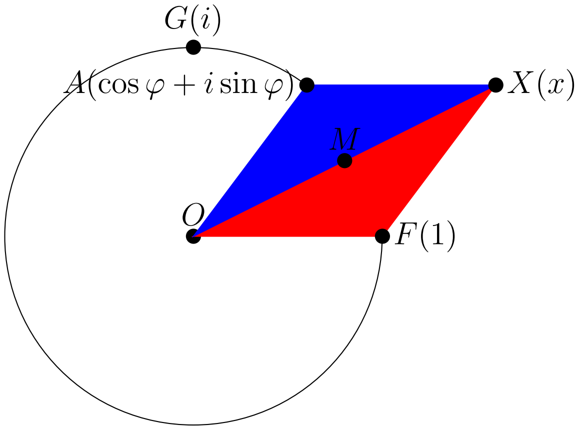
Решения алгебры

Кудрявцев Александр, 1 курс

16 сентября 2020 г. — 30 сентября 2020 г.

№1. Нарисуем это число на комплексной плоскости:



Заметим, что $\triangle OFX = \triangle OAX$, откуда $\arg x = \frac{\varphi}{2}$. Кроме того, $|x| = OX = 2OM = 2OF\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$. ■

№2. $z^n = i \iff r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = i \iff r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = i$. Так как $|i| = 1$, то $r = 1$. Тогда $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = i \iff n\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \iff \varphi = \frac{\pi}{2n} + 2\pi\frac{k}{n}$. ■

№3. Рассмотрим число $z_0 = \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx))$. С одной стороны, нам нужно найти $\operatorname{Im}(z_0)$. С другой стороны,

$$z_0 = \sum_{k=1}^{n}((z_1)^k) = z_1 \cdot \frac{z_1^k - 1}{z_1 - 1} = z_1 \cdot (z_1^k - 1) \cdot (\cos x - i\sin x - 1) \cdot \frac{1}{(\cos x + 1)^2 + (\sin x)^2}$$

где $z_1 = \cos x + i\sin x$. Тогда

$$\operatorname{Im} z_0 = \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)(\cos nx + i\sin nx - 1)(\cos x - i\sin x - 1) =$$
$$= \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(1 - \cos x - i\sin x)(\cos nx + i\sin nx - 1) =$$
$$= \frac{1}{2 - 2\cos x} \cdot \operatorname{Im}(\ldots + i(\sin nx - \cos x\sin nx - \sin x\cos nx + \sin x)) = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2 - 2\cos x}. ■$$

№4. Если n нечётно, то множество квадратов корней n-й степени из 1 совпадает с множеством корней, а их сумма равна 0 (т.к. эти корни соответствуют векторам из O в вершины правильного n-угольника). Если чётно, то множество этих квадратов — это множество корней $\frac{n}{2}$-й степени, взятое два раза. Их сумма тоже равна 0. Ответ: 0. ■

№5. Заметим, что множество чисел вида $(5k+3) + i(5l+4)$, $k, l \in \mathbb{Z}$, замкнуто относительно умножения, т.к. $(5k_1 + 3 + i(5l_1 + 4))(5k_2 + 3 + i(5l_2 + 4)) = 5k' + 9 + 5k'' - 16 + i(5l' + 24) = 5(k' + k'' - 2) + 3 + i(5(l' + 4) + 4)$. Кроме того, $\frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{5} = \frac{3+4i}{5}$. Значит, если $(\frac{2+i}{2-i})^n = 1$, то $\frac{(}{3} + 4i)^n = 5^n$, но левая часть вида $5k + 3 + i(5l + 4)$, т.е. её мнимая часть ненулевая. ■

№1. Обозначим $\varphi = \frac{2\pi}{5}$. Мы знаем, что $1 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = z^5$. То есть либо $z = 1$ (что неправда), либо $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Сделаем замену $w = z + \frac{1}{z}$. Тогда $z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2$, т.е. $w^2 + w - 1 = 0$. Корни этого уравнения — $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Мы знаем, что $z + \frac{1}{z} > 0$. Значит, $z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Нам нужна только вещественная часть корня, которая равна $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ■

№2. Пусть $y^3 = -i$, а S — множество корней уравнения $x^3 = 1$. Тогда очевидно, что множество корней нашего уравнения — это $\{ys \mid s \in S\}$. С другой стороны, можно взять $y = i$. Тогда корни этого уравнения — $\{i, -\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\}$. ■

№3. Пусть $z = i + \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда

$$z^2 = \cos^2\varphi - (1 + \sin\varphi)^2 + i(\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) = \cos 2\varphi - 1 - 2\sin\varphi + \frac{i}{2}(2\cos\varphi + \sin 2\varphi). \blacksquare$$

№4. Пусть $z = -i + \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда

$$z^{-1} = \frac{\cos\varphi + i(1 - \sin\varphi)}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin\varphi + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\varphi + i(1 - \sin\varphi)}{1 - \sin\varphi} = \frac{i}{2} + \frac{\cos\varphi}{2 - 2\sin\varphi}.$$

Это прямая $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$. ■

№5. Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Рассмотрим $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ (оно существует при $\varphi \neq \pi + 2\pi k$, т.е. $z \neq -1$). Тогда $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$. Кроме того, $\frac{1+ti}{1-ti} = \frac{(1+ti)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2}$. ■

Лист 3, 29 сентября 2020 г.

№1. Если $n \le 1$, то ответ, очевидно, 0. Пусть $n > 1$. Выберем старшие $n-2$ коэффициента как угодно (у этого 3^{n-2} способов), у нас получится многочлен $P_1(x) \cdot x^3 \equiv Q(x) \mod x^2+x+2$, где $\deg Q \le 1$. Тогда младшие 3 коэффициента для данного P_1 можно выбрать единственным образом, а именно, так, чтобы $P(x) \equiv x^2+x+2-Q(x) \mod x^3$. Ответ: 3^{n-2}. ■

№2. Пусть x — нетривиальный идемпотент в $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Тогда $x(x-1) \vdots 36$. Заметим, что $(x, x-1) = 1$, тогда либо $x \vdots 9, x-1 \vdots 4$, либо наоборот. В первом случае получаем $x = 9$, во втором $x = 28$. Ответ: $\{0, 1, 9, 28\}$. ■

№3. $(x^4-4x^3+1, x^3-3x^2+1) = (x^3-3x^2+1, x^4-x^4-4x^3+3x^3-x+1) = (x^3-3x^2+1, x^3+x-1) = (x^3+x-1, 3x^2+x-2) = (3x^2+x-2, x^3+x-1-x^3-\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}) = (3x^2+x-2, \frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}-1) = (x^2-x-3, 4x+7) = 1$. ■

№4. Пусть $p = qr$, где $\deg p = 4$ и $\deg q \ge \deg r$, а r неприводим. Тогда $\deg r \le 2$. Из многочленов 2 степени неприводим только x^2+x+1, значит, если $\deg r = 2$, то $p = (x^2+x+1)^2 = x^4+x^2+1$. Все остальные многочлены 4 степени (приводимые) делятся или на x (т.е. у них коэффициент 0 при x^0), или на $x+1$ (т.е. сумма коэффициентов чётная). Значит, неприводимые многочлены — это $x^4+x^3+1, x^4+x+1, x^4+x^3+x^2+x+1$. ■

№5. Пусть $p \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ не имеет корней. Тогда у $p+1$ есть и корень 0, и корень 1, значит, $p \vdots x(x+1)$. Рассуждая аналогично **№1**, получаем, что таких многочленов 2^{n-3} (там ещё есть условие, что старший член равен 1). ■

Лист 4, 30 сентября 2020 г.

№1. Заметим, что $f = x^3 + x^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Действительно, пусть $f = pq, \deg p \geq \deg q > 0$. Тогда $\deg q = 1$, значит, $q = x$ или $q = x + 1$. Но $f(0) = f(1) = 1$, значит, это не так. Тогда по теореме из лекции $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ это поле. ■

№2. $(x+1)^2 = x, x(x+1) = 1$. Ответ: 3. ■

№3. Будем считать, что $M \neq \emptyset$, иначе это не кольцо. Тогда:

- Пусть $|M| > 1$. Тогда делители нуля — все функции, которые дают 0 хотя бы в 1 точке, но не во всех (если $f(x_0) = 0$, то можно рассмотреть функцию g такую, что $g(x_0) = 1$ и $g(y) = 0$ при $y \neq x_0$), а обратимые — те, для которых $\forall x : f(x) \neq 0$ (можно рассмотреть функцию $g(x) = f(x)^{-1}$). Это не поле.
- Если в M один элемент, то это кольцо изоморфно $\mathbb{R}$. Тогда там нет делителей 0, все элементы обратимые, и это поле. ■

№4. $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i b^{p-i}$, и все слагаемые в этой сумме равны 0, потому что $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ и числитель делится на p, а знаменатель нет. ■