Решения занятия №22

№1. Кикимора выращивает сон-траву на участке прямоугольной формы. Иван-дурак в качестве помощи решил вскопать участок под посев, но внес изменения, одну сторону увеличил на 30%, а другую уменьшил на 30%. Изменится ли в результате урожай сон-травы, и если изменится, то как?

Решение. $0.7 * 1.3 = 0.91$. Уменьшится на 9%. ■

№2. Тетрадь, ручка и карандаш стоят 120 рублей. А 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Что дороже: две тетради или одна ручка?

Решение. 3 тетради, 3 ручки и 3 карандаша стоят 360 рублей. 5 тетрадей, 2 ручки и 3 карандаша стоят 350 рублей. Получается, что ручка стоит на 10 рублей больше, чем 2 тетради. ■

№3. Учительница записала на доске два натуральных числа. Леня умножил первое число на сумму цифр второго и получил 201920192019. Федя умножил второе число на сумму цифр первого и получил 202020202020. Не ошибся ли кто-то из ребят?

Решение. Заметим, что число делится на 9 и на 3 тогда же, когда его сумма цифр делится на 9 и на 3. 201920192019 делится на 9, следовательно, произведение чисел делится на 9. С другой стороны, 202020202020 на 9 не делится. Противоречие. ■

№4. По кругу стоят 12 детей. Мальчики всегда говорят правду мальчикам и врут девочкам, а девочки всегда говорят правду девочкам и врут мальчикам. Каждый из них сказал одну фразу своему соседу справа: «Ты — мальчик» или «Ты — девочка». Таких фраз оказалось поровну. Сколько мальчиков и сколько девочек стоит по кругу?

Решение. Заметим, что мальчик всегда говорит «Ты — мальчик», а девочка — «Ты — девочка». Следовательно, и мальчиков, и девочек по 6 человек. ■

№5. В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля, стартовав одновременно. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя — на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать один круг, а Коле — два круга. Сколько кругов составляла дистанция?

Решение. Пусть в дистанции k кругов, и Вася пробегает круг за t секунд. Тогда рассмотрим момент финиша Васи.

$$kt = (k-1)(t+2) = (k-2)(t+5).$$

$$0 = 2k - t - 2 = 5k - 2t - 10.$$

$$4k - 2t - 4 = 5k - 2t - 10.$$

Ответ: $k = 6$. ■

№6. Два поезда, в каждом из которых по 20 одинаковых вагонов, двигались навстречу друг другу по параллельным путям с постоянными скоростями. Ровно через 36 секунд после встречи их первых вагонов пассажир Вова, сидя в купе четвертого вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Олегом, а еще через 44 секунды последние вагоны поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Олег?

Решение. Между моментом встречи поездов и моментом их полного разъезда второй поезд сдвигается относительно первого на 40 вагонов, то есть время в 80 секунд модно разделить на 40 равных промежутков. Также заметим, что через n вагонов поравняются пары вагонов, у которых сумма номеров $n+1$. Нумерация ведётся с начала поезда, с первого вагона. Следовательно через 18 промежутков сумма будет 19, Олег едет в пятнадцатом вагоне. ■

№7. Каждый день, с понедельника по пятницу, ходил старик к синему морю и закидывал в море невод. При этом каждый день в невод попадалось не больше рыбы, чем в предыдущий. Всего за пять дней старик поймал ровно 100 рыбок. Какое наименьшее суммарное количество рыбок он мог поймать за три дня — понедельник, среду и пятницу?

Решение. Заметим, что в понедельник старик поймал не меньше, чем во вторник, а в среду — не больше, чем в четверг. Тогда он в понедельник, среду и пятницу поймал не меньше половины. Докажем, что 50 бывает. $50, 50, 0, 0, 0$. ■

№8. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске 8×8, чтобы они не били друг друга?

Решение. Пример на 14 слонов школьник покажет. Докажем, что на клетках одного цвета не может быть 8 слонов. Действительно, есть 7 диагоналей, параллельных большой диагонали, и на каждой из них не более одного слона. ■

№9. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «100». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

Решение. Эту задачу можно доказать по индукции и, наверное, ещё множеством других способов. Я (Никита — прим. ред.) приведу нетривиальное доказательство через инвариант.

Пусть последовательность на экране компьютера — алгоритм. Изначально на доске записано 1. 0 означает прибавить к числу на доске 1, 1 — умножить на 2. Заметим, что результат алгоритма не меняется если мы производим замену. Каждое действие увеличивает наше значение. Соответственно, мы не можем из конечного алгоритма получить сколь угодно длинный. ■

№10. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырех клеток? *Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*

Решение. Рассмотрим раскраску доски в два цвета в полосочку. Каждая буква «Г» содержит нечётное количество чёрных клеток. Букв «Г» 15, а чёрных клеток 30. Противоречие. ■