

Математический магазин 15 мая

Саня

7 апреля 2020 г. — 15 мая 2020 г.

Методы 1. Докажите, что существует бесконечно много арифметических прогрессий из 57 чисел, произведение чисел в каждой из которых является точной 179-й степенью.

Методы 2. В правильном 21-угольнике 6 вершин покрашены в красный, а 7 других — в синий. Обязательно ли найдутся два равных треугольника, все три вершины одного из которых красные, а другого — синие?

Методы 3.

Методы 4. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных делителей и чётное количество нечётных?

Методы 5. Докажите, что в правильный пятиугольник можно так вписать квадрат, что его вершины будут лежать на четырёх сторонах пятиугольника.

Комбинаторика 1*. Каждая сторона $\triangle ABC$ разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует треугольников с вершинами в точках деления, у которых ни одна из сторон не параллельна какой-то стороне исходного треугольника?

Комбинаторика 2*. На сколько нулей оканчивается десятичная запись числа $11^{100} - 1$?

Комбинаторика 3*. В классе учатся 16 человек. Известно, что если выбрать 3 случайных человека из класса, то с вероятностью $\frac{1}{16}$ они все будут мальчиками. С какой вероятностью 4 случайно выбранных ученика будут девочками?

Комбинаторика 4. Можно ли расставить в целочисленных точках плоскости натуральные числа так, чтобы были использованы все натуральные числа, и на каждой прямой, не проходящей через центр координат, расстановка была периодической?

Комбинаторика 5. Вычислите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$.

Числа 1*. Пушкин родился 6 июня 1799 года. Какой это был день недели?

Числа 2*. Найдите наименьшее m такое, что в m -ричной системе счисления одновременно выполняется:

1. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 5.
2. Число делится на 7 тогда и только тогда, когда число, составленное из его двух последних цифр, делится на 7.

Числа 3.

Числа 4.

Числа 5. Докажите, что если C_n^k делится на n при всех $1 \leq k \leq n - 1$, то n простое.

Алгебра 1*. Найдите наименьшее натуральное K такое, что ни при каких натуральных a, b, c, d не выполняется $K = \frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$.

Алгебра 2. Докажите, что для натуральных n выполняется

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n-1}}.$$

Алгебра 3.

Алгебра 4. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, у которого есть корень

$$\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}.$$

Алгебра 5.

Графы 1. На плоскости отмечено несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из точек соединены между собой линиями, причём каждая точка, независимо от цвета, соединена с количеством синих точек, на 2 большим, чем красных. При этом имеется 12 линий, оба конца которых красные и 38 линий, оба конца которых синие. Сколько всего точек отмечено?

Графы 2*. Сколько существует неизоморфных деревьев на 6 вершинах?

Графы 3. Дед барона Мюнхгаузена построил квадратный замок, разделил его на 9 квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из восьми оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (в каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

Графы 4*. Мяч для космического волейбола — это многогранник, грани которого — правильные треугольники и пятиугольники. Известно, что у него удвоенное число вершин на 20 больше числа граней. Какое количество его граней могут быть пятиугольниками?

Графы 5. Из чисел от 10 до 99, не кратных 10 (т.е. 11, 12, ..., 19, 21 и т.д.) выбрали 37 чисел. Докажите, что среди них можно выбрать 5 таких, что модуль разности любых двух из них больше 10 и не делится на 10.

Матанализ 1*. Кузнечик прыгает по прямой. Вначале он прыгнул на 1 метр вправо. Каждым следующим шагом он меняет направление прыжка и прыгает в точку, находящуюся вдвое ближе к своему текущему положению, чем к своему предыдущему положению. Существует ли предел у последовательности точек, по которым прыгает кузнечик? Если да, найдите его.

Матанализ 2.

Матанализ 3. При каких A и B у многочлена $Ax^{2020} + Bx^{2019} - 1$ есть двукратный корень $x = 1$?

Матанализ 4.

Матанализ 5. Существует ли такая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(\cos x) + f(\sin x) = \sin x$?