Листок 01, математический анализ, осень 2020.
Множество вещественных чисел и его подмножества
срок сдачи до 29 сентября 2020

1. Доказать, что всякое упорядоченное поле содержит бесконечное количество элементов.

2. Пусть дано такое множество отрезков $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, что каждые два из них имеют, по крайней мере, одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

3. Докажите, что на поле комплексных чисел нельзя ввести структуру упорядоченного поля.

4. Доказать, что существует $\sqrt[3]{7} \in \mathbb{R}$, то есть вещественное число, которое в кубе равно 7.

5. Доказать, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

6. Используя теорему о вложенных промежутках, доказать несчётность отрезка.

7. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ — открытое, а $B \subset \mathbb{R}$ — замкнутое. Доказать, что множество $A \setminus B$ — открытое, а $B \setminus A$ — замкнутое.

8. Всякая система непересекающихся интервалов на прямой не более чем счётная.

9. Каждое открытое не совпадающее с $\mathbb{R}$ подмножество прямой является объединением не более чем счётного множества непересекающихся интервалов и (возможно) одного или двух открытых лучей.

10. Докажите, что никакой интервал нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств $\mathbb{R}$.

11. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — произвольное множество, пусть $\operatorname{Int} A$ — множество его внутренних точек. Доказать эквивалентность трёх утверждений: 1) $\operatorname{Int} \overline{A} = \varnothing$; 2) множество A нигде не плотно; 3) множество $\overline{A}$ нигде не плотно.

12. Доказать, что канторово множество континуальное, замкнутое и нигде не плотное.

13. Дано произвольное замкнутое множество $A \subset [0, 1]$. Постройте счётное множество, множество предельных точек которого совпадает с A.

14. **(*)** Доказать, что $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\forall M \in \mathbb{N}$ $\exists p, q \in N$, $q > M$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$. Иными словами, любое вещественное число приближается с точностью до q^{-2} бесконечным множеством рациональных чисел вида p/q.