Решения занятия №23

№1. Король со свитой едет из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает в пункт B гонцов, которые едут со скоростью 20 км/ч. С каким интервалом они прибывают в B?

Решение. Заметим, что через час после выезда гонца, он будет в 20 км от точки его выезда, а король — в 5 км, т.е. расстояние между двумя гонцами 15 км, и гонцы проезжают его за 45 минут. Ответ: 45 минут. ■

№2. На столе лежат четыре карточки: «А», «Б», «4», «5». На каждой карточке с одной стороны — буква, а с другой — натуральное число. Какие карточки надо перевернуть, чтобы узнать, правда ли, что если на карточке написано чётное число, то с другой стороны — гласная буква?

Решение. Заметим, что опровергнуть условие могут только карточки, у которых с одной стороны чётное число, а с другой — согласная буква. Тогда «А» и «5» нам навредить не могут, а «Б» и «4» нужно всё-таки проверить. ■

№3. Из набора домино выбросили все кости с пустышками. Можно ли все оставшиеся кости выложить в ряд?

Решение. Предположим, что можно. Рассмотрим, как встречается какое-нибудь число. Например, единица. Она встречается 7 раз. Поскольку внутри ряда она встречается чётное число раз, единица будет и на конце ряда. Аналогично на конце ряда будут и все остальные числа от 2 до 6. Их больше, чем концов ряда. Противоречие. ■

№4. В турнире участвуют 100 сумоистов разного веса; более тяжелый всегда побеждает. Сумоисты разбились на пары и провели поединки.Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки.Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призеров?

Решение. 1 призёр обязательно есть, самый тяжёлый сумоист. Но заметим, что матчи могли быть проведены так (1 — самый лёгкий, 100 — самый тяжёлый): $1-2, 3-4, \ldots, 99-100$, а во второй день $2-3, 4-5, \ldots, 98-99, 100-1$. ■

№5. Петя спускается по эскалатору метро, едущему вниз, наступая на каждую ступеньку. Как ему идти, чтобы наступить на большее число ступенек — помедленнее или побыстрее?

Решение. Рассмотрим ситуацию относительно системы отсчёта эскалатора. Мы движемся по нему, а к нам навстречу движется край этого эскалатора. Чем медленнее мы идём, тем больше эскалатора перед встречей нас и края эскалатора пройдёт край, и тем меньше эскалатора пройдём мы. Ответ: Побыстрее. ■

№6. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различны-ми цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

Решение. При вычёркивании любого набора цифр числа 1397245680, кроме шести последних, получаем что-то, либо кратное 5, либо чётное. Кроме того, 1397 делится на 11. ■

№7.а) Дана клетчатая доска размером 9×10 клеток. Играют двое, ходят по очереди; за ход нужно вычеркнуть одну горизонталь или вертикаль, на которой есть хотя бы одна невычеркнутая клетка.Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу — начинающий или его противник, и как ему играть?

Решение. Выигрывает первый. Первый ход — 8×10. Потом когда второй отрезает горизонталь, первый тоже отрезает горизонталь, и наоборот. Тогда в каждый момент времени после хода второго размер доски по какому-то направлению нечётный, значит, он не выиграет. ■

№8. Нарисуйте многоугольник и точку внутри него так, чтобы не было стороны многоугольника, которая видна из этой точки полностью.

Решение. Зачёт по рисунку школьника. ■

№9. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

Решение. Да, например, 299 и 300. ■

№10. Могут ли две биссектрисы треугольника пересекаться под прямым углом?

Решение. Нет, потому что тогда сумма половин двух углов треугольника — $90°$, а сумма соответствующих углов — $180°$. ■

№11. Как разрезать куб на три равные пирамиды?

Решение. Например, так. Общая вершина всех пирамид — вершина куба, а основания — три грани, которые с этой вершиной не граничат. ■

№12. Каждая клетка таблицы размером 7×8 (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый.При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?

Решение. Заметим, что всего красных и жёлтых клеток поровну, потому что из условия на строки получается, что больше красных, а из условия на столбцы - что больше жёлтых. Значит, их в каждом столбце поровну и больше, чем зелёных. Значит, в каждом столбце их по 3. Значит, всего их по 24, то есть зелёных $56 - 48 = 8$. ■