Лекции по математике, 1 курс

Разные авторы

1 сентября 2020 г. — 1 сентября 2020 г.

Теорема 1. $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \dots}}}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Предположим, что π рационально, тогда $t = \frac{\pi}{4}$ рационально, и

$$1 = \cfrac{t}{1 - \cfrac{t^2}{3 - \cfrac{t^2}{5 - \dots}}},$$

т.е. бесконечная цепная дробь, противоречие. ■

Определение 1. Последовательность Фарея $\mathcal{F}_n$ — подмножество $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, в которое входят все дроби со знаменателем не больше n, упорядоченные по возрастанию.

Вопрос: как понять, куда ставить новые дроби, и как устроены расстояния между соседями?

Лемма 2. Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{p}{q}$ — подряд идущие элементы последовательности, и $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$. Тогда $bp - aq = cq - pd = 1$.

Теорема 3 (Дирихле). $\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N} \exists p, q \leq N : |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Nq}$.

Доказательство. Пусть $x \in [0,1]$. Рассмотрим последовательность $\mathcal{F}_n$. Пусть $\frac{c}{d} < x < \frac{a}{b}$ — соседние члены этой последовательности и $\frac{e}{f}$ — их медианта. Заметим, что $f = b+d > N$; кроме того, длины отрезков, на которые медианта разобьёт $(\frac{c}{d}; \frac{a}{b})$ — это $\frac{1}{fb}$ и $\frac{1}{fd}$. Наш x попал на один из этих отрезков. Пусть, не умаляя общности, это отрезок $(\frac{a}{b}; \frac{e}{f})$; тогда возьмём приближение $\frac{a}{b}$, оно подходит. ■

Теорема 4 (Рот). $\forall \alpha \notin Q, \varepsilon > 0$ существует лишь конечное количество приближений вида $\frac{p}{q}$ таких, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$.

Определение 2. Дзета-функция $\zeta(s)$ — сумма ряда $a_n = n^{-s}$. Определена везде, кроме $s = 1$. Если $\mathrm{Re}(s) > 1$, то ряд абсолютно сходится; если $s = -2k, k \in \mathbb{N}$, то $\zeta(s) = 0$ («тривиальные нули»); все остальные нули называются нетривиальными.

Гипотеза Римана. Если s — нетривиальный ноль, то $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Определение 3. Функция Мёбиуса $\mu(n)$ —

$$\mu_n = \begin{cases} 0, n \text{ несвободно от квадратов.} \\ (-1)^k, k \text{ — количество простых множителей в } n. \end{cases}$$

Определение 4. Функция Мёртенса $M(n)$ — $M(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$.

Теорема 5. Гипотеза Римана равносильна следующему утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 : M(n) \leq C n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Пусть $L(n)$ — количество элементов в $\mathcal{F}_n$ и α_v — v-й элемент этой последовательности. Обозначим $\delta_v = \alpha_v - \frac{v}{L(n)}$.

Теорема 6. Гипотеза Римана равносильна следующему утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0 : \sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| \leq C n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$