Решения дискретной математики

Кудрявцев Александр

10 сентября 2020 г. — 10 сентября 2020 г.

Лист 1 (16 задач)

№1. Докажем, что $\overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \vee b}$. Действительно, левая часть равна 1 тогда и только тогда, когда $a = b = 0$, а $a \vee b$ равно 1 во всех остальных случаях. $\blacksquare$

№2.

- $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.
- $\forall N \in \mathbb{N} \exists p > N \in \mathbb{N} : p, p+2$ — простые. (При этом p простое означает, что $\forall x \in \mathbb{N}, x < p :$ $p \equiv 0 \mod x \iff x = 1$) $\blacksquare$

№3.а) Составим таблицы истинности:

x	y	z	$x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee z\overline{x}$	$x\overline{z} \vee z\overline{y} \vee y\overline{x}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

б)

$$\begin{aligned} x\overline{y} \vee y\overline{z} \vee z\overline{x} &= \\ = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\overline{y}z &= \\ = xy\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z} &= \\ = x\overline{z} \vee z\overline{y} \vee y\overline{x}&, \end{aligned}$$

где второе равенство выполнено по ассоциативности и коммутативности $\wedge, \vee$, а первое и третье — т.к. $\forall a, b : a = ab \vee a\overline{b}$. $\blacksquare$

№6.а) Докажем, что у каждого элемента $\chi_M \in \{0,1\}^\Omega$ есть единственный прообраз. Действительно, $M = \{x \in \Omega \mid \chi_M(x) = 1\}$ — это прообраз, и если другое множество N является прообразом, то пусть $M \Delta N = K \neq \emptyset$ и $x \in K$, тогда $\chi_M(x) \neq \chi_N(x)$, откуда $\chi_M \neq chi_N$. $\blacksquare$

б)

- $\chi_{A \cap B}(x)$ равно 1, если (и только если) x лежит хотя бы в одном из A, B, а $\chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$ тоже этому равно.
- $\chi_{A \cup B}(x)$ равно 1, если (и только если) x лежит хотя бы в одном из A, B, а $\chi_A(x) \vee \chi_B(x)$ тоже этому равно.
- $\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A \Delta B}(x)$. Действительно, каждая из частей равна 1, если и только если x лежит в одном из A, B и не лежит в другом.
- $\chi_A(x) \implies \chi_B(x)$ равно 0, если и только если $x \in A, x \notin B$. $\chi_{A \setminus B}$ равно 1 при том же условии. Следовательно, $(\chi_A(x) \implies \chi_B(x)) = \chi_{\Omega \setminus (A \setminus B)}$.

№7.а) Пусть $a \in Z^{X \cup Y}$ — какая-то функция, сопоставляющая каждому элементу X элемент Z, и каждому элементу Y — также элемент Z. Рассмотрим функции $b : a \restriction_X$ и $c : a \restriction_Y$. Сопоставим a пару (b, c). Это биекция. Действительно, если есть пара (b, c), то можно рассмотреть функцию $f : X \cup Y \to Z; x \mapsto \{b(x), x \in X; c(x), x \in Y\}$, и ей сопоставлена пара (b, c). (других прообразов у (b, c) очевидно нет, потому что функция будет отличаться по какому-то элементу, и если этот элемент в X, то первый компонент образов различен, а если в Y, то второй) ∎

б) Пусть $h \in A^{B \times C}$ — какая-то функция, каждой паре (b, c) сопоставляющая элемент из A. Рассмотрим такую функцию $f : C \to A^B$, каждому элементу c сопоставляющую функцию $g_c : B \to A; b \mapsto h(b, c)$. Аналогично предыдущему пункту это биекция (теперь функции $g : C \to A^B$ мы будем сопоставлять функцию $h : B \times C \to A$ такую, что $h(b, c) = (g(c))(b)$). ∎

№8.а) Это неправда, потому что g должно быть функцией откуда-то в Y (а не в подмножество), и если $y \in Y \setminus f(X)$, то $g^{-1}(y) = \emptyset$, т.е. g не является сюръекцией. ∎

б) Пусть S — множество классов эквивалентности, на которые f делит $f(X)$ (т.е. для каждого $y \in f(X)$ в S лежит множество $A_y : \{x \mid f(x) = y\}$. Рассмотрим $q : X \to S, x \mapsto A_{f(x)}$ и $p : S \to Y, A_y \mapsto y$. Первое сюръекция, потому что я так определил S, а второе инъекция, потому что каждый класс эквивалентности представлен один раз. ∎

№9. Пусть M конечно. Тогда у каждой биекции есть обратная (она и так есть), и всего биекций $|M|!$. Тогда в последовательности $\mathrm{Id}_m, f, f^2, \ldots, f^{|M|!}$ есть два одинаковых элемента. Пусть это f^k и f^l, причём $l > k$. Тогда $\mathrm{Id}_m = f^k \circ f^{-1^k} = f_l \circ f^{-1^k} = f^{l-k}$. Для бесконечных множеств можно рассмотреть такой контрпример: $M = \mathbb{Z}, f(x) = x+1$. Тогда $f^k(x) = x+k \neq x$ при $k > 0$.∎

№10.а) Пусть $f : A \to C, g : A \to B, h : B \to C$.

- Если g, h инъективны, то $h(b_1) \neq h(b_2)$ и $g(a_1) \neq g(a_2)$ при $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$. Пусть $f(a_1) = f(a_2)$. Это невозможно, т.к. можно обозначить $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2$ и применить первые два факта.
- Если g, h сюръективны, то $\forall c \exists b : h(b) = c$ и $\exists a : g(a) = b$ (для всех b, в т.ч. b из предыдущего факта). Тогда $f(a) = c$ существует для любого a. ∎

№11.а) Докажем, что $A_{n+1} \subset A_n$. Индукция по n, для $n = 0$ верно, шаг верен, потому что ограничение f на A_n является инъекцией и не является биекцией — если $x \in A_n \subset A_{n-1}$ (оно непусто по предположению индукции), то $f^{-1}(x) \notin A_{n-1}$ (иначе $x = f(f^{-1}(x)) \in A_{n-1}$). Для функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$ множество B пусто, для функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, 0 \mapsto 0, x \mapsto x + 1$ при $x > 0$ множество $B = \{0\}$. ∎

№12. Заметим, что если $A \cap B = \emptyset$, то циклы над множествами A, B коммутируют. Разобьём N на классы эквивалентности таким образом: $x \sim y$, если $\exists n : f^n(x) = y$. Это отношение эквивалентности (см. **№8.б**), и над каждым классом s можно сделать цикл c_s (то есть цикл из элементов $a \in s, f(a), \ldots, f^{n-1}(a), f^n(a) = a$) такой, что $c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_k = f$. ∎

№13. Назовём k-последовательностью последовательность из $n + 1$ числа, первые n из которых принимают значения 0 или 1, а $n + 1$-е число равно a_K, где K — последовательность номеров единиц среди первых n чисел, Пусть A — множество всех k-последовательностей и $B = \{a \in A : a_{n+1} = 1\}$. Тогда $f = \sum_{a \in B} t(a)$, где $t(a) = \prod_{b=1; a_b=1}^{n} x_b \cdot \prod_{b=1; a_b=0}^{n} \overline{x_b}$ (под сложением здесь имеется в виду логическое «или», а под умножением логическое «и»). Докажем это. Вначале заметим, что $t(a)(x_1, \ldots, x_n)$ равно 1 тогда и только тогда, когда $x_i = a_i \forall i$. Тогда их сумма равна 1 тогда и только тогда, когда это выполняется для какого-то $a \in B$. ∎

№14. Принцип: предположить факт, обратный тому, который мы доказываем, и прийти к противоречию.

а) Пусть такое рациональное число существует, тогда можно выбрать его числитель и знаменатель взаимно простыми, т.е. $\exists p, q \in \mathbb{N} : (p, q) = 1, (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$. Это значит, что $p^2 = 2q^2$, и по основной теореме арифметики p чётно. Пусть $p = 2r$, тогда $q^2 = 2r^2$, т.е. q тоже чётно, что противоречит несократимости $\frac{p}{q}$. ■

б) Пусть простых чисел конечное число. Пусть p_0 — максимальное из них. Рассмотрим число $p_0! + 1$. У этого числа нет делителей меньших или равных p_0. Значит, у него есть больший простой делитель. ■

№15. Например, если $A(x) = x \in \mathbb{N}, B(x) = x \in \mathbb{Z}$, то $A \implies B$ верно, а $B \implies A$ неверно. С другой стороны, $\overline{A} \implies \overline{B} \iff B \implies A$ (на этом основан принцип доказательства от противного). ■