Замощения доминошками

Смирнов Евгений Юрьевич

Берендеевы поляны, 18–19 августа 2019 г.

Замощения

Будем обозначать за F_n *числа Фибоначчи* — последовательность чисел со следующими свойствами: $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Теорема 1. Число способов разбить доску $n \times 2$ на доминошки равно F_n.

Доказательство. Доказываем по индукции. Для $n = 0, 1$ верно.

Шаг индукции. Пусть мы разбиваем доску $(n+2) \times 2$. Посмотрим на последнюю её доминошку. Если она лежит вертикально, оставшуюся часть можно разбить на доминошки F_{n+1} способами, а если стоит горизонтально — F_n по предположению индукции. Тогда всю доску можно разбить F_{n+2} способами. ■

Определение 1 (G-числа Фибоначчи). Будем каждому разбиению доски писать в соответствие x^m, где m — количество вертикальных доминошек в разбиении. Просуммируем все такие выражения по всем разбиениям. Получим $F(n, x)$ — n-е G-число Фибоначчи.

Определение 2. Ацтекский Бриллиант — структура, состоящая из горизонтальных отрезков длиной $2, 4, \ldots, 2n, 2n, \ldots, 4, 2$, написанных друг под другом с общим центром.

Теорема 2. Кол-во способов разрезать Бриллиант на доминошки равно $2^{\binom{n+1}{2}}$.

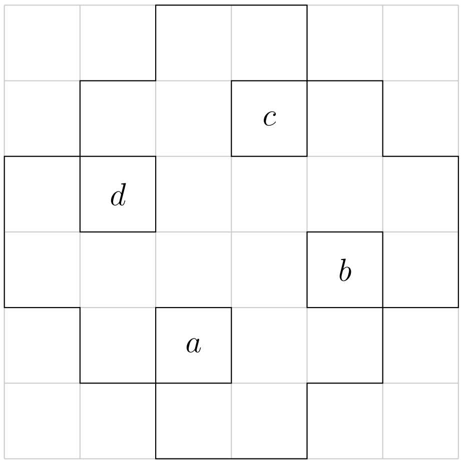
Лемма 3 (конденсация Доджсона). Пусть F_S — количество разбиений фигуры без точек множества S на доминошки, $F := F_\emptyset$. Точки a, b, c, d в фигуре таковы, что любые пути по клеточкам между a, c и между b, d пересекаются. Тогда верно:

$$F \cdot F_{abcd} = F_{ab}F_{cd} + F_{bc}F_{ad}.$$

Доказательство. Рассмотрим любую пару из разбиения фигуры и разбиения фигуры без точек a, b, c, d. Совместим эти разбиения (сделав их предварительно разных цветов). Тогда фигура разобьётся на «змей». Змея, выходящая из a, приходит в одну из трёх вершин. Пусть она приходит в b. Возьмём разбиение исходной фигуры и сделаем из него два — в одном перекрасим змею ab, в другом cd. Если сделать такую операцию для каждой пары разбиений, получится биекция между парами разбиений из левой части и парами разбиений из правой части. ■

Доказательство теоремы 2. Доказываем утверждение по индукции. Для $n = 1, 2, 3$ верно.

Шаг индукции. Докажем для $n+1$. Применим 3 для точек на рисунке. Получим $A(n+1)A(n-1) = 2A^2(n)$, откуда и следует утверждение задачи. ■



Треугольная сетка

Рассмотрим центрально-симметричный шестиугольник со сторонами p, q, r на треугольной сетке. Будем искать $P(p, q, r)$ — количество способов его замостить. (например, из-за рисунка ниже $P(1, 1, 1) = 2$)

Заметим, что существует биекция между трёхмерными диаграммами Юнга размера (p, q, r) и разбиениями шестиугольников.

Лемма 4. $P(0, q, r) = 1$. Действительно, разбиение параллелограмма с углами $60°, 120°$ на доминошки однозначно: все параллелограммы «параллельны» исходному.

Лемма 5. $P(1, 1, r) = r + 1$. Действительно, это двумерные диаграммы Юнга, вписанные в прямоугольник $r \times 1$. Аналогично, $P(1, q, r) = \binom{q+r}{q}$.

Утверждение. Утверждение 3 верно для треугольной решётки.

Поиск $P(p, q, r)$. Применим 3 для точек на рисунке. Получим

$$P(p,q,r) \cdot P(p,q-1,r-1) = P(p,q-1,r) \cdot P(p,q,r-1) + P(p-1,q,r) \cdot P(p+1,q-1,r-1).$$

Сделаем индукцию по p (будем находить функцию для всех q, r одновременно). Получим:

$$P(p+1, q, r) = \frac{P(p, q+1, r+1)P(p, q, r) - P(p, q, r+1)P(p, q+1, r)}{P(p-1, q+1, r+1)}.$$

Посчитаем $P(2, q, r)$:

$$\begin{aligned} P(2, q, r) &= \binom{q+r+2}{q+1}\binom{q+r}{q} - \binom{q+r+1}{q}\binom{q+r+1}{q+1} = \\ &= \frac{(q+r+2)!(q+r)!}{(q+1)!(r+1)!q!r!} - \frac{(q+r+1)!^2}{q!(q+1)!r!(r+1)!} = \\ &= \frac{(q+r)!(q+r+1)!}{q!r!(q+1)!(r+1)!} = \frac{\binom{q+r}{q}\binom{q+r+2}{q+1}}{q+r+2} \end{aligned}$$

Теорема 6 (Макмагон).

$$P(p, q, r) = \prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{r} \frac{p+i+j-1}{i+j-1} = \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}\prod_{k=1}^{r} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

Как запомнить формулу и что она означает. Будем обозначать $h(\eta)$ (ф-ция от кубика в трёхмерной диаграмме Юнга) — манхэттеновское расстояние до угла (от углового кубика $h(\eta) = 1$). Тогда $P(p, q, r) = \prod\limits_{\eta} \frac{h(\eta)+1}{h(\eta)}$.

Фризы

Будем нумеровать вершины треугольной сетки следующим образом. Занумеруем любую строку всеми единицами, следующую за ней — любой периодической последовательностью натуральных чисел без двух единиц подряд (можно считать, что строка с единицами находится сверху другой занумерованной). Каждую следующую строку нумеруем так: пусть число сверху от вершины, которую мы нумеруем сейчас, N, справа сверху и слева сверху — W и E. Тогда напишем в текущую ячейку число S так, что $WE - NS = 1$. Если в какой-то момент получим ещё одну строку из всех единиц, заканчиваем процесс. Полученная структура называется *фризом*. Например, если взята последовательность с периодом $2, 2, 1, 3$:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 2 2 1 3 2 2 1 3 2 2 1
5 3 1 2 5 3 1 2 5 3 1 2
 7 1 1 3 7 1 1 3 7 1 1
4 2 0 1 4 2 0 1 4 2 0 1
```

и т.п.

Определение 3. Континуанты — семейство многочленов $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ таких, что $V_0 = 1, V_1 = a_1, V_n = a_n V_{n-1} - V_{n-2}$.

Теорема 7 (правило Эйлера-Морзе). V_n получается так. Возьмём граф с рёбрами $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$. Рассмотрим все его вполне несвязные подмножества (в каждой компоненте связности не больше 2 вершин) и просуммируем по ним $(-1)^\tau \cdot \prod_{a_i \notin A} a_i$, где A — множество вершин с рёбрами и $|A| = 2\tau$.

Доказательство. Аналогично доказательству любой теоремы про Фибоначчи.■

Теорема 8. Следующий ромб унимодулярен (т.е. $WE - NS = 1$):

$$N = V_{n-2}(a_2, \ldots, a_{n-1}), W = V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}), E = V_{n-1}(a_2, \ldots, a_n), S = V_n(a_1, \ldots, a_n).$$

Доказательство. По 7 W считает конфигурации отрезков без последней точки, а E — без первой. Возьмём какую-нибудь конфигурацию. Обозначим отрезки из W и S чёрным, а из E и N — красным, и перекрасим крайнюю правую «змею». Единственная конфигурация при нечётном n, которую нельзя перекрасить — знакопеременная (одна длинная змея) с весом 1, а при чётном — тоже знакопеременная, но теперь она не перекрашивается в обратную сторону и у неё вес -1. ■

Задача 1. Доказать 8 по индукции.

Теорема 9. Все числа фриза целые.

Доказательство. Числа фриза удовлетворяют рекурренте континуант и их граничным условиям. Значит, в верхней вершине правильного треугольника, на верхней стороне которого написаны $a_1, \ldots, a_n$, написано $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ — целое число. ■

Теорема 10. Пусть фриз зациклился (т.е. все числа на уровне $n-1$ единицы для $n > 1$; число n называется его порядком). Тогда он обладает скользящей симметрией.

Доказательство. Очевидно из унимодулярности. ■

Теорема 11. Пусть фриз зациклился. Тогда в его изначальном периоде есть единица.

Доказательство. Пусть там нет единицы. Тогда для любого поворота верно:

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2} \geq 2V_{k-1} - V_{k-2} \implies V_k - V_{k-1} \geq V_{k-1} - V_{k-2} \geq \ldots \geq V_1 - V_0 > 0,$$

т.е. числа фриза на диагонали не убывают — противоречие. ■

Фризы малых порядков: 1 — порядка 3; 12 — порядка 4; 13122 — порядка 5.

Теорема 12 (Кокстер, Конвей, 1973). Фризов порядка n ровно C_n.

Лемма 13. У фриза с второй строкой $(a_1, \ldots, a_n)$ порядок n тогда и только тогда, когда у фриза с второй строкой $(a_1, \ldots, a_{n-1}+1, 1, a_n+1)$ порядок $n+1$.

Доказательство. Пусть w_i — коэффициенты на диагонали нового фриза, а v_i — старого. Заметим, что $v_i = w_i \forall\ i < n-1, w_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}, w_n = v_{n-1}, w_{n+1} = v_n$. ■

Доказательство теоремы 12. Будем нумеровать триангуляцию многоугольника так. Берём все свободные вершины, пишем в них 1 и удаляем. Затем пишем в свободные вершины 2, удаляем и т.п. Затем берём последовательность вершин в любом порядке. Заметим, что операция из 13 делает из триангуляции n-угольника триангуляцию $(n+1)$-угольника, причём взаимно однозначно. Т.к. у этих последовательностей совпадают начала и рекуррента, они совпадают. ■