

Матанализ, 1 курс
Красносельский

2 сентября 2020 г. — 27 сентября 2020 г.

Формула оценки: $\frac{4P + 6S + 5K + 5E}{20}$, где P, S, K, E — оценки за листки, семинары, коллоквиум и экзамен соответственно.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Определение 1. Бинарная операция — функция $(a, b) \in G \times G \mapsto a \oplus b \in G$, т.е. каждую упорядоченную пару элементов G переводит в какой-то элемент G .

Определение 2. Коммутативная группа — множество G с операцией \oplus со следующими свойствами:

- $\exists e \in G \forall x \in G : e \oplus x = x \oplus e = x$.
- $\forall x \in G \exists y \in G : x \oplus y = y \oplus x = e$.
- $\forall a, b, c \in G : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (ассоциативность).
- $\forall a, b \in G : a \oplus b = b \oplus a$ (коммутативность).

Определение 3. Поле — множество $(G, \oplus, \odot, 0)$ со следующими свойствами:

- (G, \oplus) — аддитивная группа;
- $(G \setminus \{0\}, \odot)$ — мультипликативная группа;
- $\forall a, b, c \in G : (a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$.

Определение 4. Отношение — подмножество $G \times G$. Например, отношение « $a < b$ » в множестве $\{1, 2, 3\}$ — это $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Определение 5. Отношение порядка — отношение \leq со следующими свойствами:

- $\forall a : a \leq a$.
- $\forall a, b : (a \leq b \cap b \leq a) \implies a = b$.
- $\forall a, b, c : (a \leq b \cap b \leq c) \implies a \leq c$.
- $\forall a, b : (a \leq b \cup b \leq a)$.

Определение 6. Упорядоченное поле — множество F со следующими свойствами:

- F — поле.
- На F есть отношение порядка.
- $\forall a, b, c \in F : a \leq b \implies a + c \leq b + c$.
- $\forall a, b \in F : 0 \leq a \cap 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$.

Примеры упорядоченных полей: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, алгебраические числа, кроме того, рациональные функции над \mathbb{R} со следующим отношением порядка: $f_1 \leq f_2$, если у $f_1 - f_2$ отношение старших членов числителя и знаменателя меньше или равен 0.

Аксиома непрерывности. Пусть F — упорядоченное поле, и $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \subset F$. Кроме того, $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$. Тогда $\exists c \in F : \forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$.

Определение 7. Множество вещественных чисел — упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.

Пример. $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, т.к. у множеств $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0, r^2 < 2\}$ и $\{r \in \mathbb{Q} : r > 0; r^2 > 2\}$ нет разделителя.

ПРИМЕРЫ МОДЕЛЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

- $0, 1, 2, 3, \dots$
- Прямая с 0 и 1.
- Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей из \mathbb{Q} .
- Сечения Дедекинда.

Определение 8. Индуктивное множество — подмножество $K \subset \mathbb{R}$ такое, что если $x \in K$, то $x + 1 \in K$.

Определение 9. Натуральные числа — минимальное индуктивное множество, содержащее единицу.

Определение 10. Целые числа — множество из всех натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 11. Рациональные числа — такое множество: $\mathbb{Z} \cup \{mn^{-1} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$

Теорема 1. У любого упорядоченного поля есть подполе, изоморфное \mathbb{Q} .

Аксиома Архимеда. $\forall a, h > 0 \exists n \in \mathbb{N} : an > h$.

Теорема 2 (Принцип Архимеда). $\forall h > 0 \exists a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : (n - 1)h \leq a < nh$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{n | n \in \mathbb{Z}, ah^{-1} < n\}$. Если $a = 0$, то это \mathbb{N} , а в противном случае оно непусто по аксиоме Архимеда. Кроме того, оно ограничено снизу нулём. Тогда у него есть минимальный элемент, он подходит в качестве n . ■

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n^{-1} < \varepsilon$.

Следствие 2. $a < b \in \mathbb{R} \implies \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Доказательство. Возьмём n так, что $n^{-1} < b - a$, и m так, что $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$. Тогда $a < \frac{m}{n} < b$. ■

Следствие 3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists [x]$.

Определение 12. Последовательность — функция натурального аргумента.

Определение 13. Вложенная последовательность — последовательность a_i множеств такая, что $a_i \subset a_{i-1}$ для всех i .

Определение 14. Стремящаяся к нулю последовательность — последовательность a_i вещественных чисел такая, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : |a_m| < \varepsilon$.

Теорема 3. Пусть Δ_n — вложенная последовательность отрезков в \mathbb{R} , т.е. множеств вида $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Тогда $\bigcap_n \Delta_n \neq \emptyset$. Кроме того, если последовательность $|\Delta_n|$ стремится к 0, то $|\bigcap_n \Delta_n| = 1$.

Доказательство. Пусть $\Delta_n = [a_n, b_n]$. Рассмотрим $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. У нас верно, что $a_n \leq b_m$, т.к. последовательность вложена, тогда по аксиоме непрерывности $\exists \gamma : a_i < \gamma < b_j$. Тогда $\gamma \in [a_n, b_n] \forall n$. Кроме того, если таких γ хотя бы два, то длина каждого отрезка хотя бы $|\gamma_2 - \gamma_1|$, значит, последовательность длин не стремится к 0. ■

Определение 15. Окрестность — любой интервал, содержащий x .

Определение 16. ε -окрестность — интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

СВОЙСТВА

- Если $\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(x)$ — окрестности, то $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ — тоже.
- $\forall x \neq y \exists \mathcal{O}(x) : y \notin \mathcal{O}(x)$.

Определение 17. Предельная точка множества — такое число x , если в любой окрестности $\mathcal{O}(x)$ существует $a \neq x \in A$, такое, что $a \in \mathcal{O}(x)$ (это то же самое, как если бы в этой окрестности было бесконечно много точек из A). Множество предельных точек обозначается A' .

Теорема 4. Пусть A — бесконечное ограниченное множество. Тогда $A' \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть границы A — это точки a_1, b_1 . Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам, в одном из отрезков лежит бесконечное количество точек A . Пусть его границы — это a_2, b_2 . Его тоже поделим пополам и т.п. У нас получится вложенная последовательность отрезков, на каждом из которых лежит бесконечное количество A . Пусть γ — пересечение этих отрезков. Возьмём любую окрестность γ . Она целиком содержит какой-то из отрезков $[a_n, b_n]$, в котором бесконечное количество элементов A . Значит, γ — предельная точка. ■

Определение 18. Открытое множество — такое множество G , что $\forall x \in G \exists O(x) \subset G$.

Определение 19. Замкнутое множество — такое множество G , что $G' \subset G$.

Определение 20. Внутренняя точка множества — такая точка x , что $\exists O(x) \subset A$.

ПРИМЕРЫ

- \emptyset, \mathbb{R} замкнутые и открытые одновременно. Других одновременно замкнутых и открытых множеств нет (это эквивалентно аксиоме непрерывности).
- \mathbb{N} замкнутое — у него нет предельных точек.
- (a, b) открытое.
- $[a, b]$ замкнутое.
- Канторово множество замкнутое.
- $[a, b)$ ни открытое, ни замкнутое.

Теорема 5. Пусть A открытое, а B замкнутое. Тогда $A \setminus B$ открытое, а $B \setminus A$ замкнутое. В частности, $\mathbb{R} \setminus B$ открытое, а $\mathbb{R} \setminus A$ замкнутое.

Доказательство. Первая часть: пусть $x \in A \setminus B$. Тогда существует окрестность $O(x) \subset A$. Кроме того, $x \notin B$. Тогда $x \notin B'$, значит, существует окрестность $O^*(x)$ такая, что $O^*(x) \cap B = \emptyset$. Тогда $O(x) \cap O^*(x) \subset A \setminus B$.

Вторая часть: пусть $x \in (B \setminus A)'$. Это значит, что в любой $O(x)$ бесконечно много точек из $B \setminus A$. Так как все эти точки в B , и B замкнутое, то $x \in B$. Предположим, что $x \in A$. Тогда есть $O^*(x) \subset A$, значит, $O^*(x) \cap B \setminus A = \emptyset$, противоречие. Значит, $x \in B \setminus A$. ■

Определение 21. Замыкание множества — множество $\overline{A} = A \cup A'$.

Лемма 6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда A' замкнуто.

Доказательство. Пусть $x \in A''$. Это значит, что в любой $O(x)$ есть $y \in A'$. Возьмём окрестность $O(y)$, такую, что $O(y) \subset O(x)$, $x \notin O(y)$. В этой окрестности есть $z \in A$. Но $z \in O(x)$, значит, x — предельная точка для A , т.е. $x \in A'$. ■

Лемма 7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда \overline{A} замкнуто.

Доказательство. Пусть $x \in (\overline{A})'$. Вначале докажем, что $x \in (A' \cup A'')$. Действительно, $x \in (A \cup B)'$ значит, что есть последовательность в $A \cup B$, которая сходится к x , и из неё можно выбрать бесконечную подпоследовательность, лежащую либо в A , либо в B .

Итак, $x \in (A' \cup A'')$. Но A' замкнуто, значит, $A'' \subset A'$. Тогда $x \in A' \subset \overline{A}$, т.е. \overline{A} замкнуто. ■

Лемма 8. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ и все множества в S открытые. Тогда $A = \bigcup_{s \in S} s$ открытое.

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда $x \in s$ для какого-то $s \in S$. Тогда $O(x) \in s \subset A$. ■

Лемма 9. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ и все множества в S замкнутые. Тогда $A = \bigcap_{s \in S} s$ замкнутое.

Доказательство. Следует из Т. 5 и Т. 8. ■

Лемма 10. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ конечно и все множества открытые. Тогда $A = \bigcap_{s \in S} s$ открытое.

Доказательство. Докажем для двух множеств (для большего числа по индукции). Пусть $A = S_1 \cap S_2$. Возьмём любое число $k \in S_1 \cap S_2$. Мы знаем, что $\exists O_1(k) \subset S_1, O_2(k) \subset S_2$. Значит, $O_1(k) \cap O_2(k) \subset S_1 \cap S_2$. Значит, A открытое. ■

Лемма 11. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ конечно и все множества замкнутые. Тогда $A = \bigcup_{s \in S} s$ замкнутое.

Доказательство. Следует из Т. 5 и Т. 10. ■

Теорема 12. Пусть A открытое. Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = (a_n; b_n)$ (при этом a_n может быть равно $-\infty$, а $b_n = +\infty$).

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда $O(x) \in A$. Рассмотрим все такие окрестности. Пусть L_x — множество левых их концов, а R_x — их правых концов. Мы знаем, что существуют $l_x = \inf L_x, r_x = \sup R_x$ (причём они могут быть равны $\pm\infty$). Возьмём все эти интервалы (l_x, r_x) и в каждом из них выберем рациональную точку. Они все различные (если интервалы пересекаются, то они равны), значит, интервалов не более чем счётно. ■

Определение 22. Покрывание множества — набор множеств B , т.ч. $A \subset \bigcup_{b \in B} b$.

Определение 23. Открытое покрытие — покрытие B , т.ч. все его элементы открытые.

Определение 24. Компакт — множество A , такое, что из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Лемма 13 (Гейне, Борель). Отрезок $[a, b]$ является компактом.

Доказательство. Пусть $A = [a, b]$, и B — его открытое покрытие. Пусть такого конечного подпокрытия не существует. Разрежем отрезок пополам, у нас получатся отрезки C_1, D_1 . Тогда хотя бы для одного из них нет конечного подпокрытия (если нет у обоих, выберем другой). Разрежем его пополам на отрезки C_2, D_2 , хотя бы у одного из них нет конечного подпокрытия и т.п. Рассмотрим систему отрезков $E_i = C_i \cup D_i$. У них есть общая точка γ . Так как B — покрытие, то наша общая точка лежит в каком-то множестве b . Значит, $O(\gamma) \subset b$ (т.к. покрытие было открытым). Возьмём отрезок $E_k \subset O(\gamma)$ (он есть, т.к. длины этих отрезков стремятся к 0). Мы знаем, что для него нет конечного подпокрытия, но оно есть — это множество b . Противоречие. ■

Определение 25. Всюду плотное множество — такое множество $A \subset [0, 1]$, что $\bar{A} = [0, 1]$ (первое условие для определённости, в общем случае оно не нужно).

Определение 26. Нигде не плотное множество — такое множество A , что для любого (a, b) существует $(c, d) \subset (a, b)$ такой, что $(c, d) \cap A = \emptyset$.

Теорема 14 (Бэр). Отрезок $[0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счётного количества нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и все B_i нигде не плотные. Обозначим $C_1 = [0, 1]$. Возьмём любой интервал на отрезке C_k , тогда в нём существует интервал, не пересекающийся с B_k , выберем в нём подмножество — отрезок и назовём его C_{k+1} . У нас получится система вложенных отрезков, у которой есть общая точка γ , которая не лежит ни в одном из наших множеств, т.к. C_t не пересекается с B_q при $t > q$. ■

Определение 27. Канторово множество — результат следующей процедуры. Обозначим $S_0 = \emptyset, K_i = [0, 1] \setminus S_i$. На каждом шаге K_i будет дизъюнктивным объединением конечного количества отрезков вида $[l_j, r_j]$. Тогда $S_{i+1} = S_i \cup \bigsqcup (\frac{2l_j+r_j}{3}, \frac{l_j+2r_j}{3})$ будет дизъюнктивным объединением конечного количества интервалов. Канторовым множеством называется $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$.

Теорема 15. Канторово множество замкнутое, нигде не плотное, и равномощное $[0, 1]$.

Доказательство. Первая часть: $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, и каждое S_i — объединение конечного кол-ва интервалов, значит, их объединение — объединение счётного кол-ва интервалов, т.е. открытое. Тогда K — дополнение открытого множества, значит, оно замкнутое.

Вторая часть: рассмотрим любой интервал I . Если он пересекается с $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, то мы победили, иначе он лежит целиком внутри либо $[0, \frac{1}{3}]$, либо $[\frac{2}{3}, 1]$. Рассмотрим тот, в котором он лежит, и продолжим так делать до тех пор, пока мы не победим (мы победим, т.к. для какого-то r верно $|I| > \frac{1}{3^r}$ и мы сделаем не более $r + 1$ шага).

Третья часть: заметим, что канторово множество — это множество всех таких чисел на отрезке $[0, 1]$, что их троичная запись состоит только из 0 и 2. Заменим все 2 на 1 и рассмотрим число с такой двоичной записью. Это биекция между отрезком и канторовым множеством. ■

Теорема 16 (Вейерштрасс). Ограниченная монотонная последовательность сходится.

Доказательство. Пусть $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим $\sup A$. В любой окрестности $O(\sup A)$ есть точка x_N , и при $n > N$ все x_n будут лежать в этой окрестности (т.к. они все меньше $\sup A$). Значит, $\sup A$ это предел. ■

Десятичная запись числа. Пусть у нас есть $\gamma \in \mathbb{R}$. Мы знаем, что $\exists n_0 = [\gamma]$. Пусть $S_1 = [n_0, n_0 + 1]$. На k -м шаге разделим S_k на 10 равных частей, в какой-то из них лежит γ (если в двух, то будем брать левую), обозначим её S_{k+1} . У нас будет последовательность S_k сходящихся отрезков, у них есть ровно одна общая точка, эта точка и будет соответствовать γ .

Пусть $a_n, b_n \rightarrow \infty$. Будем говорить, что $a \gg b$, если $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$.

Лемма 17. Пусть $0 < \alpha < \beta, a > 1$. Тогда

$$a^{n^2} \gg n^n \gg n! \gg a^n \gg a^{\sqrt{n}} \gg n^\beta \gg n^\alpha \gg \log_a(n) \gg 1.$$

Определение 28. Частичный предел — предел какой-то подпоследовательности. Другое определение: a — частичный предел x_n , если в любой окрестности a есть бесконечно много членов x_n .

Теорема 18. Множество частичных пределов x_n замкнуто.

Доказательство. Пусть X — множество частичных пределов и $a \in X'$. Мы знаем, что в любой окрестности $O(a)$ есть точка $y \in X$. Возьмём $O(y) \subset O(a)$. y — это частичный предел, значит, в $O(y)$ есть $z \in \{x_n\}$. Мы нашли в каждой окрестности a точку из $\{x_n\}$, т.е. a — частичный предел. ■

Определение 29. Верхний предел — число $\limsup x_n = \sup X$, где X — множество частичных пределов.

Определение 30. Нижний предел — число $\liminf x_n = \inf X$, где X — множество частичных пределов.

Определение 31. Сумма ряда — предел последовательности $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$.

Лемма 19. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ не сходится.

Доказательство. Следует из того, что $S_{2n+1} - S_{2n} > \frac{1}{2}$. ■

Теорема 20 (Критерий Коши). Последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon$. В частности, ряд S_n сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$.

Определение 32. Абсолютно сходящийся ряд — ряд a_n такой, что $\sum |a_n|$ сходится.

Определение 33. Условно сходящийся ряд — ряд, который сходится, но не абсолютно сходится.

Лемма 21. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Следует из Т. 20. ■

Лемма 22. Пусть $\sum a_n = A, \sum b_n = B, c_n = a_n + b_n$. Тогда $\sum c_n = A + B$.

Лемма 23. Пусть $\sum ca_n = A$. Тогда $\sum a_n = \frac{A}{c}$.

Лемма 24. Пусть $K \subset \mathbb{N}$ и $L = \mathbb{N} \setminus K$ бесконечны, кроме того, ряды a_n, b_n сходятся. Рассмотрим такую последовательность c_n : на k_n -м месте стоит a_n , а на l_m месте — b_m . Тогда $\sum c_n = \sum a_n + \sum b_n$.