Линейная алгебра

Дориченко Сергей Александрович

31 января 2020 г. — 31 января 2020 г.

Теорема 1. Есть 101 корова. Если убрать любую, то оставшихся можно разделить на равные по количеству и массе группы. Тогда все коровы равны по массе.

Лемма 2. То же, что и 1, но веса коров — целые числа.

Доказательство. Заметим, что можно вычитать из каждого веса a или делить каждый вес на b. Вычтем из каждой коровы вес самой маленькой коровы, уведём самую маленькую, получим, что суммарный вес целый. Значит, вес каждой коровы чётный (иначе можно увести нечётную), значит, можно поделить все веса на 2 — бесконечный спуск. ■

Аналогично можно доказать, что если веса рациональные или, например, $\sqrt{2} \cdot a_i$, то задача тоже решена.

Лемма 3. То же, что и 1, но веса коров — $a_i + b_i \cdot \sqrt{2}$.

Доказательство. Пусть $a_1 + \ldots + a_{50} = a_{51} + \ldots + a_{100}$. Тогда для рациональной и для иррациональной компоненты всё выполняется.

Определение 1. Линейно-независимое множество над $\mathbb{Q}$ — множество $S = s_1, s_2, \ldots s_k$ такое, что если $s_1 r_1 + s_2 r_2 + \ldots + s_k r_k = 0$ при $r_i \in \mathbb{Q}$, то $r_i = 0\ \forall i$.

Доказательство теоремы 1 #1. Возьмём $S = a_1$ и вычеркнем всех коров, веса которых линейно зависимы с S. Добавим в S минимальную корову, которая осталась, снова вычеркнем плохих коров и т.п. У нас получится базис на множестве коров над Q. Тогда задача решится аналогично 3. ■

Доказательство теоремы 1 #2. У нас есть система: $a_1 + \ldots + a_{50} - a_{51} - \ldots - a_{100} = 0$ и т.п., всего 101 уравнение. Будем решать её подстановкой. Рассмотрим последний момент, когда получилось всё ещё не $0 = 0$. Заметим, что у нас есть хотя бы 1 свободная переменная, иначе у системы единственное решение. Если свободная переменная только одна, то все веса имеют вид $a_k \cdot q_i$, где k — константа, $q_i \in \mathbb{Q}$. Если их хотя бы две, то проблемы: пусть последнее уравнение имеет вид $a_i = a_{i+1} q_1 + a_{i+2} q_2 + \ldots$. Возьмём все a_{i+j} целыми, тогда все остальные a_j будут рациональными — противоречие. ■

Лемма 4. Дана система линейных уравнений с рациональными коэффициентами. Известно, что у неё есть решение. Тогда есть и рациональное решение.

Доказательство. Аналогично предыдущему решению. ■

Теорема 5. Пусть прямоугольник $a \times b$ разрезан на квадраты. Тогда $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. Обозначим стороны квадратов как x_i. Получим много линейных уравнений. У этой системы есть решение в положительных числах. Пусть у неё есть какое-то другое решение.

Лемма 6. По решению можно восстановить картинку.

Доказательство. Разрежем квадрат по каждой вертикальной и каждой горизонтальной линии. Тогда мы получим новую систему с длинами этих отрезков, с помощью них решим задачу. ■

Завершение доказательства 5. У системы будет либо единственное решение, либо свободные переменные. Рассмотрим два случая:

- Решение единственно. Тогда все отрезки равны $a\alpha_i + b\beta_i$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q}$. Подставим все x_i в уравнения. Тогда либо какое-то уравнение превратится в $ka + lb = 0$, тогда $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$; либо все уравнения станут $0 = 0$. Немного изменим a, b так, что все x_i останутся положительными. Тогда получим, что в каком-то интервале $a^2 \sum \alpha_i^2 + 2ab \cdot \sum(\alpha_i \beta_i) + b^2 \sum \beta_i^2 = ab$, т.е. все α_i и β_i равны нулю — противоречие.

- Есть свободные переменные. Пусть t — свободная переменная. Тогда можно менять t на каком-то интервале и получить, что все коэффициенты при t равны 0. Значит, от t ничего не зависит. ■

Теорема 7. Пусть прямоугольник разрезан на прямоугольники. У каждого прямоугольника разрезания есть целая сторона. Тогда и у исходного есть целая сторона.

Лемма 8. То же, что и 7, но все стороны прямоугольников рациональные.

Доказательство. Это следует из того, что если $a \times b$ разбили на $1 \times n$, то $n \mid a$ или $n \mid b$.■

Доказательство теоремы 7 #1. Будем считать, что все прямоугольники $1 \times a$ (если $n \times a$, то можно разрезать на n прямоугольников). Продлим каждую сторону до пересечения с стороной исходного прямоугольника. Сделаем систему уравнений, причём a и b сделаем неизвестными. Если у неё нет свободных переменных, то все x_i рациональные, это мы умеем решать. Если две свободные переменные, сделаем a и b свободными, у нас $\sum x_i = ab$, противоречие. Значит, свободная переменная одна. Сделаем a свободной и поставим в a несколько близких рациональных чисел. Получим, что при этих a все числа b равны одному и тому же целому числу. Дальше надо додумать, а мы не смогли.

Доказательство теоремы 7 #2. Раскрасим плоскость в шахматную раскраску с шагом $\frac{1}{2}$. Тогда у прямоугольника чёрного и белого поровну тогда и только тогда, когда есть целая сторона. ■

Доказательство теоремы 7 #3. Для каждого прямоугольника выберем одну из пар целых сторон и положим на них стеклянные трубочки. Тогда на каждом перекрёстке чётное количество трубочек. Значит, этот граф эйлеров. Пустим из угла мышку, она закончит путь в каком-то другом угле. Тогда соответствующая сторона целая. ■

Доказательство теоремы 1 #3. Найдём по теореме Кронекера N так, что $\forall\ i : Na_i$ отличается от целого числа не более чем на $\frac{1}{1000}$. Задача закончилась. ■