Главная формула математики

Савватеев Алексей Владимирович

26 февраля 2020 г. — 27 февраля 2020 г.

Задача: придумать (непрерывный) гомоморфизм из $(\mathbb{R}, +)$ в $(\mathbb{R}^*, \times)$, т.е. функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x, y : f(x+y) = f(x)f(y)$.

Заметим, что $f(0)f(0) = f(0+0) = f(0)$, т.е. $f(0) \in \{0, 1\}$. Если $f(0) = 0$, то у нас проблемы: $\forall x : f(x) = f(x)f(0) = 0$. Это значит, что $f \equiv 0$. В дальнейшем мы считаем, что $f \not\equiv c, f(0) = 1$.

Пусть $f(x) = 0$ при каком-то x. Тогда $1 = f(0) = f(x)f(-x) = 0$ — противоречие.

Лемма 1. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.

Доказательство. $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ и не равно 0. ∎

Пусть $a := f(1) > 0$. Тогда очевидно, что $f(x) = a^x$ при $x \in \mathbb{N}$. Рассмотрев $f(x)f(-x)$ для $x \in \mathbb{N}$, получаем то же самое тождество для $x \in \mathbb{Z}$.

Пусть $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Тогда $a^m = f(m) = f\left(\frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right)^n$, значит, $f(\frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}}$. Значит, $f(x) = a^x$ для $x \in \mathbb{Q}$. Можно считать, что $a > 1$, потому что иначе можно рассмотреть $g(x) = f(-x)$.

Теперь нам нужна непрерывность f, потому что иначе будет решение через базис Гамеля.

Теорема 2. Пусть f непрерывна на $\mathbb{Q}$. Тогда существует единственное её обобщение до $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть существуют a, b такие, что $f(x_0)$ может быть равно и a, и b. Тогда проблемы, потому что можно взять $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Значит, доопределить можно максимум одним способом. Дальше можно доказать через фундаментальность и аксиому полноты, что этот способ существует. ∎

«Я помню, когда у нас было доказательство того, что $a^x, \log_a(x)$ и т.п. непрерывные, мы целый месяц этим занимались в 57, мне было лень это делать, я прогуливал занятия, меня преп ловил за шиворот, тащил в класс и говорил доказывать» — Савватеев

Теорема 3. $f(x) = a^x$ непрерывна на $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall |t| \leq \delta : |a^{x+t} - a^x| < \varepsilon$. Это то же самое, что $|a^t - 1| < \frac{\varepsilon}{a^x}$. Т.к. a^x монотонная, достаточно доказать для $t = \pm\delta$, кроме того, можно доказывать для $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда $\sqrt[n]{a} \to 1$ по неравенству Бернулли, откуда всё следует. ∎

Мы поняли, что $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a^x$, и при $a > 0$ эта функция монотонно возрастает и непрерывна. Попробуем посчитать $f'(x)$. Получим

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{a^x(a^\delta - 1)}{\delta} = f(x)f'(0).$$

№1. (3 балла) Докажите, что $\exists \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

Лемма 4. Лебегова мера (обобщённая длина) любого счётного множества точек равна 0.

Доказательство. Построим около первого числа интервал длины ε, около второго числа — длины $\frac{\varepsilon}{2}$, около третьего — $\frac{\varepsilon}{4}$ и т.п. Получим, что мера этого множества не больше 2ε. ∎

Теорема 5. Если g — выпуклая, то почти везде (т.е. в множестве меры 1) существует $g'(x)$.

«Что означает, что функция является корытом?»

Лемма 6. $f(x)$ дифференцируема.

Доказательство. Докажем, что $f(x)$ выпуклая. Это эквивалентно тому, что $g(d) = \frac{a^d-1}{d}$ монотонно возрастает при $d > 0$. Вначале заметим, что $g(n)$ возрастает при $n \in \mathbb{N}$. Это так, потому что $\frac{(a-1)(a^{n-1}+\ldots+a+1)}{n}$ растёт при $a \neq 1$. Пусть $x = \frac{k}{N}$ и $y = \frac{\ell}{N}$, где $k > \ell$. Докажем, что $g(x) > g(y)$. Это эквивалентно тому, что $\frac{(a^{1/N})^k-1}{k} > \frac{(a^{1/N})^\ell-1}{\ell}$, что следует из леммы для $a^{1/N}$. ∎

Итак, мы доказали, что $f'(x) = cf(x)$, где $c = f'(0)$.
Определение 1. Число e — такое число, что $(e^x)' = e^x$.

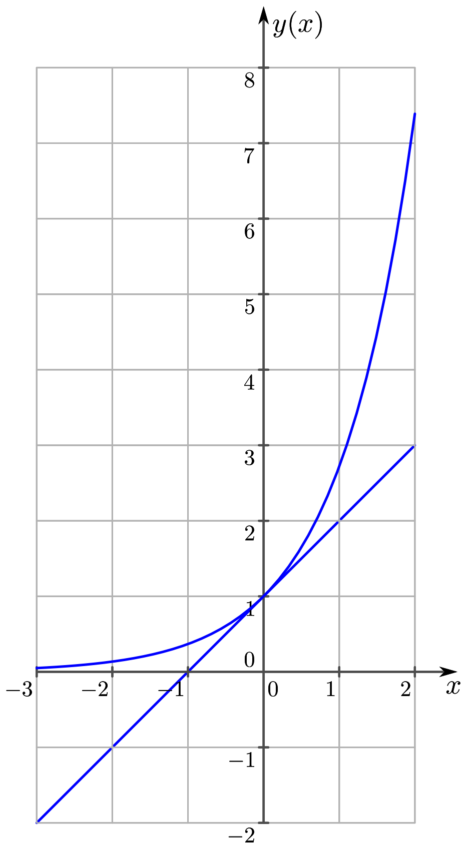

Рис. 1: e^x и её касательная

Определение 2. $\ln x$ — такая функция, что $e^{\ln x} = x$.
Заметим, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Лемма 7. $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'(x)$.
Доказательство.

$$(f \circ g)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(g(t+h)) - f(g(t))}{g(t+h) - g(t)} \cdot \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right) = f'(g(t))g'(t). \blacksquare$$

Теорема 8. Существует единственное решение уравнения $f' \equiv f$ (такое, что $f(0) = 1$).
Доказательство. Рассмотрим $[\ln f(x)]'$. Это равно $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 = x'$. Значит, $\ln f(x) = x + C$. Т.к. $\ln f(0) = 0$, то $\ln f(x) = x$. Значит, $f(x) = e^x$. ■

Теорема 9. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$.
Доказательство. Заметим, что $(\frac{x^i}{i!})' = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$. Тогда $f'(x) = f(x)$. Кроме того, $f(0) = 1$. Тогда по 8 $f(x) = e^x$. ■

«Есть много толстых с маленькой буквы и один большой Лев Николаевич Толстой.»
Теорема 10. $g(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
Доказательство. Ясно, что $g(0) = 1$. Также

$$\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]' = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = g(x).$$

Таким образом, это так, если $g(x)$ определена. Кроме того,

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots = \sum \left(\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} \right) < f(x).$$

Кроме того, т.к. $g_n(x) > g_{n-1}(x)$, то $g_n(x)$ сходится (при $n \to \infty$). ■

На самом деле, g_n сходится к e по такой причине. Зафиксируем k и будем смотреть на

$$1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

e В ЖИЗНИ ДВУХ ЛЮДЕЙ

№2. Пусть пьяница находится на расстоянии 1 метр от двери и идёт в её сторону. Каждый шаг имеет случайную длину, равномерно распределённую на отрезке от 0 до 1 метра. Тогда он в среднем дойдёт до двери за e шагов. *Подсказка: надо посчитать вероятность того, что он дойдёт за k или меньше шагов.*

Пусть в банке дают 100% годовых и можно класть деньги на любой период времени. Тогда максимум можно увеличить свои деньги в год на e раз.

Переход в комплексную область

Обозначим $e^z = f(z) = g(z)$. У этой функции сохранены те же самые свойства. Во-первых, $f'(z) = f(z)$ и $g'(z) = g(z)$. Во-вторых, докажем следующее тождество:

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \ldots\right) = 1 + z + w + \frac{(z+w)^2}{2!} + \ldots.$$

Оно верно, поскольку

$$\sum_k \frac{1}{k!}(z+w)^k = \sum_k \sum_{i+j=k} \frac{z^i w^j}{i!j!} = \sum_{i,j} \frac{z^i w^j}{i!j!} = \sum_i \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_j \frac{w^j}{j!}.$$

Итак, мы доказали, что $f(x+y) = f(x)f(y)$. Теперь докажем аналогичное тождество для $g(z)$:

$$f(z)f(w) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{w}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{z+w}{n} + \frac{zw}{n^2}\right)^n\right].$$

Лемма 11. Пусть α_n ограничена на $\mathbb{C}$. Тогда $u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha_n}{n^2}\right) \to 1$. Кроме того, если $\beta \in \mathbb{C}$, то $v_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\alpha_n}{n^2}\right) = e^\beta$.

Доказательство. Найдём $|u_n - 1|$. Это

$$\left|\frac{n\alpha_n}{n^2} + \binom{n}{2}\frac{\alpha_n^2}{n^4} + \ldots\right| \le \left|\frac{\alpha_n}{n}\right| + \left|\frac{\alpha_n^2}{2!n^2}\right| + \ldots \le \frac{1}{n} f(\alpha_n) \to 0.$$

Докажем вторую часть. Домножим v_n на $e^{-\beta} = g(-\beta)$. Получим

$$g(-\beta)v_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{\alpha_n}{n^2} - \frac{\beta^2}{n^2} - \frac{\beta\alpha_n}{n^3}\right] = 1 = g(\beta)g(-\beta) = 1. \blacksquare$$

Теорема 12. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Доказательство. Докажем, что $g(i\varphi)$ этому равно. Заметим, что $\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n} = 1 + \frac{i\varphi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тогда по 11 мы получим

$$e^{i\varphi} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi. \blacksquare$$

Теперь подставим $z = i\varphi$ в формулу $e^z = f(z)$. Получим

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} = \sum\frac{(i\varphi)^k}{k!} = \left(\sum\frac{\varphi^{4k}}{(4k)!} - \sum\frac{\varphi^{4k+2}}{(4k+2)!}\right) + i\left(\sum\frac{\varphi^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum\frac{\varphi^{4k+3}}{(4k+3)!}\right).$$

Отсюда получаем разложения для $\sin x$ и $\cos x$ в ряд.