Перечисление графов

Воронов Всеволод Александрович

Берендеевы поляны, 15–23 августа 2019 г.

Определение 1. Помеченным графом называется граф на заданных пронумерованных вершинах.

Теорема 1. Число помеченных графов на n вершинах ровно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Доказательство. Каждая пара вершин либо соединена, либо нет. ■

Определение 2. Производящей функцией последовательности a_i называется выражение $A(x) = \sum\limits_i a_i \cdot x^i$.

Примеры.

- Если $a_i = 1$, то $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
- Если $a_i = i+1$, то $A(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
- Если $a_i = 2^i$, то $A(x) = \dfrac{1}{1-2x}$.
- Если $a_i = (-1)^{i-1}i$, то $A(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
- Если $a_i = i(i+1)$, то $A(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.
- Если $a_i = (i+1)^2$, то $A(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3} - \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
- Если $a_i = (i+1)^3$, то $A(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4} - \dfrac{6}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
- Пусть a_i — числа Фибоначчи. Тогда $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$, т.е. $\dfrac{A(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = \dfrac{A(x) - a_0}{x} + A(x)$ и после решения этого уравнения получаем $A(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$, т.е. $a_i = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^i + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i$.

Свойства рядов.

- Ряды можно складывать: $A(x) + B(x) = \sum\limits_i (a_i + b_i)x^i$.
- Ряды можно умножать: $A(x)B(x) = \sum\limits_i x^i \cdot \sum\limits_j (a_j + b_{i-j})$.
- Ряды можно обращать: $\dfrac{1}{c - A(x)} = \sum\limits_i (\frac{A}{c})^i(x)$, если $a_0 = 0$. $\left(\dfrac{A(x)}{B(x)} = A(x) \cdot \dfrac{1}{B(x)}\right)$.
- Из ряда с свободным членом, большим нуля, или равным нулю при условии, что минимальное n такое, что $a_n \neq 0$, чётно, можно извлекать корень, причём свободный член результата будет положительным корнем из свободного члена. **Доказательство.** Будем находить коэффициенты корня $K(x)$ по очереди. Вначале разделим ряд на x^n, чтобы компенсировать это, в конце умножим $K(x)$ на $x^{\frac{n}{2}}$. $k_0 = \sqrt{a_0}$, и для всех остальных коэффициентов получаем такое уравнение: $\sum\limits_i k_i k_{m-i} = a_m$, линейное уравнение относительно k_m с старшим членом, не равным 0. Кроме того, очевидно, что при отрицательном свободном члене или если $n \not| 2$, $K(x)$ найти не удастся. ■

Бинарные корневые деревья на n вершинах

Определение 3. Бинарными корневыми деревьями называются деревья с выделенной вершиной (корнем), подвешенные на корне, такие, что от каждой вершины вниз идут не более двух рёбер и рёбра, идущие вниз из вершины, пронумерованы подмножеством $\{R, L\}$.

Пусть b_i — количество таких деревьев. Заметим, что $b_{n+1} = \sum\limits_i b_i b_{n-i}$, поэтому $\dfrac{B(x) - b_0}{x} = B^2(x)$. Если решить это уравнение (например, через дискриминант), получится $B(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Чтобы узнать знак перед корнем, посмотрим на свободный член числителя. Если в числителе стоит знак $+$, этот член равен двум и делить на $2x$ нельзя. Значит, $B(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ (это числа Каталана).

Бином Ньютона

$$(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} \cdot x^k, \text{ где } \binom{\alpha}{k} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}$$

Производящая комбинаторика

- Если a_n — число способов представить n в виде суммы m слагаемых (порядок не важен), то $a_n = \dfrac{1}{(1-x)^n}$.
- Если a_n — число способов представить n в виде суммы m слагаемых (порядок важен), то $a_n = \prod\limits_i \dfrac{1}{1-x^i}$.

Группы перестановок

Определение 4. Группа — множество G с определённой на ней операцией $\times$ со следующими свойствами:

1. $\forall a, b \in G \ a \times b \in G$;
2. $\exists e \in G : \forall a \in G \ e \times a = a \times e = a$;
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : \ a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e$;
4. $\forall a, b, c \in G \ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Определение 5. Симметрическая группа S_n — множество всех перестановок $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ с операцией их композиции. Запись операций: $(a_{1,1}a_{1,2}\dots a_{1,m_1})\dots(a_{k,1}\dots a_{k,m_k})$ переставляет элементы по циклу: $a_{k,l}$ переходит в $a_{k,l+1}$. $|S_n| = n!$

Определение 6. Подгруппа H группы G — подмножество G такое, что $\forall a, b \in H \ a \times b \in H$.

Определение 7. Стабилизатор $St(n, M)$ — подгруппа S_n такая, что все действия из неё оставляют элементы M на месте.

Определение 8. Цикловой индекс — полином от n переменных: $z(\alpha) = \prod_i x_i^{f(i)}$, где $f(i)$ — кол-во циклов длины i у α; $Z(A) = \operatorname{avg}_{\alpha \in A} z(\alpha)$. Например:

$z((1)(2)(3)) = x_1^3, z((13)(2)) = x_1 x_2, Z(S_2) = \dfrac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2), Z(S_3) = \dfrac{1}{6} \cdot (x_1^3 + 2x_3 + 3x_1x_2)$.

Лемма 2. Для любой группы перестановок G выполняется $|G| = |Orb(x)| \cdot |St(x)|$, где $Orb(x)$ обозначает орбиту точки x (множество точек, в которые может перейти x при действии действий из G).

Доказательство. Пусть $Orb(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда количество перестановок, переводящих x_i в x_j, не зависит от i и j. Действительно, можно взять все перестановки, переводящие x_i в себя, и при умножении их на конкретную перестановку, переводящую x_i в x_j, получатся все перестановки такого вида. ■

Лемма 3 (Бернсайд). $|Orb_G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum\limits_{\alpha} (fix(\alpha))$, где $fix(\alpha)$ — число неподвижных точек перестановки.

Доказательство. Возьмём по одной вершине из каждой орбиты. Пусть мы взяли точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Запишем для этих точек утверждение 2 и сложим. Получим $|Orb_G| \cdot |A| = \sum\limits_i |Orb(x_i)| \cdot |St(x_i)|$, откуда всё следует. ■

Лемма 4. Утверждение 3 верно для объединения нескольких орбит.

Доказательство. Это частный случай 3. ■

Присвоим каждой орбите вес $w(Orb(x))$ и определим $w(fix(\alpha))$ как сумму весов орбит неподвижных точек α.

Лемма 5 (Взвешенный Бернсайд). $\sum\limits_i w(Orb_i) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum\limits_{\alpha} w(fix(\alpha))$.

Доказательство. Аналогично 3. ■

Пусть $P = \{0, 1\}, G = (V, E)$. Рассмотрим P^V — множество всевозможных $f : V \to P$. Пусть G — подгруппа S_n. Определим $\alpha(f) = x \mapsto f(\alpha x)$ для $f \in P^V$. Наконец, определим $w(p) = p$ для $p \in P$ и $w(f) = \sum\limits_{v \in V} w(f(v))$ для $f \in P^V$.

Пусть $\varphi(y) = a_0 + a_1 y + \ldots$ — производящая функция от количеств элементов P по их весам (для $P = \{0, 1\}$ $\varphi(y) = 1 + y$), а $\Phi(y) = b_0 + b_1 y + \ldots$ — производящая функция от количеств элементов P^V по их весам с точностью до перестановок из A.

Теорема 6 (Пойа). $\Phi(y) = Z(A; \varphi(y), \varphi(y^2), \ldots, \varphi(y^n))$.

Применение теоремы Пойа

Пример. Хотим посчитать раскраски ожерелья из 4 элементов в 2 цвета с точностью до поворотов и переворотов. Тогда $A = D_4$. Известно, что $Z(D_4) = \frac{1}{8} \cdot (s_1^4 + 3s_2^2 + 2s_4 + 2s_1^2 s_2)$. Тогда $\Phi(y) = \frac{1}{8} \cdot ((1+y)^4 + 3(1+y^2)^2 + 2(1+y^4) + 2(1+y)^2(1+y^2))$. Подставим $y = 1$ (тогда все s_i равны 2): $\Phi(1) = 6$, что равно количеству перестановок ожерелья. Также при раскрытии скобок в $\Phi(y)$ коэффициент при y^n будет равен количеству раскрасок с n синими элементами — $\Phi(y) = 1 + y + 2y^2 + y^3 + y^4$. Также утверждается, что $Z(A; m, m, \ldots, m)$ равно количеству раскрасок ожерелья в m цветов (это так, потому что соответственное взвешенное число имеет вид $1 + y + y^2 + \ldots + y^{m-1}$ и мы подставляем $y = 1$).

Подсчёт графов

Рассмотрим K_n и пронумеруем его рёбра. Применим на рёбра группу S_n, посчитаем от получившейся группы перестановок $\frac{n(n-1)}{2}$ элементов цикловой индекс и применим теорему. Получим кол-во раскрасок рёбер полного графа в 2 цвета, т.е. кол-во графов на n вершинах.

Доказательство теоремы 6. Заметим, что число раскрасок — это число орбит на множестве раскрасок. Применим 5, получим $\Phi(x) = \frac{1}{|A|} \cdot \sum\limits_{\alpha} w(fix(\alpha))$. Пусть вес раскраски стоимости k равен x^k. Найдём $w(\alpha) := \sum\limits_{y \in fix(\alpha)} w(y)$. Пусть $\alpha = (\overbrace{\ \ldots\ }^{l_1})(\overbrace{\ \ldots\ }^{l_2})\ldots$. Пусть раскраска имеет стоимость k. Тогда $k = \sum c_i l_i$, где c_i — стоимость вершин i-го цикла. Можно понять, что число раскрасок стоимости k равно количеству способов представить k в виде такой суммы для фиксированных l_i и неотрицательных целых c_i. Тогда $w(\alpha) = \prod\limits_i \dfrac{1}{1 - x^{l_i}}$. Вернее, так было бы при наличии ровно одного цвета каждой стоимости, а в нашем случае $w(\alpha) = \prod\limits_i \varphi(x^i)$. С другой стороны, слагаемое $\prod\limits_i s_{l_i}$ в цикловом индексе выражается $w(\alpha)$, но это то же самое, что мы бы получили после подстановки $s_{l_i} = \varphi(x^{l_i})$ в условие теоремы. ■

Число корневых деревьев на n вершинах

Пусть у корня дерева степень k. Пусть $t_{n,k}$ — число способов сопоставить каждому из соседей корня дерево на меньшем числе вершин так, что суммарное число вершин у этих деревьев равно $n-1$. Обозначим за $T_k(x)$ производящую функцию от $t_{n,k}$ по n, а за $T(x)$ — сумму $T_k(x)$ по всем k. Тогда по 6 выполняется

$$Z(S_n; T(x), T(x^2), \ldots, T(x^k))x = T_k(x).$$