Решения занятия №23

№1. «А это вам видеть пока рано», сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!» Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что видеть пока рано?

Решение. Заметим, что две трети мальчиков увидели то, что им видеть рано, поскольку правый глаз закрыли все, а левый только треть. Аналогично, две трети девочек тоже увидели то, что им пока рано. **Ответ**: 22 ученика. ■

№2. Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3.

Решение. Проверяется по рисунку школьника. ■

№3. Два автобуса ехали навстречу друг другу с постоянными скоростями. Первый выехал из Москвы в 11 часов утра и прибыл в Ярославль в 16 часов, а второй выехал из Ярославля в 12 часов и прибыл в Москву в 17 часов. В котором часу они встретились?

Решение. Пусть они встретятся через t часов после 11 часов утра. Пусть расстояние от Москвы до Ярославля S. Расстояние первого до Москвы будет $\frac{St}{5}$. Расстояние второго — $S - \frac{t-1}{5}S$, и они равны, откуда $t = 3$. Другое, более короткое и идейное решение состоит в том, чтобы нарисовать по клеточкам графики расстояния до Москвы от времени, заметить что они отрезки и посчитать время по клеточкам. Ответ: 14 часов. ■

№4. В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы AE и CF углов $\angle BAD$ и $\angle BCD$ параллельны. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$.

Решение. $\angle ABC = \angle ABE = 180° - \angle BEA - \angle EAB = 180° - \angle BCF - \angle EAB = 180° - \frac{\angle DCB + \angle DAB}{2}$, аналогично тому же равен $\angle ADC$. ■

№5. Можно ли разрезать квадрат 5×5 на 7 прямоугольников вида 1×3 и 1×4?

Решение. Можно, проверяется по рисунку школьника. ■

№6. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 2020 или 2022?

Решение. Заметим, что сумма двух соседних сторон у прямоугольника равна половине периметра. В одном случае это 1010, а в другом 1011. Нам нужно рассмотреть всевозможные пары целых (натуральных) сторон у прямоугольников. В первом это от 1, 1009 до 505, 505, а во втором — от 1, 1010 до 505, 506. **Ответ:** поровну. ■

№7. Гномы собрали в лесу корзину орехов. Леший разделил между ними орехи поровну, а себе забрал остаток. Каждому гному досталось по 5 орехов, а Лешему — 4. На следующий день пришло втрое больше гномов, и они собрали втрое больше орехов. И снова Леший разделил между ними орехи поровну, а себе забрал остаток. Сколько орехов получили гномы и Леший на второй день?

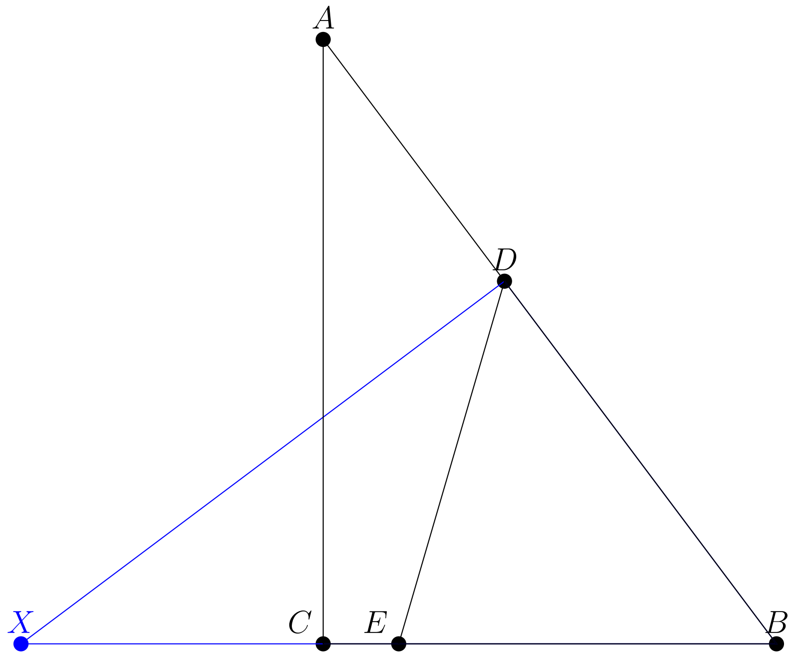
Решение. Заметим, что у Лешего в первом случае осталось 4 ореха, значит, гномов было не меньше 5. Пусть гномов было k. Тогда орехов $5k + 4$. Потом гномов стало $3k$, а орехов $15k + 12$. Нам нужно поделить нацело $15k + 12$ на $3k$, но $3k$ минимум 15, следовательно, получаем 5. Гномы получили по 5 орехов, а Леший получил 12. ■

№8. В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелкой равен α, а через час снова равен α. Найдите все возможные значения α.

Решение. За час часовая стрелка повернулась на 30°, а минутная не подвинулась. **Ответ**: $15°, 165°$. ■

№9. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BD = BC$, а на катете BC — такая точка E, что $DE = BE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.

Решение. Построим точку X так, что $CX = AD$ (см. рис.) Тогда $\triangle XDB = \triangle ABC$, откуда $\angle XDB = 90°$, т.е. $DE = \frac{XB}{2} = \frac{AB}{2}$. Тогда $AD + CE = AB - BD + BC - BE = AB - DE = DE$. ∎



№10. Верно ли, что изменив одну цифру в десятичной записи любого натурального числа, можно получить простое число?

Решение. Нет. Например, рассмотрим $n = 200$. Если изменить не последнюю цифру, число будет делиться на 10; если заменить её на чётную или 5, оно будет делиться на 2 или 5; наконец, 201, 203, 207, 209 делятся соответственно на 3, 7, 3 и 11 соответственно.

Примечание. Это не единственное число с таким свойством. Также подходят 320, 510, 840, $10!$, $10!^3$, $19! + 10$ и т.п. ∎

№11. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше — съем на обед». Как гномам заранее договориться, чтобы спастись?

Решение. Пронумеруем колпаки от 0 до 6 в любом порядке (причём можно считать, что это остатки, т.е. колпак 7 — это колпак 0 и т.п.) Заметим, что каждый гном может сказать одно из двух чисел — его колпак и спрятанный. Тогда один из этих двух колпаков больше другого не больше чем на 3 (например, если колпаки 0 и 6, то $0 - 6 = 1 < 3$). Назовём его *большим*. Пусть все гномы будут считать, что большой колпак на них. Тогда ровно три из них угадают. ∎

№12. Сережа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлестом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

Решение. Мог, проверяется по рисунку школьника. ∎