# Преобразования Хопфа

**Тиморин Владлен Анатольевич**

*5 мая 2020 г. — 6 мая 2020 г.*

1. $x^2+y^2=1$;
2. $x=\sin\varphi, y=\cos\varphi$;
3. $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$. Это работает, потому что:
   - При таких $x, y$ выполняется $x^2+y^2=1$.
   - $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.
   - Это проекция прямой $x=0$ из точки $(-1,0)$ на окружность. К сожалению, отсюда следует, что эта точка ничему не соответствует.
4. $x=\frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}, y=\frac{2st}{s^2+t^2}$.

**Лемма 1 (Тождество Диофанта-Брахмагупты-Фибоначчи).** Если $x, y$ оба представляются как суммы двух квадратов, то $xy$ тоже.

**Доказательство.** $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2$. Кстати, это связано с тем, что $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$. ■

Кроме того, ещё есть такая формула:

$$(|z|^2-|w|^2)+(|2z\overline{w}|)^2=(|z|^2+|w|^2).$$

Когда мы поделим левую часть на правую, у нас получится

$$\xi+i\eta=\frac{2z\overline{w}}{|z|^2+|w|^2},$$
$$\zeta=\frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2},$$
$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

то есть мы записали точки двумерной сферы комплексными числами $z, w$, то есть четырьмя параметрами. Кроме того, мы знаем, что можно $z, w$ умножить на произвольное ненулевое комплексное $k$. Поэтому $w$ в формуле сопряжено — иначе умножение не работает. (так оно работает, потому что числитель умножится на $k\overline{k}=|k|^2\in\mathbb{R}$)

Давайте считать, что $\operatorname{Im} w=1$. То есть $z=s+it, w=u+i$.

**Определение 1. Отображение Хопфа** — отображение $(s,t,u)\mapsto(\xi,\eta,\zeta)$ из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{S}^2$.

На самом деле, это отображение — *стереографическая проекция* (см.рис).

Рис. 1: Стереографическая проекция

Ещё можно считать, что $|z|^2 + |w|^2 = 1$. То есть $z = x_1^2 + ix_2, w = x_3 + ix_4, \sum x_i^2 = 1$.

**Определение 2. Отображение Хопфа** — отображение $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$.

Прообраз каждой точки $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{S}^3$ — это окружность. $\mathbb{S}^3$ бьётся на торы с общими вертикальными осями (эти торы — прообразы параллелей на сфере) и слои отображения (т.е. эти окружности) *зацеплены между собой* (см.рис).

Рис. 2: Окружности на торе

Можно находить на торе окружности, проводя плоскости через ось или перпендикулярные оси. Но ещё можно проводить касательные плоскости (см.рис), получаются окружности Вилларсо.

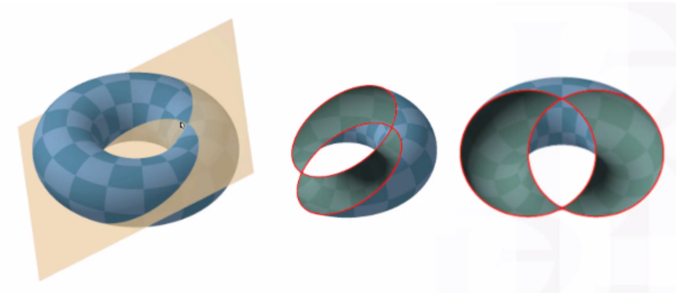

Рис. 3: Окружности Вилларсо

---

**Теорема 2.** Первое отображение Хопфа переводит прямые в окружности.

**Лемма 3.** Пусть кривая в $Oxyz$ задана как $x = \frac{q_1(t)}{q_0(t)}, y = \frac{q_2(t)}{q_0(t)}, z = \frac{q_3(t)}{q_0(t)}$, где $q_i$ — квадратные формулы. Тогда эта кривая лежит в плоскости.

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение $\sum\limits_{i=0}^{3} \lambda_i q_i(t) = 0$. Это уравнение вида $at^2 + bt + c = 0$, где в $a, b, c$ есть неизвестные. Тогда надо рассмотреть систему $a = 0, b = 0, c = 0$. У неё есть решение, потому что $a = \sum k_i \lambda_i$ и т.п. (она однородная), тогда мы получим уравнение $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$, то есть уравнение плоскости. ■

**Доказательство теоремы 2.** Образы прямых — это формулы вида из 3. Значит, они лежат в плоскости, а так как отображение Хопфа переводит в сферу, то прямые переходят в окружности. ■