Матанализ, 1 курс

Красносельский

2 сентября 2020 г. — 20 сентября 2020 г.

Формула оценки: $\dfrac{4P+6S+5K+5E}{20}$, *где* P, S, K, E *— оценки за листки, семинары, коллоквиум и экзамен соответственно.*

Вещественные числа

Определение 1. Бинарная операция — функция $(a,b)\in G\times G\mapsto a\oplus b\in G$, т.е. каждую упорядоченную пару элементов G переводит в какой-то элемент G.

Определение 2. Коммутативная группа — множество G с операцией $\oplus$ со следующими свойствами:

- $\exists e\in G\forall x\in G: e\oplus x = x\oplus e = x$.
- $\forall x\in G\exists y\in G: x\oplus y = y\oplus x = e$.
- $\forall a,b,c\in G: (a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$ (ассоциативность).
- $\forall a,b\in G: a\oplus b = b\oplus a$ (коммутативность).

Определение 3. Поле — множество $(G,\oplus,\odot,0)$ со следующими свойствами:

- $(G,\oplus)$ — аддитивная группа;
- $(G\setminus\{0\},\odot)$ — мультипликативная группа;
- $\forall a,b,c\in G: (a\oplus b)\odot c = a\odot c\oplus b\odot c$.

Определение 4. Отношение — подмножество $G\times G$. Например, отношение «$a<b$» в множестве $\{1,2,3\}$ — это $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Определение 5. Отношение порядка — отношение $\leqslant$ со следующими свойствами:

- $\forall a: a\leqslant a$.
- $\forall a,b: (a\leqslant b\cap b\leqslant a) \implies a=b$.
- $\forall a,b,c: (a\leqslant b\cap b\leqslant c) \implies a\leqslant c$.
- $\forall a,b: (a\leqslant b\cup b\leqslant a)$.

Определение 6. Упорядоченное поле — множество F со следующими свойствами:

- F — поле.
- На F есть отношение порядка.
- $\forall a,b,c\in F: a\leqslant b \implies a+c\leqslant b+c$.
- $\forall a,b\in F: 0\leqslant a\cap 0\leqslant b \implies \leqslant a\cdot b$.

Примеры упорядоченных полей: $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, алгебраические числа, кроме того, рациональные функции над $\mathbb{R}$ со следующим отношением порядка: $f_1\leqslant f_2$, если у f_1-f_2 отношение старших членов числителя и знаменателя меньше или равен 0.

Аксиома непрерывности. Пусть F — упорядоченное поле, и $A\neq\emptyset, B\neq\emptyset\subset F$. Кроме того, $\forall a\in A, b\in B: a\leqslant b$. Тогда $\exists c\in F:\forall a\in A, b\in B: a\leqslant c\leqslant b$.

Определение 7. Множество вещественных чисел — упорядоченное поле с аксиомой непрерывности.

Пример. $\mathbb{Q}\neq\mathbb{R}$, т.к. у множеств $\{r\in\mathbb{Q}: r>0, r^2<2\}$ и $\{r\in\mathbb{Q}: r>0; r^2>2\}$ нет разделителя.

Примеры моделей действительных чисел

- $0,123\ldots$.
- Прямая с 0 и 1.
- Классы эквивалентности фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Q}$.
- Сечения Дедекинда.

Определение 8. Индуктивное множество — подмножество $K \subset \mathbb{R}$ такое, что если $x \in K$, то $x+1 \in K$.

Определение 9. Натуральные числа — минимальное индуктивное множество, содержащее единицу.

Определение 10. Целые числа — множество из всех натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным.

Определение 11. Рациональные числа — такое множество: $\mathbb{Z} \cup \{mn^{-1} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$

Теорема 1. У любого упорядоченного поля есть подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$.

Аксиома Архимеда. $\forall a, h > 0 \exists n \in \mathbb{N} : an > h$.

Теорема 2 (Принцип Архимеда). $\forall h > 0 \exists a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : (n-1)h \leq a < nh$.

Доказательство. Рассмотрим множество $E = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, ah^{-1} < n\}$. Если $a = 0$, то это $\mathbb{N}$, а в противном случае оно непусто по аксиоме Архимеда. Кроме того, оно ограничено снизу нулём. Тогда у него есть минимальный элемент, он подходит в качестве n. ∎

Следствие. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n^{-1} < \varepsilon$.

Следствие 2. $a < b \in \mathbb{R} \implies \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Доказательство. Возьмём n так, что $n^{-1} < b - a$, и m так, что $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$. Тогда $a < \frac{m}{n} < b$. ∎

Следствие 3. $\forall x \in \mathbb{R} \exists [x]$.

Определение 12. Последовательность — функция натурального аргумента.

Определение 13. Вложенная последовательность — последовательность a_i множеств такая, что $a_i \subset a_{i-1}$ для всех i.

Определение 14. Стремящаяся к нулю последовательность — последовательность a_i вещественных чисел такая, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n : |a_m| < \varepsilon$.

Теорема 3. Пусть Δ_n — вложенная последовательность отрезков в $\mathbb{R}$, т.е. множеств вида $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Тогда $\bigcap_n \Delta_n \neq \emptyset$. Кроме того, если последовательность $|\Delta_n|$ стремится к 0, то $|\bigcap_n \Delta_n| = 1$.

Доказательство. Пусть $\Delta_n = [a_n, b_n]$. Рассмотрим $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. У нас верно, что $a_n \leq b_m$, т.к. последовательность вложена, тогда по аксиоме непрерывности $\exists \gamma : a_i < \gamma < b_j$. Тогда $\gamma \in [a_n, b_n] \forall n$. Кроме того, если таких γ хотя бы два, то длина каждого отрезка хотя бы $|\gamma_2 - \gamma_1|$, значит, последовательность длин не стремится к 0. ∎

Определение 15. Окрестность — любой интервал, содержащий x.

Определение 16. ε-окрестность — интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Свойства

- Если $\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(x)$ — окрестности, то $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ — тоже.
- $\forall x \neq y \exists \mathcal{O}(x) : y \notin O(x)$.

Определение 17. Предельная точка множества — такое число x, если в любой окрестности $\mathcal{O}(x)$ существует $a \neq x \in A$, такое, что $a \in \mathcal{O}(x)$ (это то же самое, как если бы в этой окрестности было бесконечно много точек из A). Множество предельных точек обозначается A'.

Теорема 4. Пусть A — бесконечное ограниченное множество. Тогда $A' \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть границы A — это точки a_1, b_1. Поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам, в одном из отрезков лежит бесконечное количество точек A. Пусть его границы — это a_2, b_2. Его тоже поделим пополам и т.п. У нас получится вложенная последовательность отрезков, на каждом из которых лежит бесконечное количество A. Пусть γ — пересечение этих отрезков. Возьмём любую окрестность γ. Она целиком содержит какой-то из отрезков $[a_n, b_n]$, в котором бесконечное количество элементов A. Значит, γ — предельная точка. ∎

Определение 18. Открытое множество — такое множество G, что $\forall x \in G \exists \mathcal{O}(x) \subset G$.
Определение 19. Замкнутое множество — такое множество G, что $G' \subset G$.
Определение 20. Внутренняя точка множества — такая точка x, что $\exists \mathcal{O}(x) \subset A$.

Примеры

- $\emptyset, \mathbb{R}$ замкнутые и открытые одновременно. Других одновременно замкнутых и открытых множеств нет (это эквивалентно аксиоме непрерывности).
- $\mathbb{N}$ замкнутое — у него нет предельных точек.
- (a, b) открытое.
- $[a, b]$ замкнутое.
- Канторово множество замкнутое.
- $[a, b)$ ни открытое, ни замкнутое.

Теорема 5. Пусть A открытое, а B замкнутое. Тогда $A \setminus B$ открытое, а $B \setminus A$ замкнутое. В частности, $\mathbb{R} \setminus B$ открытое, а $\mathbb{R} \setminus A$ замкнутое.

Доказательство. Первая часть: пусть $x \in A \setminus B$. Тогда существует окрестность $O(x) \subset A$. Кроме того, $x \notin B$. Тогда $x \notin B'$, значит, существует окрестность $O{*}(x)$ такая, что $O{*}(x) \cap B = \emptyset$. Тогда $O(x) \cap O * (x) \subset A \setminus B$.

Вторая часть: пусть $x \in (B \setminus A)'$. Это значит, что в любой $O(x)$ бесконечно много точек из $B \setminus A$. Так как все эти точки в B, и B замкнутое, то $x \in B$. Предположим, что $x \in A$. Тогда есть $O * (x) \subset A$, значит, $O * (x) \cap B \setminus A = \emptyset$, противоречие. Значит, $x \in B \setminus A$. ■

Определение 21. Замыкание множества — множество $\overline{A} = A \cup A'$.

Лемма 6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда A' замкнуто.

Доказательство. Пусть $x \in A''$. Это значит, что в любой $O(x)$ есть $y \in A'$. Возьмём окрестность $O(y)$, такую, что $O(y) \subset O(x), x \notin O(y)$. В этой окрестности есть $z \in A$. Но $z \in O(x)$, значит, x — предельная точка для A, т.е. $x \in A'$. ■

Лемма 7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Тогда $\overline{A}$ замкнуто.

Доказательство. Пусть $x \in (\overline{A})'$. Вначале докажем, что $x \in (A' \cup A'')$. Действительно, $x \in (A \cup B)'$ значит, что есть последовательность в $A \cup B$, которая сходится к x, и из неё можно выбрать бесконечную подпоследовательность, лежащую либо в A, либо в B.

Итак, $x \in (A' \cup A'')$. Но A' замкнуто, значит, $A'' \subset A'$. Тогда $x \in A' \subset \overline{A}$, т.е. $\overline{A}$ замкнуто. ■

Лемма 8. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ и все множества в S открытые. Тогда $A = \bigcup_{s \in S} s$ открытое.

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда $x \in s$ для какого-то $s \in S$. Тогда $O(x) \in s \subset A$. ■

Лемма 9. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ и все множества в S замкнутые. Тогда $A = \bigcap_{s \in S} s$ замкнутое.

Доказательство. Следует из **Т. 5** и **Т. 8**. ■

Лемма 10. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ конечно и все множества открытые. Тогда $A = \bigcap_{s \subset S} s$ открытое.

Доказательство. Докажем для двух множеств (для большего числа по индукции). Пусть $A = S_1 \cap S_2$. Возьмём любое число $k \in S_1 \cap S_2$. Мы знаем, что $\exists O_1(k) \subset S_1, O_2(k) \subset S_2$. Значит, $O_1(k) \cap O_2(k) \subset S_1 \cap S_2$. Значит, A открытое. ■

Лемма 11. Пусть $S \subset 2^{\mathbb{R}}$ конечно и все множества замкнутые. Тогда $A = \bigcup_{s \subset S} s$ замкнутое.

Доказательство. Следует из **Т. 5** и **Т. 10**. ■

Теорема 12. Пусть A открытое. Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = (a_n; b_n)$ (при этом a_n может быть равно $-\infty$, а b_n — $+\infty$).

Доказательство. Пусть $x \in A$. Тогда $O(x) \in A$. Рассмотрим все такие окрестности. Пусть L_x — множество левых их концов, а R_x — их правых концов. Мы знаем, что существуют $l_x = \inf L_x, r_x \sup R_x$ (причём они могут быть равны $\pm\infty$). Возьмём все эти интервалы (l_x, r_x) и в каждом из них выберем рациональную точку. Они все различные (если интервалы пересекаются, то они равны), значит, интервалов не более чем счётно. ■

Определение 22. Покрытие множества — набор множеств B, т.ч. $A \subset \bigcup_{b\in B} b$.

Определение 23. Открытое покрытие — покрытие B, т.ч. все его элементы открытые.

Определение 24. Компакт — множество A, такое, что из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Лемма 13 (Гейне, Борель). Отрезок $[a, b]$ является компактом.

Доказательство. Пусть $A = [a, b]$, и B — его открытое покрытие. Пусть такого конечного подпокрытия не существует. Разрежем отрезок пополам, у нас получатся отрезки C_1, D_1. Тогда хотя бы для одного из них нет конечного подпокрытия (если нет у обоих, выберем другой). Разрежем его пополам на отрезки C_2, D_2, хотя бы у одного из них нет конечного подпокрытия и т.п. Рассмотрим систему отрезков $E_i = C_i \cup D_i$. У них есть общая точка γ. Так как B — покрытие, то наша общая точка лежит в каком-то множестве b. Значит, $O(\gamma) \subset b$ (т.к. покрытие было открытым). Возьмём отрезок $E_k \subset O(\gamma)$ (он есть, т.к. длины этих отрезков стремятся к 0). Мы знаем, что для него нет конечного подпокрытия, но оно есть — это множество b. Противоречие.■

Определение 25. Всюду плотное множество — такое множество $A \subset [0, 1]$, что $\overline{A} = [0, 1]$ (первое условие для определённости, в общем случае оно не нужно).

Определение 26. Нигде не плотное множество — такое множество A, что для любого (a, b) существует $(c, d) \subset (a, b)$ такой, что $(c, d) \cap A = \emptyset$.

Теорема 14 (Бэр). Отрезок $[0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счётного количества нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть $[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и все B_i нигде не плотные. Обозначим $C_1 = [0, 1]$. Возьмём любой интервал на отрезке C_k, тогда в нём существует интервал, не пересекающийся с B_k, выберем в нём подмножество — отрезок и назовём его C_{k+1}. У нас получится система вложенных отрезков, у которой есть общая точка γ, которая не лежит ни в одном из наших множеств, т.к. C_t не пересекается с B_q при $t > q$. ■

Определение 27. Канторово множество — результат следующей процедуры. Обозначим $S_0 = \emptyset, K_i = [0, 1] \setminus S_i$. На каждом шаге K_i будет дизъюнктным объединением конечного количества отрезков вида $[l_j, r_j]$. Тогда $S_{i+1} = S_i \cup \bigsqcup(\frac{2l_j+r_j}{3}, \frac{l_j+2r_j}{3})$ будет дизъюнктным объединением конечного количества интервалов. Канторовым множеством называется $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$.

Теорема 15. Канторово множество замкнутое, нигде не плотное, и равномощное $[0, 1]$.

Доказательство. Первая часть: $K = [0, 1] \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$, и каждое S_i — объединение конечного кол-ва интервалов, значит, их объединение — объединение счётного кол-ва интервалов, т.е. открытое. Тогда K — дополнение открытого множества, значит, оно замкнутое.

Вторая часть: рассмотрим любой интервал I. Если он пересекается с $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, то мы победили, иначе он лежит целиком внутри либо $[0, \frac{1}{3}]$, либо $[\frac{2}{3}, 1]$. Рассмотрим тот, в котором он лежит, и продолжим так делать до тех пор, пока мы не победим (мы победим, т.к. для какого-то r верно $|I| > \frac{1}{3^r}$ и мы сделаем не более $r + 1$ шага).

Третья часть: заметим, что канторово множество — это множество всех таких чисел на отрезке $[0, 1]$, что их троичная запись состоит только из 0 и 2. Заменим все 2 на 1 и рассмотрим число с такой двоичной записью. Это биекция между отрезком и канторовым множеством. ■