# Биекции и разбиения

**Петров Фёдор Алексеевич**

*10 ноября 2019 г.*

Будем смотреть на разные множества $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(n)$ — разбиения $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, где $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \in \mathbb{N}$ и $a_i$ обладают свойством $\mathcal{X}$.

**Теорема 1 (Эйлер).** $|\mathcal{P}_{a_i=2r+1}(n)| = |\mathcal{P}_{a_i \neq a_j}(n)|$.

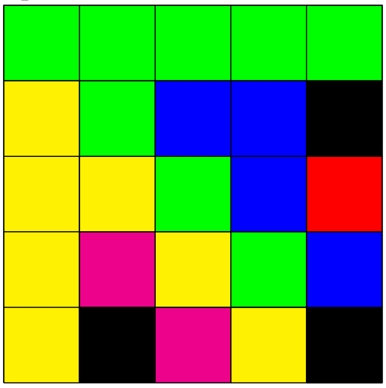
**Доказательство теоремы 1 #1.** С одной стороны, $\mathcal{P}(n) = \bigcup\limits_{a=0}^{n} \mathcal{P}_{2r+1}(a) \times \mathcal{P}_{2r}(n-a)$. С другой стороны, пусть $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Подчеркнём среди них те, которые встречаются нечётное количество раз. (например, в разбиении $14 = 3+3+3+2+2+1$ мы выделяем 3 и 1). Выделим их в множество $\mathcal{P}_{\neq}(a)$, а остальные разбить на пары, просуммировать и положить в $\mathcal{P}_{2r}(n-a)$. Таким образом, $|\mathcal{P}(n)| = \sum\limits_{a=0}^{n} |\mathcal{P}_{\neq}(a)| \cdot |\mathcal{P}_{2r}(n-a)|$. Индукция по $n$ заканчивает доказательство утверждения. ■

**Доказательство теоремы 1 #2 (Гляйшер).** Пусть $n_i$ — количество чисел, равных $i$, в разбиении на нечётные слагаемые. Запишем $n_i$ в двоичной системе и для каждого ненулевого слагаемого $2^r$ в разложении добавим в другое разбиение $2^r \cdot i$. На самом деле, это биекция (дальше мы её будем называть $\varphi_G$). ■

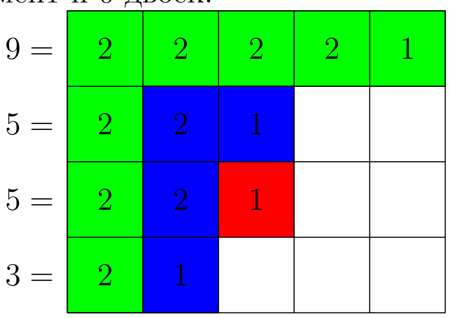
**Лемма 2 (Гляйшер).** Количество разбиений, в которых ровно $k$ чётных слагаемых, равно количеству разбиений, в которых повторяются ровно $k$.

**Доказательство.** Произведём биекцию из «$k$ чётных» в «$k$ повторяющихся». Поделим чётные пополам, а к остальным применим $\varphi_G$. Докажем, что это биекция. Пусть у нас есть $b_k$ слагаемых, равных $k$. Тогда если $b_k$ чётно, то превратим их в $\frac{b_k}{2}$ чисел, равных $2k$, иначе в $\frac{b_k - 1}{2}$ слагаемых, равных $2k$, а последнее разделим на сколько-то максимальных одинаковых степеней двойки. ■

**Доказательство теоремы 1 #3 (Сильвестр).** Рассмотрим какое-то разбиение и представим его в виде крюков, а затем разобьём их на строки и диагонали, например, $9+5+5+3$ превратится в $8+7+4+2+1$ следующим образом (и, оказывается, биективным):



Также эту биекцию можно сделать по другому. Представим разбиение в виде другой диаграммы Юнга и разобьём в крюки, как на рисунке ниже. Теперь $9+5+5+3 = 8+7+4+2+1$, потому что в 1-м крюке 8 элементов и 7 двоек, во втором 4 элемента и 2 двойки, в третьем 1 элемент и 0 двоек:



**Доказательство теоремы 1 #4.** Воспользуемся производящими функциями. Производящая функция от $\mathcal{P}_{\neq}$ равна $(1+x)(1+x^2)\ldots$, а от $\mathcal{P}_{2r+1}$ —

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots.$$

Видно, что они равны, например, можно воспользоваться формулой $1+x^k=\frac{1+x^{2k}}{1-x^k}$. ■

**Теорема 3 (Рамануджан).** Количество разбиений на слагаемые, любые два из которых отличаются хотя бы на 2, равно количеству разбиений на слагаемые вида $5k\pm1$.[1] *Доказательство не рассказал, так как оно сложное.*

**Теорема 4 (Эйлер).** $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-\ldots = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2}$.

**Доказательство теоремы 4 #1.** Посмотрим на бесконечный угол 45°. Пусть с вероятностью $1-x$ в каждой клетке угла вырастет кактус (кактусы в разных клетках независимо). Тогда $1-x^n$ — вероятность того, что в $n$-м столбце вырастет кактус, а произведение слева $S$ — вероятность того, что в каждом столбце вырастет кактус. Тогда $1-S$ — вероятность того, что есть столбец без кактуса, и она равна

$$x+x^2(T_{1,0}+T_{3,1}+T_{6,2}+\ldots),$$

где $T_{r,s}$ — вероятность того, что в $r$ клетках кактус есть, а в $s$ его нет. Обозначим эту сумму $T_{i,j}$ за $A$. Это вероятность такого события: возьмём горизонталь длиной (очень много), пусть первый кактус вырос в клетке номер $k$, тогда в каждом из различных множеств размером $2,3,\ldots,k$ есть кактус. Тогда $1-A$ — это вероятность такого события: до появления первого кактуса в нижней строке есть строка целиком без кактусов. Посчитаем $1-A$:

$$1-A=x^3+x^5(T_{2,0}+T_{5,2}+T_{9,4}+\ldots).$$

Обозначим сумму за $B$. Это то же самое, что и $A$, но высота строки увеличивается до 2, а каждое множество на 1. Таким образом можно получить такие равенства:

$$\begin{aligned}
1-S&=x+x^2A;\\
1-A&=x^3+x^5B;\\
1-B&=x^5+x^8C;\\
1-C&=x^7+x^{11}D;\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

и если сложить эти равенства с коэффициентами $-x^2, x^7, -x^{15}$ и т.д., буквы $A,B,C$ и т.д. сократятся и получится искомое тождество. ■

**Доказательство теоремы 4 #2 (Франклин).** Легко видеть, что бесконечное произведение слева — производящая функция от равенства количества разбиений на чётное количество различных слагаемое и на нечётное число различных слагаемых. Сделаем такое разбиение на пары $\varphi_F$. Пусть $a$ — длина нижней строчки, $b$ — длина диагонали, тогда если $a\le b$, то увеличим первые $a$ строк и уберём $a$. Иначе уменьшим первые $b$ строк и добавим $b$. Тогда нам может не повезти в двух случаях:

1. Пусть строки от $n$ до $2n-1$. Тогда мы не можем убрать нижнюю строку и увеличить первые $n$, потому что строк всего $n$. Это случай $\frac{n(3n-1)}{2}$.

2. Пусть строки от $n+1$ до $2n$. Тогда мы не можем убрать диагональ и поставить вниз, потому что она станет равна нижней строчке. Это случай $\frac{n(3n+1)}{2}$. ■

[1] Для всех простых $p$ известны тождества подобного рода, где во второй штуке считаются разбиения с фиксированными остатками по модулю $p$.

**Лемма 5 (Франклин).** Разность количества разбиений числа $n > 0$ на различные слагаемые (максимальное чётно) и количества разбиений на различные слагаемые (максимальное нечётно) равна

$$\begin{cases} +1, n = \frac{k(3k+1)}{2}, k \in \mathbb{N}; \\ -1, n = \frac{k(3k-1)}{2}, k \in \mathbb{N}; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

**Теорема 6 (Тройное тождество Якоби).** [2]

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - zq^{n-1})(1 - z^{-1}q^n)(1 - q^n) = \sum_{k=-\infty} (-z)^k q^{k(k-1)/2}.$$

**Доказательство.** Обозначим $|\lambda|$ для разбиения $\lambda$ сумму его слагаемых. Заметим, что нам нужно доказать следующее:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - zq^{n-1})(1 - z^{-1}q^n) = \sum_{k=-\infty} (-z)^k q^{k(k-1)/2} \cdot \sum_{\lambda} x^{\lambda}.$$

Докажем, например, что коэффициент при $z^0$ такой же (для остальных идея та же самая, но надо будет пририсовывать треугольник слева). Возьмём разбиение числа и сделаем из него разбиение на $m$ положительных слагаемых и $m$ неотрицательных. Проведём диагональ и скажем, что всё, что ниже неё, одно разбиение, а то, что правее (и она сама), другое разбиение. ■

[2]Это обобщение 4 после подстановки $z = x, q = x^3$.