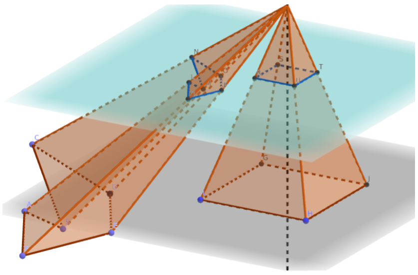
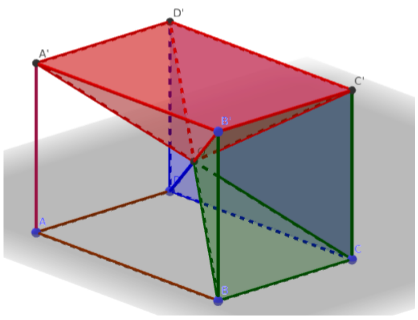
Новое доказательство формулы объёма пирамиды

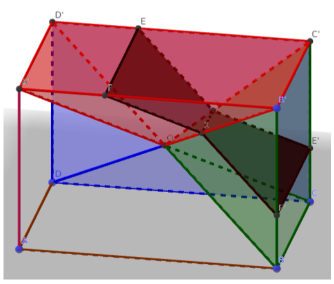
Итак, мы хотим доказать, что для произвольной пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh$. Сразу же отметим, что достаточно доказывать это утверждение для пирамиды с любым фиксированным основанием площади S. Действительно, площади сечений этих пирамид плоскостями, параллельными основанию, будут равны, а значит, по принципу Кавальери равны и объёмы.



Мы будем доказывать это утверждение для пирамид с прямоугольным основанием (например, можно взять как основание прямоугольник $1 \times S$). Заметим, что параллелепипед объёма $2Sh$ можно разрезать на шесть прямоугольных пирамид с общей вершиной, которая совпадает с центром параллелепипеда. Дальше мы докажем, что объёмы этих пирамид будут равны.



Осталось доказать, что три пирамиды на рисунке выше (красная, синяя и зелёная) равновелики. И это снова можно сделать принципом Кавальери! Например, докажем, что зелёная пирамида равновелика красной. Каждое сечение каждой из этих пирамид плоскостью, параллельной $(A'BCD')$, это равнобокая трапеция (возможно, вырожденная — треугольник или отрезок) и в силу симметрии относительно XY — пересечения нашей плоскости с $(AB'C'D)$ — они равны, а значит, равновелики!



Получается, эти две пирамиды — красная и зелёная — равновелики, а значит, и все 6 пирамид деления параллелепипеда равновелики. Но их суммарный объём равен $2Sh$, значит, объём каждой отдельно взятой пирамиды — $\frac{1}{3}Sh$. ∎