

**Геометрия, 1 курс**  
**Городенский**

*3 сентября 2020 г. — 3 октября 2020 г.*

Формула оценки:  $\min\left(\frac{S+C+E+L+K}{40}, 10\right)$ , где  $S, C, E, L, K$  — оценки за семинары, коллоквиум, экзамен, листки и контрольные; каждая из этих оценок от 0 до 100.

## ВЕКТОРНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

**Определение 1. Векторное пространство** — множество  $V$  (элементы которого называются «векторами») с операциями  $+: V \times V \rightarrow V$  и  $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ , обладающими следующими свойствами:

- $V$  — абелева группа по сложению.
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \bar{v} \in V: \lambda(\mu\bar{v}) = (\lambda\mu)\bar{v}$ ;
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \bar{v} \in V: (\lambda + \mu)\bar{v} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{v}$ ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{F}, \bar{v}, \bar{w} \in V: \lambda(\bar{v} + \bar{w}) = \lambda\bar{v} + \lambda\bar{w}$ ;
- $\forall \bar{v} \in V: 1 \cdot \bar{v} = \bar{v}$ .

**Определение 2. Линейное отображение** — функция  $f: U \rightarrow W$  (между векторными пространствами), такая, что  $f(\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}) = \lambda f(\bar{u}) + \mu f(\bar{v})$  для всех  $\bar{u}, \bar{v} \in U$ .

**Определение 3. Изоморфизм пространств** — биективное линейное отображение.

**Определение 4. Одномерное пространство** — пространство  $V$ , такое, что в нём есть  $\bar{v} \neq \bar{0}$  и  $\forall \bar{u} \in V \exists \lambda: \lambda\bar{v} = \bar{u}$ .

**Определение 5. Двумерное пространство** — пространство  $V$ , такое, что в нём есть непропорциональные  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$ , и  $\forall \bar{u} \in V \exists \lambda, \mu \in \mathbb{F}: \bar{u} = \lambda\bar{v} + \mu\bar{w}$ .

**Определение 6. Определитель двумерной матрицы** — выражение

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \det \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

**Лемма 1.** Определитель билинеен и кососимметричен (т.е.  $\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = -\det(\bar{v}_2, \bar{v}_1)$ ).

**Теорема 2 (Крамер).** Векторы  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  образуют в  $\mathbb{F}^2$  базис тогда и только тогда, когда  $\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \neq 0$ . В этом случае для любого вектора  $\bar{u} \in \mathbb{F}^2$  выполняется

$$\bar{u} = \frac{\det(\bar{u}, \bar{v}_2)}{\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2)} \bar{v}_1 + \frac{\det(\bar{v}_1, \bar{u})}{\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2)} \bar{v}_2.$$

**Определение 7. Площадь ориентированного параллелограмма** — функция  $S: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ , обладающая следующими свойствами:

- $S(\bar{a}, \bar{b}) = S(\bar{a}, \bar{b} + \lambda\bar{a}) = S(\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{b})$ ;
- $S(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda S(\bar{a}, \bar{b}) = S(\bar{a}, \lambda\bar{b})$ .

**Теорема 3.** На любом двумерном  $V$  существует ровно одна функция  $S$  с точностью до пропорциональности.

**Доказательство.** С одной стороны,  $f(\bar{a}, \bar{b}) = \det(\bar{a}, \bar{b})$  подходит. Пусть  $\bar{u}, \bar{v}$  — базис на  $V$  и  $c = S(\bar{u}, \bar{v})$ . Рассмотрим  $S(\bar{a}, \bar{b})$ :

$$S(\bar{a}, \bar{b}) = S(x_1\bar{u} + y_1\bar{v}, x_2\bar{u} + y_2\bar{v}) = S(\bar{u}, \bar{v}) \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) = c \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**Определение 8. Аффинное пространство** — множество  $\mathbb{A}$  (элементы которого называются «точками») такое, что  $\forall a, b \in \mathbb{A} \exists \bar{ab} \in V$  со следующими свойствами:

- $\forall p \in \mathbb{A}$  верно, что  $f: \mathbb{A} \rightarrow V, q \mapsto \overline{pq}$  биективно;
- $\forall a, b, c \in \mathbb{A}: \overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ .

**Определение 9. Центр тяжести набора точек** — точка  $c$ , такая, что  $\sum_i \mu_i \overline{cp_i} = 0$ , где  $p_i$  — точки набора, а  $\mu_i \in \mathbb{F}$  — веса этих точек.

**Теорема 4.** Если  $\sum \mu_i \neq 0$ , то центр тяжести существует и единственен.

**Лемма 5.** Пусть есть системы точек  $(p_i, \lambda_i)$  и  $(q_i, \mu_i)$ , при этом  $\sum \lambda_i \neq 0, \sum \mu_i \neq 0$ . Пусть  $P, Q$  — центры тяжести этих систем. Тогда центр тяжести объединения этих систем совпадает с центром тяжести системы  $\{(P, \sum \lambda_i), (Q, \sum \mu_i)\}$ .

**Определение 10. Коллинеарные точки** — три элемента  $a, b, p \in \mathbb{A}$  такие, что  $\overline{pa} \sim \overline{pb}$ .

**Определение 11. Аффинная прямая** — множество таких  $p$ , что  $a, b, p$  коллинеарны для фиксированных  $a, b$ .

**Определение 12. Координатный репер** — тройка  $(O \in \mathbb{A}, \overline{v}, \overline{w})$  такая, что  $\overline{v} \not\sim \overline{w}$ . Если  $Y = O + \lambda \overline{v} + \mu \overline{w}$ , то пара  $(\lambda, \mu)$  называется координатами  $Y$  в этом репере.

**Определение 13. Треугольник** — тройка неколлинеарных точек из  $\mathbb{A}^2$ .

**Определение 14. Площадь треугольника** — функция  $S(a, b, c) = \frac{1}{2} S(\overline{ab}, \overline{ac})$ , где  $S(\overline{u}, \overline{v})$  — площадь параллелограмма.

**Лемма 6.** Для любых точек  $p, a, b, c \in \mathbb{A}^2$  таких, что  $a, b, c$  неколлинеарны, выполняется  $S(abc) = S(pab) + S(pbc) + S(pca)$ .

**Определение 15. Барицентрические координаты** — набор весов  $\alpha, \beta, \gamma$  такой, что  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  и  $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$  (где  $p$  — точка, координаты которой мы ищем).

**Лемма 7.** Координаты точки  $p$  равны  $\alpha = \frac{S(pbc)}{S(abc)}, \beta = \frac{S(pca)}{S(abc)}, \gamma = \frac{S(pab)}{S(abc)}$ .

## АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

**Определение 16. Полуаффинное преобразование** — биекция  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ , переводящая прямые в прямые.

**Определение 17. Дифференциал полуаффинного преобразования** — функция  $D_f : V \rightarrow V, \overline{ab} \mapsto f(a)f(b)$ .

### СВОЙСТВА

- $f$  сохраняет параллельность и переводит параллелограммы в параллелограммы.
- Дифференциал определён корректно, кроме того,  $D_f(\overline{v}) + D_f(\overline{w}) = D_f(\overline{v} + \overline{w})$ .
- $D_f(\lambda \overline{v})$  пропорционален  $D_f(\overline{v})$ .

Обозначим за  $\psi_v(\lambda)$  такую функцию  $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ , что  $D_f(\lambda \overline{v}) = \psi_v(\lambda) D_f(\overline{v})$ .

**Лемма 8.**  $\psi_v$  не зависит от  $v$  (далее мы будем обозначать эту функцию  $\psi$ ).

**Лемма 9.**  $\psi$  является автоморфизмом  $\mathbb{F}$ .

**Лемма 10.** Полуаффинное преобразование однозначно задаётся  $f(o)$  и  $D_f(\overline{v})$ , а дифференциал полулинеен, т.е.  $\exists \psi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}; D_f(\lambda \overline{u} + \mu \overline{v}) = \psi(\lambda) f(\overline{u}) + \psi(\mu) f(\overline{v})$ .

Рассмотрим в  $\mathbb{F}$  простое подполе (множество элементов вида  $\frac{1 \pm 1 \pm \dots \pm 1}{1 \pm 1 \pm \dots \pm 1}$ ). Очевидно, что на нём автоморфизм — это тождественное преобразование. Тогда если  $\mathbb{F}$  само простое (т.е.  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p$ ), то  $\psi(x) = x$ . Кроме того, из непрерывности  $\mathbb{R}$  получается то же самое для  $\mathbb{R}$ . Почему это так:  $x \in \mathbb{R} > 0 \iff \exists y : x = y^2$ , поэтому  $\psi$  будет монотонной, а ещё  $\psi(t) = t \forall t \in \mathbb{Q}$ .

**Теорема 11 (по анализу).**  $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  возрастает, и  $\psi(x) = x \forall x \in \mathbb{Q}$ . Тогда  $\psi(x) = x \forall x$ .

**Определение 18. Аффинное преобразование** — функция  $f : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$  (между аффинными пространствами над векторными пространствами  $U, W$ ), такая, что существует линейное отображение  $D_f : U \rightarrow V$  такое, что  $\forall p \in \mathbb{A}(U) : f(p) = f(o) + D_f(\overline{op})$  для некоторой фиксированной точки  $o \in \mathbb{A}(U)$ .

**Лемма 12.** В качестве  $o$  можно выбрать любую точку в  $\mathbb{A}(U)$ , и  $D_f$  не зависит от выбора.

**Лемма 13.** Отображение  $f : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  аффинно тогда и только тогда, когда

$$\forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}(U), \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{F} : f(\mu_1 p_1 + \dots + \mu_n p_n) = \mu_1 f(p_1) + \dots + \mu_n f(p_n).$$

**Лемма 14.** Аффинное преобразование  $f : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  однозначно задаётся значениями  $f(o)$  и  $D_f(e_i)$ , где  $o \in \mathbb{A}(U)$  и  $\{e_i\}$  — базис в  $\mathbb{U}$ .

**Лемма 15.** Для любого  $\triangle abc \in \mathbb{A}(U)$  и любых точек  $x, y, z \in \mathbb{A}(V)$  существует единственное аффинное преобразование, переводящее  $a, b, c$  в  $x, y, z$  соответственно.

**Определение 19. Произведение матриц** — такая матрица  $C = A \times B$ , что  $c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$ . В частности, произведение строки  $(a_1, \dots, a_n)$  на столбец  $(b_1, \dots, b_n)$  равно  $\sum_i a_i b_i$ .

Пусть  $V, W$  двумерные,  $f : V \rightarrow W$  линейно,  $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$  и  $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ . Тогда

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, все линейные отображения имеют вид  $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$ , где столбцы  $A$  — это координаты  $f(e_k)$  (по крайней мере для двумерных пространств, но для  $n$ -мерных это тоже верно).

**Лемма 16.** Любые 3 различные конкурентные прямые в  $\mathbb{A}(U)$  можно перевести в любые 3 различные конкурентные прямые в  $\mathbb{A}(V)$  ровно одним аффинным преобразованием с точностью до гомотетии в точке пересечения прямых.

Пусть у нас 4 конкурентные прямые, пересекающиеся в точке  $O$ , и с направляющими векторами  $e_1, e_2, e_1 + e_2, e_2 + te_1$  (с концами в точках  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ), где  $t \in \mathbb{F} \cup \infty$  (при значениях  $\infty, 0, 1$  получаются соответственно первая, вторая и третья прямые). Тогда если преобразование из прошлой задачи перевело первые 3 прямые в  $m_1, m_2, m_3$ , то 4-ю прямую оно переведёт в  $m_4$  с таким же значением  $t$ .

**Лемма 17.** В предыдущем рассуждении выполняется

$$t = \frac{S(\overline{OP_1}, \overline{OP_3})S(\overline{OP_2}, \overline{OP_4})}{S(\overline{OP_1}, \overline{OP_4})S(\overline{OP_2}, \overline{OP_3})}.$$

**Определение 20. Двойное отношение четвёрки прямых** —  $t$  из леммы. Обозначение:  $(l_1 : l_2 : l_3 : l_4)$ .

**Как меняется площадь при аффинном преобразовании.** Можно считать, что  $f$  линейно, т.к. аффинное преобразование — композиция линейного и сдвига. Пусть  $S(\bar{u}, \bar{v})$  — ненулевая функция площади. Тогда  $S_f(\bar{u}, \bar{v}) := S(f(\bar{u}), f(\bar{v}))$  — тоже функция площади (т.к.  $S_f(\lambda\bar{u}, \bar{v}) = \lambda S_f(\bar{u}, \bar{v})$  и  $S_f(\bar{u} + \lambda\bar{v}, \bar{v}) = S_f(\bar{u}, \bar{v})$ ). Значит, площадь при аффинном преобразовании умножается на какую-то константу.

**Определение 21. Определитель линейного преобразования** — такое число  $\det(f)$ , что  $S(f(\bar{u}), f(\bar{v})) = \det(f)S(\bar{u}, \bar{v})$  (это число равно определителю матрицы отображения  $f$ ).

Заметим, что композиция двух линейных отображений (в одном и том же векторном пространстве) линейна, и биективные линейные отображения обратимы. Значит, биективные линейные отображения образуют группу. Эту группу будем обозначать  $GL(V)$ . Кроме того, то же верно и для аффинных отображений, эту группу будем обозначать  $Aff(V)$ .

Обозначим  $\tau_{\bar{v}}$  — параллельный перенос на вектор  $\bar{v}$ . Пусть  $F$  аффинно. Тогда

$$F \circ \tau_{\bar{v}}(p) = F(p + \bar{v}) = F(p) + D_F(\bar{v}) \implies F \circ \tau_{\bar{v}} \circ F^{-1} = \tau_{D_F(\bar{v})}.$$

**Лемма 18.** Подгруппа  $Aff(V)$  из преобразований с фиксированной неподвижной точкой изоморфна  $GL(V)$ .

**Лемма 19.**  $Aff(V)$  изоморфна  $GL(V) \times V$ , и композиция двух преобразований из  $Aff(V)$  вычисляется следующим способом (это полупрямое произведение):

$$(v, F) \circ (w, G) = (v + F(w), F \circ G).$$

## ДЛИНЫ

В этом разделе мы предполагаем, что  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

**Определение 22. Скалярное произведение** — функция  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

- Билинейность:  $(ax + by, cz + dt) = ac(x, z) + ad(y, t) + bc(y, z) + bd(y, t)$  (здесь  $x, y, z, t$  — вектора, а  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ );
- Симметричность:  $(v, w) = (w, v)$ ;
- Положительность:  $(v, v) > 0$  при  $v \neq 0$ .

**Определение 23. Евклидова структура** — векторное пространство со скалярным произведением.

**Определение 24. Длина вектора** — число  $|v| = \sqrt{(v, v)}$ .

**Определение 25. Перпендикулярные вектора** — два вектора  $v, w$  такие, что  $(v, w) = 0$ .

### ПРИМЕРЫ ТАКИХ СТРУКТУР

- Стандартная евклидова структура:  $V = \mathbb{R}^n$  и  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum x_i y_i$ .
- Непрерывные функции  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , и скалярное произведение равно  $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ .

**Теорема 20 (Пифагор).**  $a \perp b$  тогда и только тогда, когда  $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$ .

**Лемма 21.**  $\forall \bar{a} \neq 0, \bar{b} \exists! b_a, b_{a\perp}$  со следующими свойствами:

- $b = b_a + b_{a\perp}$ ;
- $b_a = \lambda a$ ;
- $b_{a\perp} \perp a$ .

**Теорема 22 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца).**  $\forall a, b : (a, b)^2 \leq (a, a)(b, b)$ , и равенство тогда и только тогда, когда  $\lambda a + \mu b = 0$ .

**Доказательство.** Если  $a = 0$ , то утверждение тривиально. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда  $(b_{a\perp}, b_{a\perp}) \geq 0$  и равенство тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  пропорциональны. Тогда

$$0 \leq (b_{a\perp}, b_{a\perp}) = \left( b - a \frac{(a, b)}{(a, a)}, b - a \frac{(a, b)}{(a, a)} \right) = (b, b) - (b, a) \frac{(a, b)}{(a, a)} = \frac{(a, a)(b, b) - (a, b)^2}{(a, a)},$$

откуда и следует утверждение. ■

**Лемма 23 (Неравенство треугольника).**  $|a + b| \leq |a| + |b|$  и равенство, только если  $\lambda a + \mu b = 0$ , где  $\lambda \mu \leq 0$ .

**Доказательство.** Возведём в квадрат:  $(a+b, a+b) \stackrel{?}{\leq} (a, a) + (b, b) + 2|a||b|$ . Это равносильно тому, что  $(a, b) \leq |a||b|$ , что верно при  $(a, b) < 0$  и равносильно **Т. 22** в противном случае. ■

**Определение 26. Ортонормальный базис** — базис  $(e_1, e_2)$  т.ч.  $(e_1, e_2) = 0$  и  $|e_1| = |e_2| = 1$ .

**Лемма 24.** Ортонормальный базис всегда существует.

**Доказательство.** Пусть  $(a, b)$  — базис. Рассмотрим  $e_1 = \frac{a}{|a|}$  и  $e_2 = \frac{b_{a\perp}}{|b_{a\perp}|}$ . Они подходят. ■

**Определение 27. Матрица Грама** — матрица  $G_u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) \end{pmatrix}$ .

**Лемма 25.** Пусть  $\bar{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \bar{y} = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ . Тогда  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2) G_u \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

Рассмотрим аффинное пространство  $\mathbb{A}$ , ассоциированное с  $V$ .

**Определение 28. Отрезок** — множество таких  $x \in \mathbb{A}$ , что  $|x - a| + |b - x| = |b - a|$ .

**Лемма 26.** Пусть  $(u_1, u_2) = (e_1, e_2) G_u$ . Тогда  $s^2(u_1, u_2) = s^2(e_1, e_2) \det G_u$ .

**Лемма 27.** Если  $(e_1, e_2)$  и  $(e'_1, e'_2)$  — два ортонормальных базиса, то  $s(e_1, e_2) = \pm s(e'_1, e'_2)$ .

Из **Т. 27** следует, что есть два типа ортонормальных базисов: «положительно ориентированные» и «отрицательно ориентированные».

Пусть  $(e_1, e_2)$  положительно ориентированный и  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ . Тогда  $|u| = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Значит,  $\exists! t \in [0, 2\pi k) : u = \cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2$ . Это  $t$  называется *углом между  $e_1$  и  $u$* .

**Лемма 28.** Если  $|u| = 1$ , то  $(e_1, u) = \cos \angle(e_1, u)$  и  $s(e_1, u) = \sin \angle(e_1, u)$ .

**Лемма 29.** Для любых  $a, b$  выполняется  $\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a||b|}$  и  $\sin \angle(a, b) = \frac{s(a, b)}{|a||b|}$ .

**Тригонометрия.** Пусть  $(e, e^\perp)$  — ортонормальный базис,  $|f| = |g| = 1$ . Заметим, что если  $f = xe + ye^\perp$ , то  $f^\perp = xe^\perp - ye$ . Тогда

$$(e, e^\perp) \begin{pmatrix} \cos \angle(e, g) \\ \sin \angle(e, g) \end{pmatrix} = g = (f, f^\perp) \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = (e, e^\perp) \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f), -\sin \angle(e, f) \\ \sin \angle(e, f), \cos \angle(e, f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно вывести формулы для  $\sin(a + b)$  и  $\cos(a + b)$ .

## ДВИЖЕНИЯ

**Определение 29.** **Движение** — отображение  $f : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  евклидовой плоскости такое, что  $|f(a), f(b)| = |a, b|$ .

### СВОЙСТВА

- Любое движение переводит прямые в прямые.
- Любое движение биективно, а значит, аффинно.
- Движения сохраняют скалярное произведение.

Как мы знаем, любое движение — композиция движения с неподвижной точкой  $O$  и параллельного переноса (см. **Т. 19**). Попытаемся понять, как устроены линейные движения (они образуют группу, которая обозначается  $O(V)$ ). При движении ортонормальный базис  $(e_1, e_2)$  переходит в ортонормальный базис  $(f(e_1), f(e_2))$ . Будем считать, что  $s(e_1, e_2) = 1$ , тогда  $s(f(e_1), f(e_2)) = \pm 1$ . Если  $s(f(e_1), f(e_2)) = 1$ , то движение называется *собственным* (они образуют группу, которая обозначается  $SO(V)$ ), иначе *несобственным*.

**Лемма 30.** Любое собственное движение, сохраняющее точку  $O$ , является поворотом вокруг  $O$ , а несобственное — отражением относительно прямой, проходящей через  $O$ .

Будем обозначать  $\tau_v$  — сдвиг на вектор  $v$ ,  $\rho_{O, \varphi}$  — поворот вокруг  $O$  на угол  $\varphi$ ,  $\sigma_\ell$  — симметрия относительно прямой  $\ell$ .

**Лемма 31.** Композиция  $\tau_v \circ \rho_{O, \varphi}$  — собственное движение.

**Доказательство.** Если  $\varphi = 0$ , то это очевидно. Пусть  $\varphi \neq 0$ . Построим  $p, q$  так, что  $\overline{pq} = v$  виден из  $O$  под углом  $\varphi$ . Тогда эта композиция будет поворотом  $\rho_{p, \varphi}$ . ■

**Определение 30.** **Скольльзящая симметрия** — композиция  $\tau_v \circ \sigma_\ell$  такая, что  $\ell \perp v$  (преобразование однозначно определяет  $\ell$ , т.к. это ГИТ  $\frac{1}{2}(x + f(x))$ ).

**Лемма 32.** Любое несобственное движение является скольльзящей симметрией. Иными словами, даже если  $v, \ell$  не перпендикулярны,  $\tau_v \circ \sigma_\ell$  — скольльзящая симметрия.

**Доказательство.** Докажем, что  $\tau_v \circ \sigma_\ell = \tau_w \circ \sigma_{\tau_{v/2}(\ell)}$ , где  $w$  — ортогональная проекция  $v$  на  $\ell$ . Это так, потому что можно взять репер  $(O, e_1, e_2)$  для  $O \in \ell$  и  $e_1 \parallel \ell$  и на нём эти два преобразования одинаковы. ■

**Теорема 33 (Шаль).** Любое собственное движение евклидовой плоскости является сдвигом или поворотом, а любое несобственное — скольльзящей симметрией.

**Определение 31.** **Преобразование подобия** — отображение  $f : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$  евклидовой плоскости, если  $\exists \gamma \forall a, b : |f(a), f(b)| = \gamma |a, b|$ .  $\gamma$  называется коэффициентом подобия.