Лабораторная работа № 5

Алгебра логики

<u>Цель работы</u>: Изучить основы алгебры логики.

<u>Задача научиться:</u>
- применять загоны логики для упрощения логических выражений;
- строить таблицы истинности;
- строить логические схемы сложных выражений.

<u>Теоретическая часть</u>

Основные понятия алгебры логики

Логической основой компьютера является алгебра логики, которая рассматривает логические операции над высказываниями.

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример: «3 – простое число» является высказыванием, поскольку оно истинно.

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Пример: предложение «Давайте пойдем в кино» не является высказыванием. Вопросительные и побудительные предложения высказываниями не являются.

Высказывательная форма – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Пример: «$x+2>5$» - высказывательная форма, которая при $x>3$ является истинной, иначе ложной.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения – является ли оно истинным или ложным. Слова и словосочетания «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными (сложными)**. Высказывания, которые не являются составными, называются **элементарными (простыми)**.

Пример: высказывание «Число 6 делится на 2» - простое высказывание. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - составное высказывание, образованное из двух простых с помощью логической связки «и».

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают **имена**.

Пример: Обозначим через А простое высказывание «число 6 делится на 2», а через В простое высказывание «число 6 делится на 3». Тогда составное высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» можно записать как «А и В». Здесь «и» – логическая связка, A, B – логические переменные, которые могут принимать только два значения – «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение (табл. 1).

Таблица 1. Основные логические операции

Обозначение операции	Читается	Название операции	Альтернативные обозначения
¬	НЕ	Отрицание (инверсия)	Черта сверху
$\wedge$	И	Конъюнкция (логическое умножение)	·&
$\vee$	ИЛИ	Дизъюнкция (логическое сложение)	+
→	Если … то	Импликация	
↔	Тогда и только тогда	Эквиваленция	~
XOR	Либо …либо	Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)	$\oplus$

НЕ Операция, выражаемая словом «не», называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком ¬). Высказывание ¬A истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

Пример. Пусть A=«Сегодня пасмурно», тогда ¬A=«Сегодня не пасмурно».

И Операция, выражаемая связкой «и», называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio – соединение) или логическим умножением и обозначается точкой « · » (может также обозначаться знаками $\wedge$ или &). Высказывание A · B истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 больше 10» - ложно.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой «или» (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio – разделение) или логическим сложением и обозначается знаком $\vee$ (или плюсом). Высказывание A $\vee$ B ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2 или число 6 больше 10» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 5 или число 6 больше 10» - ложно.

ЕСЛИ … ТО Операция, выражаемая связками «если …, то», «из … следует», «... влечет …», называется **импликацией** (лат. implico – тесно связаны) и обозначается знаком → . Высказывание A→B ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Пример. Высказывание «если студент сдал все экзамены на «отлично», то он получит стипендию». Очевидно, эту импликацию следует признать ложной лишь в том случае, когда студент сдал на «отлично» все экзамены, но стипендии не получил. В остальных случаях, когда не все экзамены сданы на «отлично» и стипендия получена (например, в силу того, что студент проживает в малообеспеченной семье) либо когда экзамены вообще не сданы и о стипендии не может быть и речи, импликацию можно признать истинной.

РАВНОСИЛЬНО Операция, выражаемая связками «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «... равносильно …», называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком ↔ или ~ . Высказывание A↔B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.

Пример. Высказывание «Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Число является нечетным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» - ложно.

ЛИБО … ЛИБО Операция, выражаемая связками «Либо … либо», называется **исключающее ИЛИ** или сложением по модулю 2 и обозначается XOR или . Высказывание A B истинно тогда и только тогда, когда значения A и B не совпадают.

Пример. Высказывание «Число 6 либо нечетно либо делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Либо число 6 четно либо число 6 делится на3» – ложно, так как истинны оба высказывания входящие в него.

Замечание. Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \to B = \neg A \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Исключающее ИЛИ можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \text{ XOR } B = (\neg A \wedge B) \vee (\neg \mathrm{B} \,\&\, \mathrm{A})$$

Вывод. Операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания («не»), затем конъюнкция («и»), после конъюнкции – дизъюнкция («или») и исключающего или и в последнюю очередь – импликация и эквиваленция.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой (логическим выражением).

Логическая формула - это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).

Логическая функция - это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

Пример. $F(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B} \vee A$ – логическая функция двух переменных A и B.

Значения логической функции для разных сочетаний значений входных переменных – или, как это иначе называют, наборов входных переменных – обычно задаются специальной таблицей. Такая таблица называется **таблицей истинности**.

Приведем таблицу истинности основных логических операций (табл. 2)

Таблица 2.

A	B	$\neg A$	A & B	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	A XOR B
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Опираясь на данные таблицы истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для более сложных формул.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:
– количество строк = 2^n + строка для заголовка,
– n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
– определить количество переменных (простых выражений);
– определить количество логических операций и последовательность их выполнения.
3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: $\neg(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$.

1. Определить количество строк:
На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк =2^2+1=5.
2. Определить количество столбцов:
Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности для логической операции $\neg(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$

A	B	A & B	$\neg(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B})$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \vee B)$.

Таблица 4. Таблица истинности для логической операции $\neg(A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Примечание: И–НЕ называют также «штрих Шеффера» (обозначают |) или «антиконъюнкция»; ИЛИ–НЕ называют также «стрелка Пирса» (обозначают ↓) или «антидизъюнкция».

Пример 2. Составить таблицу истинности логического выражения $C = \neg A \,\&\, B \vee A \,\&\, \neg B$.

Решение:

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк=2^2+1= 5.

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и пяти логических операций (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 7.

Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности для логической операции $C = \neg A \,\&\, B \vee A \,\&\, \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \,\&\, B$	$A \,\&\, \neg B$	C
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

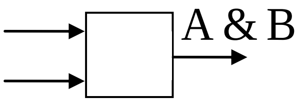
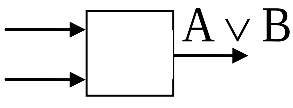
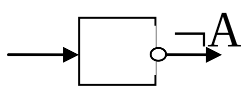
Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

логический элемент «И» – логическое умножение – конъюнктор;

логический элемент «ИЛИ» – логическое сложение – дизъюнктор;

логический элемент «НЕ» – инверсию – инвертор.

конъюнктор	дизъюнктор	инвертор
		

Поскольку любая логическая операция может быть представлена в виде комбинации трех основных, любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации, могут быть собраны из базовых логических элементов, как из “кирпичиков”.

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс – логический смысл сигнала – 1, нет импульса – 0. На входы логического элемента поступают сигналы-значения аргументов, на выходе появляется сигнал-значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задается таблицей состояний, которая фактически является таблицей истинности, соответствующей логической функции, только представлена в форме логических схем. В такой форме удобно изображать цепочки логических операций и производить их вычисления.

Алгоритм построения логических схем.

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример. По заданной логической функции $F(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \neg \mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B} \vee \mathrm{A} \,\&\, \neg B$ построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (А и В).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция). Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).

Логические законы и правила преобразования логических выражений

Если две формулы А и В одновременно, то есть при одинаковых наборах значений входящих в них переменных, принимают одинаковые значения, то они называются **равносильными**.

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений.

1) Закон двойного отрицания:

$A = \neg(\neg A)$;

2) Переместительный (коммутативный) закон:

– для логического сложения: $A \vee B = B \vee A$;

– для логического умножения: $A \wedge B = B \wedge A$;

3) Сочетательный (ассоциативный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$;

4) Распределительный (дистрибутивный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \wedge C = (\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{C}) \vee (\mathrm{B} \,\&\, \mathrm{C})$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;

5) Законы де Моргана:

– для логического сложения: $\neg(A \vee B) = \neg \mathrm{A} \,\&\, \neg B$;

– для логического умножения: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;

6) Закон идемпотентности:

– для логического сложения: $A \vee A = A$;

– для логического умножения: $A \wedge A = A$;

7) Законы исключения констант:

– для логического сложения: $A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$;

– для логического умножения: $A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$;

8) Закон противоречия:

$\mathrm{A} \& \neg A = 0$;

9) Закон исключения третьего:

$A \vee \neg A = 1$;

10) Закон поглощения:

– для логического сложения: $A \vee (A \wedge B) = A$;

– для логического умножения: $A \wedge (A \vee B) = A$;

11) Правило исключения импликации:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$;

12) Правило исключения эквиваленции:

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Справедливость этих законов можно доказать составив таблицу истинности выражений в правой и левой части и сравнив соответствующие значения.

Основываясь на законах, можно выполнять упрощение сложных логических выражений. Такой процесс замены сложной логической функции более простой, но равносильной ей, называется **минимизацией** функции.

Пример: Упростить логическое выражение $\neg(A \vee B) \wedge (\mathrm{A} \& \neg B)$.

Решение:

Согласно закону де Моргана:

$\neg(A \vee B) \wedge (\mathrm{A} \& \neg B) \vee A = \neg \mathrm{A} \& \neg \mathrm{B} \& (\mathrm{A} \& \neg B) \vee A$.

Согласно сочетательному закону:

$\neg \mathrm{A} \& \neg \mathrm{B} \& (\mathrm{A} \& \neg B) \vee A = \neg \mathrm{A} \& \mathrm{A} \& \neg \mathrm{B} \& \neg B \vee A$.

Согласно закону противоречия и закону идемпотентности:

$\neg \mathrm{A} \& \mathrm{A} \& \neg \mathrm{B} \& \neg B \vee A = 0 \wedge \neg \mathrm{B} \& \neg B = 0 \& \neg B \vee A$.

Согласно закону исключения 0:

$0 \& \neg B = 0$

Окончательно получаем $\neg(A \vee B) \wedge (\mathrm{A} \& \neg B) \vee A = 0 \vee A = A$

В данной работе необходимо составить таблицу истинности логического выражения, построить схему логической функции и упростить логическое выражение заданные каждому студенту в соответствии с его вариантом, записать ход рассуждений и полученные результаты.

Содержание отчета

1. Текст задания (с данными своего варианта).
2. Представление по каждому пункту задания подробного решения.

Задания

1. Составить таблицу истинности логического выражения С.

Варианты задания:

№ варианта	С
1	$(\neg(A \& B)) \leftrightarrow (A \vee \neg B)$ XOR A
2	$(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& B)$ XOR B
3	$(A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ XOR A
4	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$ XOR B
5	$(A \vee B) \leftrightarrow \neg(A \& \neg B)$ XOR B
6	$\neg(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ XOR A
7	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ XOR A
8	$(\neg A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)$ XOR B
9	$(A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(B \& A)$ XOR A
10	$(\neg B \& A) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$ XOR B
11	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg B \& A)$ XOR A
12	$(\neg B \rightarrow \neg A) \leftrightarrow (A \vee B)$ XOR B
13	$\neg(B \vee A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$ XOR A
14	$(\neg(A \& B)) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$ XOR B
15	$(\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \& A)$ XOR B
16	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (B \vee \neg A)$ XOR A

2. Построить логическую схему функции F(A,B).

Варианты задания

№ варианта	F(A,B)
1	$\neg(A \& B) \vee (\neg(B \vee A))$
2	$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$
3	$\neg(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
4	$\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$
5	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)$
6	$(\neg A \vee B) \wedge \neg(A \vee \neg B)$
7	$\neg(\neg A \& \neg B) \vee (A \vee B)$
8	$(\neg A \vee B) \vee \neg(A \& B)$
9	$(A \& B) \vee ((A \vee B) \wedge \neg A)$
10	$\neg((\neg A \vee B) \& A) \wedge \neg B$
11	$\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B)$
12	$\neg A \& \neg B \vee \neg(A \vee B)$
13	$\neg A \vee B \vee \neg(\neg B \vee A)$
14	$(\neg A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$
15	$(\neg A \& B) \vee (A \& \neg B)$
16	$\neg(A \& (B \vee A) \wedge \neg B)$

:

3. Упростить логическое выражение D.

Варианты задания:

№ варианта	D
1	$(\neg A \& B) \vee (A \& \neg B) \vee (A \& B)$
2	$(\neg A \& \neg B) \vee (\neg A \& B) \vee (A \& B)$
3	$\neg(A \& B) \vee (\neg(B \vee C))$
4	$\neg(\neg A \& C) \vee (B \& \neg C)$
5	$\neg A \vee B \vee \neg(\neg B \vee A) \vee A \& B$
6	$\neg A \& B \vee \neg(A \vee B) \vee A$
7	$\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B) \vee A \& B$
8	$(A \& B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$
9	$\neg((\neg A \vee B) \& A) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
10	$(\neg A \vee B) \vee (B \vee C) \vee (A \& C)$
11	$\neg(\neg A \& \neg B) \vee ((\neg A \vee B) \& A)$
12	$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee A)$
13	$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee A)$
14	$\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \vee (A \vee B)$
15	$\neg(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
16	$\neg(A \vee B) \wedge (A \& \neg B)$

Вопросы для защиты работы

1. Что такое высказывание (приведите пример)?
2. Что такое составное высказывание (приведите пример)?
3. Как называются и как обозначаются (в языке математики) следующие операции: ИЛИ, НЕ, И, ЕСЛИ … ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ЛИБО …ЛИБО?
4. Укажите приоритеты выполнения логических операций.
5. Составьте таблицу истинности для следующих операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.
6. Изобразите функциональные элементы: конъюнктор, дизъюнктор, инвертор.
7. Какие логические выражения называются равносильными?
8. Записать основные законы алгебры логики.