Tarefa 02 – MÉTODOS NUMERICOS II

Membros: Isaac Miller, Milton Cassul

Desenvolvimento de Fórmulas de Newton-Cotes Fechada e Aberta para Polinómio de Substituição de Grau 4

1 Abordagem Fechada

Um polinómio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem aberta, os pontos $x_i \; e \; x_f$ são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3) \; e \; f(x_4)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \; e \; x_f$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que:

$$h = \frac{\Delta x}{6} = \frac{x_f - x_i}{6} \tag{1}$$

Sendo assim,

$f\,(x_0) = f\,(x_i + h) = f\,(x(s = 0) = g(0),$

$f\,(x_i + 2h) = f\,(x(s = 1) = g(1),$

$f\,(x_i + 3h) = f\,(x(s = 2) = g(2),$

$f\,(x_i + 4h) = f\,(x(s = 3) = g(3),$

$f\,(x_i + 5h) = f\,(x(s = 4) = g(4)$

e

$$x(s) = x_i + h + sh. \tag{2}$$

Satisfaz essas relações, pois $\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1 \\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2 \\ x(3) = x_i + h + 3h = x_3 \\ x(4) = x_i + h + 4h = x_4 \end{cases}$

Portanto, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{-1}^{5} p(x(s))ds = h\int_{-1}^{5} g(s)ds \tag{3}$$

$$g(s) = \sum_{k=0}^{n=4} \frac{s!}{(s-k)!\,k!} \Delta^k r_0 =$$

$$\frac{s!}{s!} r(0) + \frac{s!}{(s-1)!} \big(r(1) - r(0)\big) +$$

$$\frac{s!}{(s-2)!\,2} \big(r(2) - 2r(1) + r(0)\big) +$$

$$\frac{s!}{(s-3)!\,3!} \big(r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)\big) +$$

$$\frac{s!}{(s-4)!\,4!} \big(r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0)\big)$$

$$g(s) = r(0) + \frac{s(s-1)!}{(s-1)!} \big(r(1) - r(0)\big) +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)!}{(s-2)!\,2} (r(2) - 2r(1) \ + \ r(0)) \ +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)!}{(s-3)!\,3} (r(3) - 3r(2) + \ 3r(1) - r(0)) \ +$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(2-4)!}{(s-4)!\,4} (r(4) - 4r(3) - 6r(2) + \ 4r(1) + r(0))$$

$$g(s) = \ r(0) + \ s\big(r(1) - \ r(0)\big) +$$

$$\frac{1}{2} s(s-1)\big(r(2) - 2r(1) + \ r(0)\big) +$$

$$\frac{1}{6} \mathrm{s(s-1)(s-2)(r(3) - \ 3r(2) + \ 3r(1) - r(0))} \ +$$

$$\frac{1}{24} \mathrm{s(s-1)(s-2)(s-3)(r(4) - 4r(3) - \ 6r(2) + \ 4r(1) - r(0))}$$

$$g(s) = \ r(0) \left(1 - s + \frac{1}{2} s(s-1) - \frac{1}{6} s(s-1)(s-2) + \frac{1}{24} s(s-1)(s-2)(s-3)\right) +$$

$$r(1) \left(s - s(s-1) + \frac{1}{2} s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6} s(s-1)(s-2)(s-3)\right) +$$

$$r(2) \left(\frac{1}{2} s(s-1) - \frac{1}{2} s(s-1)(s-2) + \frac{1}{4} s(s-1)(s-2)(s-3)\right) +$$

$$r(3) \left(\frac{1}{6} s(s-1)(s-2) - \frac{1}{6} s(s-1)(s-2)(s-3)\right) +$$

$$r(4) \left(\frac{1}{24} s(s-1)(s-2)(s-3)\right)$$

$$g(s) = r(0)\frac{1}{24}\big((s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\big) +$$

$$r(1) - \frac{1}{6}\big(s(s-2)(s-3)(s-4)\big) +$$

$$r(2)\frac{1}{4}\big(s(s-1)(s-3)(s-4)\big) +$$

$$r(3) - \frac{1}{6}\big(s(s-1)(s-2)(s-4)\big) +$$

$$r(4)\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6^s) +$$

$$g(s) = r(0)\frac{1}{24}(s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24) +$$

$$r(1) - \frac{1}{6}(s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s) +$$

$$r(2)\frac{1}{4}(s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s) +$$

$$r(3) - \frac{1}{6}(s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s) +$$

$$r(4)\frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s)$$

$$g(s) = r(0)\frac{1}{24}(s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24) +$$

$$r(1) - \frac{1}{6}(s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s) +$$

$$r(2)\frac{1}{4}(s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s) +$$

$$r(3) - \frac{1}{24}(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s) \qquad \boxed{4}$$

Substituindo (4) em (3) temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h\int_{-1}^{5} g(s)ds =$$

$$h\left(g(0)\frac{1}{24}\int_{-1}^{5} s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24\,ds + g(1) - \frac{1}{6}\int_{-1}^{5} s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24\,ds\right.$$
$$+ g(2)\frac{1}{4}\int_{-1}^{5} s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s\ \ ds + g(3)$$
$$\left. - \frac{1}{6}\int_{-1}^{5} s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s\,ds + g(4)\frac{1}{24}\int_{-1}^{5} s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\,ds\right)$$
$$= \left(g(0)\frac{33}{10} + g(1) - \frac{21}{5} + g(2)\frac{39}{5} + g(3) - \frac{21}{5} + g(4)\frac{33}{10}\right)$$

Assim obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema.

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}\left(\frac{11}{2}f(x_i+h) - 7f(x_i+2h) + 13f(x_i+3h) - 7f(x_i+4h) + \frac{11}{2}f(x_i+5h)\right)$$

onde, como vimos em (1)

$$h = \frac{\Delta x}{6} = \frac{x_f - x_i}{6}$$

2 Abordagem Fechada

Um polinómio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, o polinómio de interpolação deve passar por $f(x_i)$, $f\left(x_f\right)$ e por três pontos intermediários de maneira que os cinco pontos do intervalo $[x_i\ , x_f]$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de x onde a função será interpolada de h, temos que:

$$h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4} \qquad \boxed{6}$$

Sendo assim,

$f\ (x_i) \ = \ f\ (x(s\ =\ 0)\ =\ g(0),$

$f\ (x_i\ +\ h)\ =\ f\ (x(s\ =\ 1)\ =\ g(1),$

$f\ (x_i\ +\ 2h)\ =\ f\ (x(s\ =\ 2)\ =\ g(2),$

$f\ (x_i\ +\ 4h)\ =\ f\ (x(s\ =\ 3)\ =\ g(3),$

$f\ (x_i\ +\ 4h)\ =\ f\ (x(s\ =\ 4)\ =\ g(4)$

e

$$x(s) = x_i + sh. \qquad \boxed{7}$$

Satisfaz essas relações, pois $\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h \\ x(2) = x_i + 2h \\ x(3) = x_i + 3h \\ x(4) = x_i + 4h = x_f \end{cases}$

Portanto, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}ds = h\ \int_0^4 p(x(s))ds = h\ \int_4^4 g(s)ds \qquad \boxed{8}$$

Substituindo (4) em (3) temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h\int_0^4 g(s)ds =$$

$$h\Bigg(g(0)\frac{1}{24}\int_0^4 s^4\ -\ 10s^3\ +\ 35s^2\ -\ 50s\ +\ 24\,ds + g(1) - \frac{1}{6}\int_0^4 s^4\ -\ 9s^3\ +\ 26s^2 -\ 24\,ds$$
$$+ g(2)\frac{1}{4}\int_0^4 s^4\ -\ 8s^3\ +\ 19s^2\ -\ 12s\ \ ds + g(3)$$
$$- \frac{1}{6}\int_0^4 s^4\ -\ 7s^3\ +\ 14s^2 -\ 8s\,ds + g(4)\frac{1}{24}\int_0^4 s^4\ -\ 6s^3\ +\ 11s^2 -\ 6s\,ds\Bigg)$$
$$= h\left(g(0)\frac{14}{45} + g(1)\frac{64}{45} + g(2)\frac{8}{15} + g(3)\frac{64}{45} + g(4)\frac{14}{45}\right)$$

Assim obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}\left((7f(x_i) + 32f(x_i+h) + 12f(x_i+2h) + 32f(x_i+3h) + 7f(x_i+4h)\right) \tag{9}$$

onde, como vimos em (6)

$$h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4}$$

3 Anexo

$$\Delta^k r_i = \begin{cases} r(i), se\ k = 0 \\ \Delta^{k-1}r_{i+1} - \Delta^{k-1}r_i, se\ k \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Delta^4 r_0 = \Delta^3 r_1 - \Delta^{\mathbf{3}} r_0 \\ \Delta^3 r_0 = \Delta^2 r_1 - \Delta^{\mathbf{2}} r_0 \\ \Delta^2 r_0 = \Delta^1 r_1 - \Delta^{\mathbf{1}} r_0 \\ \Delta^1 r_0 = \Delta^0 r_1 - \Delta^{\mathbf{0}} r_0 = r(1) - (0)\end{gathered}$$

$$\Delta^2 r_0\ =\ \Delta^1 r_1 - \big(r(1) - r(0)\big) =\ \Delta^0 r_2 - \Delta^0 r_1 - \big(r(1) - r(0)\big) = r(2) - 2r(1) + r(0)$$
$$\Delta^3 r_0\ =\ \Delta^2 r_1 - \big(r(2) - 2r(0) + r(0)\big) =\ \Delta^1 r_2 - \Delta^1 r_1 - \big(r(2) - 2r(1) + r(0)\big) =$$
$$\Delta^0 r_3 -\ \Delta^0 r_2 - (\Delta^0 r_2 -\ \Delta^0 r_1) - \big(r(2) - 2r(1) + r(0)\big) =$$
$$r(3) - r(2) - r(2) +\ r(1) -\ r(2) +\ 2r(1) -\ r(0) =\ r(3) -\ 3r(2) +\ 3r(1) -\ r(0)$$

$$\Delta^4 r_0\ =\ \Delta^2 r_2 - \Delta^2 r_1 -\ 3r_0 = \Delta^1 r_3 - \Delta^1 r_2 - (\Delta^1 r_2 - \Delta^1 r_1) - \Delta^3 r_0 =$$
$$= \Delta^0 r_4\ =\ \Delta^0 r_3 - (\Delta^0 r_3 -\ \Delta^0 r_2) - ((\Delta^0 r_3 - \Delta^0 r_2) - (\Delta^0 r_2 - \Delta^0 r_1)) -\ \Delta^3 r_2$$
$$= r(4) - r(3) -\ r(3) +\ r(2) -\ \big(r(3) -\ r(2) -\ r(2) +\ r(1)\big) - - \Delta^3 r_0$$
$$= r(4) -\ 4r(3) +\ 6r(2) -\ 4r(1)\ +\ r(0)$$