Решения занятия №19

№1. На дороге, соединяющей два аула, нет горизонтальных участков. Автобус идет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору — 30 км/ч. Путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа. Какое расстояние между аулами?

Решение. Пусть расстояние между аулами — ℓ. Заметим, что в гору и под гору мы проехали одинаковый путь (поскольку мы ехали туда и обратно). Следовательно, в гору и под гору мы проехали ℓ. Времени мы потратили $\frac{\ell}{15} + \frac{\ell}{30} = 4$ часа, следовательно, $\ell = 40$ км. ■

№2. Можно ли накрыть равносторонний треугольник двумя меньшими равносторонними треугольниками?

Решение. Рассмотрим вершины большого треугольника. Расстояние между любыми двумя из них равно стороне треугольника. Теперь заметим, что в любом равностороннем треугольнике между любыми двумя точками внутри него расстояние не больше стороны. Следовательно, в одном маленьком треугольнике не больше вершины большого. По принципу Дирихле есть вершина без треугольника. ■

№3. Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода равна 5 км/ч, скорость мотоцикла (с одним и двумя седоками) — 50 км/ч.

Решение. Да, могут. Пусть первый час два первых человека едут на мотоцикле вперёд, а третий идёт вперёд. Первые два на отметке 50 км, третий — на отметке 5 км. Второй час пусть первый слезет с мотоцикла и идёт вперёд, второй едет назад до отметки 10 км, а третий — идёт вперёд. Первый на отметке 55 км, второй и третий — на отметке 10 км. Третий час пусть первый идёт вперёд, а остальные двое едут. ■

№4. На доске написаны семь различных нечетных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\frac{3}{7}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Решение. Домножим и Танино, и Данино числа на 7. У Тани получится сумма, она нечётная. У Дани получится нечётное на нечётное, это тоже нечётно. Разность станет 3. Противоречие. ■

№5. Эскадрон улан и эскадрон драгун построены в две шеренги так, что позади каждого драгуна стоит улан выше него ростом. Доказать, что если обе шеренги перестроить по росту, то по-прежнему позади каждого драгуна будет стоять улан выше него ростом.

Решение. Допустим, что для какого-то a драгун под номером a (по убыванию) выше улана под таким же номером. Тогда есть максимум $a-1$ уланов выше a-го драгуна. Изначально позади первых (по убыванию) a драгун стояли a уланов, которые были выше, значит, эти a уланов были выше a-го драгуна, противоречие. ■

№6. Можно ли на плоскости нарисовать 6 окружностей так, чтобы каждая касалась ровно четырех окружностей?

Решение. Можно. Например, так: в центре окружность. С четырёх сторон от неё её внешним образом касаются 4 другие окружности, причём эти окружности касаются друг друга. Вся конструкция вписана в большую окружность. ■

№7. Что больше в выпуклом четырехугольнике: периметр или удвоенная сумма длин диагоналей?

Решение. Удвоенная сумма диагоналей. Заметим, что диагонали делят четырёхугольник на 4 треугольника. В каждом из треугольников одна из сторон — сторона четырёхугольника, и она меньше суммы двух других. Если мы просуммируем все 8 остальных сторон, получим как раз удвоенную сумму диагоналей. ■

№8. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трем подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трех, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Решение. Рассмотрим суммы противоположных чисел. Изначально они $1+4 = 5, 2+5 = 7, 3+6 = 9$. После каждого действия все три суммы изменяются на одно и то же число, а значит, равны не станут. ■

№9. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй — 2, третий — 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Решение. Заметим, что если человек было n, то во втором круге каждый взял всего на n семечек больше, а всего взяли на n^2 семечек больше. $\sqrt{100} = 10$. ■

№10. Имеется 555 гирь весом $1, 2, \ldots, 555$ грамм. Можно ли их разложить на 3 равные по весу кучи?

Решение. Разложим первые 9 гирь в кучи $1, 5, 9; 3, 4, 8; 2, 6, 7$. Остальные гири разобьём на подряд идущие группы по 6, а каждую группу по 6 разобьём на 3 равные пары. ■

№11. Петин счет в банке содержит 500 долларов. Банкомат может совершать операции только двух видов: снимать 300 долларов или добавлять 198 долларов. Какую максимальную сумму Петя может снять со счета, если других денег у него нет?

Решение. Заметим, что сумма на руках у Пети всегда делится на 6. Следовательно, он может снять не больше 498 долларов. Докажем, что так он умеет. Для того, чтобы снять 198, ему нужно в совокупности 166 раз снять по 300 и 249 раз положить по 198. Заметим, что он всегда может сделать одно из этих действий (если текущий счёт хотя бы 300, он может снять 300, если меньше 300, то у него на руках больше 200 и можно положить 198). ■