Графы с запрещёнными подграфами

Трушков Владимир Викторович

22 февраля 2020 г. — 23 февраля 2020 г.

Обозначим за $ex(n, G)$ максимальное число рёбер на n вершинах в графе, в котором отсутствует подграф G.

Теорема 1. $ex(n, K_3) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Доказательство теоремы 1 #1. Пример очевиден (полный двудольный граф). Для оценки рассмотрим вершину самой большой степени. Пусть её степень k. Заметим, что в нижней компоненте нет рёбер, а в верхней $n - k$ вершин. Тогда если максимальная степень k, то максимум рёбер $k(n - k)$ и оно максимальное, когда $k = n - k$ или отличается на 1. ■

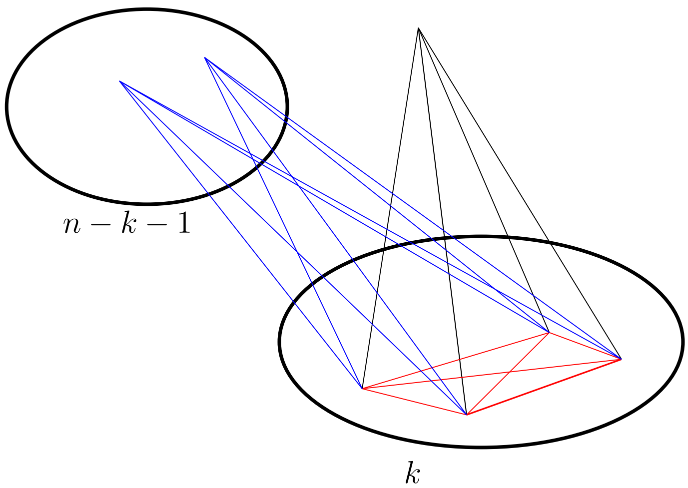

Рис. 1: Треугольники

Доказательство теоремы 1 #2. Доказываем оценку для $2n$ по индукции (для $2n + 1$ аналогично). Уберём любые две соединённые вершины, тогда из них в старые $2n$ выходит максимум $2n$ рёбер, откуда всё следует. ■

Теорема 2. $ex(n, K_m) = \frac{m-2}{2m-2}(n^2 - r^2) + C_r^2$, где $r = n\%(m - 1)$.

Доказательство. Аналогично доказательству 2, пример — полный m-дольный граф. ■

Теорема 3 (Эрдёш, Шимонович). $ex(n, G) = \frac{\chi(G)-2}{2\chi(G)-2}n^2 + o(n^2)$.

Теорема 4 (Гипотеза Алона). $ex(n, K_{s,t}) = \gamma_t n^{2-\frac{1}{s}} + o(n^{2-\frac{1}{s}})$.

Теорема 5. В графе 20 вершин, степень каждой вершины хотя бы 10. Тогда в нём есть $K_{3,3}$.

Доказательство. Запишем для каждой вершины все тройки её соседей. Тогда записано хотя бы $20\binom{10}{3}$ троек. Заметим, что это больше, чем $2\binom{20}{3}$, т.е. удвоенное количество троек. Значит, какая-то тройка встретилась хотя бы трижды. Это $K_{3,3}$. ■

Мы хотим найти $ex(n, K_{2,2})$. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — степени вершин. Сделаем так же, как в 5. Тогда мы запишем $\sum_i \binom{d_i}{2}$ пар. Если это больше, чем $\binom{n}{2}$, то в графе есть $K_{2,2}$. Тогда:

$$\sum_i \frac{d_i^2 - d_i}{2} > \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_i d_i^2 - \sum_i d_i > n(n-1)$$

$$\sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}} \geq \frac{\sum d_i}{n}$$

$$\sum d_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum d_i^2\right)$$

Тогда из этих неравенств (и из того, что $e = \frac{1}{2}\sum d_i$) мы получаем, что $\frac{2e^2}{n} - e - \frac{n(n-1)}{2} > 0$. Значит, $e > \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}n \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$, при условии, что в графе нет $K_{2,2}$.

Заметим, что если $n = p^2+p+1$, то $4n-3 = (2p+1)^2$, т.е. корень в этой формуле извлекается. А ещё p^2+p+1 — это количество точек в $\mathbb{C}_p$.

Конечная геометрия

Будем рассматривать тройки $x : y : z$ остатков по модулю p, которые не все одновременно равны 0, и разобьём на классы эквивалентности $kx : ky : kz (k \in \mathbb{Z}_p)$. Заметим, что их p^2+p+1. Также можно рассмотреть прямые вида $ax + by + cz = 0$.

Рассмотрим граф, у которого вершины — точки конечной геометрии, и точки $a : b : c$ и $x : y : z$ соединены ребром, если $ax + by + cz = 0$. Заметим, что в этом графе нет $K_{2,2}$. Действительно, пусть в одной компоненте графа $a_1 : b_1 : c_1$ и $a_2 : b_2 : c_2$, а в другой $x_1 : y_1 : z_1$ и $x_2 : y_2 : z_2$. Тогда точки $x_i : y_i : z_i$ обе лежат на прямой через точки $a_i : b_i : c_i$.

Теперь посчитаем количество точек на каждой прямой. Заметим, что наша структура — квадрат $p \times p$, прямая с p точками на бесконечности и бесконечная точка. Значит, на каждой прямой $p+1$ точка. Значит, у каждой вершины степень $p+1$ и мы получаем точный пример... Но это не работает, в графе теперь есть петли. Их столько же, сколько решений у уравнения $a^2+b^2+c^2 = 0$ в остатках. Легко понять, что их не больше, чем $2p+1$. Значит, у нас пример на $(p^2+p+1)\frac{p+1}{2} - (2p+1)$ для всех простых p (когда вершин p^2+p+1). Также по **улучшенному постулату Бертрана** этот пример почти идеален для чисел другого вида.■

Определение 1. Обобщённое число Рамсея $r(G_1, \ldots, G_n)$ — такое минимальное x, что в любом графе на x вершинах, покрашенном в n цветов, есть G_i, покрашенный в i-й цвет, для какого-то i.

Теорема 6. $r(C_4, C_4, C_4, C_4) \le 21$.

Доказательство. В графе K_{21} 210 рёбер. Тогда есть 53 ребра какого-то одного цвета. С другой стороны, из формулы выше следует, что если в графе на 21 вершинах нет C_4, то в нём максимум 52 ребра — противоречие. ■

Большие запреты

Будем запрещать подграф $K_{2,m+1}$. Пусть степени вершин — $d_1, \ldots, d_n$. Этот подграф точно есть, если $\sum_i \binom{d_i}{2} > m\binom{n}{2}$. Тогда $\frac{(\sum d_i)^2}{2n} - \frac{\sum d_i}{2} \ge m\binom{n}{2}$.

№1. Какое максимальное $|E|$, если это неравенство не выполняется?

Ответом тут будет что-то порядка $\frac{\sqrt{m}}{2}n^{\frac{3}{2}}$. Для получения примера посмотрим на поле размером $q = p^{\varphi(m)}$. Пусть решения уравнения $x^m = 1$ в нём — числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

Посмотрим на это поле. Заметим, что в нём $(q-1)^2$ пар (x, y), таких, что $xy \ne 0$. Будем считать, что пары (x, y) и $(\varepsilon_k x, \varepsilon_k y)$ одинаковые, тогда таких классов эквивалентности $\frac{(q-1)^2}{m}$. Будем обозначать их $< x, y >$.

Обозначим $T_{<a,b>}$ — множество таких пар $< x, y >$, что $(ax + by)^m = 1$. Это нормальное определение: если x и y умножить на ε_i, то при возведении в степень m получится $ax + by$.

Лемма 7. В $T_{<a,b>}$ элементов ровно $q-2$.

Доказательство. Пусть $(ax+by)^m = 1$. Тогда $ax + by = \varepsilon_k$, откуда $y_k = \frac{\varepsilon_k - ax}{b}$. Получается, что каждому y соответствует m иксов. Аналогично каждому x соответствует m игреков. При этом у нас 1 запрет на икс, 1 запрет на игрек и они разные. Кроме того, мы потом делим на m.■

Лемма 8. $|T_{<a,b>} \cap T_{<c,d>}| \le m$.

Доказательство. Пусть $(ax + by)^m = (cx + dy)^m = 1$. Тогда $ax + by = \varepsilon_k(cx + dy)$ и $x(a - c\varepsilon_k) = y(d\varepsilon_k - b)$. Значит, $(x(a + b\ell_k))^m = 1$, у этого уравнения не более m^2 решений, но они разбиваются на классы эквивалентности. ■

Построение (Furedi, 1996). Пусть вершины графа — $< x, y >$ и две вершины $< a, b >$ и $< c, d >$ соединены ребром, если $(ac + bd)^m = 1$. Тогда в графе нет $K_{2,m+1}$ по 8. Однако у этого графа есть петли, но их максимум $2(q-1)$. Таким образом,

$$E \ge \frac{1}{2}\left(\frac{(q-2)(q-1)^2}{m} - 2(q-1)\right) > \frac{\sqrt{m}}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

Нерешённая часть

Когда мы оцениваем количество рёбер в графе без $K_{2,m}$, у нас получается квадратное неравенство и в нём всё хорошо. Но при больших s,t проблемы, потому что больше 1 интервала, больше корней, нет формул и т.п. Для решения такой задачи обозначим $d = \frac{2e}{v}$ и $x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

Лемма 9. Пусть в графе на v вершинах нет $K_{m,n}$. Тогда $d^{\underline{n}} \le (m-1)(v-1)^{\underline{n-1}}$.

Доказательство. Если $d \le n-1$, то утверждение очевидно. Значит, $d > n-1$. Если есть вершина v_j с меньше чем $d-1$ вершинами, то есть и v_i больше чем с $d-1$. Заметим, что

$$d_i^{\underline{n}} + d_j^{\underline{n}} = d_i^{\underline{n}} \ge (d_i + d_j - n + 1)^{\underline{n}} = (d_i + d_j - n + 1)^{\underline{n}} + (n-1)^{\underline{n}}.$$

Значит, иметь маленькие точки нам невыгодно. Теперь заметим, что при $x > n-1$ функция $y = x^{\underline{n}}$ выпукла вниз, потому что коэффициент при x^{n-2} у неё положительный, тогда по неравенству Йенсена

$$d^{\underline{n}} \le \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_i d_i^{\underline{n}} \right) \le (m-1)(v-1)^{\underline{n-1}},$$

где последнее неравенство следует из подсчёта групп по m. ∎

Теорема 10 (Kovari, Sós,Turán, 1955). $ex(v, K_{m,n}) \le \frac{1}{2}\left((m-1)^{\frac{1}{n}} v^{2-\frac{1}{n}} + nv\right)$.

Доказательство. Обозначим $d_0 = (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{1-\frac{1}{n}} + n$. Тогда $d_o^{\underline{n}} > \left((m-1)^{\frac{1}{n}} v^{1-\frac{1}{n}}\right)^n > (m-1)v^{n-1} > (m-1)(v-1)v^{\underline{n-1}} > d$. Значит, средняя степень не больше d_0, откуда и следует теорема. ∎

Теорема 11 (Алон). Если $n > (m-1)!$, то 4 верно для $\gamma = \frac{1}{2}(m-1)^{\frac{1}{n}}$.

Теорема 12 (Эрдёш, Шимонович). $ex(v, cube) = \alpha n^{\frac{8}{5}} + o(\dots)$.

$K_{3,3}$

Рассмотрим $\mathbb{Z}_p^3$, где $p = 4k+3$, тройки точек (x,y,z) и сферы $(x-x_0)^+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$.

Лемма 13. Никакие три точки сферы не лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть прямая проходит через начало координат. Для неё $x = ta_1, y = ta_2, z = ta_3$. Тогда у нас квадратное уравнение относительно t. Пусть его коэффициенты занулились. У прямой какие-то коэффициенты не нули, пусть $a_1 \ne 0$. Тогда

$$a_1^2 r^2 = a_1^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = (a_2 y_0 + a_3 z_0)^2 + a_1^2 y_0^2 + z_0^2 = -(a_3 y_0 + a_2 z_0)^2.$$

Но если $p = 4k+3$, такого не бывает, потому что $a_1 \ne 0$, а -1 невычет. ∎

Зафиксируем r. Рассмотрим такой граф. Его вершины — точки, и две точки соединены ребром, если расстояние между ними r^2 (т.е. одна лежит на сфере радиуса r с центром в другой точке).

Лемма 14. В этом графе нет $K_{3,3}$.

Доказательство. Пусть a, a', a'' — точки в одной доле подграфа, а в другой есть (x_0, y_0, z_0). Это значит, что (x_0, y_0, z_0) лежит на трёх сферах. Получаем систему относительно x_0, y_0, z_0. Когда мы вычтем первое уравнение из остальных, мы получим либо два уравнения плоскостей через $(0,0,0)$ (тогда прямая пересечения пересекается со сферой в трёх точках (x_0, y_0, z_0)), либо что a, a', a'' пропорциональны. ∎

Лемма 15. Степень каждой вершины $p^2 - p$.

Тогда из леммы выводится, что если $v = p^3$, то у нас пример на $e = \frac{p^5 - p^4}{2}$ (**Браун, 1966**).