Разбор варианта домашнего задания №1 по аналитической геометрии «ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ».

Даны точки $M_1(-1,0,-3), M_2(4,4,-1), M_3(4,0,7), M_4(2,-5,1)$

1. Найдите уравнение плоскости α, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 $\alpha = (M_1M_2M_3)$.
2. Найдите уравнение и длину перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на плоскость $\alpha = (M_1M_2M_3)$.
3. Найдите расстояние от точки M_3 до прямой (M_1M_2).
4. Найдите точку Q, симметричную точке M_3 относительно прямой (M_1M_2).
5. Найдите угол между прямыми (M_1M_2) и (M_1M_3).

Задача 1. Даны точки $M_1(-1,0,-3), M_2(4,4,-1), M_3(4,0,7)$.

Найти уравнение плоскости $\alpha = (M_1, M_2, M_3)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (5,0,10)$. Векторы, очевидно, не коллинеарны, поэтому точки не лежат на одной прямой, и через них можно провести единственную плоскость. Возьмем **произвольную точку плоскости** $M(x,y,z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x+1, y, z+3)$. Поскольку все точки M_1, M_2, M_3, M принадлежат плоскости, векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (5,0,10)$, $\overrightarrow{M_1M} = (x+1, y, z+3)$ будут компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения, которое равно значению определителя, составленного из координат векторов:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z+3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим полученный определитель по последней строке:

$$5 \cdot \begin{vmatrix} y & z+3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & y \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (2y - 4z - 12) + 10 \cdot (4x + 4 - 5y) =$$
$$= 40x - 40y - 20z - 20 = 0.$$

Упрощаем полученное уравнение и получаем уравнение искомой плоскости.

Ответ: $2x - 2y - z - 1 = 0$.

Замечание. Для проверки можно взять координаты данных точек, подставить в полученное уравнение плоскости и убедиться, что получаются верные равенства.

Задача 2. Даны точка $M_4(2,-5,1)$ и плоскость $\alpha = (M_1, M_2, M_3)$, уравнение которой получено в задаче 1.

Найти уравнение и длину перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на плоскость α.

Решение. Имеем уравнение плоскости α: $2x - 2y - z - 1 = 0$. Нормальный вектор плоскости α равен $\vec{n} = (2,-2,-1)$. Направляющий вектор $\vec{q}$ перпендикуляра, опущенного на плоскость α, коллинеарен вектору нормали $\vec{n}$. Записываем канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_4(2,-5,1)$ с направляющим вектором $\vec{q}=\vec{n}$: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-1}{-1}$. Мы получили уравнение прямой, перпендикулярной плоскости α и проходящей через точку M_4.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на плоскость α будет равна расстоянию от этой точки до плоскости α.

Находим это расстояние по формуле $\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Подставляем наши данные: $\rho(M_4,\alpha)=\frac{|2\cdot 2-2\cdot(-5)-1\cdot 1-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{12}{3}=4$.

Ответ: Уравнение $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-1}{-1}$; длина равна 4.

Задача 3. Даны точка $M_3(4,0,7)$ и прямая (M_1,M_2).

Найти расстояние от точки M_3 до прямой (M_1M_2).

Решение. *Способ1.* Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M_3}=(5,0,10)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}=(5,4,2)$ (см. задачу 1). Построим параллелограмм на этих векторах. Перпендикуляр, опущенный из точки M_3 на прямую (M_1M_2) совпадает с высотой параллелограмма. Обозначим перпендикуляр как M_3D, где D - основание перпендикуляра. Длина отрезка M_3D и будет искомым расстоянием от точки M_3 до прямой (M_1M_2).

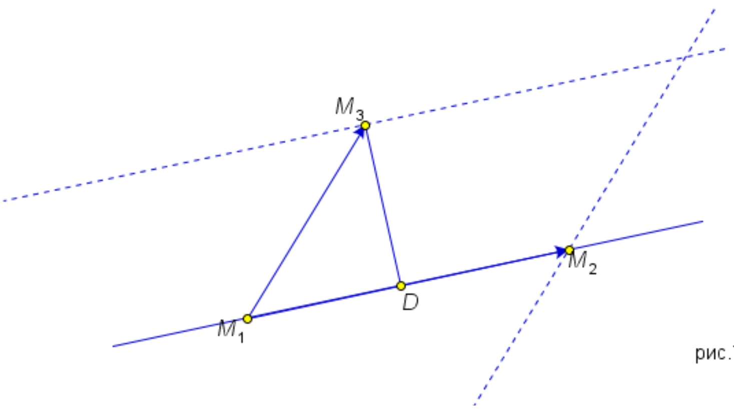

рис.7

Площадь параллелограмма равна $S=a_{осн.}\cdot h=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\cdot M_3D$. Отсюда $M_3D=\frac{S}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}$.

Вспомним, что модуль векторного произведения $\left|\overrightarrow{M_1M_3}\times\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Вычисляем векторное произведение через определитель:

$$\overrightarrow{M_1M_3}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 0 & 10\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}=-40\vec{i}+40\vec{j}+20\vec{k}.$$

$S_{\text{паралл.}} = \left|M_1M_3 \times M_1M_2\right| = \sqrt{(-40)^2 + 40^2 + 20^2} = \sqrt{3600} = 60$.

Вычисляем длину основания

$M_1M_2 = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Искомое расстояние равно $M_3D = \dfrac{S}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \dfrac{60}{3\sqrt{5}} = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$.

Способ 2. Построим плоскость, проходящую через точку $M_3(4,0,7)$ перпендикулярно прямой (M_1, M_2) . Тогда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$ будет нормальным вектором плоскости. Запишем уравнение этой плоскости $5(x-4) + 4(y-0) + 2(z-7) = 0$. Раскроем скобки, упростим и получим: $5x + 4y + 2z - 34 = 0$. Назовем построенную плоскость β. Точка пересечения прямой (M_1, M_2) с плоскостью β (точка D) будет основанием перпендикуляра M_3D, опущенного из точки M_3 на прямую (M_1, M_2).

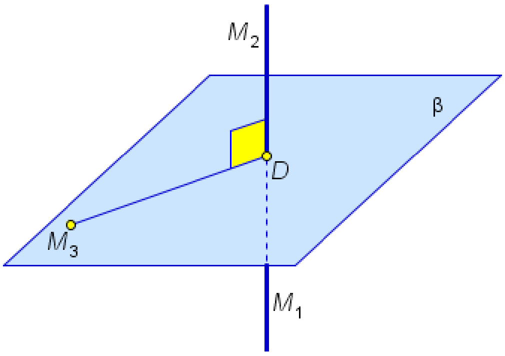

Рис.8

Найдем координаты точки D. Запишем параметрические уравнения прямой (M_1, M_2) .

Имеем: направляющий вектор $\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$, точка на прямой $M_1(-1,0,-3)$.

Получаем уравнения $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 4t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in R$.

Подставим эти уравнения в уравнение плоскости β:

$5(-1+5t) + 4(4t) + 2(-3+2t) - 34 = 0$

$25t + 16t + 4t - 45 = 0$

$45t - 45 = 0$

$t = 1$

Мы получили, что при $t = 1$ точка прямой (M_1, M_2) лежит в плоскости β, т.е. это точка D. Подставим $t = 1$ в уравнения прямой (M_1, M_2) и получим координаты точки $D(4,4,-1)$.

Найдем длину перпендикуляра M_3D: $\left|M_3D\right| = \sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Задача 4. Даны точка $M_3(4,0,7)$ и прямая (M_1, M_2).

Найти точку Q (т.е. найти координаты), симметричную M_3 относительно прямой (M_1, M_2).

Решение. Для построения точки Q нужно из точки M_3 опустить перпендикуляр на прямую (M_1, M_2). Пусть это будет M_3D (D- основание перпендикуляра M_3D). Затем, необходимо продлить прямую (M_3D) и отложить отрезок DQ, равный отрезку M_3D.

Поскольку $M_3D \perp M_1M_2$, то M_3D лежит в плоскости, перпендикулярной прямой (M_1, M_2). Следовательно, направляющий вектор прямой (M_1, M_2) является вектором нормали к плоскости, перпендикулярной прямой (M_1, M_2) и проходящей через точку $M_3(4,0,7)$. Запишем уравнение этой плоскости. Имеем: $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$, $M_3(4,0,7)$.

Получаем уравнение

$5(x-4)+4(y-0)+2(z-7)=0$, или

$5x+4y+2z-34=0$. Обозначим построенную плоскость как β.

Точка D, являющаяся основанием перпендикуляра M_3D, также является точкой плоскости β и прямой (M_1, M_2).

Запишем параметрические уравнения прямой (M_1, M_2).

Направляющий вектор $\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$. Точка на прямой $M_1(-1,0,-3)$. Получаем уравнения $\begin{cases} x = -1+5t \\ y = 4t \\ z = -3+2t \end{cases}$, $t \in R$.

Подставим эти уравнения в уравнение плоскости β:

$5(-1+5t)+4(4t)+2(-3+2t)-34=0$

$25t+16t+4t-45=0$

$45t-45=0$

$t=1$

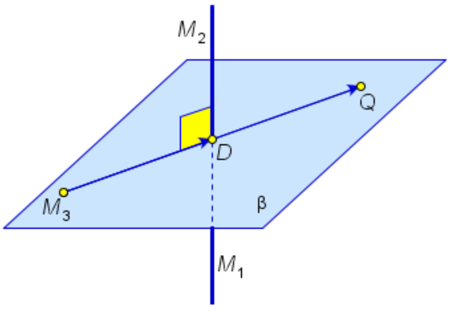

Рис.9

Мы получили, что при $t=1$ точка прямой (M_1, M_2) лежит в плоскости β, т.е. это точка D. Подставим $t=1$ в уравнения прямой (M_1, M_2) и получим координаты точки $D(4,4,-1)$.

Теперь, чтобы получить координаты искомой точки Q прибавим к координатам точки D координаты вектора $\overrightarrow{M_3D} = (0,4,-8)$. Получаем $Q(4,8,-9)$.

Ответ: $Q(4,8,-9)$.

Задача 5. Даны точки $M_1(-1,0,-3), M_2(4,4,-1), M_3(4,0,7)$.

Найти угол между прямыми (M_1M_2) и (M_1M_3).

Решение. Найдем направляющие векторы прямых: $\vec{q}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = (5,4,2)$ и $\vec{q}_2 = \overrightarrow{M_1M_3} = (5,0,10)$. Косинус угла между прямыми с направляющими векторами находим по формуле: $\cos(\angle(M_1M_2),(M_1M_3)) = \dfrac{|\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|}$

Подставляем наши данные и получаем:

$$\cos(\angle(M_1M_2),(M_1M_3)) = \frac{|5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 10|}{\sqrt{5^2+4^2+2^2} \cdot \sqrt{5^2+0^2+10^2}} = \frac{45}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{125}} = \frac{45}{3\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}.$$

Отсюда, $\angle((M_1M_2),(M_1M_3)) = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$.