Диаграммы Фарея, цепные дроби и топокарты

Соколов Артемий Алексеевич

Берендеевы поляны, 19–23 августа 2019 г.

Диаграммы Фарея

Определение 1. Медианта отрезка с концами $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ($(a,b)=(c,d)=1, \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$) — точка с координатами $\frac{a+c}{b+d}$.

Заметим, что

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \iff a(b+d)<b(a+c) \iff ad<bc \iff d(a+c)<c(b+d) \iff \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

Будем отмечать на отрезке $(0,1)$ точки по очереди таким образом. Изначально отмечены концы отрезка. За один шаг берутся все текущие отрезки и для каждого из них отмечается их медианта. Тогда получатся *диаграммы Фарея.*

Заметим, что после каждого шага для соседних дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ выполняется $ad-bc=-1$. Действительно, $a(b+d)-b(a+c)=ad-bc=(a+c)d-(b+d)c$ и изначально эта разность равна -1.

Цепные дроби

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1}$$

Другие формы записи:

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + 1/(a_1 + 1/\dots)$$

Например:

$$\frac{7}{11} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{7}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = [0; 1, 1, 1, 3] \tag{2}$$

Определение по Гурвицу

Идём по Диаграммам Фарея. Будем считать, что $0 < p < q$. Вначале мы находимся справа от точки 1 и движение направлено влево. На каждом шаге делаем один шаг диаграммы Фарея и идём в нужную сторону. Когда мы меняем направление (перед шагом по новому направлению), добавляем текущее число в (изначально пустой) массив в начало, затем обнуляем текущее число.

Способ подсчёта

Определяем $x = \frac{p}{q}$ рекурсивно по $[a_0; a_1 \dots]$. Изначально $p_0 = a_0, q_0 = 1$. Затем подставляем $a_0 = 0$ и пишем рекурренту:

$$p_{n+1} = p_n a_{n+1} + a_{n-1},\ \ q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}$$

Тогда $x = \frac{p_n}{q_n}$.

Матрицы

Будем сопоставлять дроби $\frac{p}{q}$ матрицу $\binom{q}{p}$.

Операции над матрицами

- Матрицы можно складывать: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{smallmatrix}\right)$.
- Матрицы можно умножать на число: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot n = \left(\begin{smallmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{smallmatrix}\right)$.
- От матриц можно брать определитель: $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$. В частности, $\det \left(\begin{smallmatrix} a & ka \\ b & kb \end{smallmatrix}\right) = 0$.
- Матрицу 2×1 можно умножить на матрицу 1×2, при этом получается число: $(a\ c) \cdot \binom{x}{y} = ax + cy$. Умножение больших матриц делается по дистрибутивности, например: $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & t \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{smallmatrix}\right)$.
- Матрицу 2×2 можно обращать: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \det^{-1} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Обращение работает так: $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- Матрицы 1×2 можно перемножать, при этом получается дробь: $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \binom{b}{a} \cdot \binom{d}{c} = \binom{b+d}{a+c} = \frac{a+c}{b+d}$.

Квадратичные формы

Определение 2. Квадратичная форма — однородный многочлен от двух переменных степени 2, т.е. $ax^2 + bxy + cy^2$. Если форма целочисленная, то $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ (можно считать, что это функция $Q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$).

Определение 3. Базис — множество векторов в пространстве $\mathbb{F}^n$, через линейную комбинацию которых с коэффициентами из $\mathbb{F}$ представляется каждый вектор из пространства. При представлении $\vec{v} = k_1\vec{e_1} + \dots + k_n\vec{e_n}$ числа $k_1 \dots k_n$ называются координатами $\vec{v}$ в базисе $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$. Нестрогим базисом назовём базис, перед каждым вектором которого стоит $\pm$.

Если $\vec{e_1} = \binom{a}{b}, \vec{e_2} = \binom{c}{d}$, то $k\vec{e_1} + l\vec{e_2} = \binom{ka+lc}{kb+ld} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\binom{k}{l}$. Поэтому если таким образом представляется любой вектор, то $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$.

Определение 4. Супербазис — тройка векторов $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, -\vec{e_1} - \vec{e_2})$, где $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ образуют базис. Аналогично определяется нестрогий супербазис.

Лемма 1 (об арифметической прогрессии).

$$\begin{aligned} Q(v) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\ Q(v_1 \pm v_2) &= A(x_1 \pm x_2)^2 + B(x_1 \pm x_2)(y_1 \pm y_2) + C(y_1 \pm y_2)^2 \\ Q(v_1 + v_2) + Q(v_1 - v_2) &= 2(Q(v_1) + Q(v_2)) \end{aligned}$$

В частности, если $Q(v) = x^2 + y^2$, то это тождество параллелограмма.

Будем писать на гранях фрактала $Q(k\vec{e_1} + l\vec{e_2})$, а на рёбрах — разность числа на грани справа и суммы чисел на соседних гранях (или, что эквивалентно, разность суммы и числа на граммы слева). Затем проведём на грани стрелку в сторону увеличения.

Лемма 2 (о возрастании). Пусть $Q(x) > 0, Q(y) > 0, h > 0$. Тогда справа от первого базиса все стрелки направлены вправо.

Лемма 3 (о колодцах). Пусть $Q(x) > 0, Q(y) > 0$. Тогда есть такая точка, что все стрелки на рёбрах направлены от неё.

Будем красить ребро в красный, если с одной стороны от него положительное число, а с другой отрицательное. Тогда по 2 получится ломаная («река»). Она конечна (с одной стороны) тогда и только тогда, когда на топокарте есть грань, в которой записан 0 («озеро»), и конечна с обоих сторон тогда и только тогда, когда на топокарте два «озера».

Решение квадратичных форм

Чтобы проверить, есть ли решение уравнения $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ в целых числах, можно идти по реке, находить на ней все «отростки» нужного знака и идти по ним. На каждом отростке модуль увеличивается, значит, по каждому отростку мы будем идти конечное количество времени. Однако река обычно бесконечная. Докажем, что на самом деле она периодичная.

Пусть форма имеет вид $ax^2 + bxy + cy^2$. Тогда в грани с x написано a, с y — c, с $x + y$ — $a + b + c$, с $x + 2y$ — $a + 2b + 4c$ и т.п. Заметим, что форма представляется в виде перемножения матриц — $Q(x, y) = (x\ y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\binom{x}{y}$. Обозначим $D_Q = ac - \frac{b^2}{4} = \frac{-D}{4}$.

Лемма 4. Для каждого ребра топокарты D_Q постоянен.

Доказательство. Доказываем по индукции по длине топокарты. Для первого ребра это верно по определению. Для следующего ребра это верно, так как:

$$a(a \pm b + c) - \left(a \pm \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + ab + ac - a^2 - ab - \frac{b^2}{4} = ac - \frac{b^2}{4}. \blacksquare$$

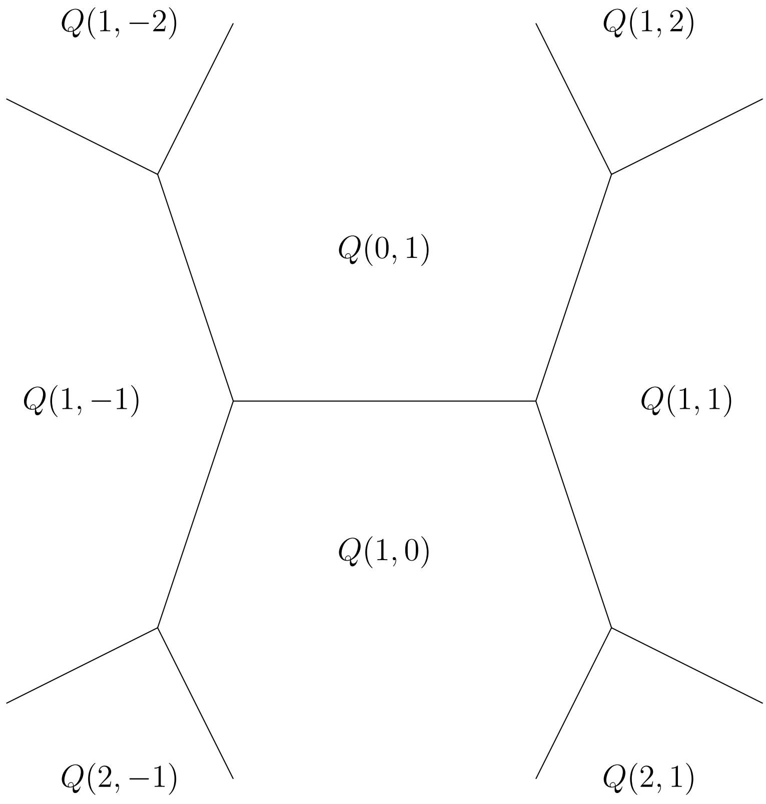
Теорема 5. Вершины реки топокарты периодичны.

Доказательство. $ac - \frac{b^2}{4} = -d_1$ — константа. Тогда $d_1 = -ac + \frac{b^2}{4}$, следовательно, $\frac{b^2}{4} < d_1$, т.к. $ac < 0$ по определении реки. Следовательно, существует всего конечное количество чисел b, т.е. конечное количество чисел ac, а т.к. $a, c \in \mathbb{Z}$, то количество троек (a, b, c) на реке конечно. С другой стороне, по тройке топокарта восстанавливается однозначно, значит, это период. ■

Следовательно, существует **конечный** алгоритм проверки, принимает ли квадратичная форма заданное целое значение.

Связь с диаграммами Фарея

Нарисуем граф Диаграммы Фарея. Заметим, что двойственный к нему — топокарта (как бесконечный граф со степенью 3). Каждая грань топокарты содержит единственную точку на границе Диаграммы. Тогда вектор, написанный в грани топокарты, равен дроби, записанной в этой точке диаграммы.



Цепные дроби-II

Рассмотрим разложение $\sqrt{2}$ в цепную дробь:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{2}-1} = [1;2,2,2\dots] = [1;\overline{2}] \tag{3}$$

Теорема 6 (Лагранж). Цепная дробь α периодична тогда и только тогда, когда $\exists a,b,c \in \mathbb{Z} : a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, т.е. $\exists a,b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} : \alpha = a + b\sqrt{n}, n \neq m^2$.

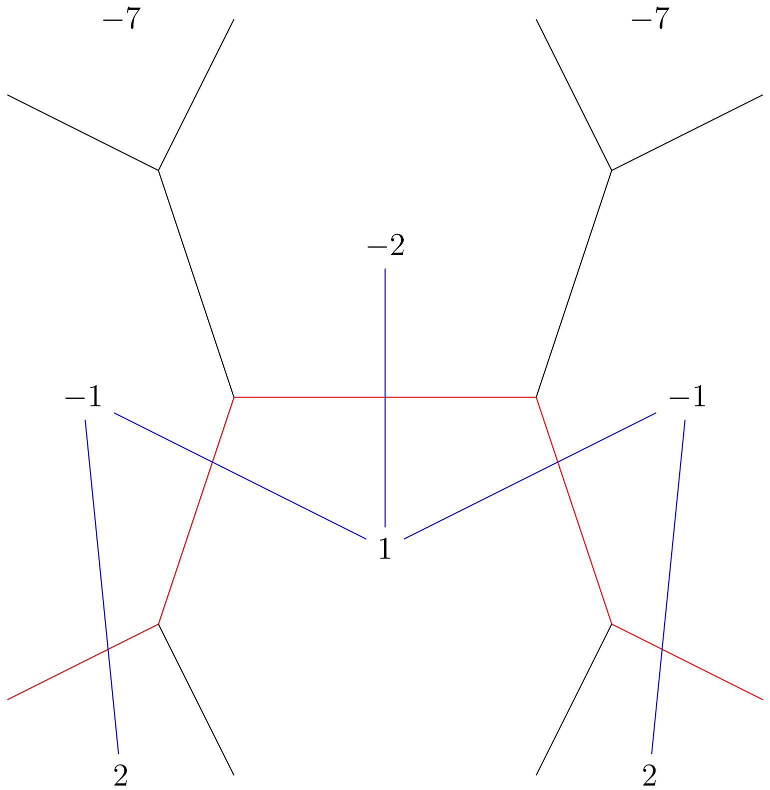
Идея доказательства.

$$\alpha(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\dots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + x}}}} = \frac{m+nx}{l+kx} \tag{4}$$

Тогда мы решаем уравнение вида $\dfrac{m+nx}{l+kx} = \dfrac{m'+n'x}{l'+k'x}$, а оно квадратное. ■

Теорема 7. $\sqrt{d} = [a_0;\overline{a_1,a_2,\dots,a_n}]$, причём $a_n = 2a_0$, а остальные a_k образуют палиндром.

Нарисуем топокарту для $Q = x^2 - 2y^2$, затем выпрямим реку. Тогда, если соединить соседние смежные с рекой грани отрезками, получится разложение $\sqrt{2}$ в цепную дробь по Гурвицу. Кроме того, вектора, находящиеся в гранях, в которых написано ± 1, дают приближения $\sqrt{2}$ и решения уравнения Пелля. Наконец, если делать то же самое для формы $x^2 - dy^2$, получится то же самое для $\sqrt{d}$.



Решение уравнений Пелля

Посмотрим на матрицу, умножение на которую переводит тривиальное решение уравнений $x^2 - dy^2 = \pm 1$ в первое нетривиальное. Умножим тривиальное решение на эту матрицу в какой-то степени и получим решение. Например, для $\sqrt{2}$ это $\binom{3\ 4}{2\ 3}$, и умножение на эту матрицу даёт следующее решение, например, $\binom{3\ 4}{2\ 3} \cdot \binom{3}{2} = \binom{17}{12}$.