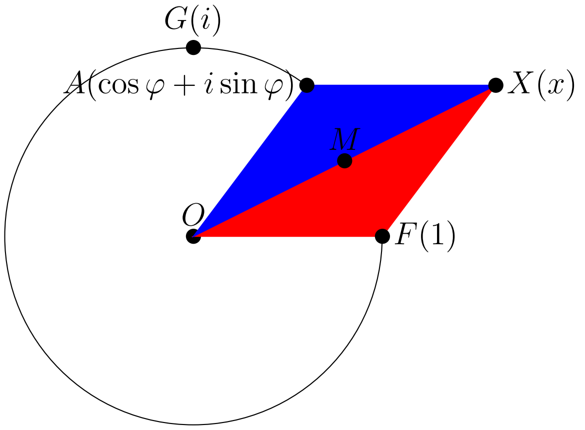
Решения алгебры

Кудрявцев Александр, 1 курс

16 сентября 2020 г. — 16 сентября 2020 г.

№1. Нарисуем это число на комплексной плоскости:



Заметим, что $\triangle OFX = \triangle OAX$, откуда $\arg x = \frac{\varphi}{2}$. Кроме того, $|x| = OX = 2OM = 2OF\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$. ∎

№2. $z^n = i \iff r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = i \iff r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = i$. Так как $|i| = 1$, то $r = 1$. Тогда $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = i \iff n\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \iff \varphi = \frac{\pi}{2n} + 2\pi\frac{k}{n}$. ∎

№3. Рассмотрим число $z_0 = \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx))$. С одной стороны, нам нужно найти $\operatorname{Im}(z_0)$. С другой стороны,

$$z_0 = \sum_{k=1}^{n}((z_1)^k) = z_1 \cdot \frac{z_1^k - 1}{z_1 - 1} = z_1 \cdot (z_1^k - 1) \cdot (\cos x - i\sin x - 1) \cdot \frac{1}{(\cos x + 1)^2 + (\sin x)^2}$$

где $z_1 = \cos x + i\sin x$. Тогда

$$\operatorname{Im} z_0 = \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)(\cos nx + i\sin nx - 1)(\cos x - i\sin x - 1) =$$
$$= \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(1 - \cos x - i\sin x)(\cos nx + i\sin nx - 1) =$$
$$= \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(\ldots + i(\sin nx - \cos x\sin nx - \sin x\cos nx + \sin x)) = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2 - 2\cos x}. ∎$$

№4. Если n нечётно, то множество квадратов корней n-й степени из 1 совпадает с множеством корней, а их сумма равна 0 (т.к. эти корни соответствуют векторам из O в вершины правильного n-угольника). Если чётно, то множество этих квадратов — это множество корней $\frac{n}{2}$-й степени, взятое два раза. Их сумма тоже равна 0. Ответ: 0. ∎

№5. Заметим, что множество чисел вида $(5k+3) + i(5l+4), k, l \in \mathbb{Z}$, замкнуто относительно умножения, т.к. $(5k_1 + 3 + i(5l_1 + 4))(5k_2 + 3 + i(5l_2 + 4)) = 5k' + 9 + 5k'' - 16 + i(5l' + 24) = 5(k' + k'' - 2) + 3 + i(5(l' + 4) + 4)$. Кроме того, $\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{3+4i}{5}$. Значит, если $(\frac{2+i}{2-i})^n = 1$, то $\frac{(}{3} + 4i)^n = 5^n$, но левая часть вида $5k + 3 + i(5l + 4)$, т.е. её мнимая часть ненулевая. ∎