# Триангуляции Делоне́

**Соколов Артемий Алексеевич**

*23 февраля 2020 г. — 23 февраля 2020 г.*

Будем рассматривать триангуляции конечного множества точек (т.е. разбиения выпуклой оболочки множества на треугольники с вершинами в этих точках).

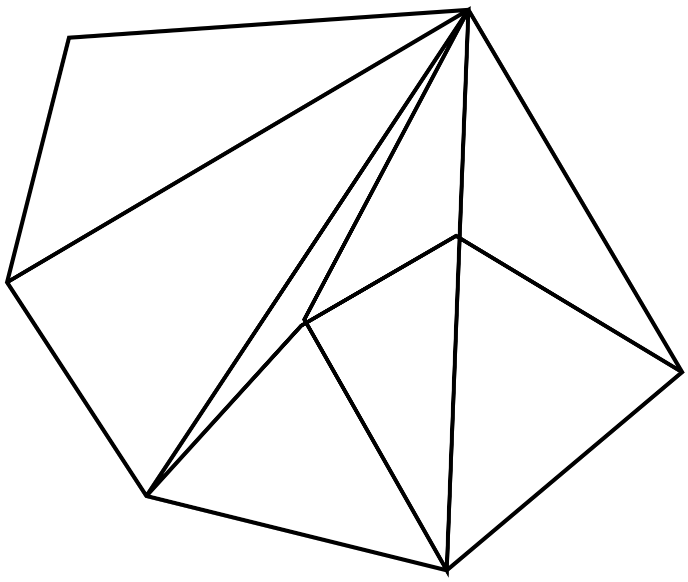


Рис. 1: Триангуляция

**Лемма 1.** В каждой триангуляции одинаковое количество рёбер.

**Доказательство.** Для триангуляции $V - E + F = 2$, причём $V = n$ — количество точек в множестве и $2E = 3(F-1) + k$, где $k$ — количество точек в выпуклой оболочке. Это линейное уравнение относительно $E$. ■

## Алгоритмы построения триангуляции

- По индукции: когда мы добавляем новую точку, она лежит в какой-то грани, тогда мы проводим триангуляцию этой грани. Этот алгоритм примерно квадратичный, потому что надо искать треугольник, в котором лежит точка.

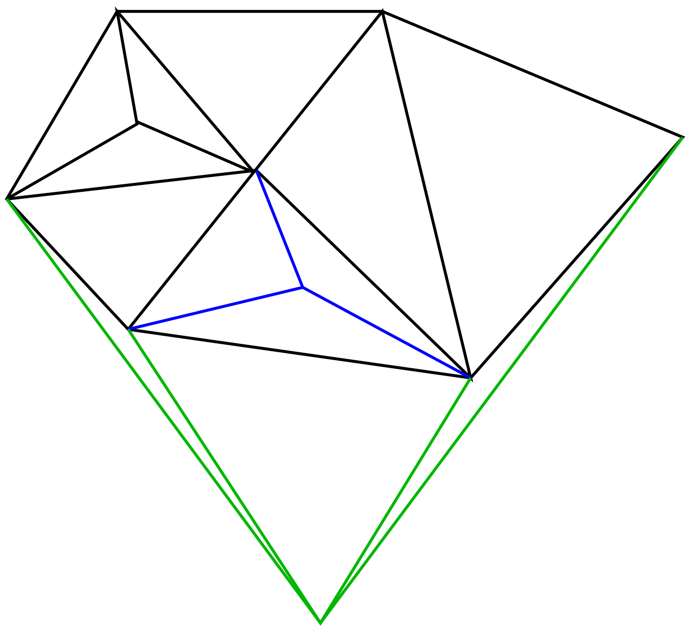


Рис. 2: Индуктивный алгоритм

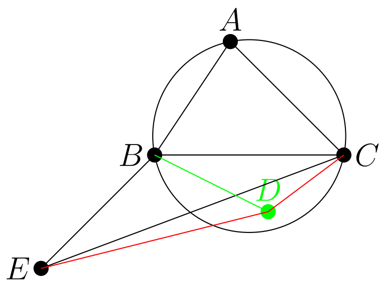
- Ещё можно отсортировать все точки по координате и идти справа налево, тогда каждый раз новая точка вне выпуклой оболочки.

**Определение 1. Триангуляция Делоне́** — такая триангуляция, что описанная окружность каждого треугольника триангуляции не содержит других точек множества.

**Определение 2. Локальное свойство Делоне́** — свойство триангуляции, что на каждом ребре описанные окружности треугольников на этом ребре не содержат противоположных точек.

**Теорема 2.** Если для каждого ребра выполнено 2, то выполнено и 1.

**Доказательство.** Пусть описанная окружность $\triangle ABC$ содержит точку $D$. Докажем, что описанная окружность $\triangle BCE$ тоже её содержит. Действительно, $\angle BAC + \angle BEC > 180° > \angle BAC + \angle BDC$. Тогда мы стали «ближе» к точке, а локальное свойство снова не выполнено. В какой-то момент мы дойдём до неё, значит, 2 не выполнено. ■




**Алгоритм получения триангуляции Делоне́.** Возьмём любую триангуляцию. Пусть она не Делоне́. Тогда для какого-то ребра не выполнено 2. Заменим это ребро в 4-угольнике на другое.

**Теорема 3.** Этот процесс заканчивается.

**Доказательство теоремы 3 #1.** Мы каждый 4-угольник меняем не более 1 раза, значит, процесс конечен. ■

**Доказательство теоремы 3 #2.** Пусть наши точки расположены на плоскости $Oxy$. Построим параболоид $z = x^2 + y^2$ и для каждой точки триангуляции поднимем её до параболоида. Заметим, что уравнение любой окружности имеет вид $x^2 + y^2 - kx - ly - c = 0$, но $x^2 + y^2 = z$, значит, эта окружность перешла в пересечение плоскости с параболоидом. Пусть есть 2 треугольника триангуляции. Они перешли в тетраэдр на параболоиде. Тогда когда мы делаем флип, мы заменяем две «верхние» плоскости тетраэдра на «верхнюю» и «нижнюю». Также 1 означает, что плоскости разбиения параболоида образуют выпуклую фигуру, а при флипе объём увеличивается. ■

В частности, это доказывает, что триангуляция Делоне́ существует (если точки общего положения).

**Определение 3. Область Вороного $V_P$ точки $P$** — множество точек, которые ближе к $P$, чем к другим точкам множества. Это пересечение каких-то полуплоскостей, значит, это выпуклый многоугольник.

Рассмотрим такое разбиение на фигуры. Соединим $P$ и $Q$ отрезком, если $|V_P \cap V_Q| \geq 2$. Заметим, что если никакие 4 точки не лежат на 1 окружности, то это триангуляция.

**Теорема 4.** Это триангуляция Делоне́.

*«Вы когда-нибудь видели спину жирафа? Она из многоугольников состоит. Так вот, это области Воронова, потому что пигмент разрастается.»*

**Теорема 5.** Рассмотрим самый маленький угол в треугольниках триангуляции. Тогда в триангуляции Делоне́ он наибольший.

**Доказательство.** Из любой триангуляции можно перейти в Делоне́ флипами. Из рисунка ниже очевидно, что при флипе минимальный угол не уменьшается. ■

**Применение.** Пусть мы хотим приблизить функцию $f(x, y)$ на множестве точек $S$. Тогда хороший план — триангулировать $S$ и на каждом треугольнике построить плоскость. Оказывается, что оптимум этого алгоритма — когда триангуляция Делоне́.

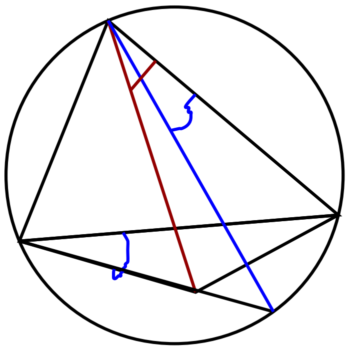


Рис. 3: min angle