Документация шаблона

№1 (теоремы, задачи и прочее). Теоремы создаются командами `\theorem`, `\theoremn`, а так же `\lemma` и `\lemman`. Нумерация общая для теорем и лемм. Варианты с `n` имеют аргумент, обозначающий автора или название, например:

```
\lemma Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.
\theoremn{Пифагор} Если $\angle ABC=90^\circ$, то $AB^2+BC^2=AC^2$.\label{pifagor}
```

Лемма 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.
Теорема 2 (Пифагор). Если $\angle ABC = 90^\circ$, то $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Определения создаются командой `\definition` с аргументом — названием понятия:

```
\definition{Чётное число} число, кратное 2.
```

Определение 1. Чётное число — число, кратное 2.

Задачи создаются командами `\z`, `\n`, `\p`. Первая команда просто создаёт задачу, вторая — задачу с пунктами, третья — пункт задачи, добавление `n` к названию добавляет аргумент — название задачи. Номера задач и буквы пунктов можно изменять через счётчики `probs` и `sprobs` соответственно.

```
\n Сколько существует раскрасок ожерелья из $p$ элементов ($p$ простое) в $n$ цветов?
\pn{малая теорема Ферма} Докажите, что если $p$ простое, то $n^p-n$ делится на $p$.
\nn{теорема Ферма} Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$,
дифференцируема на $(a,b)$ и достигает максимума в точке $x_0\neq a,x_0\neq b$, то
$f'(x_0)=0$.
\p Верно ли, что если $f'(x_0)=0$, то это точка локального максимума или минимума?
\zn{Закон квадратичной взаимности Гаусса} Докажите, что если $p,q$ --- различные
простые нечётные числа, то $\binom pq\binom qp=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}$.
\setcounter{probs}{100}
\z Докажите, что корень многочлена является кратным тогда и только тогда, когда он
является корнем его производной.
```

№1.а) Сколько существует раскрасок ожерелья из p элементов (p простое) в n цветов?
б) (малая теорема Ферма) Докажите, что если p простое, то $n^p - n$ делится на p.

№2.а) (теорема Ферма) Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,дифференцируема на (a, b) и достигает максимума в точке $x_0 \neq a, x_0 \neq b$, то $f'(x_0) = 0$.
б) Верно ли, что если $f'(x_0) = 0$, то это точка локального максимума или минимума?

№3 (Закон квадратичной взаимности Гаусса). Докажите, что если p, q — различные простые нечётные числа, то $\binom{p}{q}\binom{q}{p} = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$.
№101. Докажите, что корень многочлена является кратным тогда и только тогда, когда он является корнем его производной.

Доказательства создаются командами `\proof(tl(m(s)))`. Просто команда `\proof` не имеет аргументов, команды `\prooft` и `\proofl` (и их модификации) имеют по одному элементу — названию ссылки на задачу/теорему. Модификатор m позволяет делать много доказательств одной и той же теоремы, для этого нужно вначале применить команду с модификатором ms. Для конца доказательства используется команда `\QEDA`. Кроме того, решения к задачам можно создавать командой `\s`.

```
\z Найдите матожидание числа, выпавшего на игральном кубике.
\s Так как все исходы равновероятны, то это \frac{1+2+3+4+5+6}6=3.5.\QEDA
\lemma $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда $\exists C>0:\forall n:|x_n|<C$.
\proof Мы знаем, что $\exists D>0,E>0:\forall n:-E<x_n<D$. Возьмём $C=\max(D,E)$, оно
подойдёт.\QEDA
\prooft{pifagor} Опустим высоту из $B$ на $AC$, пусть она попадает в точку $D$. Тогда
$\triangle DAB\sim\triangle BAC$ с коэффициентом $\frac{AB}{AC}$ и
$\triangle DCB\sim\triangle BCA$ с коэффициентом $\frac{BC}{AC}$, откуда их площади
относятся как $AB^2:BC^2:AC^2$, откуда и следует теорема.\QEDA
\prooftms{pifagor}
\prooftm{pifagor} Проведём биссектрису из $A$ на $BC$, пусть она попадает в точку $D$,
затем проведём высоту из $D$ на $AC$, пусть она попадает в $E$. Тогда четырёхугольник
$ABDE$ вписанный и степень точки $C$ относительно его описанной окружности равна
$AC(AC-AB)=BC^2\cdot\frac{AC}{AB+AC}$, откуда и следует теорема.\QEDA
\prooftm{pifagor} Построим треугольники, подобные исходному, на сторонах исходного
треугольника как на гипотенузах. Заметим, что можно сложить треугольник с гипотенузой
$AC$ из двух других, откуда $AC^2=AB^2+BC^2$.\QEDA
```

№1. Найдите матожидание числа, выпавшего на игральном кубике.
Решение. Так как все исходы равновероятны, то это $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$. ■

Лемма 2. $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда $\exists C > 0 : \forall n : |x_n| < C$.
Доказательство. Мы знаем, что $\exists D > 0, E > 0 : \forall n : -E < x_n < D$. Возьмём $C = \max(D, E)$, оно подойдёт. ■

Доказательство теоремы 2. Опустим высоту из B на AC, пусть она попадает в точку D. Тогда $\triangle DAB \sim \triangle BAC$ с коэффициентом $\frac{AB}{AC}$ и $\triangle DCB \sim \triangle BCA$ с коэффициентом $\frac{BC}{AC}$, откуда их площади относятся как $AB^2 : BC^2 : AC^2$, откуда и следует теорема. ■

Доказательство теоремы 2 #1. Проведём биссектрису из A на BC, пусть она попадает в точку D, затем проведём высоту из D на AC, пусть она попадает в E. Тогда четырёхугольник $ABDE$ вписанный и степень точки C относительно его описанной окружности равна $AC(AC - AB) = BC^2 \cdot \frac{AC}{AB+AC}$, откуда и следует теорема. ■

Доказательство теоремы 2 #2. Построим треугольники, подобные исходному, на сторонах исходного треугольника как на гипотенузах. Заметим, что можно сложить треугольник с гипотенузой AC из двух других, откуда $AC^2 = AB^2 + BC^2$. ■

Документ с заголовком создаётся командой `\dbegin[дата]{место}{тема}`, например, первые три строки этого документа такие:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage{tpl}
\dbegin{Школа 179}{Документация шаблона}
```

Подзаголовки создаются командами `\hdr` и `\shdr`:

```
\hdr{Основная теорема арифметики}
\shdr{Доказательство через идеалы}
```

Основная теорема арифметики

Доказательство через идеалы

№2 (Полезные команды).

- `\com` — ввод команды. Например, команду слева я ввёл так: `\com{com}`.
- `\floor` — округление вниз. Например, `\floor\frac 12`=$\lfloor\frac12\rfloor$.

№3 (Планиметрия). Шаблон создаёт большое количество планиметрических функций. Их нужно выполнять в окружении `\begin{tikzpicture}`. Их список:

- `\qsetscale{`k`}` — установить масштаб. По умолчанию 1. Он работает только на моих командах.
- `\qrectangle[params]{`x`}{`y`}{`w`}{`h`}` — нарисовать прямоугольник с левым нижним углом (x, y). По умолчанию он закрашивается чёрным.
- `\qgrid[params]{`w`}{`h`}` — нарисовать сетку. По умолчанию она светло-серая.
- `\qtriangle[params]{`x_1`}{`y_1`}{`x_2`}{`y_2`}{`x_3`}{`y_3`}` — нарисовать треугольник.
- `\qpoint[params]{caption}{`x`}{`y`}` — нарисовать точку. По умолчанию заголовок рисуется над точкой.
- `\qsegment{`x_1`}{`y_1`}{`x_2`}{`y_2`}` — нарисовать отрезок.

Также есть система сохранения координат точек. Все последующие функции её используют:

- `\qcoord{name}{`x`}{`y`}` — задать координаты точки. Также есть команда `\qrcoord` с теми же аргументами, она работает глобально (обычно это не нужно).
- `\qcx{name}` и `\qcy{name}` — получить координаты точки.
- `\qctriangle[params]{A}{B}{C}` — нарисовать треугольник ABC.
- `\qcpoint[params]{A}{caption}` — нарисовать точку A с заголовком.
- `\qcspoint[params]{A}` — нарисовать точку A с заголовком A.
- `\qcsegment{A}{B}` — нарисовать отрезок AB.
- `\qccircle{A}{B}` — нарисовать окружность с центром A, проходящую через B.
- `\qcccircle{A}{B}{C}` — нарисовать описанную окружность $\triangle ABC$.
- `\qcicircle{A}{B}{C}` — нарисовать вписанную окружность $\triangle ABC$.

Следующие функции используют систему координат точек для вычислений. Они ничего не рисуют.

- `\qcgMidpoint{X}{A}{B}` — сохранить середину AB в точку X.
- `\qcgIntersection{X}{A}{B}{C}{D}` — сохранить пересечение AB и CD в точку X.
- `\qcgHeight{X}{A}{P}{Q}` — сохранить основание высоты из A на PQ в точку X.
- `\qcgCenter{X}{A}{B}{C}` — сохранить центр описанной окружности $\triangle AB$ в точку X.
- `\qcgBisector{X}{A}{P}{Q}` — сохранить основание биссектрисы $\triangle APQ$ из A на PQ в точку X.

Пример их использования:

```latex
\begin{tikzpicture}
    \qsetscale{1.5}
    \qgrid{10}{10}
    \qcoord{A}{0}{0}\qcoord{B}{10}{2}\qcoord{C}{8}{10}
    \qctriangle ABC
    \qcspoint[left]A \qcspoint[right]B \qcspoint C
    \qcicircle ABC
    \qcgMidpoint{Am}BC\qcgMidpoint{Bm}AC\qcgMidpoint{Cm}AB
    \qcpoint{Am}{$A_0$}\qcpoint{Bm}{$B_0$}\qcpoint{Cm}{$C_0$}
    \qcccircle{Am}{Bm}{Cm}
    \qcsegment A{Am}\qcsegment B{Bm}\qcsegment C{Cm}
    \qcgIntersection MA{Am}B{Bm}
    \qcspoint M
    \qcgBisector{Al}ABC\qcgBisector{Bl}BAC\qcgBisector{Cl}CAB
    \qcpoint{Al}{$A_1$}\qcpoint{Bl}{$B_1$}\qcpoint{Cl}{$C_1$}
    \qcsegment A{Al}\qcsegment B{Bl}\qcsegment C{Cl}
    \qcgIntersection LA{Al}B{Bl}
    \qcspoint L
    \qcgHeight{Ah}ABC
\end{tikzpicture}
```