Теорема Брукса

Гусев Антон Сергеевич

Берендеевы поляны, 15–17 августа 2019 г.

Раскраски графов

Будем красить вершины так, что любые две соседние вершины имеют разные цвета (такие раскраски называются *правильными*).

Определение 1. Хроматическое число графа G — минимальное такое $n = \chi(G) \in \mathbb{N}$, что существует правильная раскраска G в n цветов.

Определение 2. Число независимости графа G ($\alpha(G)$) — размер максимального независимого множества вершин (внутри которого нет рёбер).

Теорема 1. Пусть $G = (V, E)$. Тогда $\chi(G) \geq \dfrac{|V|}{\alpha(G)}$.

Доказательство. Каждый цвет в раскраске — независимое множество, поэтому кол-во вершин каждого цвета не больше $\alpha(G)$, откуда и следует утверждение. ■

Теорема 2 (Брукс, 1941). Пусть $G = (V, E)$ связен и $\forall v \in V \ \deg(v) \leq n$, кроме того, G — не нечётный цикл и не полный граф. Тогда $\chi(G) \leq n$.

Доказательство. Разберём несколько случаев:

1. Пусть в графе есть вершина степени меньше n. Тогда можно её удалить и в оставшемся графе есть вершина степени меньше n. Покрасим граф по индукции, затем покрасим удалённую вершину в один из цветов, не использованных в её соседях.

2. Пусть в графе есть вершина-мост (при удалении которой граф теряет связность). Удалим её, покрасим компоненты вместе с мостом (по 1 — в компонентах у вершины-моста степень меньше n) так, что у удалённой вершины в раскрасках один и тот же цвет. Тогда получится правильная раскраска.

3. Пусть в графе есть мост из двух вершин.

   (a) Вершины моста соединены ребром. Тогда сделаем то же самое, что и в 2.

   (b) Вершины моста не соединены ребром. Сделаем то же самое, что и в 2. Тогда в раскрасках они либо одного цвета, либо разных. Если они одновременно одного цвета или одновременно разных цветов, то задача решена. Иначе рассмотрим ту компоненту, где они одного цвета. Если в ней есть вершина с двумя или более рёбрами в другую компоненту, уберём её, покрасим оставшуюся часть компоненты, затем покрасим удалённую вершину в цвет, не совпадающий с цветом другой вершины моста. Иначе обе вершины соединены с одной вершиной извне, и можно доказать, что одна из этих «пограничных» вершин соединена с одной вершиной извне. Тогда мы нашли вершину степени 2, следовательно, у всех вершин степень 2, значит, это нечётный цикл — противоречие.

   В обоих случаях мы красим граф в n цветов или попадаем в противоречие. ■

4. Есть три вершины v, u, w, такие, что $v \sim u, u \sim w, v \not\sim w$, и при удалении пары (v, w) граф не теряет связность. Тогда подвесим граф на вершину u, затем поставим v и w на уровень -1 и покрасим их в первый цвет. Идём снизу вверх по уровням графа. Заметим, что любую вершину на текущем нижнем уровне можно покрасить. Действительно, она соединена с n вершинами, но (хотя бы) одна из этих вершин находится на уровень выше и не даёт запретов. Красим так все уровни от последнего до первого. На нулевом уровне есть только вершина u, у неё n соседей, но хотя бы у двух — v и w — цвет совпадает, поэтому есть не запрещённый цвет. ■

Доказательство заканчивается вот так. Рассмотрим какие-то две вершины, не соединённые ребром, и рассмотрим между ними кратчайший путь. Тогда первые три вершины имеют вид u, v, w из 4. Тогда если при удалении двух из них граф не теряет связность — случай 4, иначе 3. ■

Лемма 3. У каждого члена парламента не больше семи врагов.[1] Тогда их можно разбить на две палаты, что в каждой палате у каждого её члена не более трёх врагов.

Доказательство. Разобьём парламент на две палаты как угодно, затем за 1 шаг будем перемещать члена с 4 или более врагами в другую палату. Тогда после шага общее количество пар врагов в палатах уменьшается, и когда оно уменьшится до минимума, условие будет выполнено. ■

Лемма 4. Пусть в графе нет K_4 и $\deg(v) \le 7$. Тогда $\chi(G) \le 6$.

Доказательство. По 3 разобьём вершины на 2 компоненты. В каждой из них нет K_4, поэтому работает теорема Брукса для $n = 3$ и каждая из них красится не более в три цвета. Поэтому весь граф красится не более чем в шесть цветов. ■

Теорема 5 (Брукс-Super). Пусть в G нет K_3. Тогда $\chi(G) \le \dfrac{9n}{\log_2 n}$ для $n > n_0$.

Лемма 6. Пусть в G нет K_3 и выполняется $n = 2^k - 1$. Тогда $\chi(G) < \frac{3}{4}n + 1$.

Доказательство. Применим 3 $k - 2$ раз. Это разобьёт граф на 2^{k-2} компонент так, что в каждой компоненте выполняется $\deg(v) \le 3$. Тогда для этой компоненты можно применить теорему Брукса для $n = 3$ — каждая из компонент красится не более чем в три цвета, значит, весь граф — не более чем в $3 \cdot 2^{k-2} < \frac{3}{4} \cdot n + 1$. ■

Теорема 7. В графе без K_3 хроматическое число может быть сколь угодно большим.

Доказательство. Доказываем по индукции, что для любого n существует граф G_n без K_3 такой, что $\chi(G_n) = n$. База для $n = 1$ очевидна. Пусть у нас есть $G_n = \{\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, E\}$. Будем строить G_{n+1} так. Добавим к G вершины $u_1, u_2, \ldots, u_m, w$. Для каждой пары $(v_i, v_j) \in E$ добавим рёбра (u_i, v_j) и (v_i, u_j). Наконец, добавим все рёбра вида (w, u_i). Тогда:

1. Пусть вершины (x, y, z) образуют треугольник. Тогда если $w \in (x, y, z)$, то остальные 2 вершины в u_i, что невозможно. Иначе одна из вершин в u_i, а остальные две — в v_i, что противоречит предположению индукции. **Следовательно, в G_{n+1} треугольников нет**.

2. G_{n+1} красится в $n + 1$ цвет. Действительно, можно покрасить w в цвет $n + 1$, а все u_i — в цвета соответствующих v_i.

3. $\chi(G_{n+1}) = n + 1$. Действительно, пусть он красится в n цветов. Можно считать, что w покрашена в первый цвет. Тогда u_i не покрашены в первый цвет. Пусть какая-то v_i (для конкретного i) покрашена в первый цвет. Тогда перекрасим её в цвет соответствующей u_i. Докажем, что раскраска всё ещё правильная. Действительно, теперь возможные плохие рёбра имеют вид (v_i, v_j). Тогда (u_i, v_j) тоже плохое — противоречие. Следовательно, можно избавиться в G_n от первого цвета, т.е. этот граф красится правильным образом в $n - 1$ цвет, что противоречит предположению индукции. ■

[1] Лемма обобщается до $mn - 1$ врагов. Тогда, перемещая члена с n врагами в палату с минимальным количеством врагов, можно разбить парламент на m палат так, что в каждой палате у каждого её члена меньше n врагов.

Лемма 8. Пусть в графе нет K_3 и $\deg(v) \le 7$. Тогда $\chi(G) \le 4$.

Теорема 9 (Зачёт). В условиях 5 асимптотически верно $\chi(G) \le \frac{n}{2} + k$.

Доказательство. Применим 3 для $m = \lceil \frac{n+1}{8} \rceil, n = 8$. Тогда по 8 граф разобьётся на $\lceil \frac{n+1}{8} \rceil$ компонент с хроматическим числом не более 4. Тогда $\chi(G) \le 4\lceil \frac{n+1}{8} \rceil$, что асимптотически равно $\frac{n}{2}$. ■

Теорема 10 (Гид, 1999). Если в графе G нет K_n и $\deg(v) \le n$, то $\chi(G) \le n-1$. *Доказательство не рассказал, т.к. нужен вероятностный метод.*

Определение 3. Охват графа $o(G)$ — длина минимального цикла графа. Охват леса по определению равен $+\infty$.

Теорема 11 (Эрдёш, 1963). $\forall k, d \; \exists G : o(G) \ge d, \chi(G) \ge k$. [2]

Доказательство. Зафиксируем n — число вершин графа, δn — число рёбер графа. Будем считать матожидание величины X_l — количества циклов длины l. Заметим, что количество способов выбрать такой цикл в графе равно $\binom{n}{l} \cdot \frac{(l-1)!}{2}$, следовательно, суммарное количество циклов в этих графах — $\binom{n}{l} \cdot \frac{(l-1)!}{2} \cdot \binom{m-l}{\delta n - l}$, где $m = \binom{n}{2}$. Тогда $\mathbb{E}X_l = \dfrac{\binom{n}{l} \cdot \frac{(l-1)!}{2} \cdot \binom{m-l}{\delta n-l}}{\binom{m}{\delta n}}$.

$$\binom{n}{l} \cdot \frac{(l-1)!}{2} \le \frac{n^l}{2l} \text{ и } \frac{\binom{m-l}{\delta n - l}}{\binom{m}{\delta n}} = \frac{(\delta n)!(m-l)!}{(\delta n - l)! m!} = \frac{\delta n(\delta n - 1)\dots(\delta n - l + 1)}{m(m-1)\dots(m-l+1)} < \left(\frac{\delta n}{m}\right)^l.$$

Тогда $\mathbb{E}X_l < \left(\frac{\delta n}{m}\right)^l \cdot \frac{n^l}{2l} = \frac{\delta^l}{2l} \cdot \left(\frac{n^2}{m}\right)^l = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^l \cdot \frac{2^l \cdot \delta^l}{2l} \le \frac{2^l \delta^l}{3} \le \frac{2^l \cdot \delta^l}{3}$, где предпоследнее неравенство выполняется при достаточно больших n (т.к. $l < g$). Далее:

$$\mathbb{E}X := \sum_{i<g} \mathbb{E}X_i < \frac{1}{3} \cdot \sum_{l=3}^{g-1} (2\delta)^l \le \frac{1}{3} \cdot \frac{(2\delta)^g - 1}{2\delta - 1} \le \frac{(2\delta)^g}{6\delta - 3}.$$

Тогда можно взять очень большое δ так, что $\mathbb{E}X < \frac{n}{6}$. Тогда больше чем в половине графов число «маленьких» циклов не больше, чем $\frac{n}{3}$.

Теперь посчитаем матожидание Y_p — количество независимых множеств (антиклик) размера p. Их суммарное количество в графах — $\binom{n}{p} \cdot \binom{m-t}{\delta n}$, где $t = \binom{p}{2}$. Тогда $\mathbb{E}X_p = \dfrac{\binom{n}{p} \cdot \binom{m-t}{\delta n}}{\binom{m}{\delta n}} < 2^n \cdot \dfrac{\binom{\delta n}{m-t}}{\binom{m}{\delta n}} < 2^n \cdot \left(\dfrac{m-t}{m}\right)^{\delta n} = \left(2\left(\dfrac{m-t}{m}\right)^\delta\right)^n$. Далее, т.к. $p = \frac{n}{c}$:

$$\frac{t}{m} = \frac{p(p-1)}{n(n-1)} < \frac{1}{c^2}.$$

Тогда (в предположении, что c фиксировано и n очень большое)

$$\mathbb{E}X_p = \left(2\left(1 - \frac{t}{m}\right)^\delta\right)^n < \left(2\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^\delta\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, больше чем в половине графов нет антиклик размера $\frac{n}{c}$. Значит, существует граф, в котором оба этих свойства выполнены — «маленьких» циклов не больше $\frac{n}{3}$ и число независимости не больше $\frac{n}{c}$. Удалим из каждого цикла по вершине. Тогда останется не меньше $\frac{2n}{3}$ вершин, значит, по 1 верно $\chi(G) \ge \frac{2c}{3}$. Подставим $c = \frac{3k}{2}$ и получим решение задачи. ■

[2] 7 — частный случай теоремы для $d = 4$.