Решения занятия №19

№1. На дороге, соединяющей два аула, нет горизонтальных участков. Автобус идет в гору всегда со скоростью 15 км/ч, а под гору — 30 км/ч. Путь туда и обратно автобус проезжает за 4 часа. Какое расстояние между аулами?

Решение. Пусть расстояние между аулами — ℓ. Заметим, что в гору и под гору мы проехали одинаковый путь (поскольку мы ехали туда и обратно). Следовательно, в гору и под гору мы проехали ℓ. Времени мы потратили $\frac{\ell}{15}+\frac{\ell}{30}=4$ часа, следовательно, $\ell=40$ км. ■

№2. Можно ли накрыть равносторонний треугольник двумя меньшими равносторонними треугольниками?

Решение. Рассмотрим вершины большого треугольника. Расстояние между любыми двумя из них равно стороне треугольника. Теперь заметим, что в любом равностороннем треугольнике между любыми двумя точками внутри него расстояние не больше стороны. Следовательно, в одном маленьком треугольнике не больше вершины большого. По принципу Дирихле есть вершина без треугольника. ■

№3. Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 60 км за три часа? Скорость пешехода равна 5 км/ч, скорость мотоцикла (с одним и двумя седоками) — 50 км/ч.

Решение. Да, могут. Пусть первый час два первых человека едут на мотоцикле вперёд, а третий идёт вперёд. Первые два на отметке 50 км, третий — на отметке 5 км. Второй час пусть первый слезет с мотоцикла и идёт вперёд, второй едет назад до отметки 10 км, а третий — идёт вперёд. Первый на отметке 55 км, второй и третий — на отметке 10 км. Третий час пусть первый идёт вперёд, а остальные двое едут. ■

№4. На доске написаны семь различных нечетных чисел. Таня подсчитала их среднее арифметическое, а Даня упорядочил эти числа по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Если из Таниного числа вычесть Данино, то получится число $\frac{3}{7}$. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Решение. Домножим и Танино, и Данино числа на 7. У Тани получится сумма, она нечётная. У Дани получится нечётное на нечётное, это тоже нечётно. Разность станет 3. Противоречие. ■

№5. Эскадрон улан и эскадрон драгун построены в две шеренги так, что позади каждого драгуна стоит улан выше него ростом. Доказать, что если обе шеренги перестроить по росту, то по-прежнему позади каждого драгуна будет стоять улан выше него ростом.

Решение. Допустим, что для какого-то a драгун под номером a (по убыванию) выше улана под таким же номером. Тогда есть максимум $a-1$ уланов выше a-го драгуна. Изначально позади первых (по убыванию) a драгун стояли a уланов, которые были выше, значит, эти a уланов были выше a-го драгуна, противоречие.. ■

№6. Можно ли на плоскости нарисовать 6 окружностей так, чтобы каждая касалась ровно четырех окружностей?

Решение. Можно. Например, так: в центре окружность. С четырёх сторон от неё её внешним образом касаются 4 другие окружности, причём эти окружности касаются друг друга. Вся конструкция вписана в большую окружность. ■

№7. Что больше в выпуклом четырехугольнике: периметр или удвоенная сумма длин диагоналей?

Решение. Удвоенная сумма диагоналей. Заметим, что диагонали делят четырёхугольник на 4 треугольника. В каждом из треугольников одна из сторон — сторона четырёхугольника, и она меньше суммы двух других. Если мы просуммируем все 8 остальных сторон, получим как раз удвоенную сумму диагоналей. ■

№8. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трем подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трех, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Решение. Рассмотрим суммы противоположных чисел. Изначально они $1+4 = 5, 2+5 = 7, 3+6 = 9$. После каждого действия все три суммы изменяются на одно и то же число, а значит, равны не станут. ■

№9. Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причем каждый из них весит не более тонны. Какое минимальное число трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

Решение. Заметим, что 5 машин хватит. Начнём складывать груз в 1 машину. Когда в первую машину ничего не влезает, начинаем складывать во вторую. Заметим при этом, что в первой точно 2 тонны груза есть, и так далее.

Теперь докажем, что в 4 машины управиться нельзя. Пусть грузов 13 и все они $\frac{10}{13}$ тонн. 4 груза не влезают в одну машину, значит на 4 машинах мы можем перевести только 12 ящиков.■

№10. В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовем «хорошей», если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться «хорошими»?

Решение. Т.к. $13 < 25$, какого-то числа от 1 до 25 нет на главной диагонали. Пусть это a. Тогда каждое число, равное a, «считается» клетками диагонали 2 раза (один раз сверху или снизу, второй — справа или слева), значит, a посчитано чётное количество раз. С другой стороны, клетки диагонали посчитали a ровно 13 раз. Противоречие. ■