*Школа 179, 25 сентября 2019 г.*

# $q$-теорема Куммера

Обозначим $\Phi_n(q)$ — многочлены деления круга, т.е. такие, что $\prod\limits_{d|n}\Phi_d=[n]$.

**Лемма 1.** $[n]!=\prod\limits_{d\le n}\Phi_d^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}$.

**Доказательство.** Заметим, что $[n]!$ разбивается на множители, каждый из которых разбивается на $\Phi_d$, и каждый множитель вида $\Phi_d$ входит в следующие $q$-числа и только в них: $[d],[2d],\ldots,[\lfloor\frac{n}{d}\rfloor d]$. ■

**Теорема 2.** $Q^n_{n+m}=\prod\limits_{d\le m+n}\Phi_d^{\lfloor\frac{m+n}{d}\rfloor-\lfloor\frac{m}{d}\rfloor-\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}$.

**Доказательство.** Очевидно из 1. ■

**Лемма 3.** $\Phi_d(1)$ равно $p$, если $d=p^n$, и 1 в противном случае.

**Доказательство.** Посмотрим на $[p^{N+1}]=[p^N]\Phi_{p^{N+1}}$. Левая часть в точке $q=1$ равна $p^{N+1}$, а левый множитель — $p^N$, значит, правая часть равна $p$. С другой стороны, если $m$ не степень простого и равно $\prod\limits_i p_i^{\alpha_i}$, то $[m]$ делится на произведение $[p_i^{\alpha_i}]$, которое равно $m$ в точке $q=1$, значит, $\Phi_m(1)=1$. ■

**Теорема 4 (Куммер).** Степень вхождения $p$ в $C^n_{n+m}$ равно количеству переносов при сложении $n$ и $m$ в столбик в $p$-ричной системе исчисления.

**Доказательство.** Применим 2 и подставим $q=1$. Тогда по 3 степень вхождения $p$ в это выражение равна количеству множителей вида $\Phi_{p^k}$, которое равно количеству переносов. ■

**Лемма 5 ($q$-числа Каталана).** $Q^n_{2n}$ делится на $[n+1]$.

**Доказательство.** Заметим, что для всех $d|n+1$ выполняется $\lfloor 2\frac{n}{d}\rfloor>2\lfloor\frac{n}{d}\rfloor$. Действительно, при увеличении $n$ на 1 левое выражение увеличится на 1, правое на 2, и они оба станут равны $2\frac{n+1}{d}$ (и, соответственно, друг другу). Отсюда и следует утверждение задачи. ■