Решения занятия №15

№1. У всех глупых марсиан по 3 руки, а некоторые трёхрукие марсиане пьют кефир. Можно ли утверждать, что некоторые глупые марсиане пьют кефир?

Решение. Нет, нельзя. Может быть, что половина трёхруких марсиан глупые и не пьют кефир, а остальные — умные и пьют. ■

№2. Оля и Аня живут в одном доме и выходят в школу вместе. Каждый шаг Оли на 10% длиннее Аниного, но Оля делает в минуту на 10% меньше шагов, чем Аня. Кто раньше придёт в школу?

Решение. Олин шаг в $\frac{11}{10}$ раз длиннее, но в минуту она делает $\frac{9}{10}$ от количества шагов Ани. Значит, за минуту она проходит $\frac{99}{100}$ от расстояния, проходимого Аней. Аня идёт быстрее и придёт раньше. ■

№3.а) Чему равна последняя цифра числа 6^{2019}? **б)** 9^{2019}? **в)** 17^{2019}? **г)** 22^{2019}?

Решение. Будем рассматривать цикл, по которому изменяется остаток k^n по модулю 10 при изменении n (это и будет его последняя цифра).

а) $6 \to 6$, ответ — 6.

б) $9 \to 1 \to 9$, ответ — 9.

в) $7 \to 9 \to 3 \to 1 \to 7$, ответ — 3.

г) $2 \to 4 \to 8 \to 6 \to 2$, ответ — 8. ■

№4. В трёх коробках лежат шары: в одной — два белых, в другой — два чёрных, в третьей — белый и чёрный. На коробках наклеены этикетки ББ, ЧЧ и БЧ так, что содержимое каждой коробки не соответствует этикетке. Как, вынув один шар, узнать, в какой коробке что лежит?

Решение. Вынем шар из коробки БЧ. Не умаляя общности, он чёрный, и там было два чёрных шара. Значит, в ББ белый и чёрный, а в ЧЧ — два белых. ■

№5. На столе лежат четыре яблока весом 200г, 300г, 400г и 450г. Карлсон, а затем Малыш берут по яблоку и одновременно начинают есть их с одинаковой скоростью. Доевший берет следующее яблоко, каждый хочет съесть как можно больше. Какое яблоко выбрать Карлсону вначале?

Решение. Карлсон берёт яблоко в 300 граммов. К тому моменту, как он его доест, яблоко либо в 400 граммов, либо в 450 граммов будет свободно. С ним Карлсон набирает больше половины. Ответ находится перебором яблок. ■

№6. Леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После порубки сосны будут составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса вырубит леспромхоз?

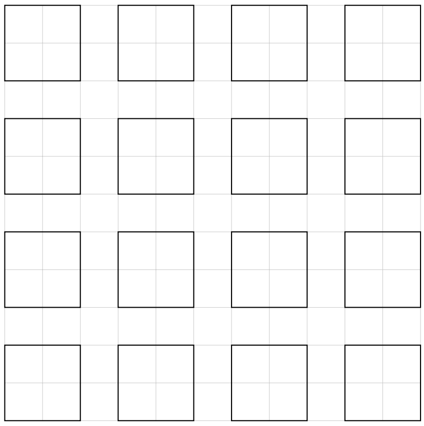
Решение. Изначально деревьев было в 100 раз больше, чем не-сосен, а стало в 50 раз больше, чем не-сосен. При этом количество не-сосен не изменилось. Ответ: половину леса. ■

№7. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей в классе у Пети? (Найдите все решения).

Решение. Рассмотрим Васю — одноклассника Пети, у которого больше всего друзей, и Колю — одноклассника, у которого меньше всего друзей. Заметим, что либо у Коли 0 друзей, либо у Васи все ученики класса (кроме него самого) — друзья. В обоих случаях Вася дружит с Петей, а Коля нет. Уберём из класса Васю и Колю. Все количества друзей у одноклассников Пети снова различны, у Пети теперь на 1 друга меньше, в классе на 2 человека меньше. Так можно сделать 12 раз, после чего останется Петя и ещё один человек. Они либо дружат, либо нет, причём оба варианта возможны. Ответ: 12 или 13. ■

№8. Из листа клетчатой бумаги размером 11×11 клеток вырезали по клеткам 15 квадратиков 2×2 клетки. Докажите, что можно вырезать еще один такой квадратик.

Решение. См. рисунок. Каждый квадрат пересекается ровно с одним нарисованным. ■



№9.а) Двое играют в такую игру: имеется куча из 21 камня, ходят по очереди, за ход игрок забирает из кучи 1 или 3 камня. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре и как ему играть?

Решение. Вне зависимости от того, как ходят игроки, игра продлится нечётное количество ходов, так как сумма чётного количества единиц и троек чётна. Значит, выиграет первый. ■

б) То же, но можно брать 1, 2 или 4 камня.

Решение. Докажем, что первый проигрывает тогда и только тогда, когда текущее количество камней делится на 3. Действительно, если оно не делится, то можно вычесть 1 или 2 так, чтобы оно разделилось, а если делится, то в любом случае после хода делиться не будет. Кроме того, если камней 0, то проигрывает первый. Сейчас камней 21, это число делится на 3, значит, выигрывает второй. ■

в) То же, но можно брать 1, 3 или 4 камня.

Решение. Докажем, что первый проигрывает тогда и только тогда, когда текущее количество камней даёт остаток 0 или 2 при делении на 7.[1] Действительно, из всех остальных остатков можно перейти в один из этих двух; из этих двух можно перейти только в другой остаток; количество камней в финальной позиции (в которой проигрывает тот, чей сейчас ход) имеет остаток 0. Сейчас оно 0, значит, выигрывает второй. ■

[1] Это можно понять так. Если в кучке 0 камней, выигрывает второй, если 1, 3 или 4 камня, выигрывает первый, если 2 — второй, если 5 или 6 — первый, если 7 — второй, и т.п.