Числа Бернулли

Смирнов Евгений Юрьевич

25 февраля 2020 г. — 25 февраля 2020 г.

Обозначим $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Заметим, что это многочлен вида $\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \ldots$.

Обозначим также за Σ оператор на многочленах, переводящий P в $\sum_{i=1}^{n} P(i)$, а за Δ — оператор, переводящий P в $P(x) - P(x-1)$ («суммирование» и «разделённая разность»).

Лемма 1. $\Sigma(P)$ — многочлен степени $\deg P + 1$.

Доказательство. $\Sigma(x^k) = S_k(x)$ по определению. Так как оператор линейный, то $\Sigma(P) =$ какой-то сумме $a_k S_k(x)$. Это многочлен искомой степени. ■

Лемма 2. $\Delta\Sigma P = P$ и $\Sigma\Delta P = P + C$.

Доказательство. Очевидно. ■

Лемма 3. $\frac{d}{dx}$ и Δ коммутируют.

Доказательство.

$$\frac{d}{dx}\Delta f = \frac{d}{dx}(f(x) - f(x-1)) = f'(x) - f'(x-1) = \Delta(f'(x)) = \Delta\frac{d}{dx}f. \blacksquare$$

Теорема 4. $S_k(n)' = kS_{k-1}(n) + C$.

Доказательство. Это эквивалентно тому, что

$$\frac{d}{dx}\Sigma x^k = k\Sigma(x^{k-1}) + C = \Sigma(kx^{k-1}) + C = \Sigma\frac{d}{dx}x^k + C \iff \frac{d}{dx}\Sigma(P) = \Sigma\frac{d}{dx}(P) + C_1.$$

Применим к левой части разделённую разность. Получим

$$\Delta\frac{d}{dx}\Sigma(P) = \frac{d}{dx}\Delta\Sigma(P) = \frac{d}{dx}P = \Delta\Sigma\frac{d}{dx}P.$$

Теперь применим к обоим частям равенства суммирование. Получим искомое равенство. ■

Обозначим $B_k^* = S_k(n)' - kS_{k-1}(n)$.

Алгоритм вычисления S_k. Берём $Cn + k\int S_{k-1}$, причём C такое, что $S_k(1) = 1$.

Теорема 5. Коэффициент при n^{k+1-i} в $S_k(n)$ равен $B_i^* \cdot \binom{k}{i} \cdot \frac{1}{k+1-i}$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = i$ верна по определению B_i^*. Нужно доказать:

$$\frac{d}{dx}\left[B_i^*\frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!}n^{k+1-i}\right]\cdot\frac{1}{k} = B_i^*\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k+1-i)}{i!}n^{k-i},$$

что верно. ■

Определение 1. Числа Бернулли B_k — числа, равные B_k^* во всех случаях, кроме $k = 1$. $B_1 = -\frac{1}{2}$. Иногда они определяются как $\frac{B_i^*}{i!}$, тогда это коэффициенты разложения $\frac{x}{e^x - 1}$ в ряд. В этом же случае это коэффициенты при подсчёте $S_k(n-1)$.

Заметим, что

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\left(n^{k+1} + (k+1)B_1 n^k + \binom{k+1}{2}B_2 n^{k-1} + \ldots + (k+1)B_k n\right).$$

Перейдём в теневое исчисление (Umbral Calculus) и будем писать индексы при B сверху, сложим сумму в бином Ньютона, а затем подставим $n = 1$. Получим $0 = (B+1)^{k+1} - B^{k+1}$. На самом деле, это рекуррентное соотношение на B_k: $B_k = -\sum\binom{k+1}{i}\frac{B_i}{k+1}$.

Теорема 6 (Формула Эйлера-Наклонена). Пусть $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$f(0) + \ldots + f(n-1) = F(B+n) - F(B) = \int f(x+B)dx.$$

Пусть $f(n) = q^n$. Тогда $F(n) = \frac{q^n}{\ln q}$. Применим 6:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{B+n} - q^B}{\ln q} = (q^n - 1)\frac{q^B}{\ln q}.$$

Сделаем замену $q = e^x$. Получим $EP(B) = e^{Bx} = \frac{x}{e^x - 1}$.

Теорема 7. $\left(\sum \frac{x^i}{(i+1)!}\right)\left(\sum \frac{B_i x^i}{i!}\right) = x$.

Доказательство. Коэффициент при x^k в произведении равен

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{B_i}{i!} \frac{1}{(k-i)!}.$$

При $k > 1$ это равно 0 по формуле B_k. ∎