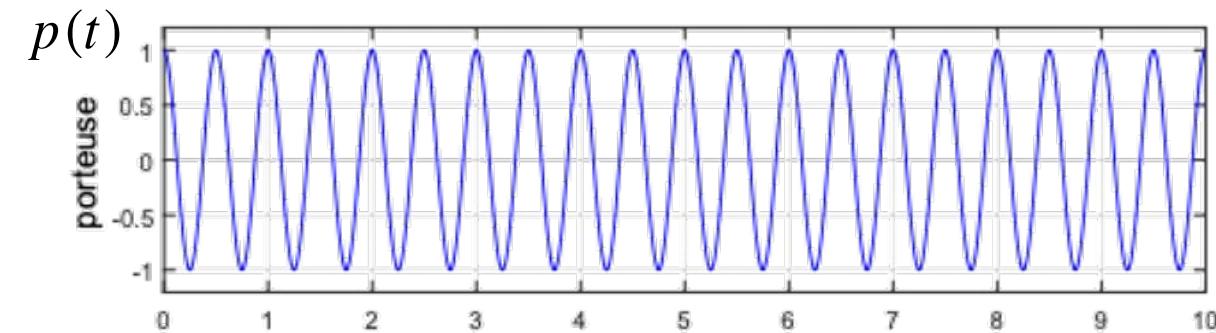
On multiplie l'**amplitude** du signal modulé par exactement la même porteuse



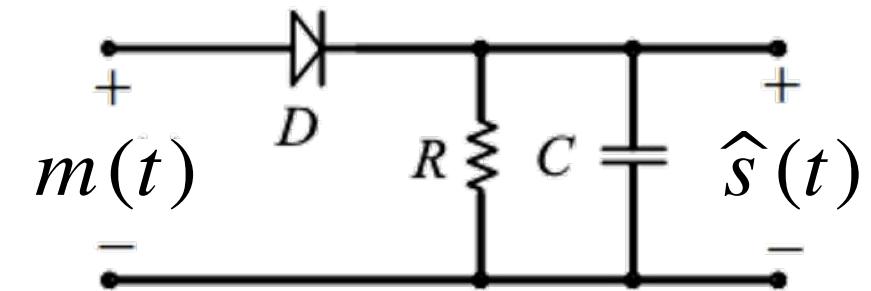
En pratique:

Modulation d'amplitude avec porteuse

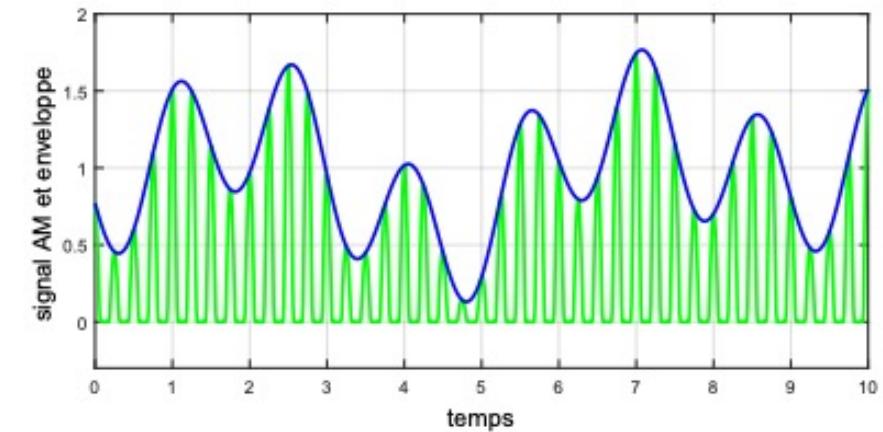
$$m(t) = A \{1 + k s(t)\} \cos(2\pi f_0 t) \quad ; \quad |k s(t)| < 1$$



Démodulation par détection
d'enveloppe (mode asynchrone)



Détecteur d'enveloppe.

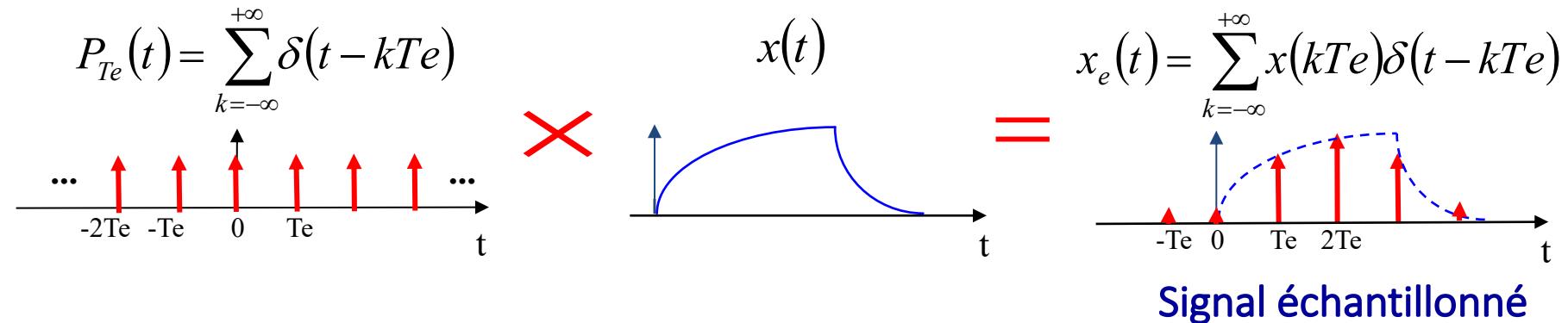


Signal AM redressé à la sortie du détecteur d'enveloppe.

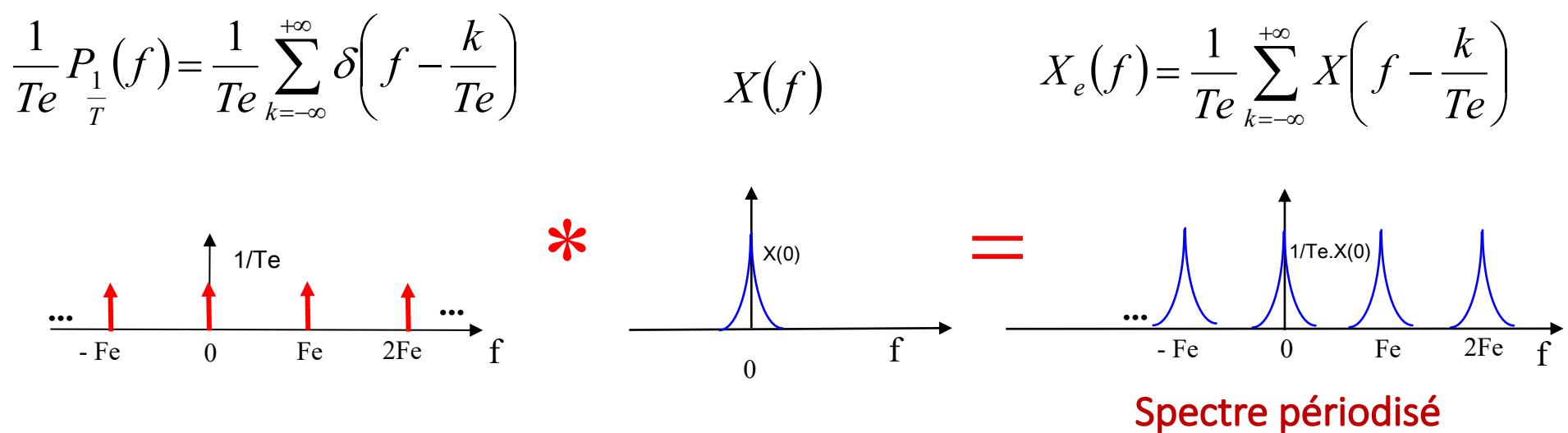
Application 2 : Echantillonnage en temps / Périodisation du spectre en fréquence

Echantillonnage temporel

Multiplication par un peigne de Dirac en Temps



Convolution par un peigne de Dirac en Fréquences





Théorème de l'échantillonnage

Multiplication d'un peigne de Dirac en Temps \Leftrightarrow

Convolution d'un peigne de Dirac en Fréquence

Opération d 'échantillonnage en temps

$$x_s(t) = x(t) \cdot p_{T_s}(t)$$

$$p_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

\longleftrightarrow

$$X_s(f) = X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$\frac{1}{T_s} P_{\frac{1}{T_s}}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$$

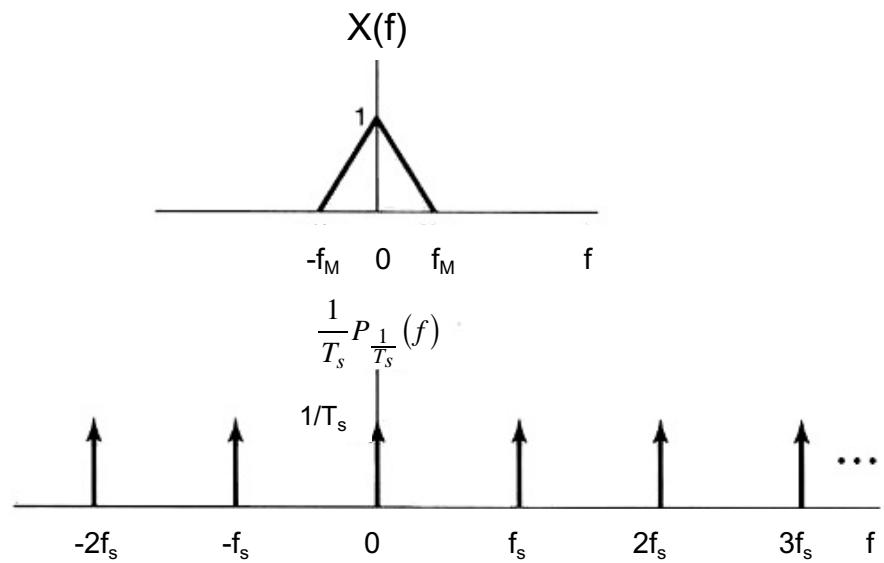
Périodisation du spectre en fréquence

Spectre périodique construit par des répliques de $X(f)$ décalées toutes les f_s et pondérées par $1/T_s$

f_s : fréquence d'échantillonnage en temps et période dans le domaine spectral

En ω : répliques de $X(j\omega)$ décalées tous les ω_s et pondérées par $1/T_s$

Périodisation en fréquence

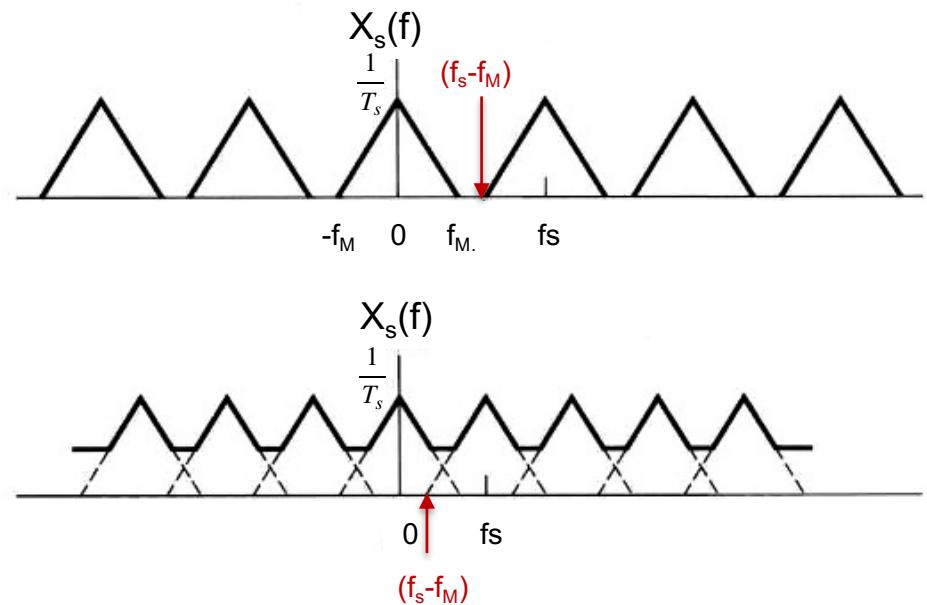


f_s : fréq. d'échantillonnage

f_M : fréq. maximale du signal $x(t)$

$$\text{Si } f_M < (f_s - f_M) \Leftrightarrow f_s > 2f_M$$

$$\text{Si } f_M > (f_s - f_M) \Leftrightarrow f_s < 2f_M$$



Pas de recouvrement des motifs périodisés
Echantillonnage correct

Recouvrement de spectre ou Aliasing (en anglais)
Echantillonnage incorrect

Théorème de Shannon ou Théorème de Nyquist

Soit $x(t)$ un signal de bande limitée telle que : $X(f) = 0$ pour $|f| > f_M$

Alors $x(t)$ est déterminé de manière unique par ses échantillons $x(nT_s)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ si :

$$f_s > 2f_M \quad \text{avec} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$

A partir de ces échantillons, il est possible de reconstruire $x(t)$ en générant un train d'impulsions dont les impulsions successives ont pour amplitude la valeur des échantillons. Ce train d'impulsions est alors filtré par un filtre passe-bas idéal de gain T_s et de fréquence de coupure supérieure à f_M et inférieure à $f_s - f_M$. Le signal résultant sera alors exactement égal à $x(t)$

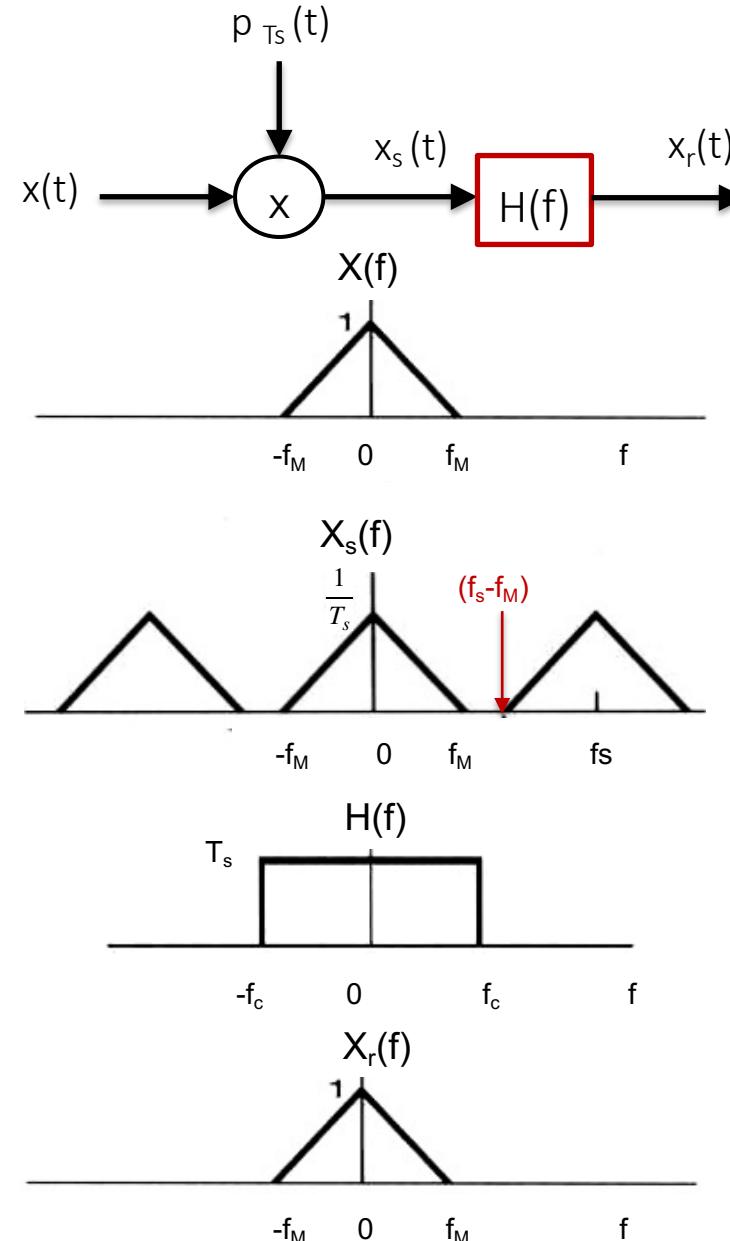
Reconstruction d'un signal TC à partir de ses échantillons avec un filtre passe-bas idéal

Théorème d'échantillonnage

$x(t)$ peut être parfaitement reconstruit à partir de $x_s(t)$ au moyen d'un **filtre passe-bas** :

- de gain T_s
- de fréquence de coupure f_c telle que :

$$f_M < f_c < f_s - f_M$$



Système d'échantillonnage et de reconstruction

$X(f)$: Spectre de $x(t)$

$X_s(f)$: Spectre de $x_s(t)$

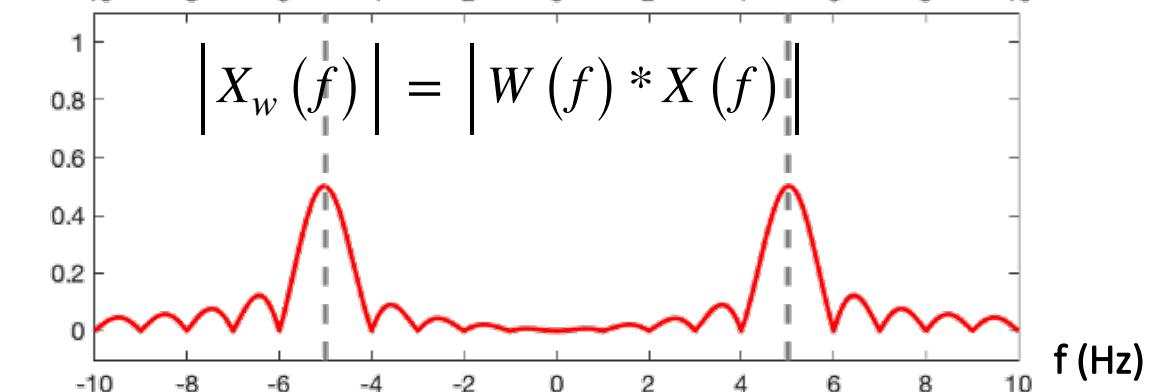
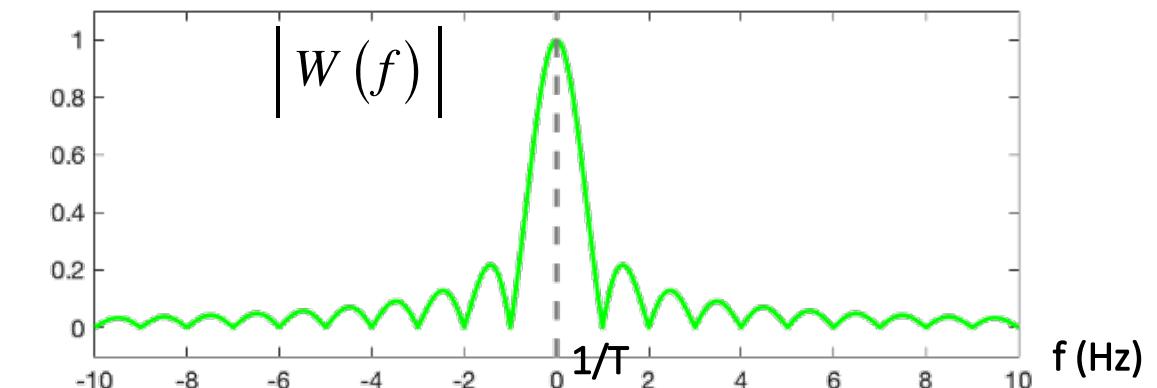
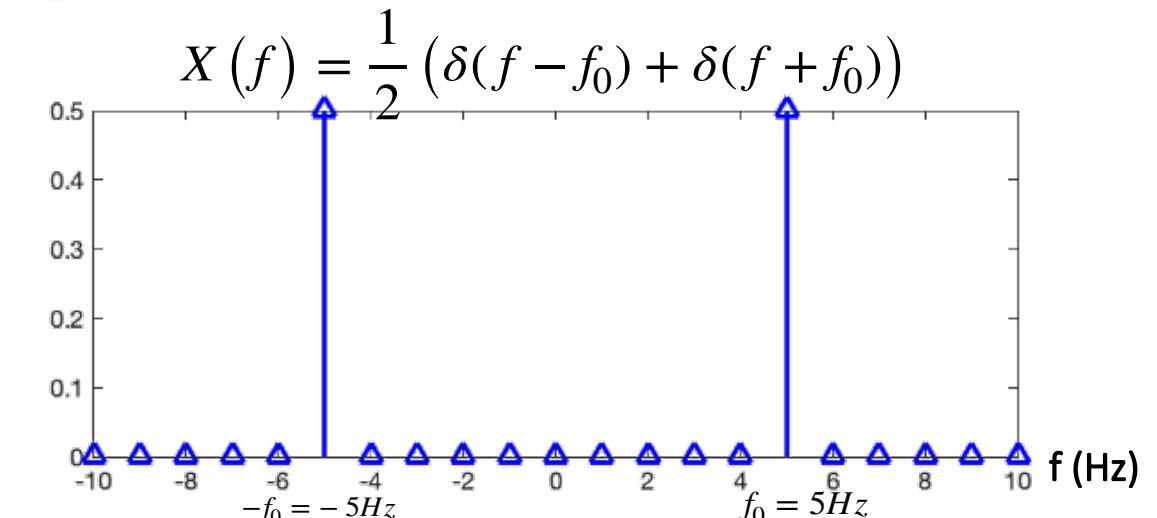
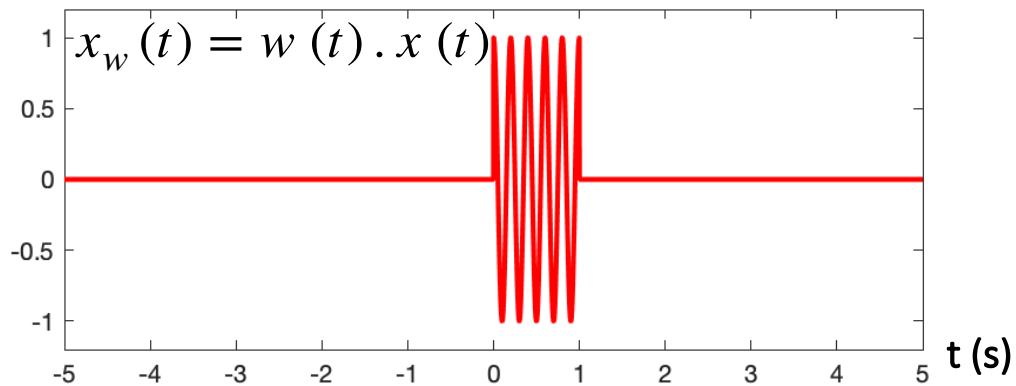
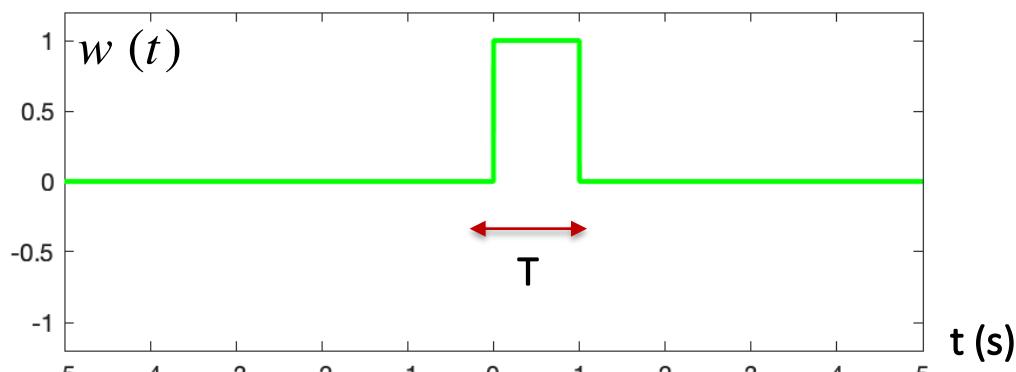
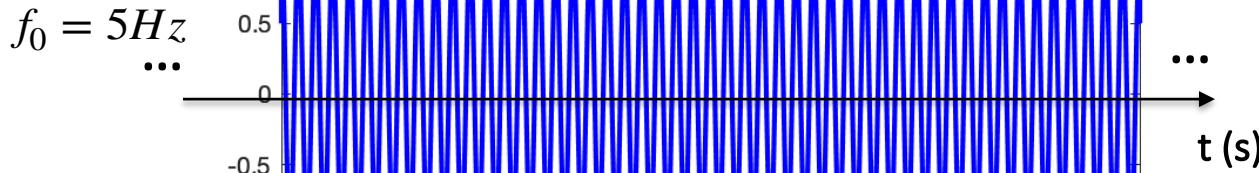
Filtre Passe-Bas idéal pour reconstruire $X(f)$ à partir de $X_s(f)$

Spectre du signal reconstruit $x_r(t)$
= spectre du signal original $x(t)$

Application 3 : Spectre d'un signal tronqué

Spectre d'un signal tronqué

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{Cosinus de durée infinie...}$$



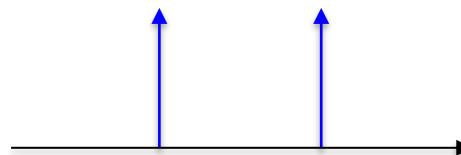
Signal tronqué ou multiplication d'un signal par une fenêtre temporelle

Résultat:

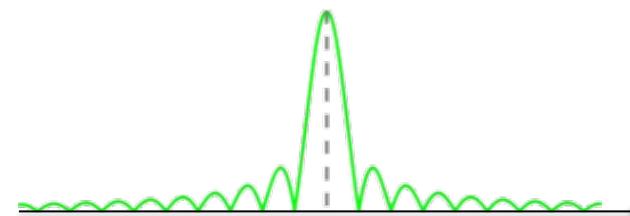
- Un signal tronqué $x_w(t)$ de durée T est obtenu en multipliant le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire de durée T appelée $w(t)$
- Par conséquent, en fréquence, le spectre de $x(t)$ est convolué par le spectre de la fenêtre temporelle $W(f)$, c'est-à-dire par un sinus cardinal (\Rightarrow **étalement du spectre**).

$$x_w(t) = w(t) \cdot x(t) \quad |X_w(f)| = |W(f) * X(f)|$$

Spectre du signal non tronqué

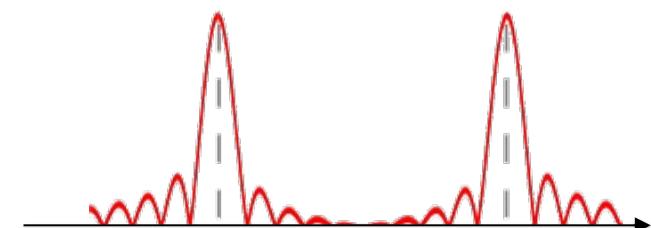


Spectre de la fenêtre temporelle



=>

Spectre du signal tronqué



Propriétés de la CFT

Transformée de Fourier Temps Continu

No	Feature	Signal manipulation	Spectral consequence
1	Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
2	Scaling	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
3	Time reverse	$x(-t)$	$X(-f)$
4	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
5	Time shift	$x(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
6	Frequency Shift	$e^{\pm j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f \mp f_0)$
7	Multiplication	$x(t) \cdot y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(v)Y(f-v)dv$
8	Complex modulation	$e^{\pm j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f \mp f_0)$
9	Cos() modulation	$x(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
10	Sin() modulation	$x(t) \sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{-j}{2} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$
11	Convolution	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f) \cdot Y(f)$
12	Correlation	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t + \tau)dt$	$X(f) \cdot Y^*(f)$
13	Derivative	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n \cdot X(f)$
14	Energy—Parseval eq.	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)df$

5. Transformée de Fourier en temps discret (DtFT) et Transformée de Fourier Discrète (DFT)

Transformée de Fourier des signaux TD

DtFT

Discrete Time Fourier Transform

DtFT : Transformée de Fourier des signaux temps discret

fs : fréquence d'échantillonnage ; Ts : période d'échantillonnage; Ts=1/fs; t=nTs : temps échantillonné

Temps continu

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \rightarrow TF \{x(nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi fnT_s}$$

Passage au temps discret => l'intégrale se transforme en somme...

Temps discret

$$\begin{aligned} TF \{x[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi \frac{f}{fs} n} \\ X\left(\frac{f}{fs}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi \frac{f}{fs} n} \end{aligned}$$

avec $\Omega = \frac{f}{fs}$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi \Omega n}$$

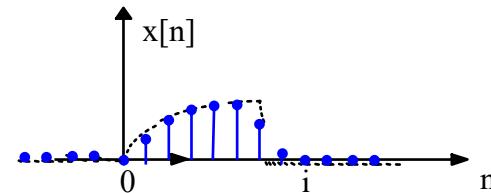
Ω = fréquence normalisée

$X(\Omega) = X\left(\frac{f}{fs}\right)$ peut être calculé pour n'importe quelle valeur de fréquence f, qui est une variable continue, **mais ce n'est pas utile** car la fonction $e^{-j2\pi \frac{f}{fs} n}$ est **périodique respectivement à f** et sa période est fs.

$$e^{-j2\pi \frac{(f+kfs)}{fs} n} = e^{-j2\pi \frac{f}{fs} n} \cdot e^{-j2\pi kn} = e^{-j2\pi \frac{f}{fs} n}$$

Donc

* On peut prendre aussi $f \in [0; fs]$ et $\Omega \in [0; 1]$



Hypothèse :
Signal x[n]
apériodiques discret
à énergie finie
(support infini)

Equation d'Analyse

$$\begin{aligned} x[n] &\xrightarrow{TF} X\left(\frac{f}{fs}\right) \quad \text{avec } f \in \left[\frac{-fs}{2}; \frac{fs}{2}\right] \\ x[n] &\xrightarrow{TF} X(\Omega) \quad \text{avec } \Omega \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

DtFT⁻¹ : Transformée de Fourier inverse des signaux temps discret

Temps continu

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$



Temps discret

$$x[n] = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\Omega) e^{j2\pi\Omega n} d\Omega \quad \Omega = \frac{f}{fs}$$

=> Limitation de l'intégrale à une période en fréquence normalisée

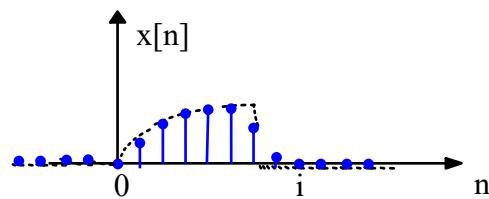


$$x[n] = \int_{(1)} X(\Omega) e^{j2\pi\Omega n} d\Omega$$

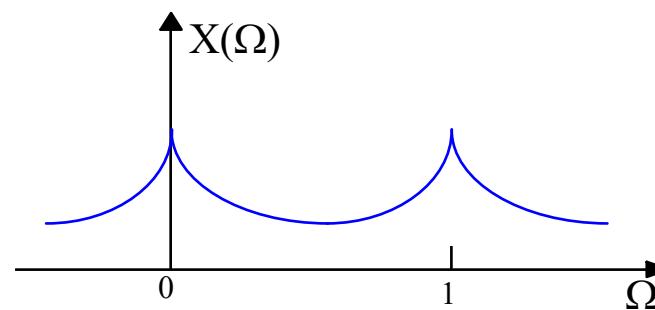
Equation de synthèse

Signal **apériodique** et **discret**

à énergie finie



Spectre **continu** et **périodique**



DtFT : Discrete Time Fourier Transform

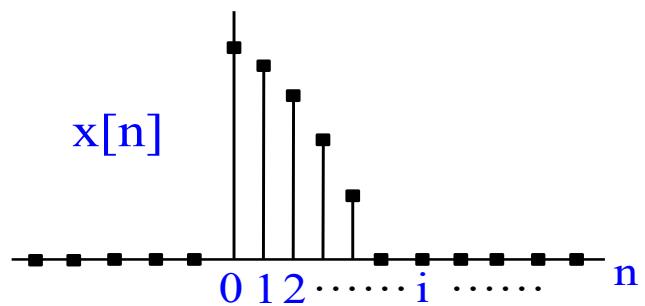
Fréquence normalisée en Hz.s
(notation française)

$$\Omega = \frac{f}{f_s}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi\Omega n}$$

↑
TF

$$x[n] = \int_{(1)} X(\Omega) e^{j2\pi\Omega n} d\Omega$$



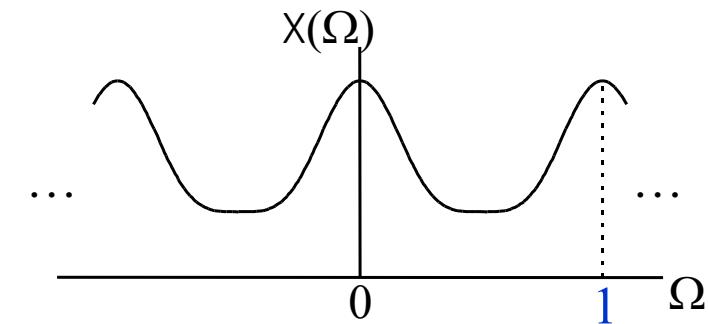
Pulsion ou fréquence angulaire normalisée en rad
(notation anglo-saxon)

$$\omega = 2\pi\Omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

↑
TF

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$



Propriétés fondamentales

- La Transformée de Fourier Temps Discret est continue et périodique, avec une période de **1**
- Le signal Temps Discret est représenté par une intégrale finie d'exponentielles discrètes

Exemple

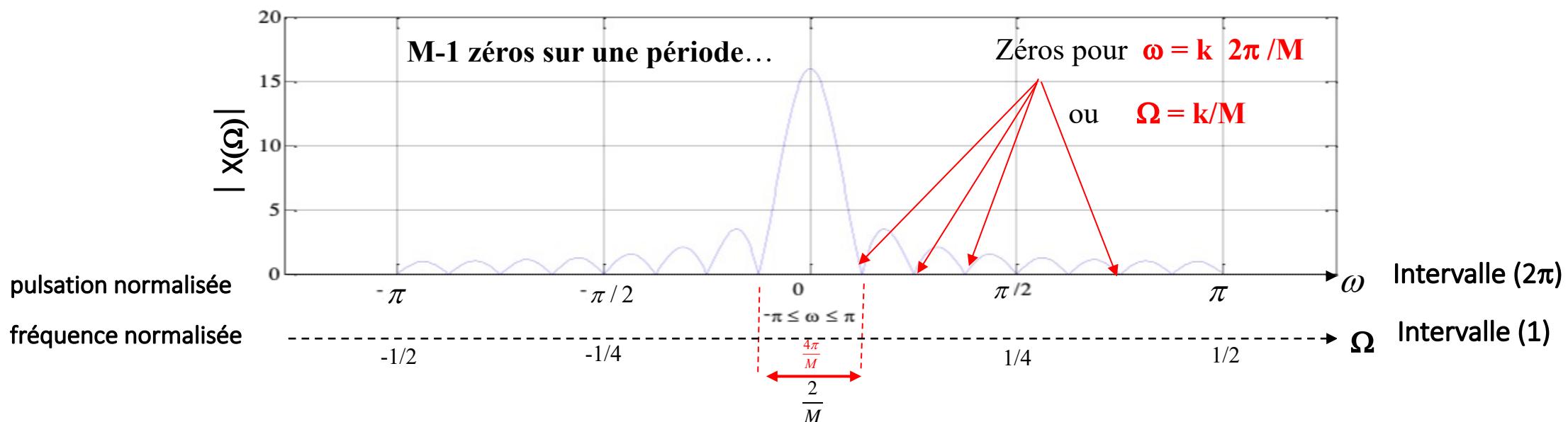
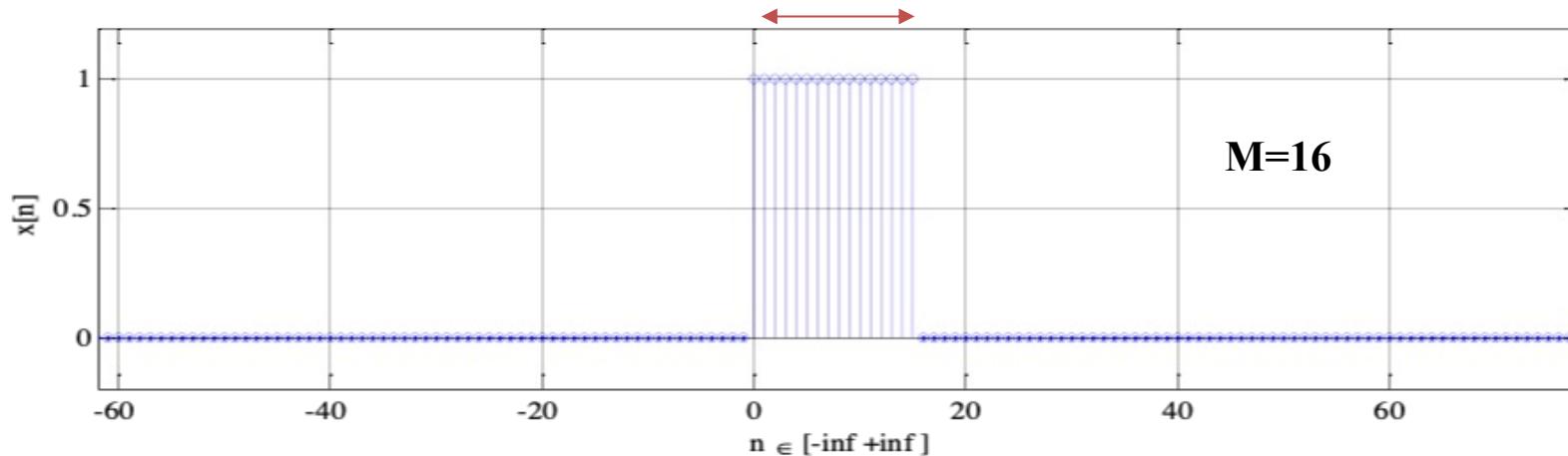
$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \in [0, M-1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

TF

M échantillons

$$X(\Omega) = e^{-j\pi\Omega(M-1)} \frac{\sin(\pi\Omega M)}{\sin(\pi\Omega)}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{(M-1)}{2}} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}$$



Petit exercice

Soit $X(e^{j\omega})$ la transformée de Fourier du signal $x[n]$ avec $0 < a < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - ae^{-j\omega}}{1 - a}$$

1) Calculez et tracez le module du spectre

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(\omega)}}{1 - a}$$

```
syms w a real
X = (1-a*exp(-j.*w))/(1-a)
mod=sqrt(real(X)^2+imag(X)^2)
simplify(mod)
```

2) Déterminez et tracez $x[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - ae^{-j\omega}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a}{1 - a}e^{-j\omega}$$

Rappelons nous que : $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

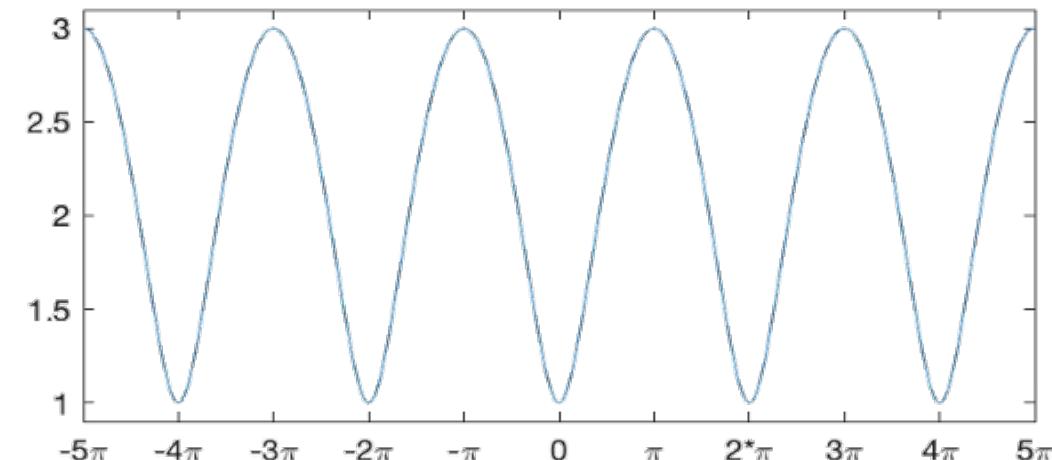
$$X(e^{j\omega}) = \dots + x[-1] e^{-j\omega(-1)} + x[0] e^{-j\omega(0)} + x[1] e^{-j\omega(1)} + \dots$$

$$X(e^{j\omega}) = \dots + x[-1] e^{+j\omega} + x[0] + x[1] e^{-j\omega} + \dots$$

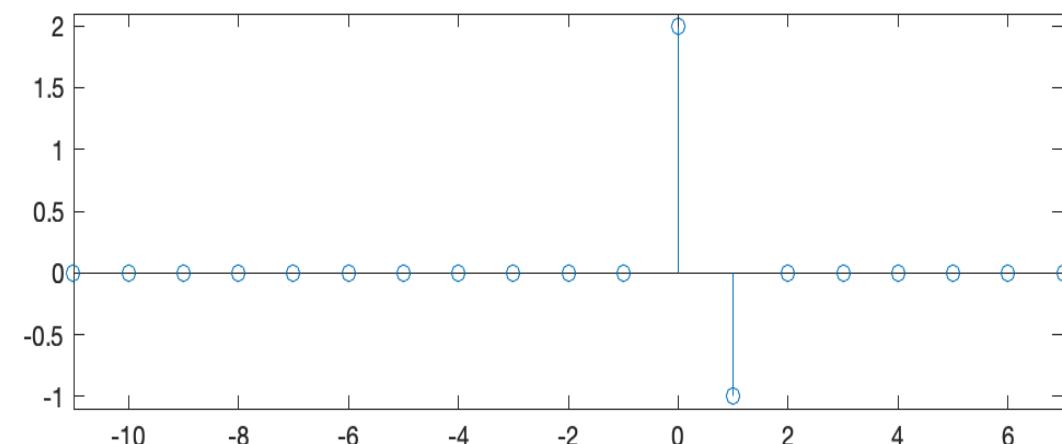
Et donc : $x[0] = \frac{1}{1 - a}$ $x[1] = -\frac{a}{1 - a}$

$$x[n] = x[0]\Delta[n] + x[1]\Delta[n - 1] \quad x[n] = \frac{1}{1 - a}\Delta[n] + \frac{-a}{1 - a}\Delta[n - 1]$$

```
w=[-5*pi:10*pi/1000:5*pi]; a=0.5;
X=(1-a*exp(-j.*w))/(1-a);
plot(w,abs(X))
```



```
x=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1/(1-a) -a/(1-a) 0 0 0 0 0 0];
n=[-11:7];
stem(n,x)
```



Propriétés de la DtFT

Périodicité

$$X(\Omega + 1) = X(\Omega) \quad \Omega = \frac{f}{fs} \quad X(e^{j(\omega + 2\pi)}) = X(e^{j\omega}) \quad \omega = 2\pi\Omega$$

Linéarité

$$ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{TF} aX(\Omega) + bX(\Omega)$$

Inversion temporelle

$$x[-n] \xleftrightarrow{TF} X(-\Omega)$$

Décalage

$$\begin{aligned} x[n - n_0] &\xleftrightarrow{TF} X(\Omega) e^{-j2\pi\Omega n_0} & x[n] e^{j2\pi\Omega_0 n} &\xleftrightarrow{TF} X(\Omega - \Omega_0) \\ x[n - n_0] &\xleftrightarrow{TF} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0} & x[n] e^{j\omega_0 n} &\xleftrightarrow{TF} X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \end{aligned}$$

Dérivation

$$\begin{aligned} x[n] - x[n - 1] &\xleftrightarrow{TF} (1 - e^{-j2\pi\Omega}) X(\Omega) & j2\pi n x[n] &\xleftrightarrow{TF} \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \\ x[n] - x[n - 1] &\xleftrightarrow{TF} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) & -jn x[n] &\xleftrightarrow{TF} \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \end{aligned}$$

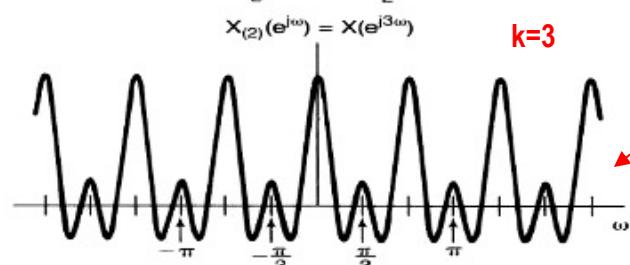
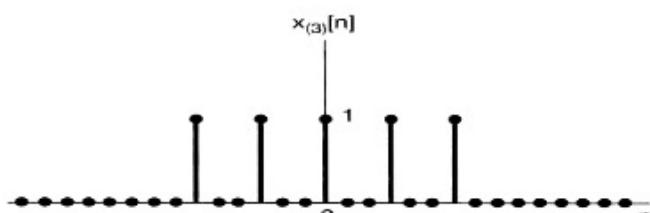
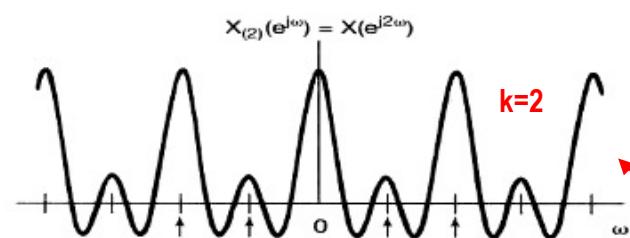
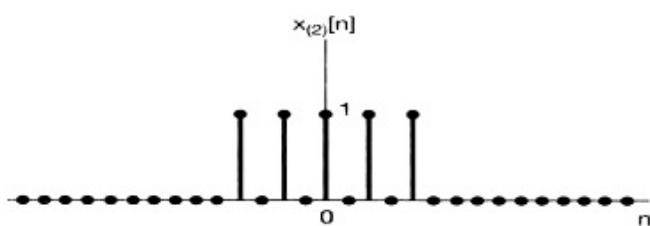
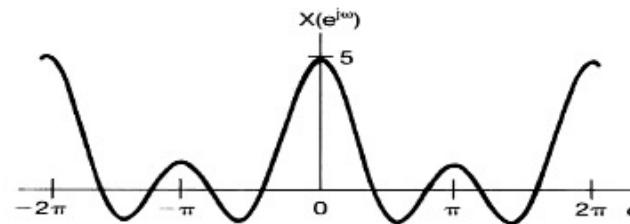
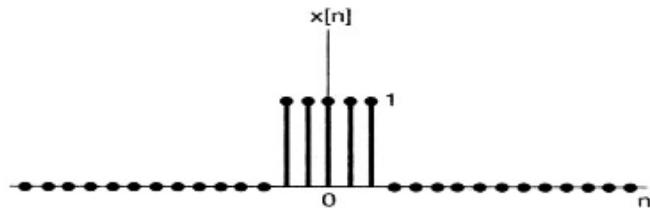
Changement d 'échelle

Soit: $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{si } n \text{ multiple de } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

x_k : « version ralentie » de $x[n]$

application sur-échantillonnage (TSI)

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\omega rk} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$



Contraction

de l'axe des fréquences

d'un facteur de k

Conjugaison

$$x[n]^* \xrightarrow{TF} X^*(-\Omega)$$

$$x^*[n] \xrightarrow{TF} X^*(e^{-j\omega})$$

Conséquence: $x[n]$ réel \Rightarrow Symétrie conjuguée: $X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)|$$

$$\angle X(\Omega) = -\angle X(-\Omega)$$

Module pair et Phase impaire

$$Re\{X(\Omega)\} = Re\{X(-\Omega)\}$$

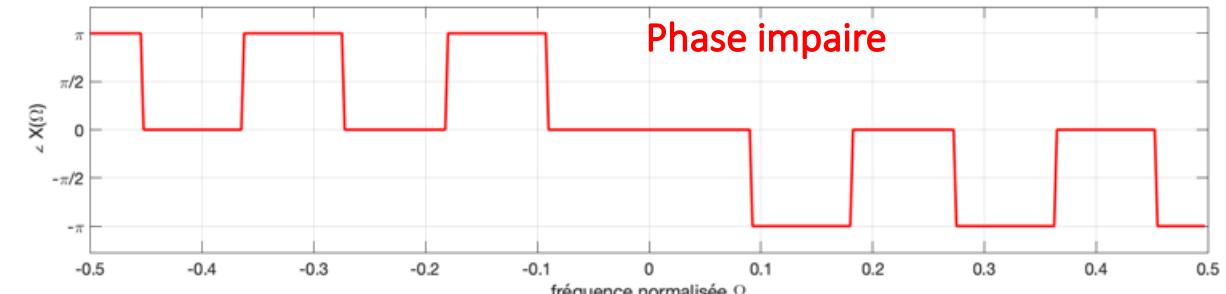
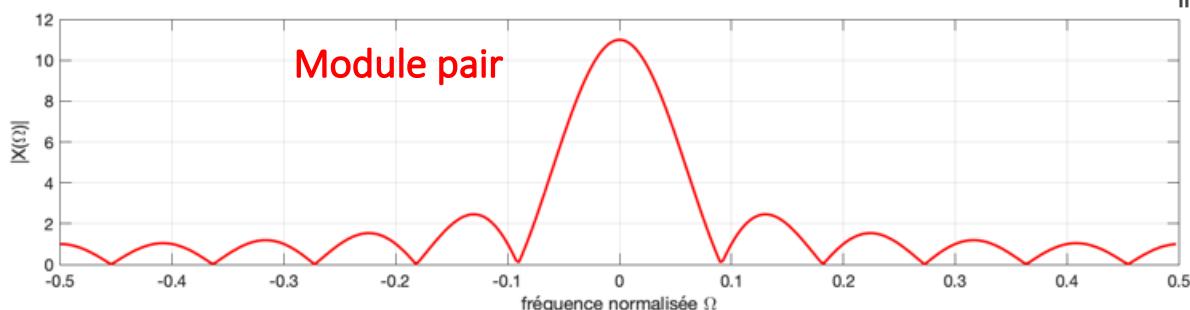
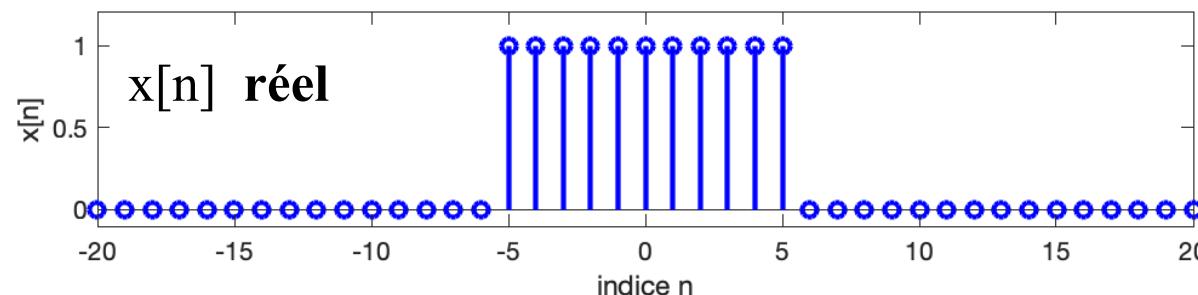
$$Im\{X(\Omega)\} = -Im\{X(-\Omega)\}$$

Partie réelle paire et Partie imaginaire impaire

Cas particulier:

$x[n]$ réel et paire \Rightarrow $X(\Omega)$ réel et paire

$x[n]$ réel et impaire \Rightarrow $X(\Omega)$ imaginaire et impaire



Transformée de Fourier **Discrète**: **DFT** Discrete Fourier Transform

DFT : Discrete Fourier Transform

Problème: Impossibilité de calculer numériquement la DtFT d'un signal discret.

1) **Infinité de points** décrivant le signal $x[n] \dots$

$$\text{avec } \Omega = \frac{f}{fs} \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi\Omega n}$$

2) **Infinité de fréquences** dans le spectre de $x[n]$
sur un intervalle de (1) en fréquences normalisées

$$x[n] = \int_{(1)} X(\Omega) e^{j2\pi\Omega n} d\Omega$$

⇒ Capacité mémoire infinie + Temps de calculs infini !!!

⇒ Besoin d'un algorithme pour calculer **numériquement** la TF, quand son expression analytique est non connue.

Cas par exemple d'une séquence d'échantillons $x[n]$ quelconques, signal non déterministe => expression de la TF non connue

DFT : Discrete Fourier Transform

Définition de la DFT : la DFT résulte de la discréttisation des Séries de Fourier définies dans le monde analogique (temps continu) pour les signaux périodiques.

Fréquence fondamentale : $f_0 = 1/T$ T : période

Discréttisation en temps: $t = n \cdot \Delta t$ $T = N \cdot \Delta t$

Coefficient de Fourier :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi \frac{k}{N\Delta t} n\Delta t} \Delta t$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

=> $X[k]$ mesure la portion d'un signal $x[n]$ suivant l'exponentielle complexe discrète: $e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$

Reconstruction:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$x[n]$ est une somme d'exponentielles complexes discrètes et harmoniquement reliées pondérées par les X_k

DFT : Discrete Fourier transform

DFT : Analyse

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

DFT⁻¹: Synthèse

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Rem: $x[n]$ pour **n=0 à N-1** : motif d'une période du signal temporel

$X[k]$ pour **k=0 à N-1** : motif d'une période du spectre

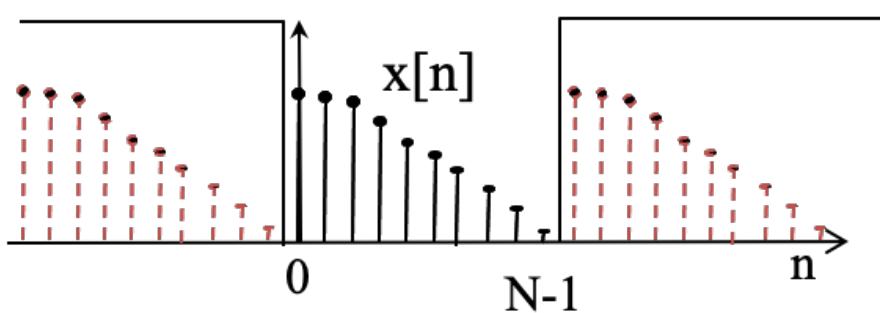
Il n'y a que **N** exponentielles complexes discrètes harmoniquement reliées $\left\{ e^{j2\pi \frac{1}{N} n}, e^{j2\pi \frac{2}{N} n}, \dots, e^{j2\pi \frac{k}{N} n}, \dots, e^{j2\pi \frac{N-1}{N} n} \right\}$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

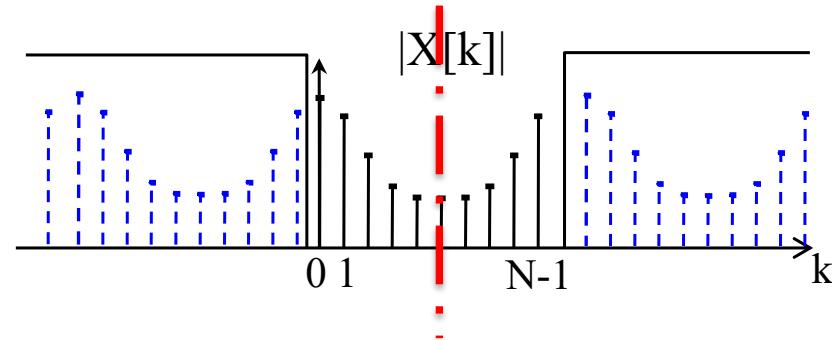
Le spectre de la DFT est périodique, car les exponentielles complexes discrètes sont périodiques en fréquence

$$e^{j2\pi \frac{(k+N)}{N} n} = e^{j2\pi \frac{k}{N} n} e^{j2\pi n} = e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Propriétés de la DFT



DFT



Hypothèse : $x[n]$ motif d'un signal périodique

DFT et IDFT: discrètes et périodiques, avec la période **N**

DFT et IDFT : sommes finies d'exponentielles discrètes

Si $x[n]$ réel :

Symétrie conjuguée de la DFT
 \Rightarrow miroir par rapport à $N/2$

$$X [N - k] = X^* [k] \quad | X [N - k] | = | X [k] | \\ \angle X [N - k] = - \angle X [k]$$

La DFT peut être vue comme l'échantillonnée sur N-Points de la DtFT continue et périodique d'un signal temps-discret de N-Points pondérée par $1/N$

$$X [k] = \frac{1}{N} X (\Omega) \Big|_{\Omega=\frac{k}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Intérêt de la DFT

DFT calculée efficacement grâce à l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (**FFT Fast Fourier Transform**).

Efficacité max si N = puissance de 2.

J.W. Cooley et J.W. Tukey (1965).

Complexité algorithmique en **N/2 log2(N)** au lieu de **N*N** (pour N=1024 , la FFT 200 fois plus rapide...)

% Matlab: calcul direct de la DFT

```
N=50;  
n=[0:N-1];  
m=[0:N-1];  
% Sample vector, x.  
x=[zeros(1,28),ones(1,12),zeros(1,N-40)];  
% DFT, X.  
X=1/N*x*exp(-j*2*pi*m'*n/N);  
x= X*exp(j*2*pi*m'*n/N);
```

% Matlab: appel de la fonction FFT

```
N=50;  
% Sample vector, x.  
x=[zeros(1,28),ones(1,12),zeros(1,N-40)];  
% DFT par FFT, X.  
X=1/N*fft(x)  
x=N*ifft(X)
```

Remarque par rapport à Matlab

Il est important de noter que la normalisation par $1/N$ n'est pas faite par la fonction $x=fft(X)$ dans Matlab, mais lors de l'appel de $x=ifft(X)$.

Dans le cours, nous optons pour la définition de la DFT

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

pour avoir la correspondance avec les

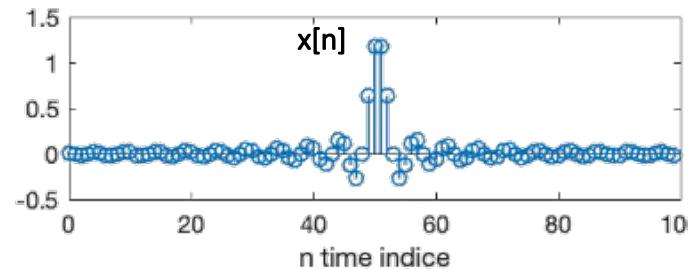
coefficients de Fourier **des signaux périodiques**.

Usages de la DFT

Graduation de l'axe en fréquence : un des principaux problèmes des étudiants...

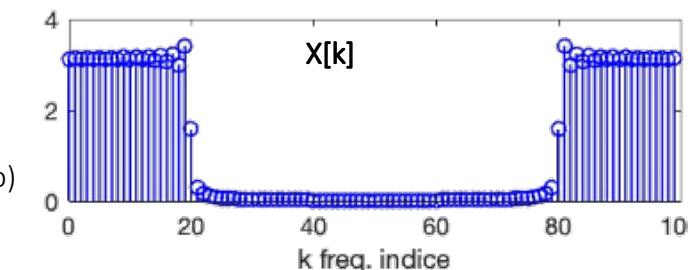
Comment faire correspondre les coefficients de Fourier $X[k]$ aux fréquences réelles qui n'apparaissent pas dans l'équation ?...

Séquence $x[n]$ de N points
(motif d'un signal périodique)



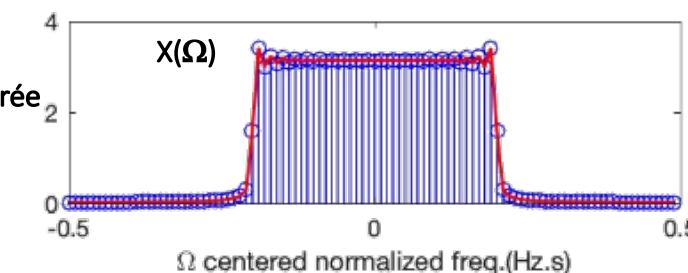
FFT = DtFT échantillonnée

Séquence $X[k]$ de N points
(Rappel $X[k] = N X_k$ avec Matlab)

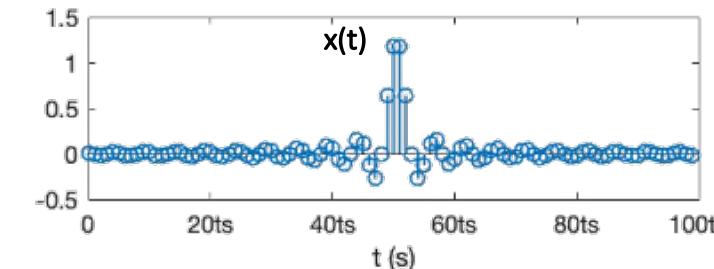
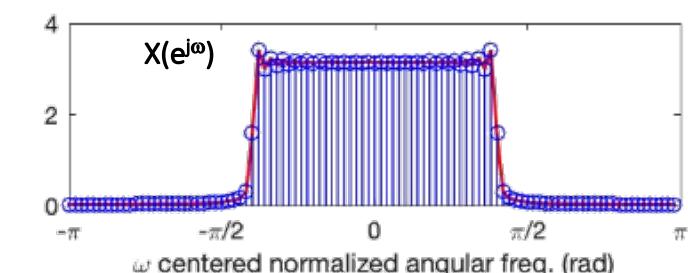


FFT : $X[k]$ en fonction de la
fréquence normalisée k/N **centrée**
 $\Omega = [-0,5 \ 0,5]$

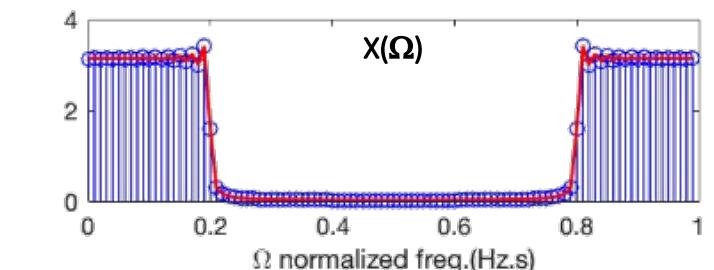
=> usage de `fftshift(X)`



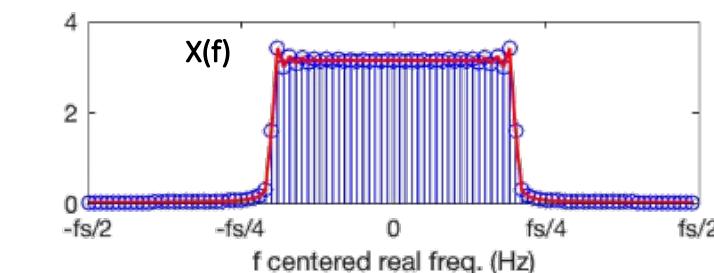
FFT : $X[k]$ en fonction de la
pulsation normalisée $\omega = 2\pi k/N$
centrée $\omega = [-\pi \ \pi]$
=> usage de `fftshift(X)`



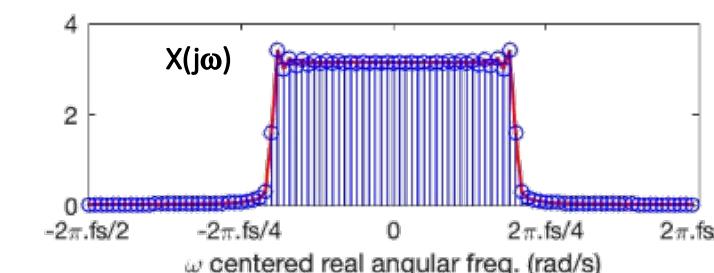
Échantillons temporels avec les
graduations en s
 $t = n \cdot ts$ $ts = 1/fs$



FFT : représentation des $X[k]$ en
fonction de la fréquence normalisée
 k/N
1 période par défaut $\Omega = [0 \ 1]$
stem => `plot` car DtFT $X(\Omega)$ continu



FFT : $X[k]$ en fonction de la fréquence
réelle $k/N.fs$ **centrée** $f = [-fs/2 \ fs/2]$
 f en Hz
=> usage de `fftshift(X)`



FFT : $X[k]$ en fonction de la pulsation
réelle $\omega = 2\pi \cdot k/N.fs$ **centrée**
 $\omega = [-2\pi fs/2 \ 2\pi fs/2]$ en rad/s
=> usage de `fftshift(X)`

Usages de la DFT

Plus le nombre de points pour décrire la séquence $x[n]$ est grand $\Leftrightarrow N$ grand, meilleure est la résolution en fréquence car pour :

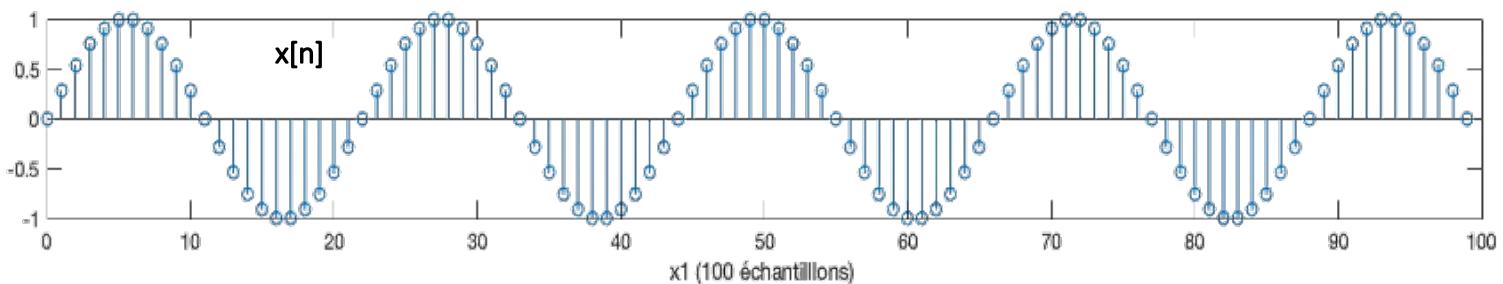
$$\begin{aligned}\Omega & \text{ fréq. normalisée} & \Rightarrow \Delta\Omega = 1/N \\ f & \text{ fréq. réelle} & \Rightarrow \Delta f = fs/N\end{aligned}$$

Exemple:

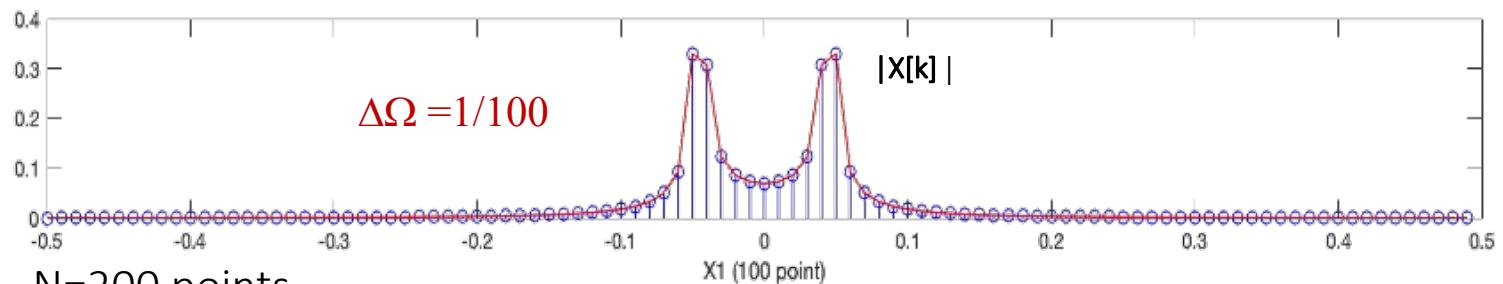
Spectre d'un cosinus ou d'un sinus

```
N=100;  
n=0:N-1  
x= sin(2*pi*n/22);  
X= 1/N fft(x);  
% X <=> coef. de Fourier  
% Affichage du spectre :  
stem(n/N-0.5,fftshift(abs(X)));
```

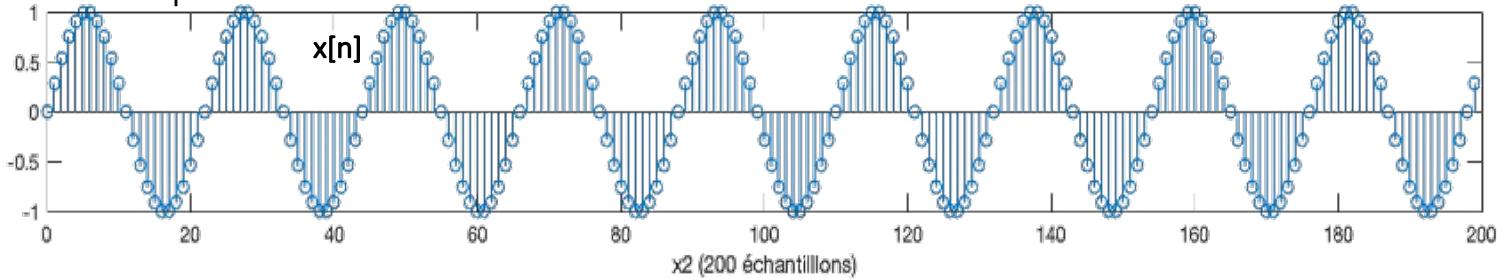
$N=100$ points



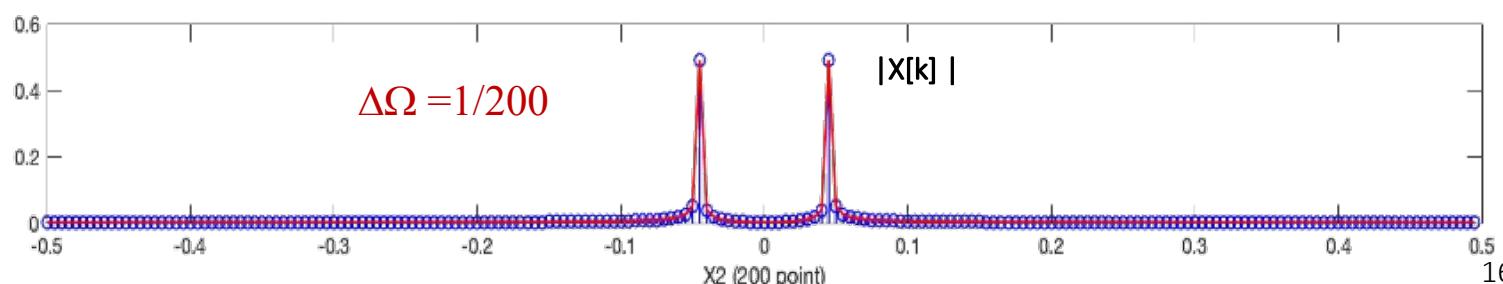
$$\Delta\Omega = 1/100$$



$N=200$ points



$$\Delta\Omega = 1/200$$



Zero-padding en temps

Pour un signal de durée finie, le zero-padding consiste à calculer une FFT sur un plus grand nombre de points en rajoutant des 0 à la séquence discrète...

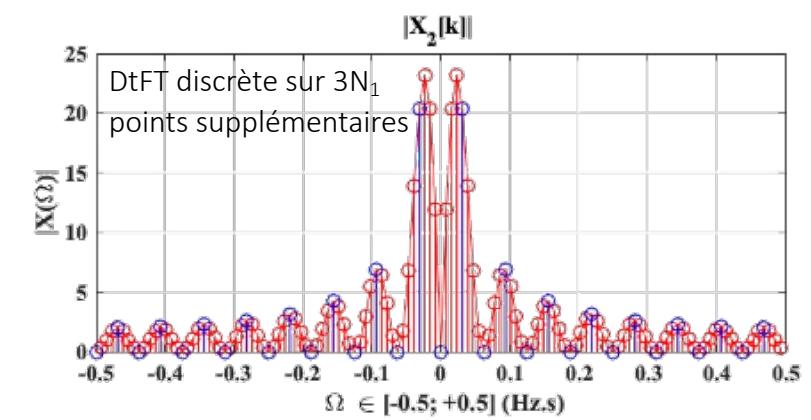
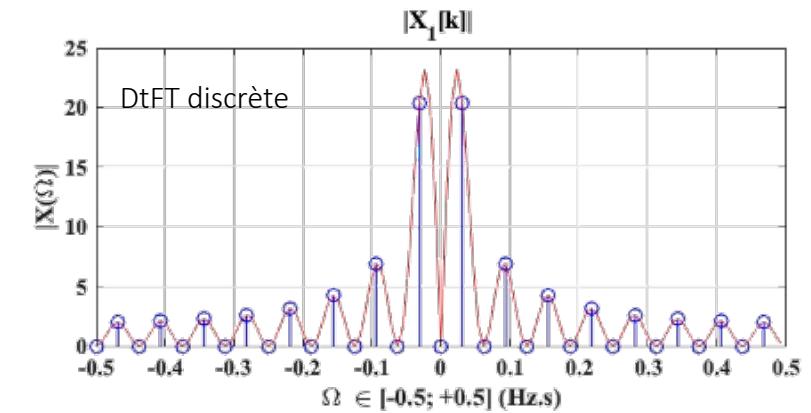
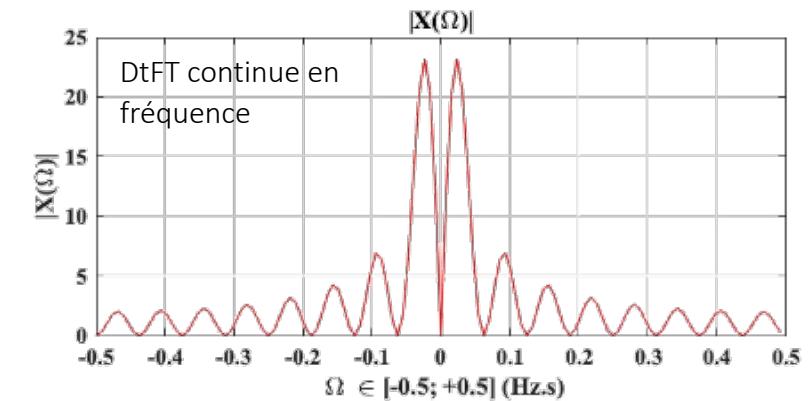
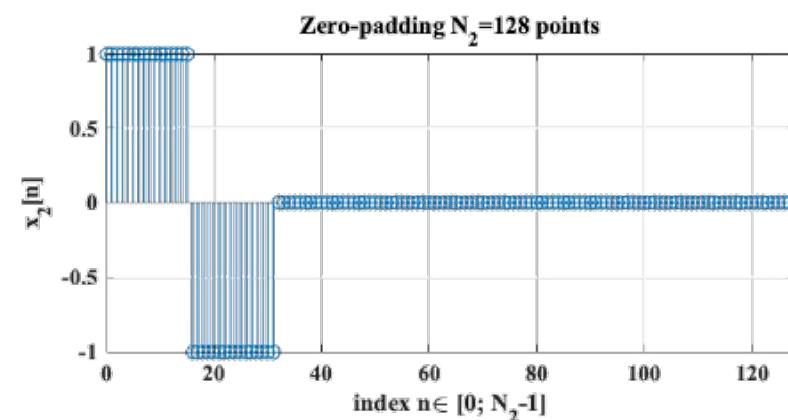
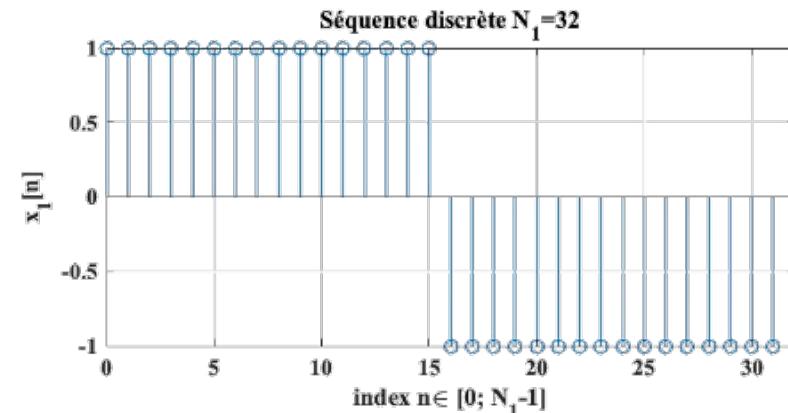
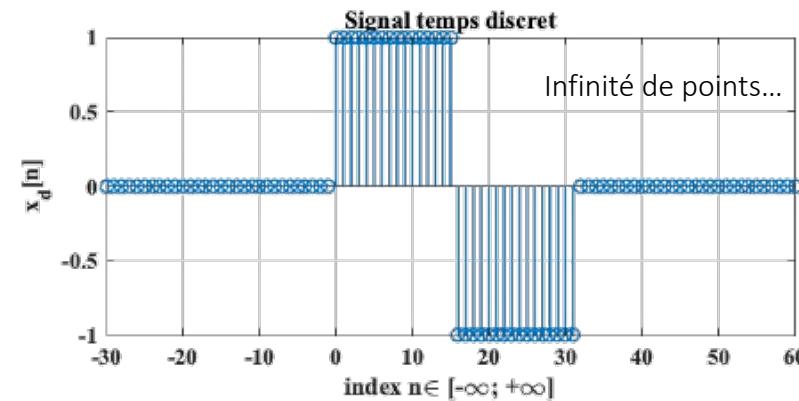
Exemple : $N_2 = 4 * N_1$

$X_2 = \text{fft}(x_1, N_2)$

=> Interpolation du spectre

$$\Delta\Omega_1 = 1/N_1 \Rightarrow \Delta\Omega_2 = 1/N_2$$

$$\Delta\Omega_2 < \Delta\Omega_1$$



Zero-padding en fréquence

Inversement si on rajoute des 0 au centre du spectre des DFT, la séquence $x[n]$ est interpolée...

Exemple : $N_1 = 8$

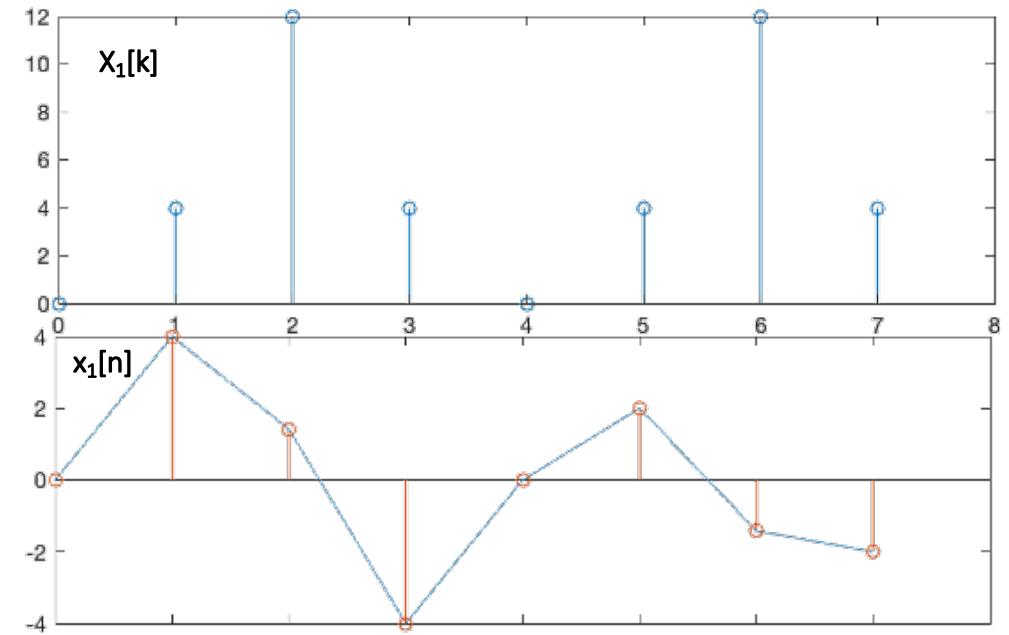
$N_z = 7N_1$

$N_2 = 8 * N_1$

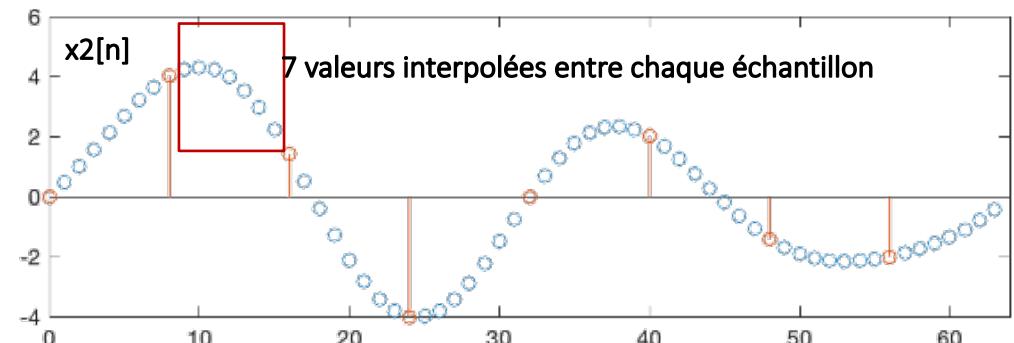
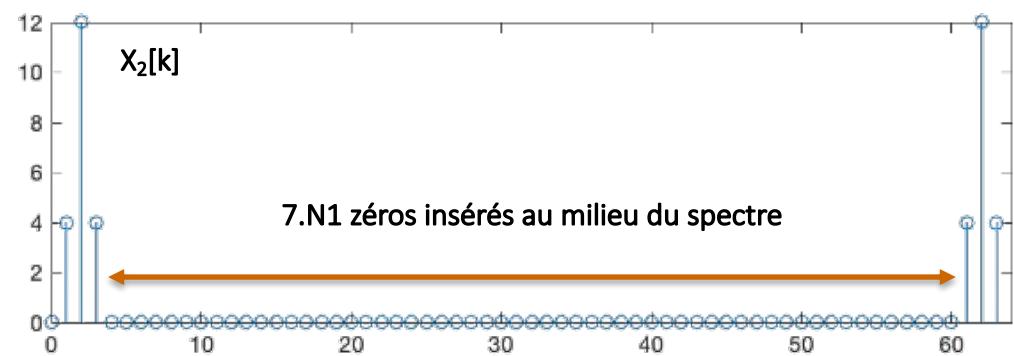
⇒ Interpolation de la séquence par un facteur de 8

⇒ $x_2[n]$ signal interpolé à partir des échantillons $x_1[n]$

$N_1 = 8$



$N_2 = 64$



Quelques commandes MATLAB et de la Signal Processing Toolbox...

DFT	$X = \text{fft}(x)/N$	fft(x) sans normalisation par N égale à la DtFT échantillonnée
IDFT	$x = N \cdot \text{ifft}(X)$	
Spectre d'amplitude	$\text{abs}(X)/N$	<p>Amplitude and phase spectra; N=100 fft Frequency (Hz-s)</p>
Spectre de phase	$\text{angle}(X)$	<p>Phase (rad) Frequency (Hz-s)</p>
Centrage du spectre sur 0	$\text{fftshift}(X)$	<p>Amplitude and phase spectra; N=100 fft Frequency (Hz-s)</p>
Déroulage de la phase	$\text{unwrap}(\text{angle}(X))$	<p>Phase (rad) Frequency (Hz-s)</p>
Zero-padding	$\text{fft}(x, N1)$ $N1 > N$	<p>Amplitude and phase spectra; N=20 fft Frequency (Hz-s)</p> <p>Amplitude and phase spectra; N=100 fft Phase (rad) Frequency (Hz-s)</p>

Energie et puissance moyenne d'un signal temps continu de durée finie calculées à partir de la DFT

$x(t)$: signal temps continu

$X(f)$: spectre du signal temps continu

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad fs > 2 f_{max}$$

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} X(f) \text{ pour } f < |f_{max}|$$

✓ Cf. TD3 Code Matlab Moodle

$x[n]$: séquence discrète correspondant à $x_s(t)$

$$X(f) = T_s \cdot N \cdot DFT(x[n]) = T_s \cdot fft(x)$$

En temps

En fréquence

Energie totale

$$E_x = T_s \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

$$E_x = T_s \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|fft(x)|^2}{N}$$

Puissance moyenne

$$P_x = \frac{E_x}{NT_s} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

$$P_x = \frac{E_x}{T} = T_s \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|fft(x)|^2}{N} \cdot \frac{1}{N \cdot T_s} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|fft(x)|^2}{N^2}$$

Résumé: SF - CFT - DtFT - DFT

<p>Signal continu périodique</p>	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$	<p>SF:</p> $X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	<p>Spectre discret apériodique</p>
<p>Signal continu apériodique</p>	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$	<p>CFT:</p> $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$	<p>Spectre continu apériodique</p>
<p>Signal discret périodique</p>	<p>SF \Leftrightarrow IDFT</p> $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$	<p>SF \Leftrightarrow DFT</p> $X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$	<p>Spectre discret périodique</p>
<p>Signal discret apériodique</p>	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ $x[n] = \int_{(1)} X(\Omega) e^{j2\pi\Omega n} d\Omega$	<p>DtFT:</p> $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi\Omega n}$	<p>Spectre continu périodique</p>

6. Réponse temporelle

d'un Système Linéaire Temporellement Invariant (STLI)

Convolution avec la réponse impulsionnelle

Réponse temporelle d'un SLTI aux exponentielles complexes

Réponse d'un SLTI aux exponentielles complexes

Exponentielle complexe en TC :

$$\begin{aligned} e^{st} &= e^{(r+j\omega)t} \\ z^n &= (re^{j\omega})^n \end{aligned}$$

$$s = \sigma + j\omega \quad s \in \mathbb{C} \quad (\text{Plan } s)$$

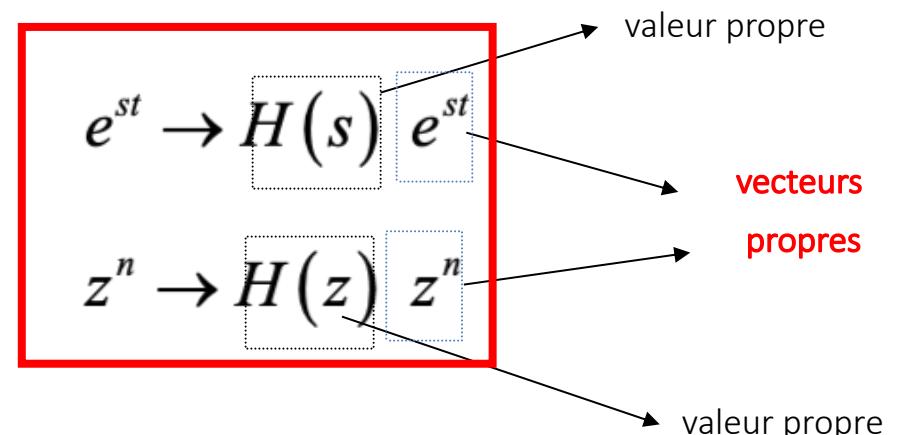
Exponentielle complexe en TD :

$$z = re^{j\omega} \quad z \in \mathbb{C} \quad (\text{Plan } z)$$

La réponse d'un SLTI à une exponentielle complexe est la même exponentielle complexe multipliée par un nombre complexe

En temps continu:

En temps discret:



$H(s)$ et $H(z)$
fonctions de transfert
du système

On démontre que:

$$\text{En temps continu: } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \in \mathbb{C}$$

En temps discret:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \in \mathbb{C}$$

Exercices : trouver la sortie d'un SLTI associée au signal x

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

Cas particulier: exponentielle purement complexe

Fonctions de Transfert:

$$\text{T.C. : } e^{st} \rightarrow H(s) e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$\text{T.D. : } z^n \rightarrow H(z) z^n$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

Réponses fréquentielles:

$$\text{T.C. : } s = j\omega \quad e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$\text{T.D. : } z = e^{j\omega} \quad e^{j\omega n} \rightarrow H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

Avec $h(\tau)$, $h[k]$ réponses impulsionnelles des SLTI

Réponse d'un SLTI à une exponentielle complexe	$e^{j\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n} \rightarrow H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}$
Réponse d'un SLTI à un signal sinusoïdal	$\cos(\omega_0 t) \rightarrow \operatorname{Re}\{H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}\}$ $\cos(\omega_0 t) \rightarrow H(j\omega_0) \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$	$\cos[\omega_0 n] \rightarrow \operatorname{Re}\{H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}\}$ $\cos[\omega_0 n] \rightarrow H(e^{j\omega_0}) \cos[\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0})]$

Réponse temporelle d'un SLTI à un signal quelconque

Réponse d'un SLTI temps discret à un signal quelconque

Systèmes Linéaires Temporellement Invariants (SLTI)



NOMBREUSES PROPRIÉTÉS

Hypothèse: initialement au repos

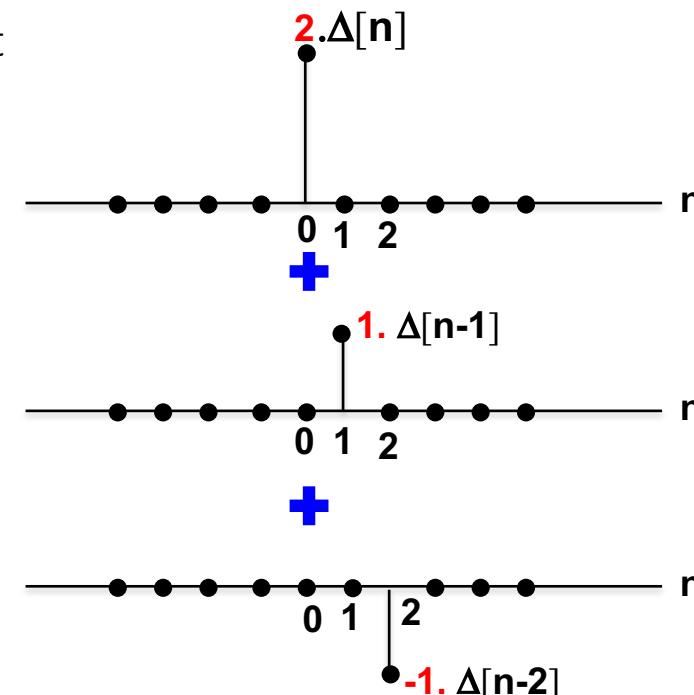
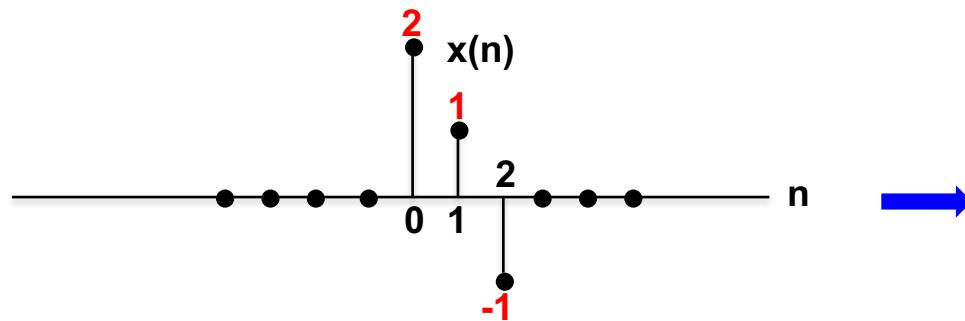


Outils puissants

Représentation d'un signal temps discret à l'aide des signaux impulsions

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \Delta[n-k]$$

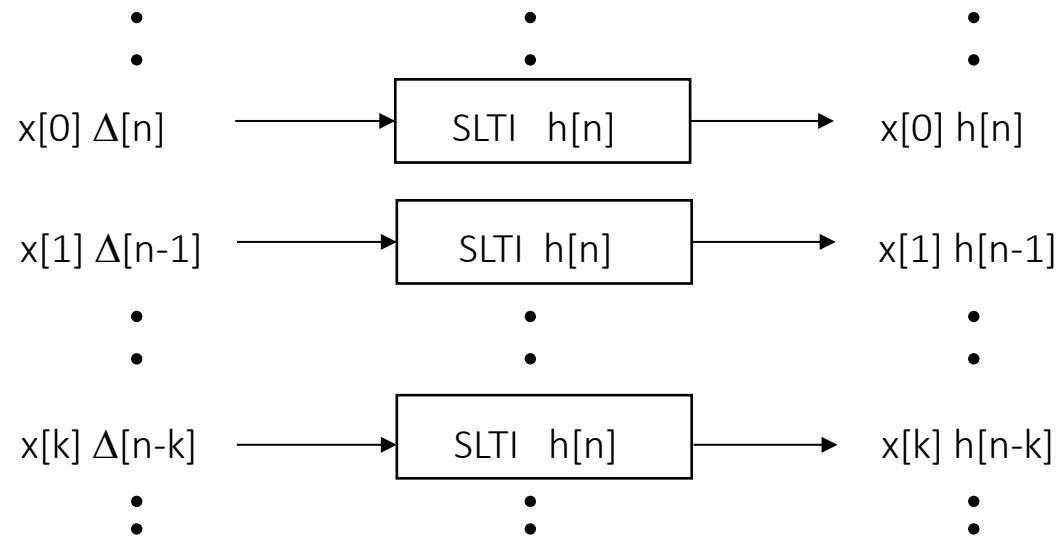
Somme pondérée d'impulsions
décalées temporellement



Réponse d'un SLTI à une somme pondérée d'impulsions

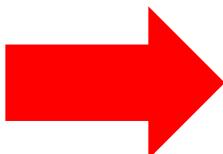


Principe de superposition et invariance temporelle



Somme des entrées = signal d'entrée

$$x[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k] \Delta[n-k]$$



Somme des sorties = signal de sortie

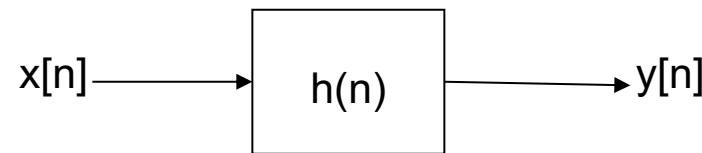
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

Formule de la convolution

La réponse au signal $x[n]$ est une combinaison linéaire des réponses associées à chaque impulsion $\Delta[n]$ décalée temporellement

SLTI et Convolution

Somme de convolution



L'opérateur de convolution relie l'entrée $x[n]$ à la sortie $y[n]$ par l'intermédiaire de la réponse impulsionnelle $h[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

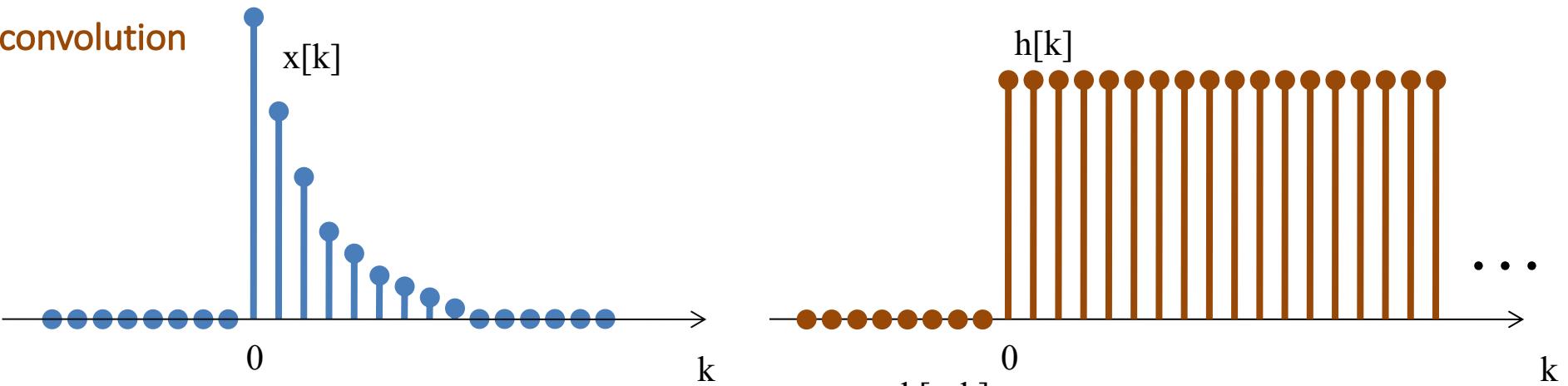
Un SLTI temps discret est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle h

Réponse impulsionnelle = Réponse d'un SLTI à l'impulsion unité

=> TD6



Opération de convolution



$h[n-k]$

$h[n-k]$

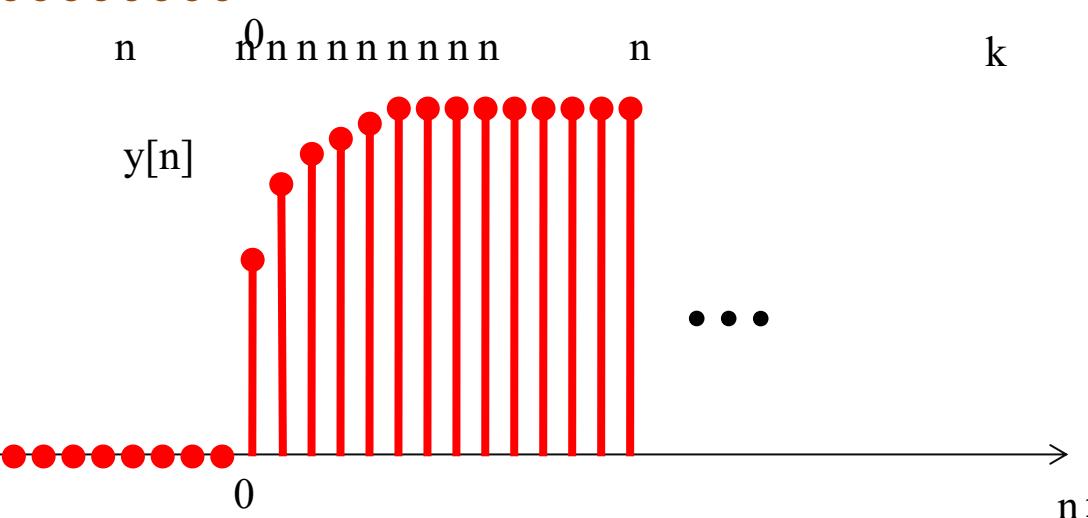
$h[n-k]$

$x[k]$

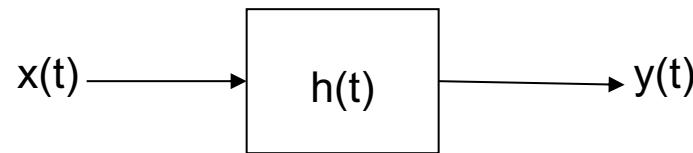
Résultat de la convolution $y[n]$

$y[n]$

$$y[n] = \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right) u[n]$$



Intégrale de convolution



L'opérateur de convolution relie l'entrée $x(t)$ à la sortie $y(t)$ par l'intermédiaire de la réponse impulsionnelle $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Un SLTI temps continu est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$

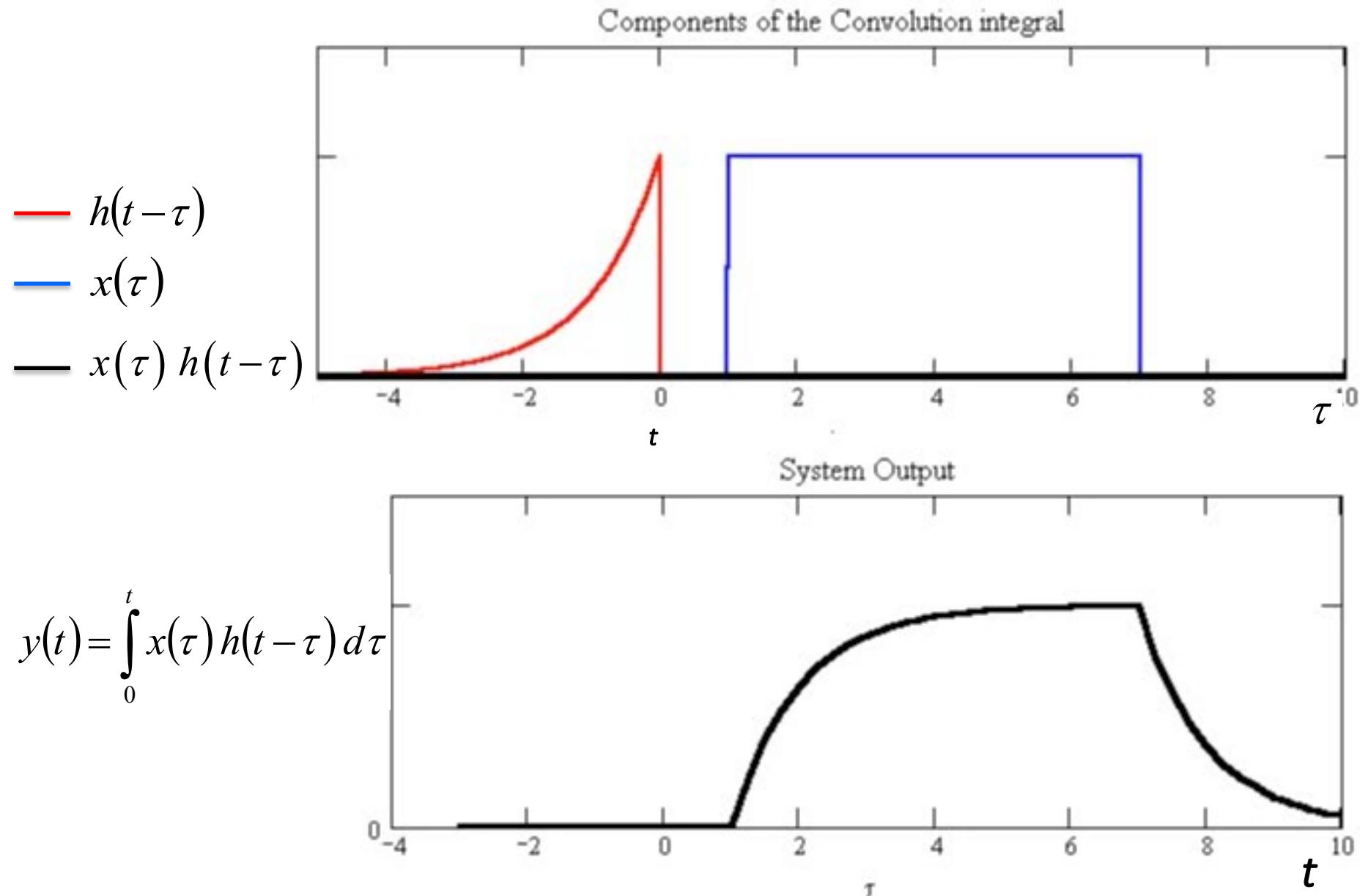
Réponse impulsionnelle = Réponse d'un SLTI à un Dirac



Même principe qu'en temps discret :

Superposition et invariance temporelle pour obtenir la formule de l'intégrale de convolution en sortie de SLTI

Exemple de calcul de l'intégrale de convolution



Propriétés des SLTI

SLTI : entièrement caractérisés par leur réponse impulsionnelle

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

Commutativité

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

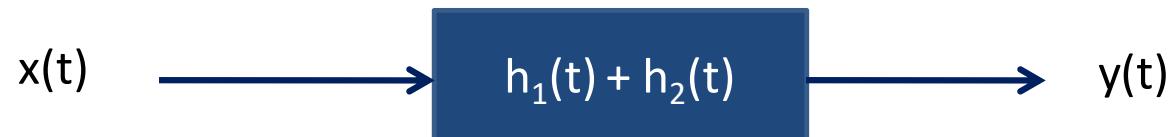
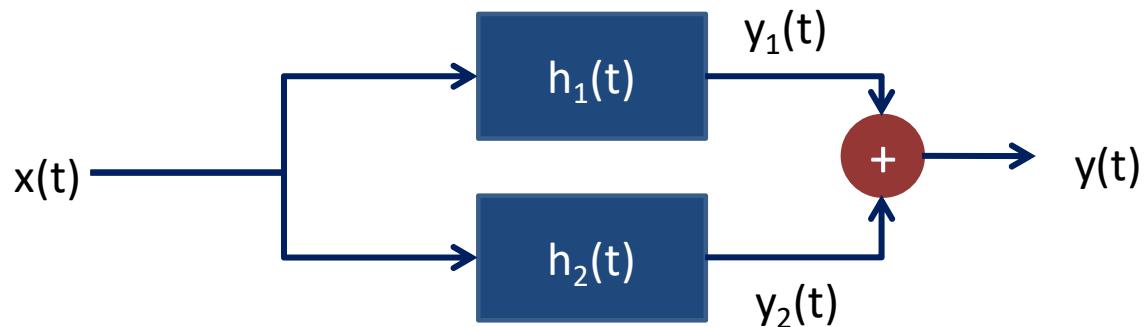
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$



Distributivité

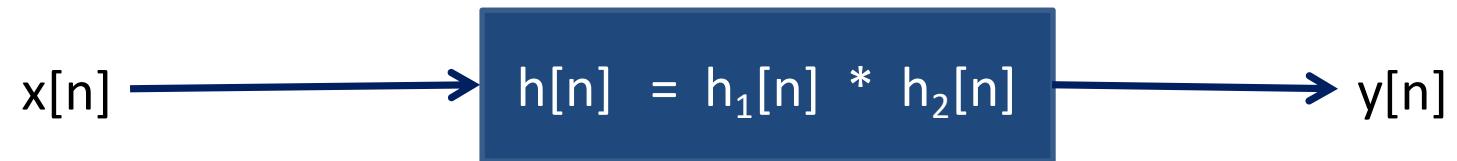
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (\text{IDEM T.C.})$$



Une combinaison parallèle de plusieurs SLTI peut remplacer un seul SLTI dont la réponse impulsionnelle est la somme des réponses impulsionnelles des SLTI interconnectés

Associativité

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad (\text{IDEM T.C.})$$



Une **combinaison série** de plusieurs SLTI peut remplacer un seul SLTI dont la réponse impulsionnelle est la **convolution** des réponses impulsionnelles des SLTI interconnectés

La réponse impulsionnelle d'un SLTI résultant de l'**'interconnexion série** de plusieurs SLTI **ne dépend pas de l'ordre** dans lequel ils ont été cascadés

Multiplication par un scalaire

$$\alpha(x[n]*y[n]) = \alpha x[n]*y[n] = x[n]*\alpha y[n] \quad (\text{IDEM T.C.})$$

Elément neutre

$$x(t)*\delta(t) = x(t)$$

$$x[n]*\Delta[n] = x[n]$$

Décalage temporel

$$y[n-n_0] = x[n-n_0]*h[n] = x[n]*h[n-n_0] \quad (\text{IDEM T.C.})$$

$$x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

$$x[n]*\Delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

très important

Dérivation

$$D(x*y) = (Dx)*y = x*(Dy)$$

$$Dx(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad Dx[n] = x[n] - x[n-1]$$

SLTI sans mémoire

$$h[n] = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0 \quad (\text{IDEM T.C.})$$

SLTI inversible

$$h[n] * h_i[n] = \Delta[n] \quad h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

SLTI causal

$$\begin{aligned} h[n] &= 0 \quad \text{pour} \quad n < 0 \\ h(t) &= 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 \end{aligned}$$

SLTI stable

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

Sa réponse impulsionnelle est **absolument sommable**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Sa réponse impulsionnelle est **absolument intégrable**

Réponse d'un SLTI à l'échelon unité

Réponse indicielle

$$i[n] = h[n] * u[n] \quad i(t) = h(t) * u(t)$$

Relation réponse indicielle et réponse impulsionnelle

$$h[n] = i[n] - i[n-1] \quad h(t) = \frac{di(t)}{dt}$$

En effet, en utilisation la propriété de dérivation de la convolution :

$$Di(t) = D(h * u) = h * Du(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) = \frac{di(t)}{dt} \quad \text{en T.C.}$$

$$Di[n] = D(h * u) = h * Du[n] = h[n] * \Delta[n] = h[n] = i[n] - i[n-1] \quad \text{en T.D.}$$

SLTI causaux décrits par des équations différentielles

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

⇒ Description de phénomènes physiques TC:

Réponse d'un circuit RC, vitesse d'un véhicule soumis à une accélération et des forces de frottement ...

Exemple: $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ (1) avec $x(t) = ke^{3t}u(t)$

Spécification implicite du système ⇔ relation ou contrainte entre l'entrée et la sortie

- Pour avoir une expression explicite ⇒ résoudre l'équation, trouver $y(t)$ générale
- Pour trouver une solution unique ⇒ Informations complémentaires, appliquer les conditions initiales

Rappels: Résolution d'une équation différentielle à coefficients constants

$$y_{\text{gen}}(t) = y_{\text{part}}(t) + y_{\text{hom}}(t)$$

$y_{\text{part}}(t)$: solution particulière vérifiant (1) de même forme que l'entrée

$y_{\text{hom}}(t)$: solution de l'équation homogène $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$

D'où: $y_{part}(t) = \frac{k}{5}e^{3t}, \quad t > 0$ $y_{hom}(t) = Ae^{-2t}, \quad t > 0$

 $y_{gen}(t) = Ae^{-2t} + \frac{k}{5}e^{3t}, \quad t > 0 \quad \Rightarrow \text{infinité de solutions}$

Application des Conditions Initiales

Cas particulier SLTI CAUSAL initialement au repos (IAR)

Définition:

Un système causal est initialement au repos, si sa sortie est nulle tant que son entrée est nulle

 $x(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq t_0, \quad \text{alors} \quad y(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq t_0$

D'où: $x(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0, \quad \text{alors} \quad y(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0 \quad \text{et } y_{gen}(0) = 0$

$$y_{IAR}(t) = \frac{k}{5} [e^{3t} - e^{-2t}], \quad t > 0$$

- Propriété 1** Un système, régi par une équation différentielle à coefficients constants, **initiallement au repos**, est un **SLTI** autrement dit un **système convolutif**
- Propriété 2** La solution $y_{IAR}(t)$ d'un système régi par une équation différentielle à coefficients constants et **initiallement au repos**, est égale au **produit de convolution** de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du SLTI par l'entrée $x(t)$ appliquée au système

$$y_{IAR}(t) = h(t) * x(t)$$

SLTI causaux décrits par des équations aux différences

Équations aux différences linéaires à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Même méthode de résolution que pour les équations différentielles à coefficients constants

=> TD

Mêmes propriétés 1, 2 et 3 ...

Cas particulier : **SLTI Initialement au Repos**

$$y_{IAR}[n] = h[n] * x[n]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \Leftrightarrow y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

Éq. récursive

Si $N=0$

Éq. non récursive \Rightarrow SLTI avec une réponse impulsionnelle finie

Système FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k] \Rightarrow h[k] = \begin{cases} \frac{b_k}{a_0}, & 0 \leq k \leq M \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Si $N \geq 1$

Équation récursive \Rightarrow SLTI avec une réponse impulsionnelle infinie

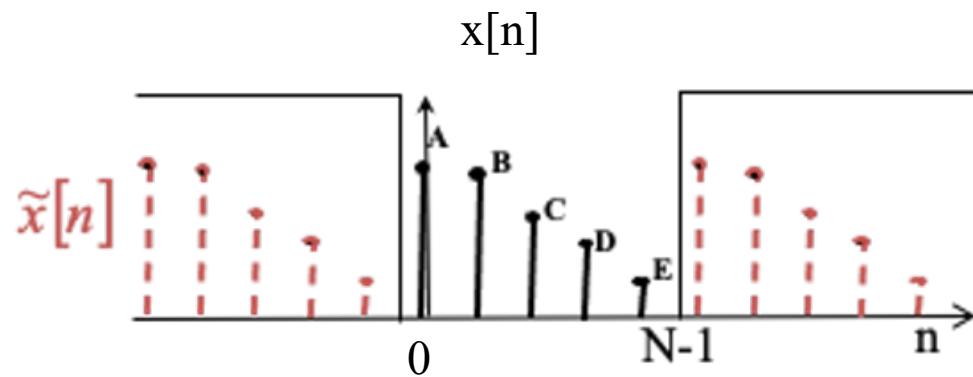
Système IIR

Calcul de la convolution en Temps Discret à l'aide de la DFT

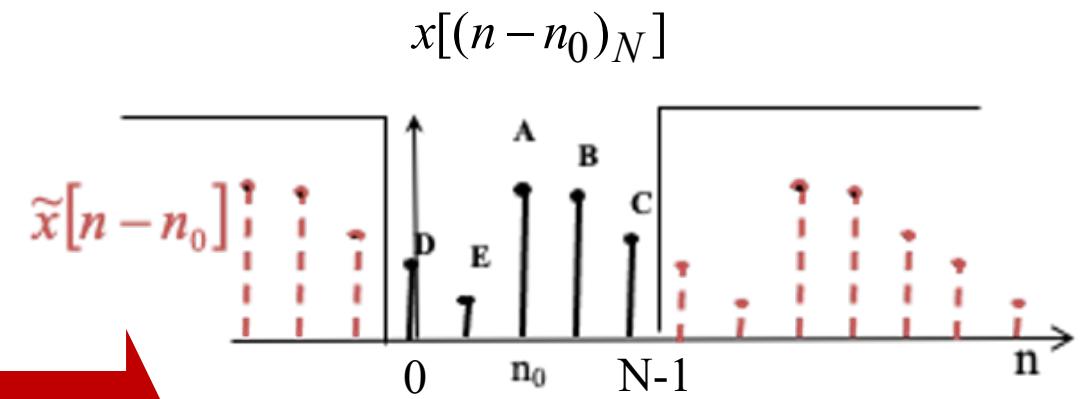
Propriété de la TFD : décalage et convolution N-cycliques

Propriétés spécifiques liées à la périodicité implicite du signal et de sa transformée \Rightarrow Décalage temporel N-cyclique et convolution N-cyclique

Décalage temporel N-cyclique



Décalage N-cyclique de n_0 :



Convolution N-cyclique

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[(n-k)_N]$$

Hypothèse: $y[n]$, $x[n]$ et $h[n]$ de même longueur N

Lien entre convolution circulaire et convolution linéaire

Convolution circulaire

2 signaux x et h de période N:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] h[n-i] = x[n] \otimes h[n]$$

y[n] est de période N

h[n-i] évalué modulo N

TFD: $Y[k] = X[k] \cdot H[k]$

Convolution linéaire	Convolution circulaire
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(0) = 1 \cdot 3 = 3$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow y(0) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 25$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(1) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 10$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow y(1) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 25$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(2) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 22$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(2) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 22$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = y(0)$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(4) = 3 \cdot 5 = 15$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow y(4) = y(1)$

Convolution linéaire

Si x de longueur L et h de longueur M non périodiques
 => convolution linéaire de longueur L+M+1

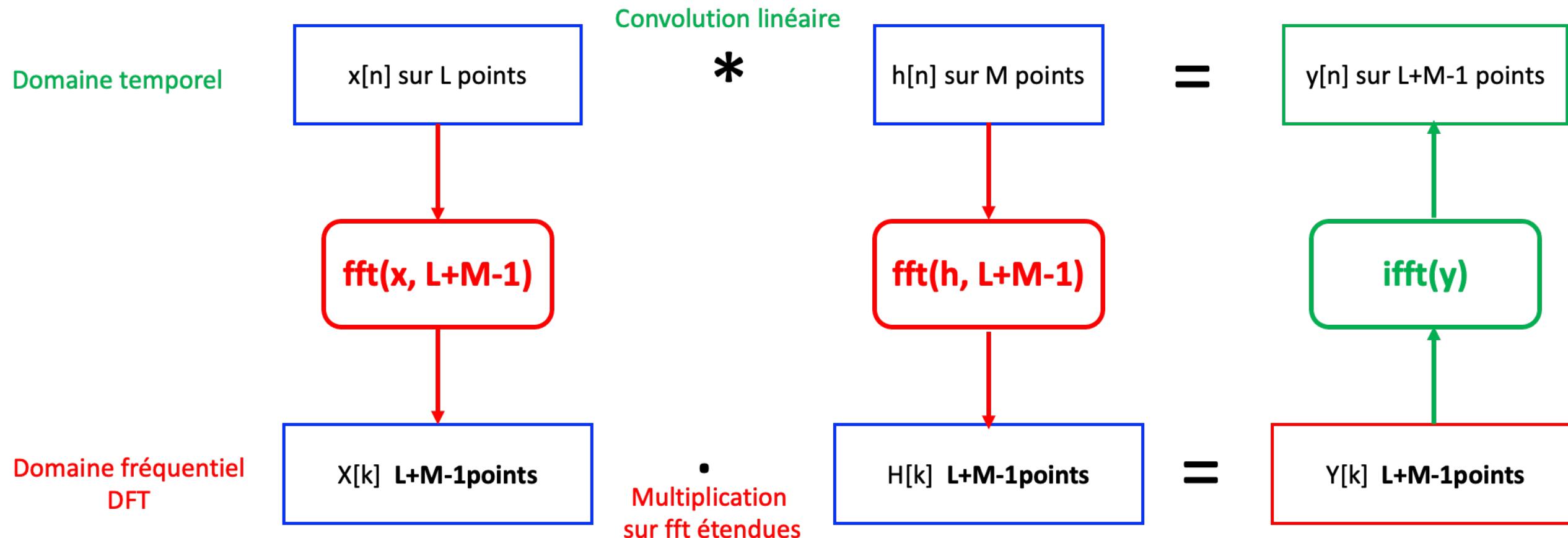
On fait une convolution linéaire à l'aide de la convolution circulaire en remplaçant de 0 chaque séquence x et h jusqu'à la longueur L+M-1

$$\underbrace{\{x[j] \ 0 \dots 0\}}_{L+M-1}; \quad \underbrace{\{h[i] \ 0 \dots 0\}}_{L+M-1}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow y(0) = 3$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow y(1) = 10$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(2) = 22$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y(3) = 22$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y(4) = 15$

```
x = [1 2 3];
h = [3 4 5];
% Circular convolution
y_circ1 = cconv(x,h,3)
% Linear convolution
y_lin1 = cconv(x,h,5)
% autre solution
y_circ2 = ifft(fft(x).*fft(h))
y_lin2 = ifft(fft(x,5).*fft(h,5))
```

Calcul d'une convolution linéaire à l'aide de la DFT



7. Réponse fréquentielle d'un Système Linéaire Temporellement Invariant (STLI)

Multiplication par la réponse fréquentielle

Réponse fréquentielle d'un SLTI

SLTI : Lien entre Réponse impulsionnelle et Réponse fréquentielle

Hypothèse:

SLTI stable et initialement au repos

h : réponse impulsionnelle du SLTI

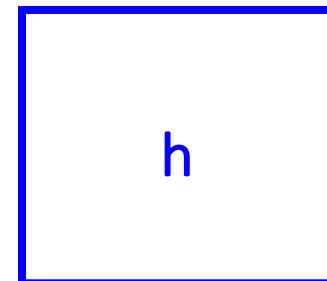
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

x



Réponse impulsionnelle



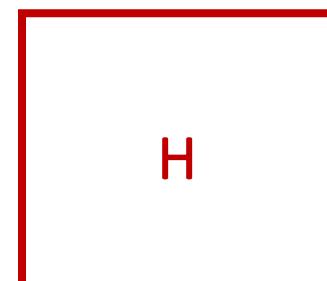
$$y = x * h$$

Transformée

x



Fourier



$$Y = X . H$$

$H(f)$: réponse fréquentielle du SLTI

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j2\pi \Omega n}$$

Réponse fréquentielle

Réponse fréquentielle d'un SLTI temps continu régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Propriété de la dérivation

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\text{TF}} j\omega X(j\omega)$$

Propriété des SLTI:

$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$	$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$
$Y(f) = H(f)X(f)$	$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$

Hypothèse:

$H(j\omega)$ existe (converge)

Or :

$$TF\left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right) = TF\left(\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right)$$

$$\left[\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k \right] Y(j\omega) = \left[\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k \right] X(j\omega) \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

Exemple :

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + c y(t) = x(t)$$

TF

$$\left[a(j\omega)^2 + bj\omega + c \right] Y(j\omega) = X(j\omega)$$

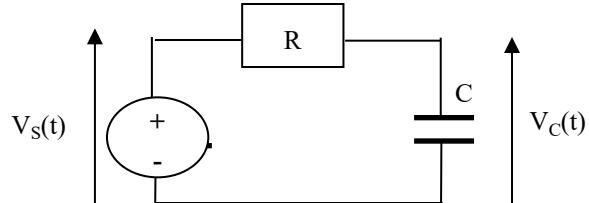
\Rightarrow

$$H(j\omega) = \frac{1}{a(j\omega)^2 + bj\omega + c}$$

H : réponse fréquentielle

Exemples de SLTI Temps Continu

Exemple: SLTI temps continu



$$RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_s(t)$$

TF

$$[j\omega RC + 1]Y(j\omega) = X(j\omega)$$

Réponse fréquentielle du SLTI

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \text{ ou } H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Réponse fréquentielle d'un SLTI temps discret régi par une équation aux différences linéaire à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Propriété des SLTI

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

Hypothèse:
 $H(e^{j\omega})$ existe (converge)

Or: linéarité + décalage temporelle

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} \right) Y(e^{j\omega}) = \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k} \right) X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

Réponse fréquentielle

Exemples de SLTI Temps Discret

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad |a| < 1$$

TF



$$Y(e^{j\omega}) - a e^{-j\omega} Y(e^{j\omega}) = (1 - a e^{-j\omega}) Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

Réponse fréquentielle du SLTI

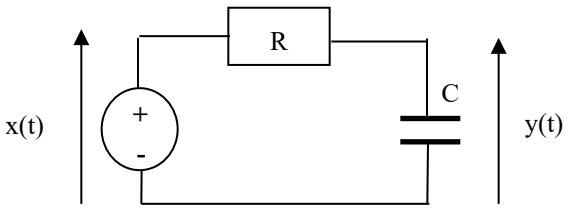
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} \quad \text{ou} \quad H(f) = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}}$$

Systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre Temps Continu

Systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre en TC

Système du 1^{er} ordre

Ex:



$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$\tau > 0$ Constante de temps

\Leftrightarrow

Rapidité de réponse du système

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

Réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

Réponse indicelle

$$s(t) = h(t) * u(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

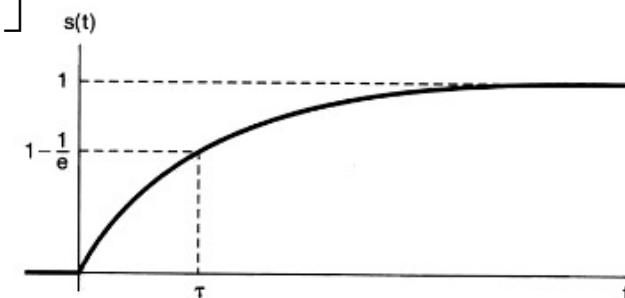
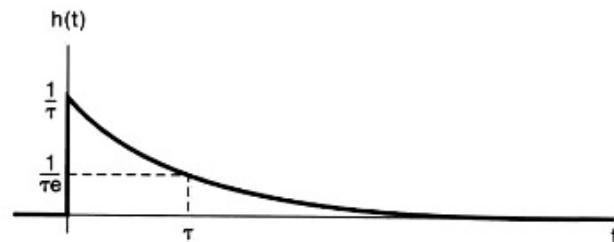


Diagramme de Bode

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10} ((\tau\omega)^2 + 1)$$

$$\tau\omega \ll 1 \Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx 0$$

$$\tau\omega \gg 1 \text{ ou } \omega \gg 1/\tau \Rightarrow 20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx -20 \log_{10} (\tau\omega) = -20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \tau$$

Asymptote en HF: Pente de -20 dB / décade

$$\omega = 1/\tau \Rightarrow 20 \log_{10} \left| H\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right| = -3 \text{ dB}$$

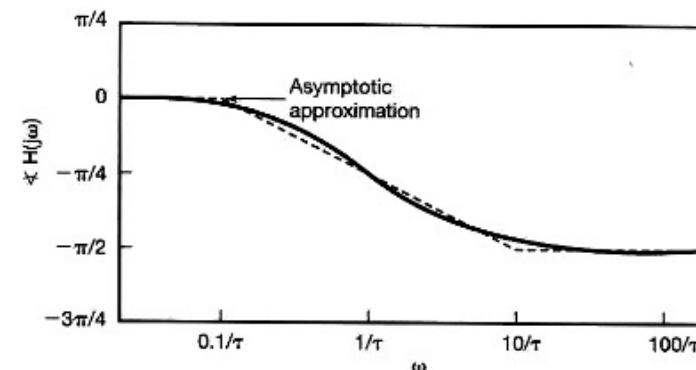
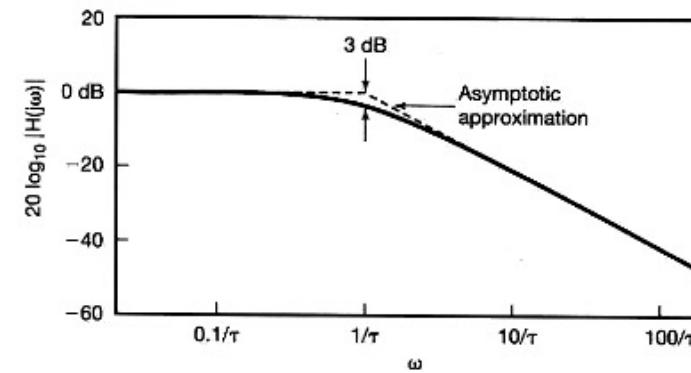
Fréquence de coupure à 3dB

$$\angle H(j\omega) = -\operatorname{Arctan}(\tau\omega)$$

$$\tau\omega \ll 1 \Rightarrow \angle H(j\omega) \approx 0$$

$$\tau\omega \gg 1 \Rightarrow \angle H(j\omega) \approx -\pi/2$$

$$\omega = 1/\tau \Rightarrow \angle H\left(j\frac{1}{\tau}\right) = -\pi/4$$



Système du 2nd ordre

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - c_1)(j\omega - c_2)}$$

$$\begin{aligned}c_1 &= -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\c_2 &= -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\end{aligned}$$

ω_n : Fréquence propre

ξ : Facteur d'amortissement

$$H(j\omega) = \frac{M}{j\omega - c_1} - \frac{M}{j\omega - c_2}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$h(t) = M [e^{c_1 t} - e^{c_2 t}] u(t)$$

$\xi > 1 \Rightarrow c_1$ et c_2 réels et < 0

Régime Amorti

$h(t)$ = différence de 2 exponentielles réelles décroissantes

$\xi = 1 \Rightarrow c_1 = c_2$

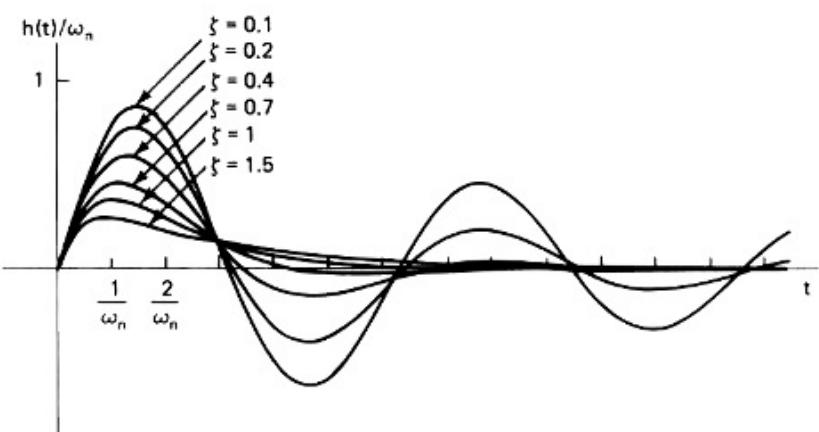
Régime Critique

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)$$

$0 < \xi < 1 \Rightarrow c_1$ et c_2 complexes

Régime Pseudo-Périodique

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{2j\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \exp[j(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t] - \exp[-j(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t] \right\} u(t)$$



$$Q = \frac{1}{2\xi} \quad \begin{array}{l} \text{Facteur de} \\ \text{qualité} \end{array}$$

Amplification pour $\xi < 0.7$

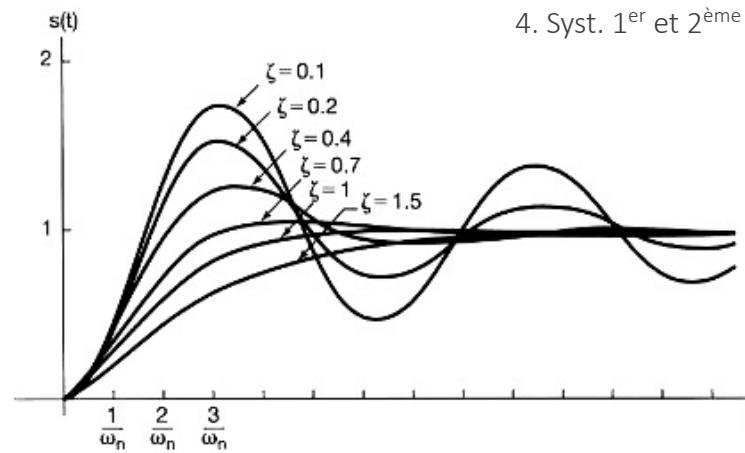
$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

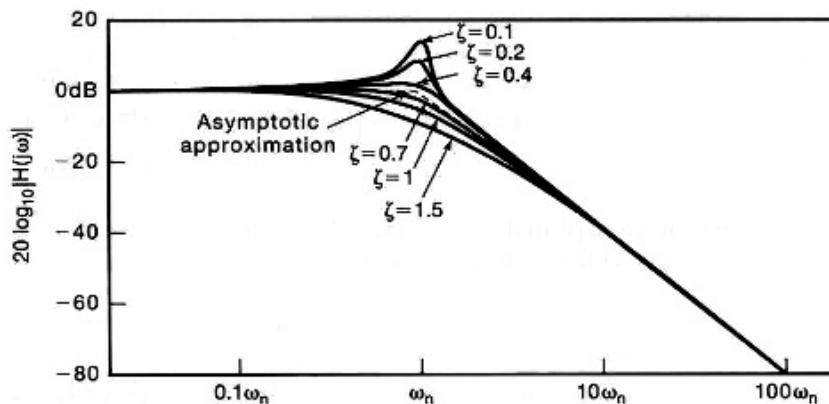
$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \cong \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega \ll \omega_n \\ -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n & \text{pour } \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) = -\operatorname{Arctan} \left(\frac{2\xi(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right)$$

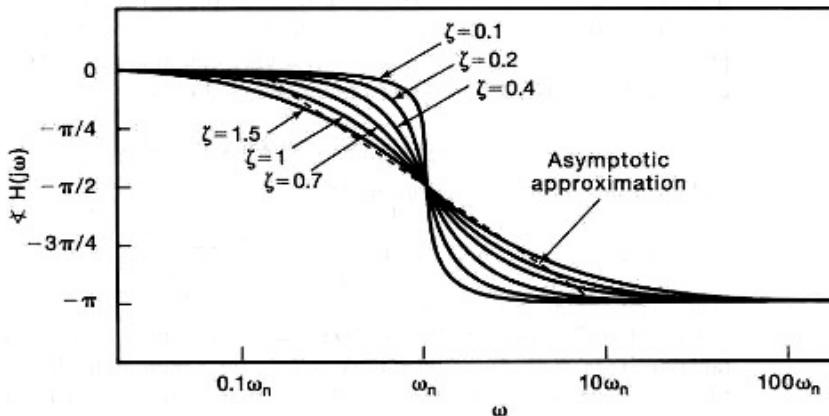
$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ -\pi & \omega > \omega_n \end{cases}$$



4. Syst. 1^{er} et 2^{ème} ord en TC



$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{for } \omega = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$



Systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre Temps Discret

Systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre en TD

Système du 1^{er} ordre

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

$$|a| < 1$$

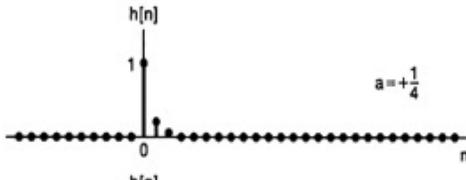
Rapidité de réponse du système

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

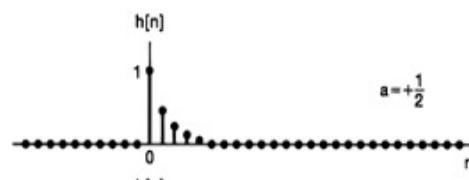
$$h[n] = a^n u[n]$$

$$s[n] = h[n] * u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]$$

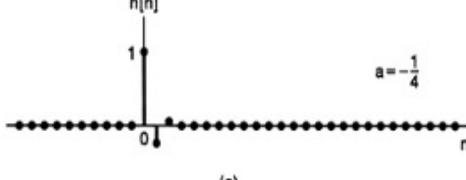
Réponse Impulsionnelle infinie (Filtre IIR)



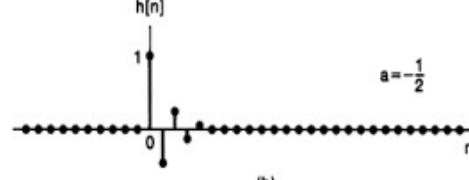
(a)



(b)



(c)



(d)



(a)



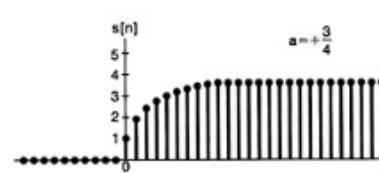
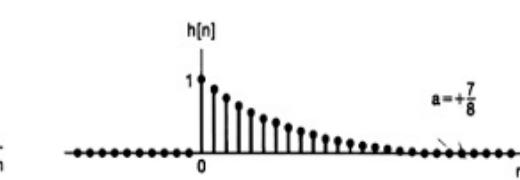
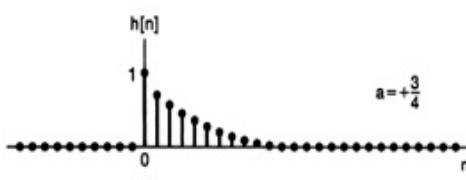
(b)



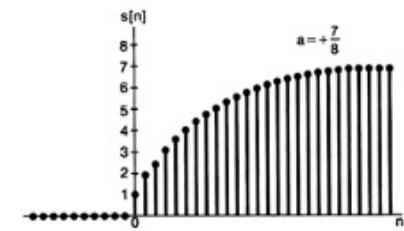
(c)



(d)



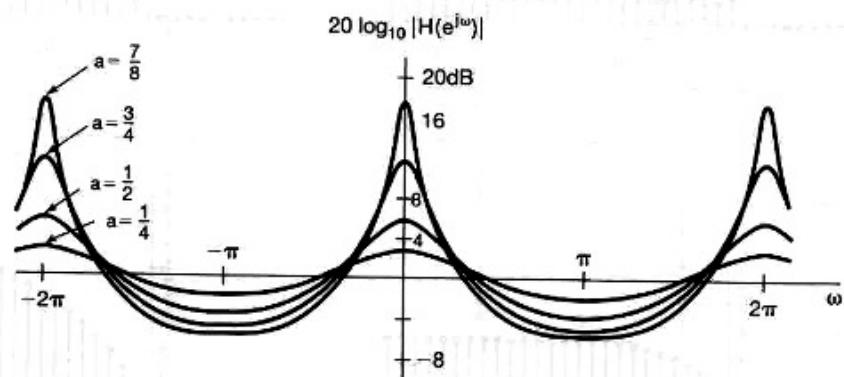
(c)



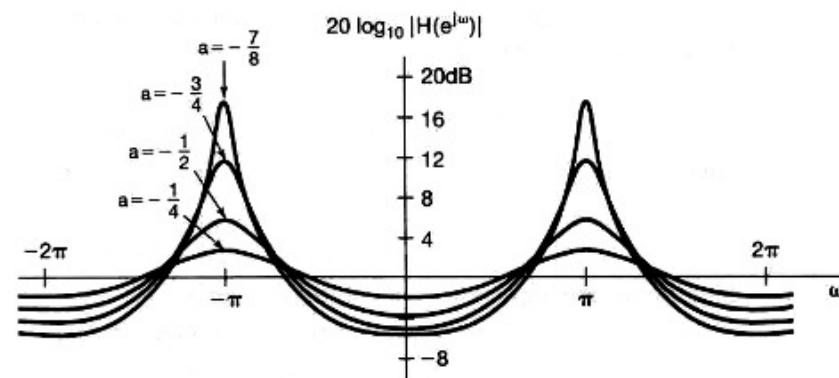
(d)

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1+a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}}$$

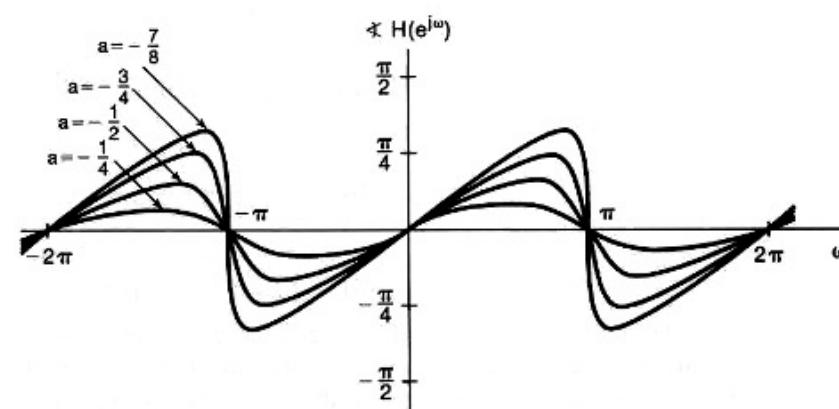
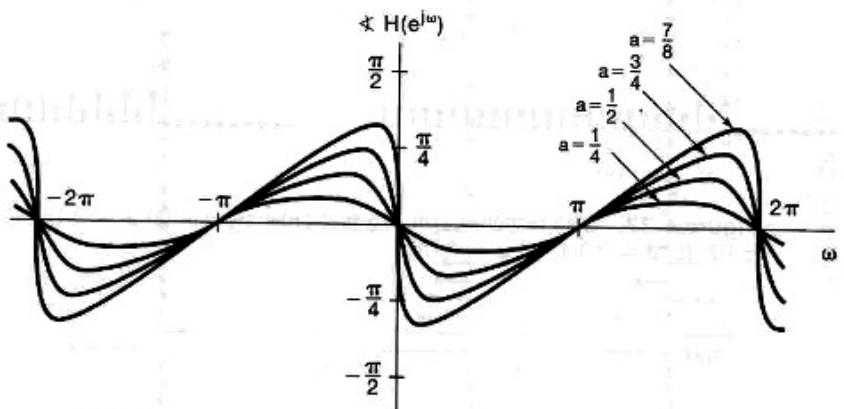
$$\angle |H(e^{j\omega})| = -\text{Arctan} \left(\frac{a \sin \omega}{1-a \cos \omega} \right)$$



$0 < a < 1$



$-1 < a < 0$



Système du 2nd ordre

$$y[n] - 2r \cos \theta y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{[1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}][1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}]}$$

Équivalent au système du 2nd ordre en TC en régime pseudo-périodique

Pour $\theta=0 \Leftrightarrow$ régime critique

r : *taux de décroissance*

θ : *fréquence d'oscillation*

$\theta \neq 0$ ou π

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - (re^{j\theta})e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - (re^{-j\theta})e^{-j\omega}}$$

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin \theta} \quad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin \theta}$$

Réponse Impulsionnelle infinie (Filtre IIR)

$$h[n] = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n] u[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} u[n]$$

$\theta = 0$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - r e^{-j\omega})^2}$$

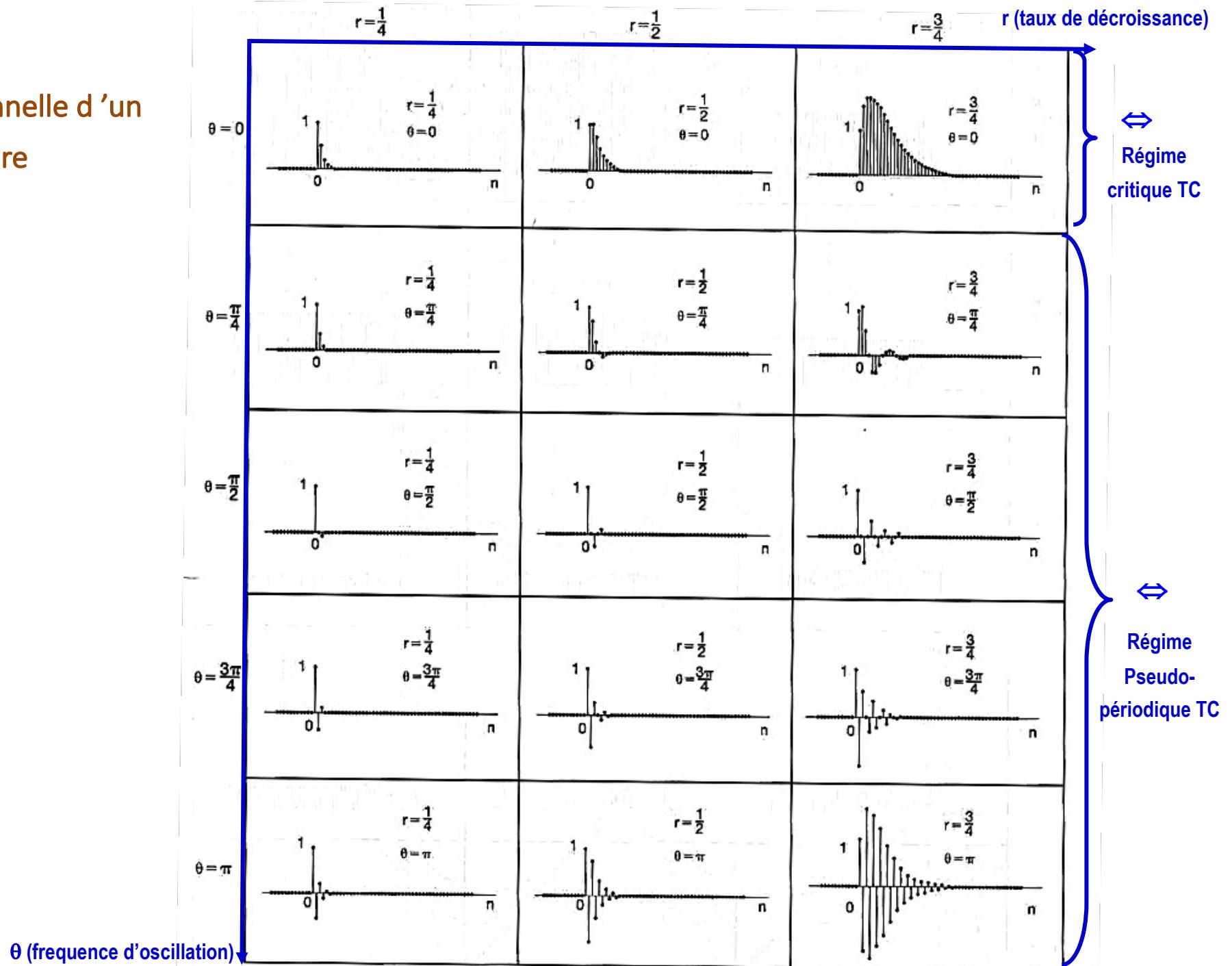
$$h[n] = (n+1)r^n u[n]$$

$\theta = \pi$

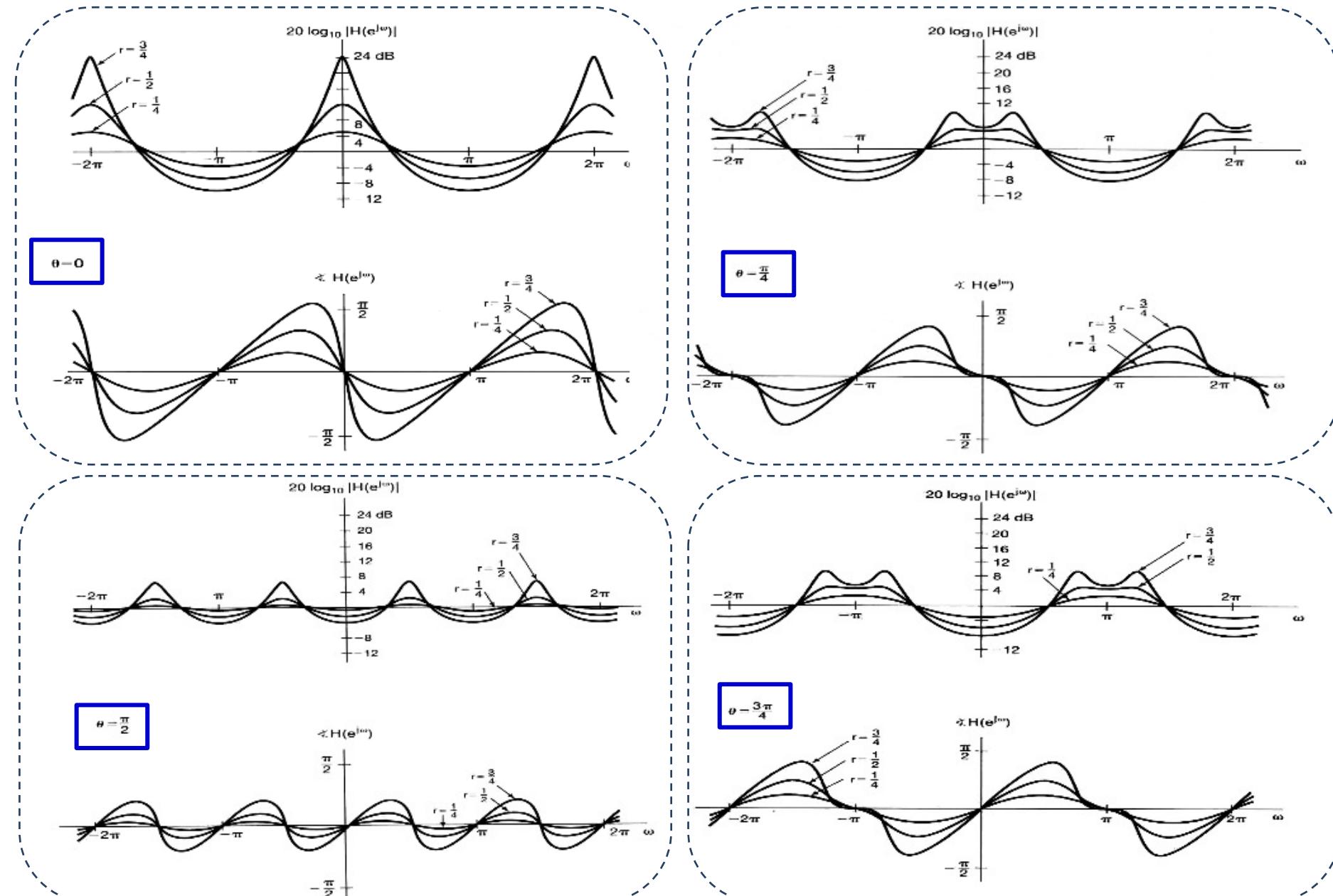
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 + r e^{-j\omega})^2}$$

$$h[n] = (n+1)(-r)^n u[n]$$

Réponse impulsionnelle d'un système du 2nd ordre



Réponse fréquentielle d'un système du 2nd ordre



Systèmes non récursifs ou filtres FIR en Temps Discret

Systèmes **non récursifs** en Temps Discret - Filtres FIR

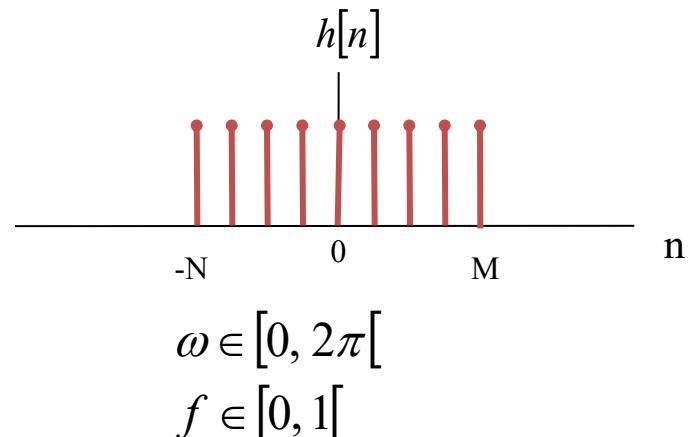
FIR (non récursif)	IIR (récursif)
<p>Phase linéaire possible <i>(pas de distorsion, simple décalage temporel)</i></p> <p>Complexité + grande pour les mêmes spécifications que IIR</p> <p>Compromis entre sélectivité du filtre et durée de la réponse impulsionnelle (nb. coeff \uparrow)</p>	<p>Phase linéaire impossible</p> <p>Flexibilité</p> <p>Filtres IIR = connexion de système du 1er et 2nd ordre</p> <p>Implantation efficace et facile</p> <p>Ajustement des caractéristiques = réglage des paramètres</p>

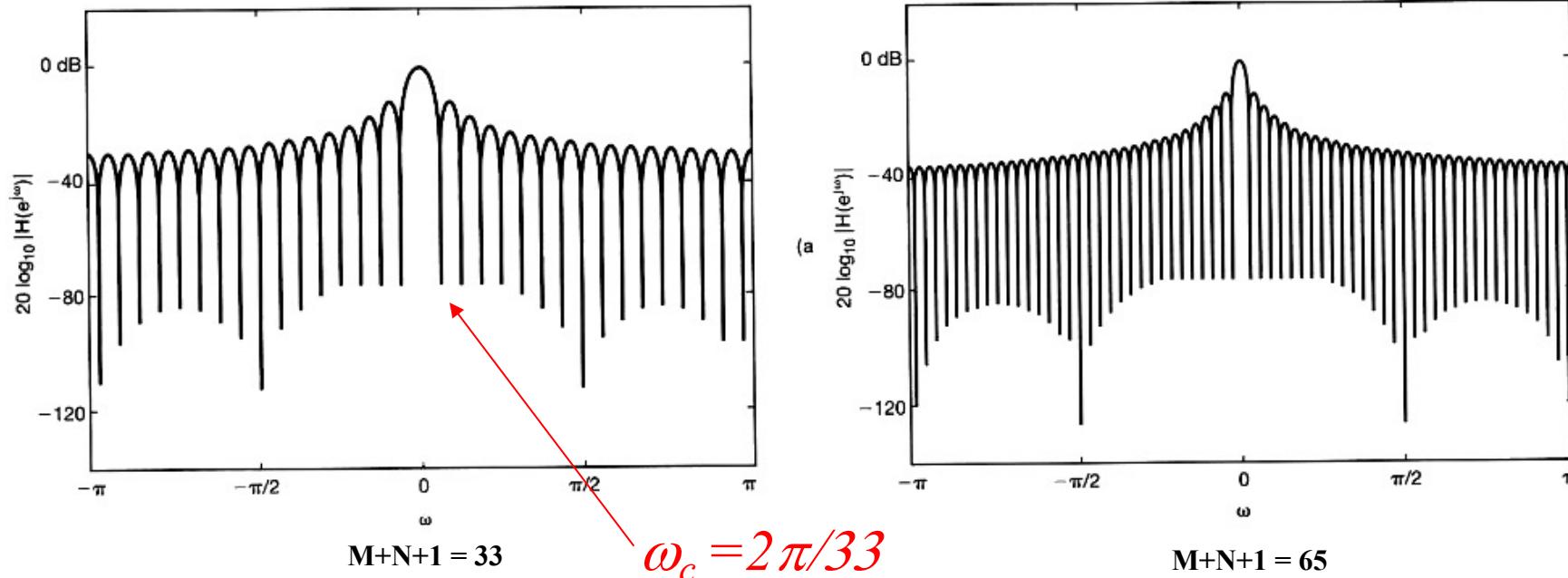
Filtres non-récurifs de type Moyenne-Glissante (Moving Average Filter)

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^M x[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(N+M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

$$H(f) = \frac{1}{N+M+1} e^{j\pi f[(N-M)]} \frac{\sin [\pi f(N+M+1)]}{\sin (\pi f)}$$





Longueur de la réponse impulsionnelle \uparrow , largeur du lobe principal de la réponse fréquentielle \downarrow
(lobe principal \Leftrightarrow BP du filtre)

Filtres non-récurifs - Forme générale

$$y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k]$$

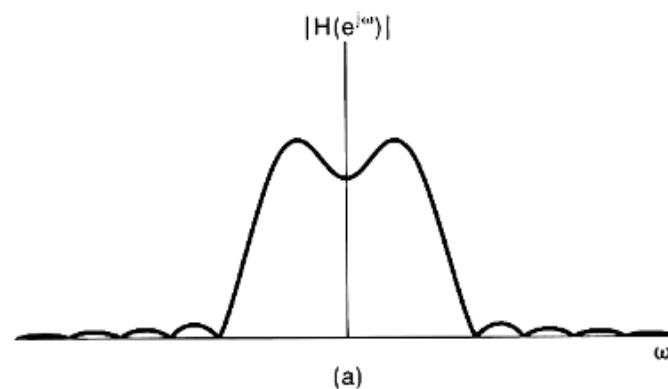
Choix des b_k , fonction des spécifications du filtre
(ex: raideur de la transition BP BC...)

Comparaison entre les réponses fréquentielles d 'un filtre à moyenne glissante et un filtre de réponse impulsionnelle $h[n]$

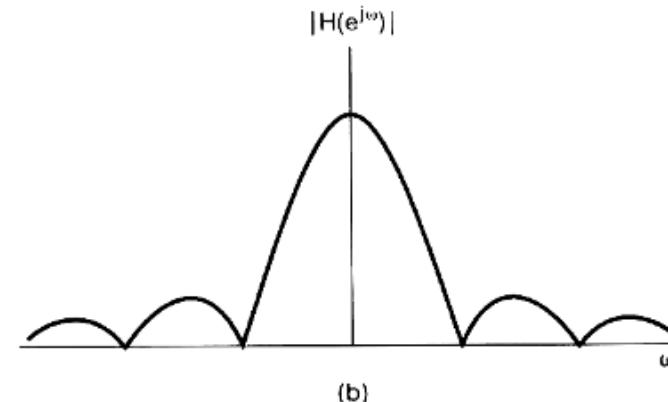
$$h[n] = \begin{cases} \sin(2\pi n / 33) / \pi n, & |n| \leq 32 \\ 0, & |n| > 32 \end{cases}$$

Réponse impulsionnelle d 'un filtre idéal de fréquence de coupure $\omega_c = 2\pi / 33$

Rem: $h(n)$ réponse impulsionnelle d'un filtre idéal multipliée par un signal rectangle ...



Réponse fréquentielle de $h[n]$ (= sinc tronqué)
échelle linéaire



Réponse fréquentielle du moving average filter (= rectangle)
échelle linéaire

Réponse impulsionnelle **Réelle et Paire** \Rightarrow Réponse fréquentielle **Réelle et Paire** (Phase nulle)

Filtre causal \Rightarrow décalage temporel de la réponse impulsionnelle \Rightarrow **Filtre à Phase Linéaire**

8. Transformée en Z et

Etude de la fonction de transfert d'un
système temps discret

Transformée en z

Transformée en Z (TZ)

Intérêt de la Transformée en Z

- Transformée en Z pour les signaux TD \Leftrightarrow Transformée de Laplace pour les signaux TC
- TZ peut être appliquée à une + grande classe de signaux que la TF TD
- ⇒ Transformée en Z = Généralisation de la Transformée de Fourier en Temps Discret avec** $z = r e^{j\omega}$
- Permet l'étude de la **stabilité des systèmes discrets** et la **Résolution des équations aux différences à coefficients constants**

✓ Définition de la Transformée en Z

$$x[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z) = TZ\{x[n]\}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

avec
 $z = r e^{j\omega}$

Pour un SLTI de réponse impulsionnelle $h[n]$:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

Fonction de transfert du système

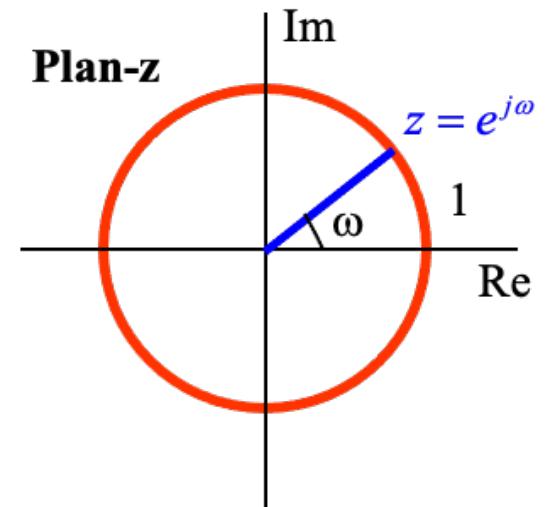
Lien entre TZ et TF

Quand:

$$z = e^{j\omega} \text{ c'est à dire } |z| = 1$$

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = TF\{x[n]\}$$

\Rightarrow Transformée en Z = DtFT de x[n]



Remarque:

$$X(z) \Big|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n] r^{-n}\} e^{-j\omega n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{x[n] r^{-n}\} e^{-j\omega n} = TF\{x[n] r^{-n}\}$$

Transformée en Z = Transformée de Fourier du signal x[n] multiplié par une exponentielle réelle r^{-n}
 (exponentielle réelle croissante ou décroissante avec n selon si $r > 1$ ou $r < 1$)

Exemple 1

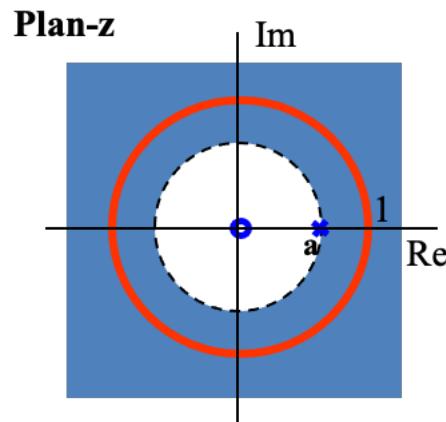
$$x[n] = a^n u[n]$$

Transformée en z : $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$ Converge si $|az^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

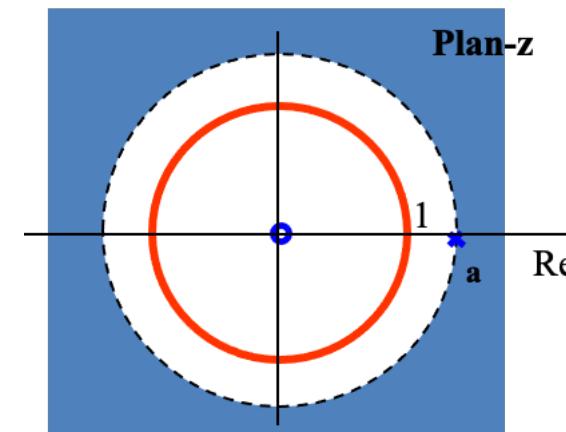
Région de convergence de la transformée en Z :

$$|a| < 1$$



La région de convergence
contient le cercle unité, TF{x[n]} converge

$$|a| > 1$$



La région de convergence ne contient pas le cercle
unité, TF{x[n]} ne converge pas

Conclusions sur l'exemple 1

- La transformée de Fourier ne converge pas pour tous les signaux
- La transformée en Z converge pour certaines valeurs de z , $|z| > a$ et pas pour toutes les valeurs de $|z| \leq a$
- Si $a < 1$, $X(z)$ peut être évalué en $z = e^{j\omega}$, la **TF et la TZ de $x[n]$ existent**
- Si $a > 1$, $X(z)$ ne peut être évalué en $z = e^{j\omega}$, la **TF de $x[n]$ n'existe pas alors que la TZ existe**

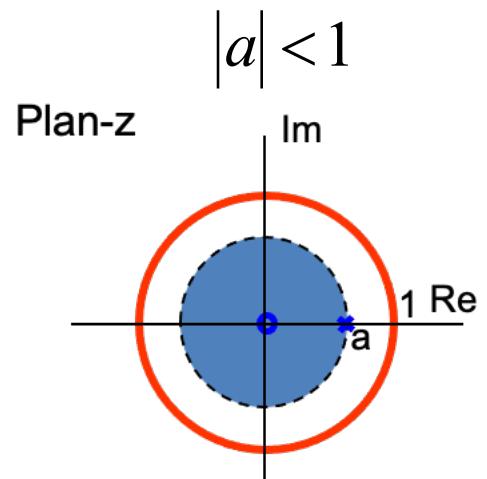
Exemple 2

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

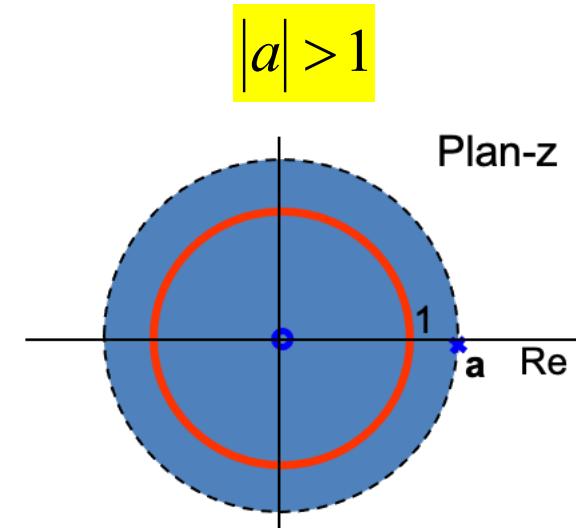
$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

Converge si
 $|a^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |a|$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$



La région de convergence ne contient pas le cercle unité, **TF{x[n]}** ne converge pas



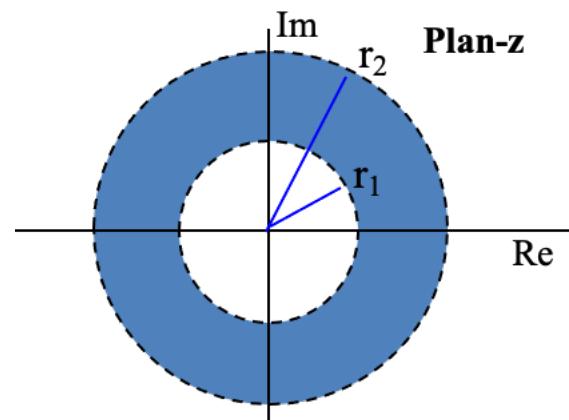
La région de convergence contient le cercle unité, **TF{x[n]}** converge

Conclusion

Transformées en Z identiques (même zéro et même pôle) pour les exemples A et B, mais régions de convergence RoC différentes

La Région de Convergence de la Transformée en Z correspond aux valeurs de $z = r e^{j\omega}$ pour lesquelles la Transformée de Fourier de $x[n]r^{-n}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$

La Région de Convergence de la Transformée en Z consiste en une couronne dans le plan-z centré sur l'origine $r_1 < |z| < r_2$



Cas particuliers:
 $r_1=0$ ou $r_2 = \infty$

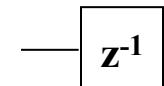
Propriétés de la TZ

Linéarité

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{TZ} \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Décalage temporel

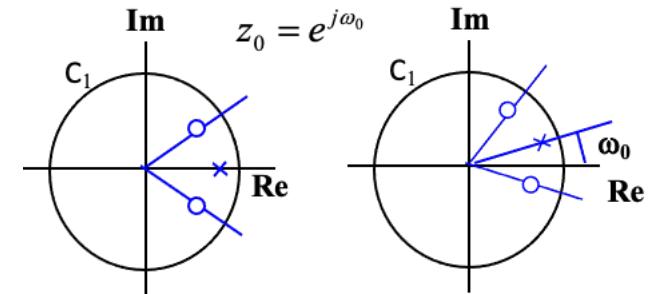
$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{TZ} X(z)z^{-n_0}$$



Opérateur retard unité

Changement d 'échelle dans Z

$$x[n]z_0^{-n} \xleftrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$



Inversion temporelle

$$x[-n] \xleftrightarrow{TZ} X(z^{-1})$$

Conjugaison

$$x^*[n] \xleftrightarrow{TZ} X^*(z^*) \quad | \quad \text{si } x[n] \text{ réel} \quad X(z) = X^*(z^*)$$

pôle (ou zéro) en $z=z_0 \Rightarrow$ pôle (ou zéro) en $z=z^*_0$

Convolution

$$x[n]*y[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z)Y(z)$$

Dérivation dans Z

$$n x[n] \xleftrightarrow{TZ} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

10.1 PROPERTIES OF THE z-TRANSFORM

Property	Signal	z-Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R , except for the possible addition or deletion of the origin
Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	Scaled version of R (i.e., $ a R$ = the set of points $\{ a z\}$ for z in R)
Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., R^{-1} = the set of points z^{-1} , where z is in R)
Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
First difference	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 0$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 1$
Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R

Initial Value Theorem
 If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then
 $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

SLTI temps discret: Lien entre Réponse impulsionnelle et Fonction de transfert

Hypothèse:

SLTI stable et initialement au repos

h : réponse impulsionnelle du SLTI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

$$x[n] \longrightarrow$$

Réponse impulsionnelle

$$h[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Transformée

Fourier

$$X(z) \longrightarrow$$

$$H(z)$$

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$H(z)$: fonction de transfert du SLTI

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

Fonction de transfert
 $TZ\{h[n]\}$

Outils pour l'étude des **SLTI temps discret**

Causalité et Stabilité des SLTI

Fonction de Transfert d 'un SLTI :

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \text{avec} \quad H(z) = TZ\{h[n]\}$$

Cas des fonctions de transfert $H(z)$ rationnelles

Généralement, $H(z)$ peut s 'exprimer sous la forme d 'une fonction rationnelle, c 'est à dire sous la forme d 'un rapport de deux polynômes en z :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^M (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

*N ordre de la fonction de transfert
Pôles et zéros réels ou
paires complexes conjuguées*

Propriété 1

$$1) \quad M \leq N$$

SLTI CAUSAL \Leftrightarrow

2) Région de Convergence de $H(z)$ fonction rationnelle

=

Région strictement extérieure au cercle associé au pôle le plus éloigné du centre

Exemple 1

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + 0.25z + 0.12}$$

SLTI non causal, M>N

Exemple 2

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

1) RoC à l'extérieur du pôle le + éloigné

2) M=N

$$H(z) = \frac{2z^2 - 2.5z}{z^2 - 2.5z + 1} \quad |z| > 2$$

Donc le système est causal

Vérification: détermination de la réponse impulsionnelle en utilisant les tables :

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right] u[n]$$

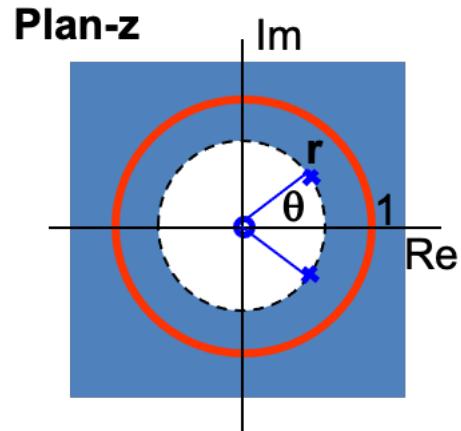
Propriété 2

Un **SLTI CAUSAL** possédant une fonction de transfert $H(z)$ rationnelle est **STABLE**, si et seulement si **tous les pôles de $H(z)$ sont situés à l'intérieur strictement du cercle unité du plan Z c'est à dire $|p_i| < 1 \forall i$**

Exemple

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Hypothèse SLTI CAUSAL



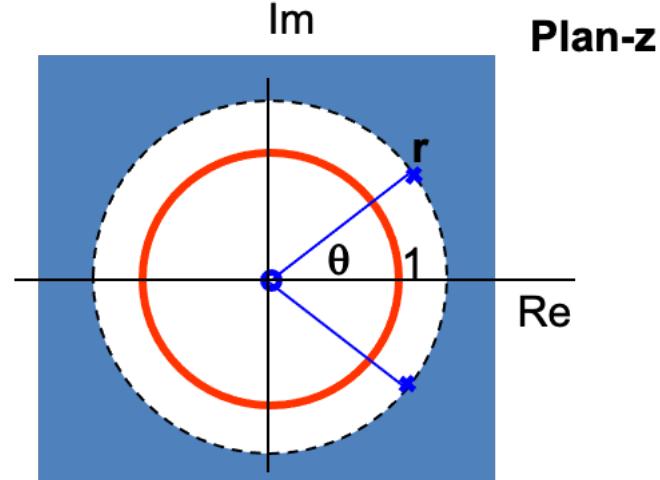
STABLE

2 pôles :

$$z_1 = re^{j\theta}$$

$$z_2 = re^{-j\theta}$$

Hypothèse SLTI CAUSAL



INSTABLE

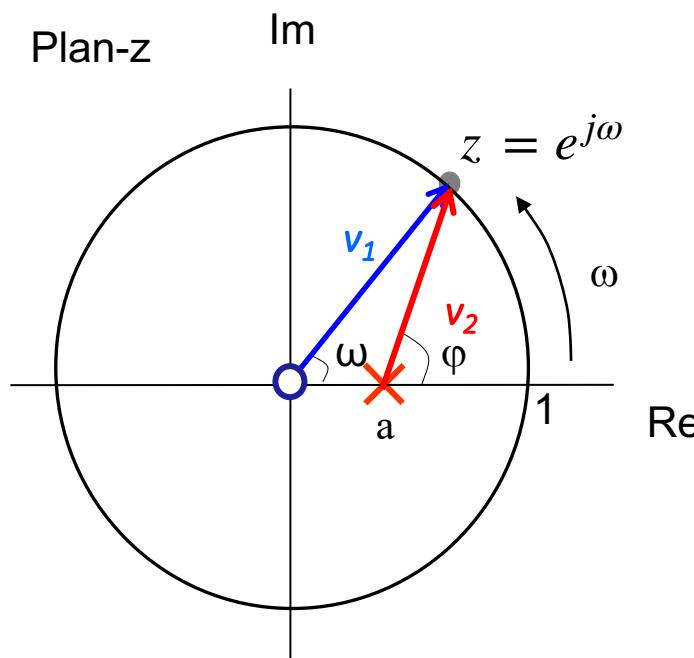
Propriété générale

Un SLTI est **STABLE** si et seulement si le cercle unité $|z| = 1$ est inclus dans la Région de Convergence de sa fonction de transfert $H(z)$ (quelconque)

Evaluation géométrique de la réponse fréquentielle à partir des pôles et des zéros de la fonction de transfert H(z)

Diagramme des pôles et des zéros de H(z) représenté dans le plan-z permet d'estimer graphiquement la réponse fréquentielle du système (quand elle existe)

Exemple : $h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{TZ} H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$



Soit les vecteurs :

$$v_2 = z - a$$

$$v_1 = z = e^{j\omega}$$

Réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

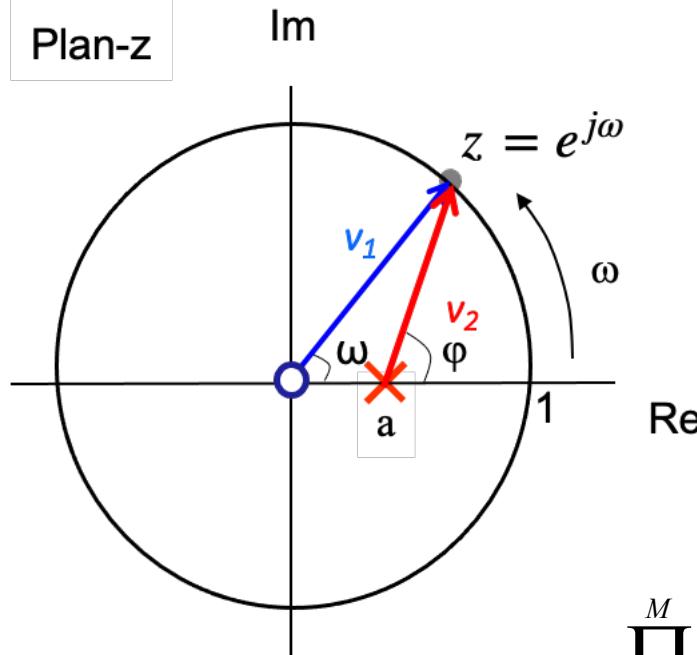
$$|v_2| = |z - a| = \rho$$

$$|v_1| = 1$$

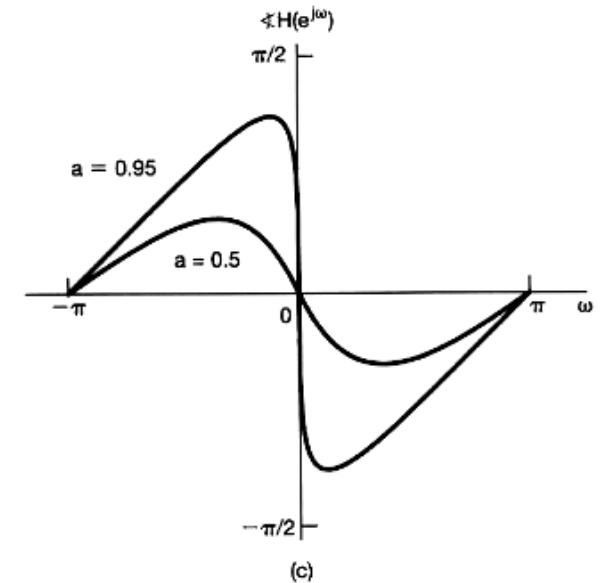
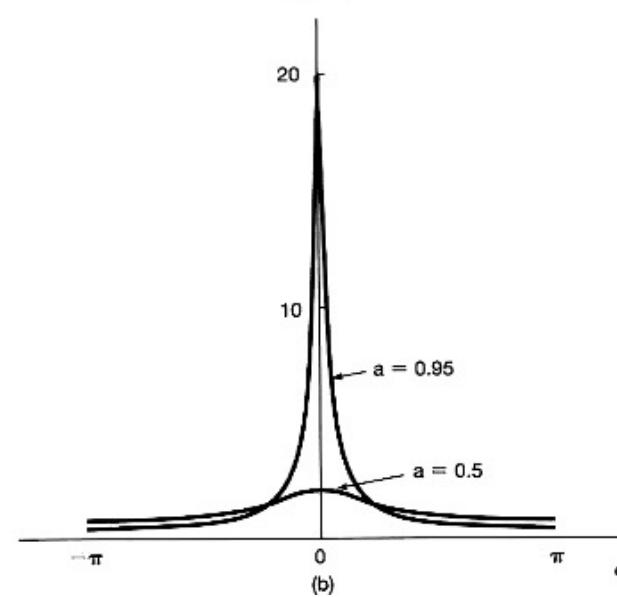
$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = \omega - \varphi$$

Plan-z



$|H(e^{j\omega})|$



Cas général

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\prod_{j=1}^M (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)}$$

Le module de la réponse fréquentielle est égal au produit des modules des vecteurs reliant les zéros au point $z = e^{j\omega}$ du cercle unité divisé par le produit des modules des vecteurs reliant les pôles à ce même point z

La phase de la réponse fréquentielle est égale à la somme des arguments des vecteurs correspondant aux zéros moins la somme des arguments des vecteurs correspondant aux pôles

Un vecteur correspondant à un pôle situé près du cercle unité aura un module faible et donc entraînera une valeur importante de la réponse fréquentielle (**phénomène de résonance**)

Transformée en Z inverse

Théorème des Résidus

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

*Utilisation d'un contour
d'intégration dans le plan
complexe...*

Généralement, la Transformée en Z inverse sera déterminée à partir des tables, après une décomposition en fractions partielles de $X(z)$

Principales paires de Transformée en Z

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z , except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

Fonction de transfert d'un SLTI régi par des équations aux différences linéaires à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Propriété des SLTI :

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Linéarité +
décalage temporel

$$TZ\left(\sum_{k=0}^N a_k y[n-k]\right) = TZ\left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k]\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

Fonction de Transfert

Exemple : Déterminer la réponse impulsionnelle du SLTI causal caractérisé par l'équation suivante:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = X(z) \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \end{bmatrix}$$

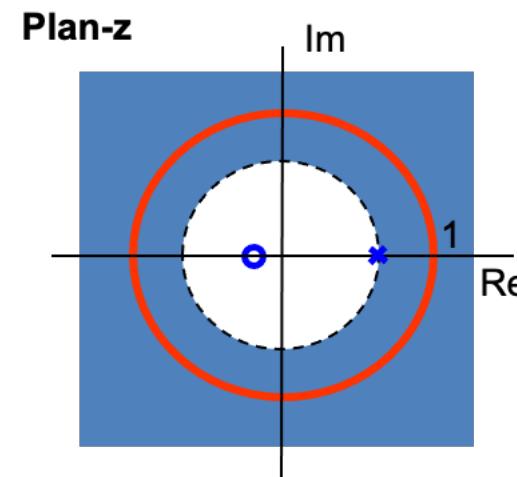
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H(z) = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right]$$

Table + linéarité+ décalage temporel

$$h[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} u[n-1]$$

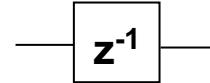
Pôle en $z_p = 1/2$,
Zéro en $z_z = -1/3$



$|z_p| < 1$ SLTI STABLE

Diagramme bloc de SLTI causaux décris par des équations aux différences à coefficients constants

Utilisation de l'opérateur retard

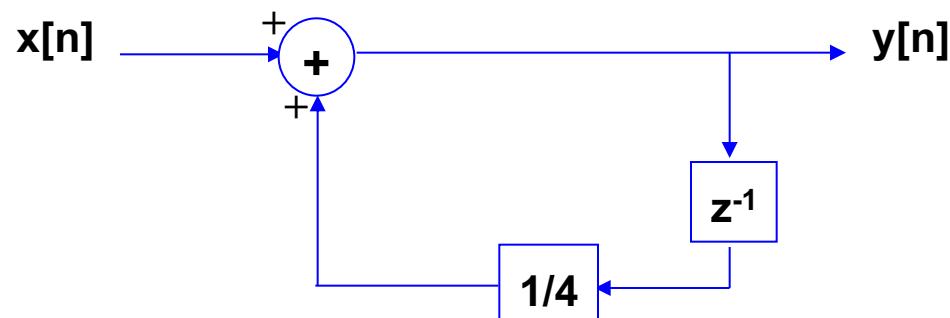


Exemple 1 : SLTI du 1er ordre $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$

Trouver l'équation aux différences caractérisant le SLTI causal et donner le diagramme bloc du système.

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$



Exemple 2 :

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Trouver l'équation aux différences caractérisant le SLTI causal et 3 diagrammes-bloc possibles du système :

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

1) Forme directe

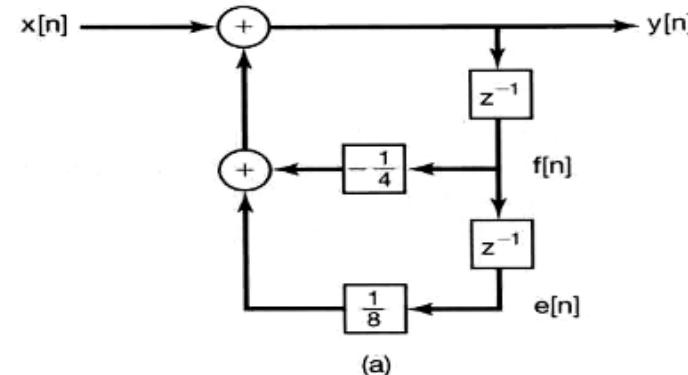
$$y[n] = -\frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] + x[n]$$

2) Forme cascade

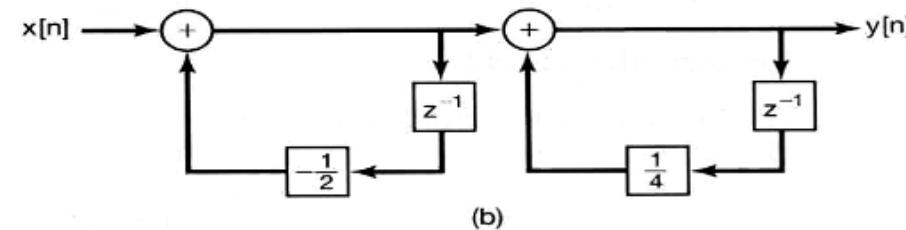
$$H(z) = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right)$$

3) Forme parallèle

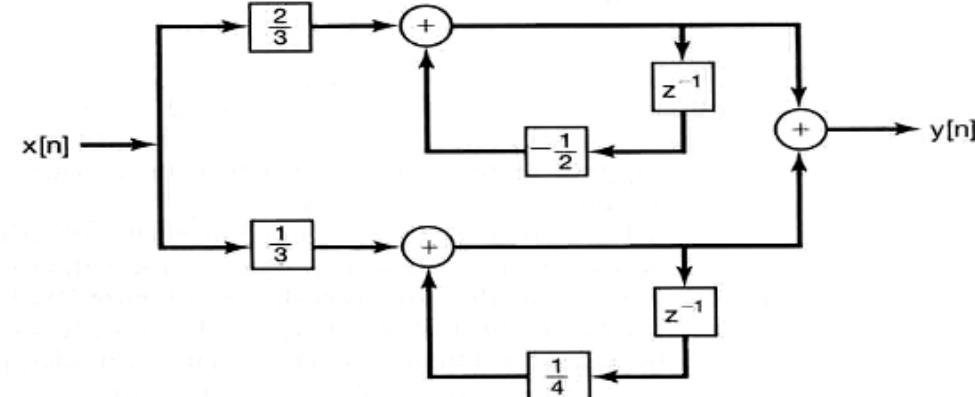
$$H(z) = \left(\frac{2/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) + \left(\frac{1/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right)$$



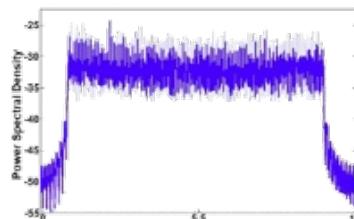
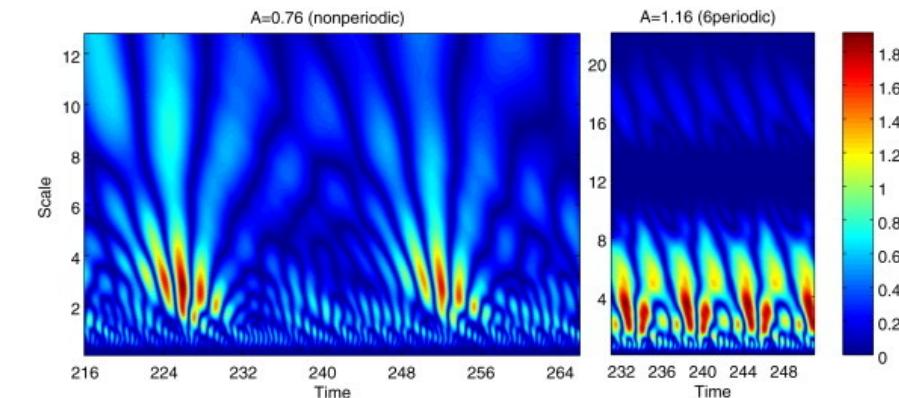
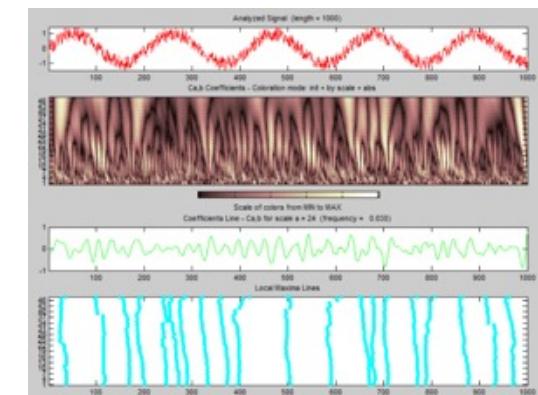
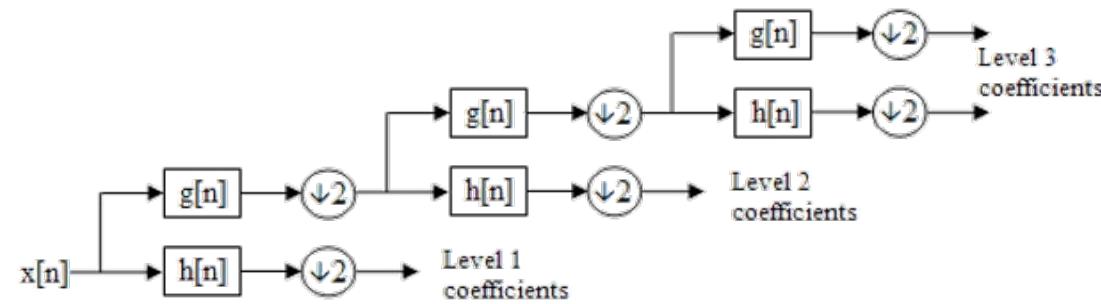
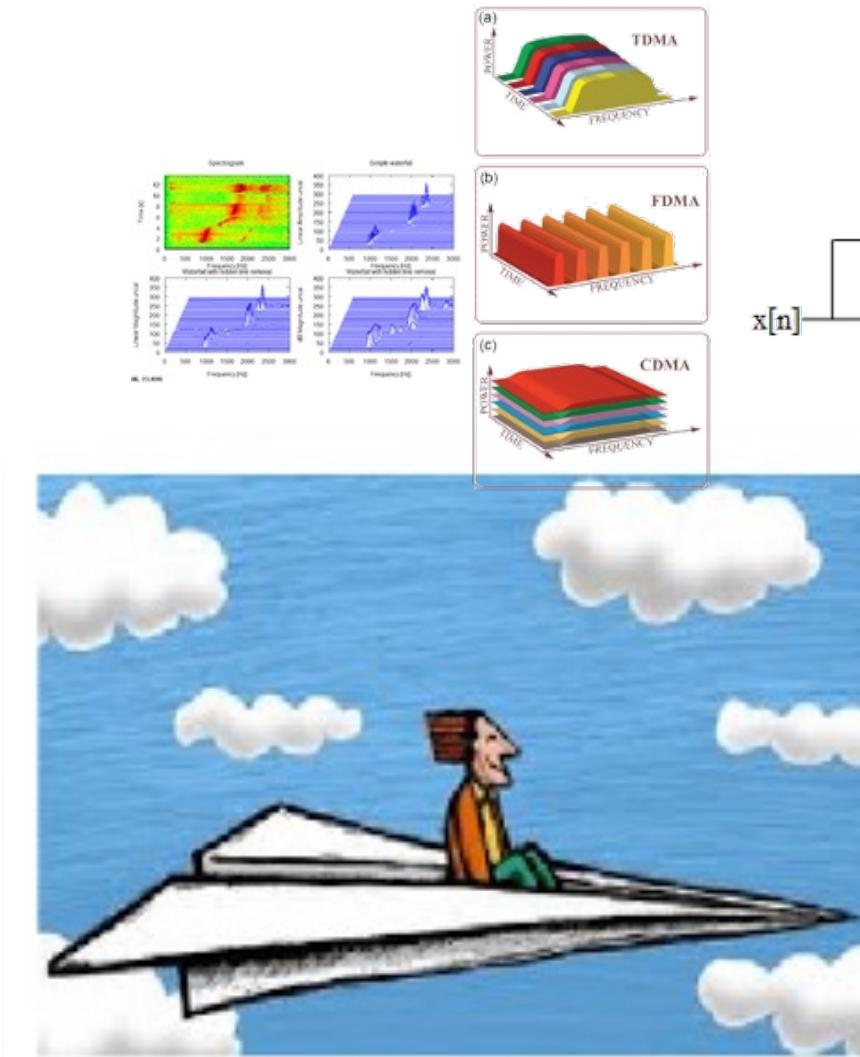
(a)



(b)



C'est la fin ! Suite en Projet Audio, TSI, MAS, TIP, CNA, PSC...



ANNEXES

Transformées de Fourier et TZ :
propriétés et principales paires de transformées

Propriétés de la CFT

Property	Aperiodic signal	Fourier transform
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Time Shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Time Reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Time and Frequency Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
Multiplication	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega - \theta))d\theta$
Differentiation in Time	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Differentiation in Frequency	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
Symmetry for Real and Even Signals	$x(t)$ real and even	$X(j\omega)$ real and even
Symmetry for Real and Odd Signals	$x(t)$ real and odd	$X(j\omega)$ purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition for Real Signals	$x_e(t) = \Re\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \Im\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$

Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Principales paires de la CFT

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, \text{ otherwise}$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)
<p>Periodic square wave</p> $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0) \quad \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$ <p>and</p> $x(t+T) = x(t)$		
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k
$x(t) \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at} u(t), \Re{a} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$t e^{-at} u(t), \Re{a} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t),$ $\Re{a} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Propriétés de la Dtft

Property	Aperiodic Signal	Fourier Transform
Linearity	$x[n]$ $y[n]$ $ax[n] + by[n]$	$X(e^{j\omega})$ periodic with $Y(e^{j\omega})$ period 2π
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$e^{-jn\omega_0} X(e^{j\omega})$
Conjugation	$x^*[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Time Reversal	$x[-n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Time Expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n = \text{multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \neq \text{multiple of } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolution	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Differencing in Time	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$ $+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ $j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Differentiation in Frequency	$nx[n]$	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real	$X(e^{j\omega})$ real and even
Symmetry for Real, Even Signals	$x[n]$ real and even	$X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd
Symmetry for Real, Odd Signals	$x[n]$ real and odd	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Even-odd Decomposition of Real Signals	$x_e[n] = \Re\{x[n]\}$ [$x[n]$ real] $x_o[n] = \Im\{x[n]\}$ [$x[n]$ real]	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Parseval's Relation for Aperiodic Signals		$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Principales paires de la DtFT

Signal	Fourier Transform	Fourier Series Coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-N} a_k e^{j k(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational \Rightarrow The signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ and $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

Property	Signal	z-Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R , except for the possible addition or deletion of the origin
Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1} z)$	Scaled version of R (i.e., $ a R =$ the set of points $\{ a z\}$ for z in R)
Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., $R^{-1} =$ the set of points z^{-1} , where z is in R)
Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
First difference	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 0$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 1$
Differentiation in the z-domain	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R

Initial Value Theorem
 If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then
 $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Principales paires de TZ

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z , except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0]z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$