Решения занятия №15

№1. Оля и Аня живут в одном доме и выходят в школу вместе. Каждый шаг Оли на 10% длиннее Аниного, но Оля делает в минуту на 10% меньше шагов, чем Аня. Кто раньше придёт в школу?

Решение. Олин шаг в $\frac{11}{10}$ раз длиннее, но в минуту она делает $\frac{9}{10}$ от количества шагов Ани. Значит, за минуту она проходит $\frac{99}{100}$ от расстояния, проходимого Аней. Аня идёт быстрее и придёт раньше. ■

№2. Чему равна последняя цифра числа 2^{2019}?

Решение. Последние цифры изменяются по циклу 2–4–8–6. У 2019 остаток 3 при делении на 4, значит, 2^{2019} заканчивается на 8. ■

№3. На столе лежат четыре яблока весом 200г, 300г, 400г и 450г. Карлсон, а затем Малыш берут по яблоку и одновременно начинают есть их с одинаковой скоростью. Доевший берет следующее яблоко, каждый хочет съесть как можно больше. Какое яблоко выбрать Карлсону вначале?

Решение. Карлсон берёт яблоко в 300 граммов. К тому моменту, как он его доест, яблоко либо в 400 граммов, либо в 450 граммов будет свободно. С ним Карлсон набирает больше половины. Ответ находится перебором яблок. ■

№4. Леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После порубки сосны будут составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса вырубит леспромхоз?

Решение. Изначально деревьев было в 100 раз больше, чем не-сосен, а стало в 50 раз больше, чем не-сосен. При этом количество не-сосен не изменилось. Ответ: половину леса. ■

№5. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей в классе у Пети? (Найдите все решения).

Решение. Рассмотрим Васю — одноклассника Пети, у которого больше всего друзей, и Колю — одноклассника, у которого меньше всего друзей. Заметим, что либо у Коли 0 друзей, либо у Васи все ученики класса (кроме него самого) — друзья. В обоих случаях Вася дружит с Петей, а Коля нет. Уберём из класса Васю и Колю. Все количества друзей у одноклассников Пети снова различны, у Пети теперь на 1 друга меньше, в классе на 2 человека меньше. Так можно сделать 12 раз, после чего останется Петя и ещё один человек. Они либо дружат, либо нет, причём оба варианта возможны. Ответ: 12 или 13. ■

№6. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске 8×8, чтобы они не били друг друга?

Решение. Пример на 14 слонов нарисован внизу 1. Докажем, что на клетках одного цвета не может быть 8 слонов. Действительно, есть 7 диагоналей, параллельных большой диагонали, и на каждой из них не более одного слона. ■

№7. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске 8×8, чтобы они не били друг друга?

Решение. Пример на 32 коня — все белые клетки. Больше нельзя, поскольку клетки доски можно разделить на пары, что между клетками в каждой паре можно пройти ходом коня. ■

№8. Из листа клетчатой бумаги размером 11×11 клеток вырезали по клеткам 15 квадратиков 2×2 клетки. Докажите, что можно вырезать еще один такой квадратик.

Решение. См. рисунок 2. Каждый квадрат пересекается ровно с одним нарисованным. ■

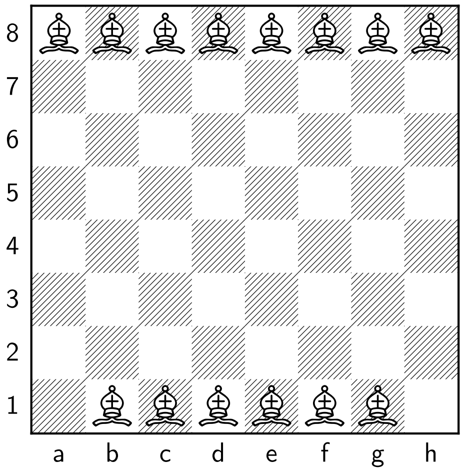

Рис. 1: 14 слонов на шахматной доске

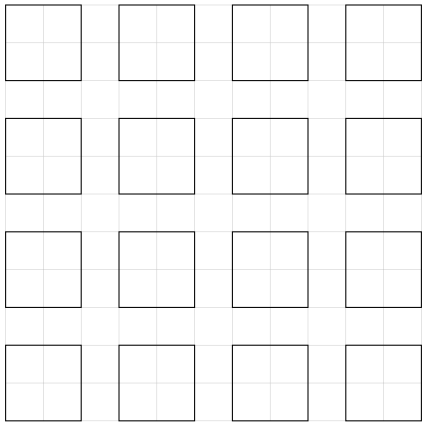

Рис. 2: 16 квадратов 2×2 на доске 11×11

№9. Из чисел от 1 до 200 выбрано 101 число. Докажите, что среди них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое.

Решение. Разделим все числа на 100 кучек. В первую положим $1, 2, 4, 8, \ldots, 128$, во вторую — $3, 6, 12, \ldots, 192$, в k-тую числа вида $(2k-1) \cdot 2^i$. Из 101 числа какие-то два будут в одной кучке, а в одной кучке из любых двух чисел одно на другое делится. ■

№10. В колбе находится колония из 2019 бактерий. В какой-то момент внутрь колбы попадает вирус. В первую минуту вирус уничтожает одну бактерию, и сразу же после этого и вирус, и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во вторую минуту новые два вируса уничтожают две бактерии, а затем и вирусы, и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т.д. Наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии?

Решение. Рассмотрим отношение числа бактерий к числу вирусов. Вначале оно 2019, когда вирусы убивают бактерии, уменьшается на 1, а когда вирусы и бактерии делятся, не меняется. Значит, каждую минуту оно уменьшается на 1 и через 2019 минут станет равно 0. ■

№11. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

Решение. Коля не сможет этого сделать. Если размер какой-то кучки равен $2^k - 1$ для какого-то k, то как бы мы ни разделили эту кучку на две, размер большей из кучек не станет равным $2^l - 1$. С другой стороны, если это не так, то можно разделить на две кучки, большая из которых $2^k - 1$. В самом деле, если в кучке от 2^k до $2^{k+1} - 2$ камней включительно, то можно выделить кучку с $2^k - 1$ камнями и она будет больше, чем другая. Теперь посмотрим на размер максимальной кучки. Изначально он 31, и игра закончится, когда он станет равным 1. Тогда по доказанному ранее Витя сможет играть так, что перед ходом Коли этот размер будет равен $2^k - 1$: например, большие кучки делить на кучку $2^k - 1$ и меньшую, а все остальные на кучки не больше $2^k - 1$. Тогда в тот момент, когда он станет равен 1, будет ход Коли. ■