Теорема о бутерброде и её применения в комбинаторике

Григорьев Михаил Александрович

Берендеевы поляны, 22–25 августа 2019 г.

Определение 1. Множество точек называется выпуклым, если для любых точек X, Y, лежащих в множестве, в нём также лежат все остальные точки отрезка XY.

Теорема 1 (Хелли). Пусть дан набор множеств $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^d$, любые $d+1$ из которых пересекаются. Тогда и все множества пересекаются.

Теорема 2. Утверждение 1 верно для бесконечного набора множеств, если они ограничены и замкнуты.

Будем рассматривать *хорошие меры* — счётно-аддитивные функции μ из $\sigma \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ в $\mathbb{R}$, которые дают конечное положительное число на всём пространстве, непрерывны и обнуляются на гиперплоскостях. Например, можно рассматривать $f_T(X) = S(T \cap X)$ или $f_p(X) = \int\limits_X p(x, y)dxdy$.

Теорема 3 (Минковский, Радон). Для любого множества и любой хорошей меры существует точка p такая, что любая гиперплоскость, проходящая через p, делит множество в отношении не более чем $d : 1$ (имеется в виду отношение мер частей).

Доказательство. Пусть $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. Рассмотрим каждую «направленную» гиперплоскость. Для неё есть положение, отсекающее «слева» от неё множество меры $\frac{d}{d+1}$. Рассмотрим все полупространства такого вида. Заметим, что любые $d+1$ из них имеют общую точку. Действительно, пусть нет. Тогда их дополнения (вернее, их части с положительной мерой) не пересекаются. Посмотрим на полупространства меры $\frac{1}{d+1} + \varepsilon$ и устремим ε к нулю сверху, получим противоречие. Таким образом, любые $d+1$ множества пересекаются, значит, по 1 они все пересекаются. ■

Теорема 4 (о бутерброде). В d-мерном пространстве даны d хороших мер. Тогда существует гиперплоскость такая, что по обе стороны от неё все меры совпадают.

Лемма 5. Пусть есть n точек общего положения в d-мерном пространстве. Тогда можно взять такой радиус R, что если взять шары радиуса R вокруг каждой точки, что никакая гиперплоскость не пересекает $d+1$ шар.

Доказательство. Допустим, для любого радиуса можно пересечь не менее $d+1$ шара. Обозначим за l_ε — гиперплоскость такую, что если у всех шаров радиус ε, то шары $B_{i,\varepsilon}$ для $i = 1, \ldots, m$ пересекаются этой гиперплоскостью. Заметим, что всего количество наборов по m шаров конечно, значит, в последовательности $B_{i,\varepsilon \cdot 2^{-k}} | k \in \mathbb{N}$ какое-то множество шаров встречается бесконечное количество раз. Тогда можно сделать предельный переход по этой подпоследовательности и получить, что центры этих шаров лежат в одной гиперплоскости — противоречие. ■

Теорема 6 (о дискретном бутерброде). В d-мерном пространстве дано множество точек общего положения, покрашенное в d цветов. Тогда существует гиперплоскость такая, что по обе стороны от неё количества точек каждого цвета совпадают, а на плоскости лежит не более 1 точки каждого цвета.

Доказательство. Пусть все количества точек нечётны (если чётны, можно убрать одну из точек, сделать то же самое, затем вернуть точку и немного подвигать искомую гиперплоскость). Сделаем такую меру для каждого цвета: возьмём шар достаточно малого радиуса вокруг каждой точки, и пусть мера от шара равна 1, если точка и мера одного цвета. Применим 4. Шары каждого цвета разделятся на 2 группы. Заметим, что:

- Для каждого цвета есть шар этого цвета, который пересекает гиперплоскость из Теоремы.
- Всего по 5 пересечено не более d шаров.

Тогда для каждого цвета пересечён ровно один шар этого цвета, а т.к. все шары пересекаются гиперплоскостью в центре, утверждение задачи выполнено. ■

Теорема 7. Есть 100 коробок, в каждой из которых лежат яблоки, апельсины и бананы. Тогда можно выбрать 51 из них, что в них не меньше половины яблок, не меньше половины апельсинов и не меньше половины бананов.

Доказательство. Расставим любые 100 точек общего положения в пространстве. Возьмём достаточно маленький шар вокруг каждого из них (с радиусом из 5). Поставим для каждого из них три меры — $\mu_A(i)$ — вес яблок в i-й коробке, μ_B — вес бананов, μ_O — вес апельсинов. Применим теорему о бутерброде. Тогда шары разобьются на 3 группы. В одной из них не более 3 шаров. Пусть там n. Тогда взяв из «меньшей» (по количеству шаров) группы все шары + эти n, можно добиться такого ответа: $n + \left[\frac{100-n}{2}\right]$, и при $n \leq 3$ это число не больше 51. ■

Теорема 8 (Алон, Акияма). В d-мерном пространстве есть dn точек общего положения, покрашенных в d цветов, причём каждого цвета поровну. Тогда их можно разбить на группы так, что в каждой группе ровно одна точка каждого цвета и выпуклые оболочки групп не пересекаются.

Доказательство. Доказываем по индукции. Для $n = 1$ это очевидно.

Шаг индукции. Применим 6. Тогда на гиперплоскости пересечения либо нет точек, либо по одной каждого цвета. Возьмём все точки на гиперплоскости пересечения и объединим их в одну группу, затем применим предположение индукции для двух других групп. ■

Определение 2. Триангуляцией называется разбиение многоугольника на треугольники такое, что любая пара треугольников либо не пересекается, либо пересекается по стороне, либо пересекается по вершине.

Лемма 9 (Шпернер). Триангуляция n-мерного симплекса покрашена в $n+1$ цвет — $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — так, что на грани a_i нет вершин цвета a_i. Тогда существует $n+1$-цветный симплекс триангуляции.

Доказательство. Доказываем по индукции. Для $n = 1$ это очевидно.

Шаг индукции. Назовём грань *дверью*, если его концы покрашены в цвета a_i для всех $i < n+1$. Заметим, что в симплексе нечётное число дверей тогда и только тогда, когда либо симплекс граничит с исходным, либо он разноцветный. Посчитаем количество пар (дверь, $\triangle$). С одной стороны, их нечётно, т.к. на границе исходного симплекса нечётное число дверей. С другой стороны, чётность их количества совпадает с чётностью количества разноцветных симплексов. Следовательно, разноцветных симплексов нечётно. ■

Теорема 10 (Брауэр). Пусть отображение f из компакта в $\mathbb{R}^2$ в себя непрерывно. Тогда у него есть неподвижная точка. (определение компакта ниже)

Доказательство. Доказываем для треугольника. Пусть это правильный треугольник с вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Будем триангулировать треугольник с целью применить предельный переход в 9. Пусть вершина триангуляции (x_1, x_2, x_3) перешла в (f_1, f_2, f_3). Заметим, что $\sum f_i = \sum x_i$, значит, для какого-то i верно $x_i \geq f_i$. Покрасим вершину в такой цвет (если есть несколько вариантов, выберем почти любой — при перекрашивании вершины, например, $(1,0,0)$ выберем цвет 1, а при перекрашивании $(0,y,z)$ выберем любой другой цвет). Будем триангулировать так: делим каждую сторону на m частей и проводим прямые, параллельные сторонам, и устремляем m к бесконечности. После предельного перехода через 12 получим $x_i \geq f_i$ для трёхцветной «точки», т.е. $x = f(x)$.*Замечание: то же доказательство работает для симплекса в n-мерном пространстве.* ■

Определение 3. Компакт — такое множество, что для любой последовательности с элементами из него есть сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 11. Куб $[0,1]^n$ является компактом.

Доказательство теоремы 11 #1. Будем за шаг делить куб пополам в каком-то направлении (перпендикулярном Ox_i), в котором мы его не делили последние $n-1$ шагов, и после каждого шага выбирать половину с бесконечностью точек и брать из неё любую точку. Тогда взятая последовательность сходится. ■

Доказательство теоремы 11 #2. Доказываем по индукции. Для $n=1$ верно.

Шаг индукции. Возьмём подпоследовательность, сходящуюся по первым n координатам. Из неё по теореме для $n=1$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по $n+1$-й координате. Она подходит. ■

Теорема 12. Любое замкнутое ограниченное множество S — компакт.

Доказательство. Опишем вокруг множества достаточно большой куб. Этот куб является компактом, следовательно, для любой $a_i \subset S$ есть сходящаяся $b_i \subset a_i$. Тогда по замкнутости S предел b_i тоже лежит в S. ■

Лемма 13 (Таккер). Триангуляция правильного $2n$-угольника покрашена в цвета $\pm 1, \pm 2$ так, что противоположные вершины покрашены в противоположные цвета. Тогда существует пара соединённых вершин, покрашенных в противоположные цвета.

Теорема 14 (Борсук, Улам). Пусть $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ из n-мерной сферы в n-мерную плоскость непрерывна и нечётна (т.е. $f(-x) = -f(x)$). Тогда есть $x : f(x) = 0$.

Доказательство теоремы 4 при $n=1$. Пусть $f(x) = \mu((x,+\infty)) - \mu((-\infty,x))$. Тогда $f(+\infty) > 0, f(-\infty) < 0$, значит, по непрерывности есть точка такая что $f(0) = 0$. ■

Доказательство теоремы 4 при $n=2$. Для каждого направления прямой по непрерывности есть такое положение, что $\mu_1(H_l^+) = \mu_1(H_l^-)$. Пусть $f(\varphi) = \mu_2(H_{l_\varphi}^+) - \mu_2(H_{l_\varphi}^-)$. Заметим, что $f(\varphi) = -f(\varphi+\pi)$. Тогда по непрерывности для какого-то φ выполняется $f(\varphi) = 0$. ■

Доказательство теоремы 4 через 14. Для каждого направления гиперплоскости есть такое положение, что $\mu_1(H_l^+) = \mu_1(H_l^-)$. Пусть

$$f(v) = x_1(\mu_2(H_l^+) - \mu_2(H_l^-)) + \ldots + x_{d-1}(\mu_d(H_l^+) - \mu_d(H_l^-))$$

— функция из сферы в d-мерное пространство. Заметим, что она нечётна и непрерывна, тогда по 14 есть точка, где она обнуляется. Эта точка искомая. ■

Кнезеровские графы

Определение 4. Кнезеровский граф $KG(n,k)$ — граф, вершины которого — k-элементные подмножества множества из n элементов, и две вершины соединены ребром, если соответствующие подмножества не пересекаются.

Кликовое число такого графа равно $\omega(KG(n,k)) = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, а на число независимости можно написать такую оценку — $\alpha(KG(n,k)) \le \binom{n-1}{k-1}$.

Теорема 15 (Эрдёш, Туран). $\alpha(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$.

Теорема 16. $\chi(KG(n,k)) \le n - 2k + 2$.

Доказательство. Пусть исходное множество было множеством $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если у подмножества минимальный элемент i, красим его в i-й цвет. Делаем так до тех пор, пока не используем $n - 2k + 1$ цвет. Когда мы это сделаем, у нас в конце останутся пересекающиеся подмножества, которые можно раскрасить в $n-2k+2$-й цвет. ■

Теорема 17 (Люстерник, Шнирельман). Пусть d-мерная сфера покрыта $d+1$ открытыми (или замкнутыми) множествами, либо d множествами одного типа и одним множеством другого типа. Тогда найдётся множество с противоположными точками. *Задача эквивалентна 14.*

Теорема 18. Если $KG(n,k)$ нетривиален, то $\chi(KG(n,k)) = n - 2k + 2$.

Доказательство. Рассмотрим n точек на $\mathbb{S}^d$ так, что они и центр сферы общего положения, где d — число цветов в какой-то раскраске. Тогда на каждом большом экваторе не более d точек. Рассмотрим множества $A_1, \ldots, A_d$, взятые следующим образом. Возьмём любую точку x, представим, что она — северный полюс, и рассмотрим северное открытое полушарие. Если в нём есть k точек, покрашенных в цвет r, то точка x лежит в множестве A_r. Тогда все множества A_i открытые. Пусть теперь $A_{d+1} = \mathbb{S}^d / A_1 / \ldots / A_d$. Тогда по 17 есть две точки, лежащие в одном множестве. Теперь рассмотрим два случая:

- Пусть эти две точки в A_r при $r \le d$. Тогда есть две вершины, соответствующие этим k-элементным подмножествам. Заметим, что они должны быть соединены ребром, но они r-го цвета — противоречие.
- Эти две точки в A_{d+1}. Заметим, что если $x \in A_{d+1}$, то в его полушарии нет k точек никакого цвета, значит, там меньше k точек. Тогда всего точек не больше $2k - 2 + d$. Значит, $2k - 2 + d \ge n$, что заканчивает доказательство. ■

Теорема 19 (Радон). Пусть $X_1, \ldots, X_{d+2} \in \mathbb{R}^d$. Тогда их можно разбить на 2 множества так, что их выпуклые оболочки пересекаются.

Доказательство теоремы 1. Доказываем по индукции.

База индукции. $n = d+2$. Пусть X_i — точка пересечения всех множеств, кроме A_i. Применим 19. Тогда X_i разобьются на 2 множества A и B. Пусть их выпуклые оболочки содержат одну и ту же точку C. Тогда все A_i содержат точку C.

Шаг индукции. Пусть мы умеем доказывать для n. Добавим множество A_{n+1}. Заметим, что $A_1 \cap A_{n+1}$ выпукло и для $A_2, \ldots, A_{n-1}, A_1 \cap A_{n+1}$ выполняется теорема. ■

Теорема 20. Пусть конечные $F_1, \ldots, F_d \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ таковы, что $\forall i\ \forall A, B \in F_i$ пересекаются. Тогда существует гиперплоскость, пересекающая все.

Доказательство. Будем считать, что все множества в семействах ограничены. Спроецируем их все на какую-то прямую. Мы получим набор попарно пересекающихся отрезков для каждого семейства. По 1 для $d = 1$ они пересекаются по отрезку (или точке). Заменим каждый отрезок пересечения на его середину. Пусть $f(l)$ —

вектор из расстояний от этих середин до одной фиксированной из них. Заметим, что $f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}^{d-1}$ нечётна. Тогда по 14 в какой-то точке она обнуляется. Проведём такую прямую, на ней будет точка, являющаяся серединой всех пересечений проекций, т.е. лежащая на проекции каждого множества. Тогда если провести перпендикулярную гиперплоскость, она пересечёт все множества. ■

Теорема 21 (Дольников). Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ — хорошие меры над $\mathbb{R}^d$, нормированные так, что $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. Тогда существует такое $k-1$-мерное подпространство, что для любого полупространства H^+, её содержащего, выполняется $\mu_i(H^+) \geq \frac{1}{d+2-k}$.[1]

Теорема 22. Для любого конечного $A \subset \mathbb{R}^d$ существует такая точка p, что любое полупространство, её содержащее, содержит хотя бы $\frac{1}{d+1}$ точек из A.

Доказательство. Аналогично 3. ■

Лемма 23. 1 неверна для бесконечного количества множеств.

Доказательство. Можно рассмотреть такие примеры: «замкнутый» $X_n = \{(x, y) | x \geq n\}$ и «ограниченный» $X_n = (0, \frac{1}{n})$. Они, очевидно, не подойдут. ■

Теорема 24. Есть 100 слив с косточками весом от 1 до 2 кг каждая. Общая масса косточек втрое меньше общей массы слив. Тогда их можно разбить на 2 ящика по 50 слив так, что в каждой доля косточек меньше 35%.

Доказательство. Возьмём 100 точек общего положения в $\mathbb{R}^3$, опишем вокруг них маленькие шары и поставим на каждом шаре три меры — $\mu_N(S) = 1, \mu_S, \mu_K$. Применим 4. Получившаяся гиперплоскость пересекает от 0 до 3 шаров. Дальше нужно писать оценки, но у лектора это не удалось.

Теорема 25. Два разбойника нашли ожерелье с d видами камней, каждого вида чётно. Ожерелье имеет вид незамкнутой проволоки. Тогда можно разделить ожерелье d разрезами и раздать части так, что каждый получит поровну камней каждого вида.

Доказательство. Определим кривую моментов в d-мерном пространстве как множество $\{(t, t^2, \dots, t^d) | t \in \mathbb{R}\}$.

Лемма 26. Кривая моментов пересекается с любой гиперплоскостью не более чем в d точках.

Доказательство. Пусть гиперплоскость имеет вид $a_1x_1 + \ldots + a_dx_d = c$. Тогда пересечения её с кривой моментов являются решением многочлена $a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_dt^d - c = 0$, у которого не более d корней по теореме Безу. ■

Завершение доказательства. Поставим ожерелье на кривую моментов и применим 6. Мы получим гиперплоскость, не пересекающуюся с точками ожерелья, с каждой стороны от которой поровну камней каждого вида. Тогда разрезание ожерелья по этой гиперплоскости даст решение задачи. ■

Теорема 27. Дана хорошая мера $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Тогда можно провести две прямые, делящие плоскость на 4 части, в каждой из которых мера одинакова.

Доказательство. Разделим на 2 равные части как угодно, затем применим 4 для двух мер — «слева» и «справа». ■

Теорема 28. Существует такое d и хорошая мера $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, что нельзя провести d гиперплоскостей, делящих $\mathbb{R}^d$ на 2^d частей, в каждой из которых мера одинакова.

[1] Эта теорема — обобщение как 3 при $k = 1$, так и 4 при $k = d$. Также существует множественный аналог, обобщающий и 20, и 1.

Доказательство. Пусть вся мера сосредоточена на кривой моментов.

Будем красить семейство множеств так — красим каждый элемент в один из m цветов, чтобы в семействе не было множества одноцветных элементов. В частности, если множества 2-элементные («рёбра»), это классическая раскраска графов.

Определение 5. Цветной дефект семейства множеств $cd_m(\mathcal{F})$ — минимальное такое r, что можно удалить r множеств так, что результат будет краситься в m цветов.

Определение 6. Обозначим за $KG(\mathcal{F})$ граф, вершины которого — элементы $\mathcal{F}$, и две вершины соединены ребром, если соответствующие множества не пересекаются. В частности, $KG(n,k) = KG(\mathcal{F} = C_A^k)$.

Теорема 29. $\chi(KG(\mathcal{F})) \geq cd_2(\mathcal{F})$.

Доказательство. Аналогично 18. Финальная оценка строится так: выкинем все точки на экваторе, все остальные точки по аналогичным причинам покрасятся в 2 цвета. ■