Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

ДОМАШНЯЯ РАБОТА №2

«Метод разделения переменных для решения ДУЧП2»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б ________________ (Карельский М.К.)
(Подпись)

Проверил: ________________ (Никитенко У.В.)
(Подпись)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):
- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

Задачи: решить методом разделения переменных задачи для ДУЧП2 гиперболического, параболического и эллиптического типов. Выбрать среду для проведения расчетов. Оценить результаты расчетов. Визуализировать результаты.

Вариант 11

Задача 1.

Решить методом Фурье и методом отражений начально-краевую задачу для волнового уравнения.

1.1. Отдельно выписать задачу Штурма-Лиувилля и решить её.
1.2. Ответ представить в максимально компактной форме
1.3. Построить профиль струны в различные моменты времени, начиная с нулевого.

$$u_{tt} = 64u_{xx}$$
$$u(x,0) = 11\sin\pi x$$
$$u_t(x,0) = 8\pi\sin\pi x$$
$$u(0,t) = u(6,t) = 0$$

Решение:

Из условия имеем:

$$a^2 = 8^2$$
$$l = 6$$
$$\varphi(x) = 11\sin\pi x$$
$$\psi(x) = 8\pi\sin\pi x$$

Решим задачу методом Фурье

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$X(x)T''(t) = 8^2X''(x)T(t)$$
$$\frac{T''(t)}{8^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Последнее равенство возможно только при условии, что оно равно константе, положим λ.

$$T''(t) = 8^2\lambda T(t)$$
$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

Либо $T(t) \equiv 0$, что противоречит физическому смыслу задачи, либо $T(t) \neq 0$ и $X(0) = X(6) = 0$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(6) = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - \lambda = 0$$
$$k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$$

Если $\lambda = 0$, то $X(x) = C_1 x + C_2$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(l) = 6C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$
$$X(x) \equiv 0$$

Если $\lambda > 0, k_{1,2}$ – действительные числа, то $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(6) = C_1 e^{6\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-6\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_1 \left(e^{6\sqrt{\lambda}} - e^{-6\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \end{cases}$$
$$e^{6\sqrt{\lambda}} - e^{-6\sqrt{\lambda}} \neq 0 \to \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$
$$X(x) \equiv 0$$

Если $\lambda < 0, k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ – комплексные числа, то $X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(6) = C_1 \cos 6\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin 6\sqrt{-\lambda} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin 6\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$
$$C_2 \neq 0 \to \sin 6\sqrt{\lambda} = 0 \to 6\sqrt{\lambda} = \pi n, n = 1,2, \dots$$

Собственные числа:

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{6}\right)^2$$

Собственные функции:

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{6}x$$

После подстановки получаем:

$$T_n''(t) = -\left(\frac{8\pi n}{6}\right)^2 T_n(t)$$

Решим относительно функции $T(t)$, составим характеристическое уравнение:

$$k^2 = -\left(\frac{8\pi n}{6}\right)^2$$
$$k_{1,2} = \pm i\frac{8\pi n}{6}$$

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{8\pi n}{6}t + B_n \sin\frac{8\pi n}{6}t$$
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{8\pi n}{6}t + B_n \sin\frac{8\pi n}{6}t\right)\sin\frac{\pi n}{6}x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi n}{6}x = 11\sin\pi x$$
$$\begin{cases} n = 6, A_n = 11 \\ n \neq 6, A_n = \frac{2}{6}\int_0^6 11\sin\pi\xi \sin\frac{\pi n}{6}\xi\, d\xi = 0 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{8\pi n}{6}\sin\frac{\pi n}{6}x = 8\pi\sin\pi x$$
$$\begin{cases} n = 6, B_n = 1 \\ n \neq 6, B_n = \frac{6}{8\pi n}\frac{2}{6}\int_0^6 8\pi\sin\pi\xi \sin\frac{\pi n}{6}\xi\, d\xi = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = (11\cos 8\pi t + \sin 8\pi t)\sin\pi x$$

Проверка:

$$u_{tt} = 64\big(-\pi^2 sin(8\pi t) - 11\pi^2 cos(8\pi t)\big)sin(\pi x)$$
$$u_{xx} = -\pi^2\big(sin(8\pi t) + 11cos(8\pi t)\big)sin(\pi x)$$
$$u_{tt} = 64u_{xx}$$

$$u(x,0) = (11 + 0)\sin\pi x = 11\sin\pi x$$

$$u_t(x,0) = 8\big(-11\pi sin(8\pi * 0) + \pi cos(8\pi * 0)\big)sin(\pi x) = 8\pi \sin \pi x$$

$$u(0,t) = (11\cos 8\pi t + \sin 8\pi t) * 0 = 0$$
$$u(6,t) = (11\cos 8\pi t + \sin 8\pi t) * 0 = 0$$
$$u(0,t) = u(6,t) = 0$$

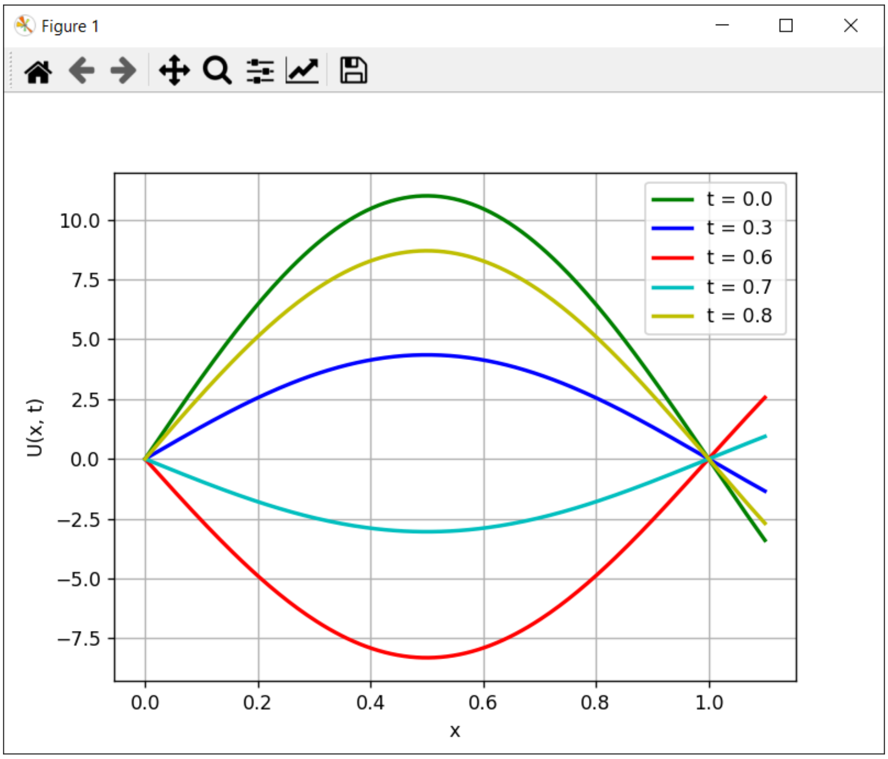

Рис. 1. Профиль струны

Теперь решим задачу методом отражений для струны с закрепленными концами.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \in [0,l] \\ -\varphi(-x), x \in [-l,0) \\ \Phi(x-2lk), x \notin [-l,l] \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x \in [0,l] \\ -\psi(-x), x \in [-l,0) \\ \Psi(x-2lk), x \notin [-l,l] \end{cases}$$

$$x \in [0,l] \rightarrow \begin{cases} \Phi(x) = \varphi(x), x \in [0,6] \\ \Psi(x) = \psi(x), x \in [0,6] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Phi(x) = 11\sin \pi x\,, x \in [0,6] \\ \Psi(x) = 8\pi \sin \pi x\,, x \in [0,6] \end{cases}$$

Решение задачи:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\Phi(x-at) - \widetilde{\Psi}(x-at)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\Phi(x+at) + \widetilde{\Psi}(x+at)\Big)$$
$$\widetilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \Psi(t)dt$$
$$\widetilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x 8\pi \sin \pi t\, dt = -4(\cos \pi x - 1)$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(11\sin\pi(x-8t)+4(\cos\pi(x-8t)-1)\big)$$
$$+\frac{1}{2}\big(11\sin\pi(x+8t)-4(\cos\pi(x+8t)-1)\big)$$

Проверка:

$$u_{tt}=-32\pi^2\Big(11\sin\big(\pi(8t+x)\big)-4\cos\big(\pi(8t+x)\big)-11\sin\big(\pi(8t-x)\big)+4\cos\big(\pi(8t-x)\big)\Big)$$
$$u_{xx}=-\frac{1}{2}\Bigg(\pi^2\bigg(11\Big(\sin\big(\pi(x+8t)\big)-\sin\big(\pi(x-8t)\big)\Big)-4\cos\big(\pi(x+8t)\big)+4\cos\big(\pi(x-8t)\big)\bigg)\Bigg)$$
$$u_{tt}=64u_{xx}$$

$$u(x,0)=\frac{1}{2}\big(11\sin\pi x+4(\cos\pi x-1)\big)+\frac{1}{2}\big(11\sin\pi x-4(\cos\pi x-1)\big)=11\sin\pi x$$
$$u_t(x,0)=4\pi\big(\sin(\pi x)+11\cos(\pi x)+\sin(\pi x)-11\cos(\pi x)\big)=8\pi\sin\pi x$$

$$u(0,t)=\frac{-11\sin 8t\pi+4(\cos 8t\pi-1)}{2}+\frac{11\sin 8t\pi-4(\cos 8t\pi-1)}{2}=0$$
$$u(6,t)=\frac{1}{2}\big(11\sin\pi(6-8t)+4(\cos\pi(6-8t)-1)\big)$$
$$+\frac{1}{2}\big(11\sin\pi(6+8t)-4(\cos\pi(6+8t)-1)\big)=0$$

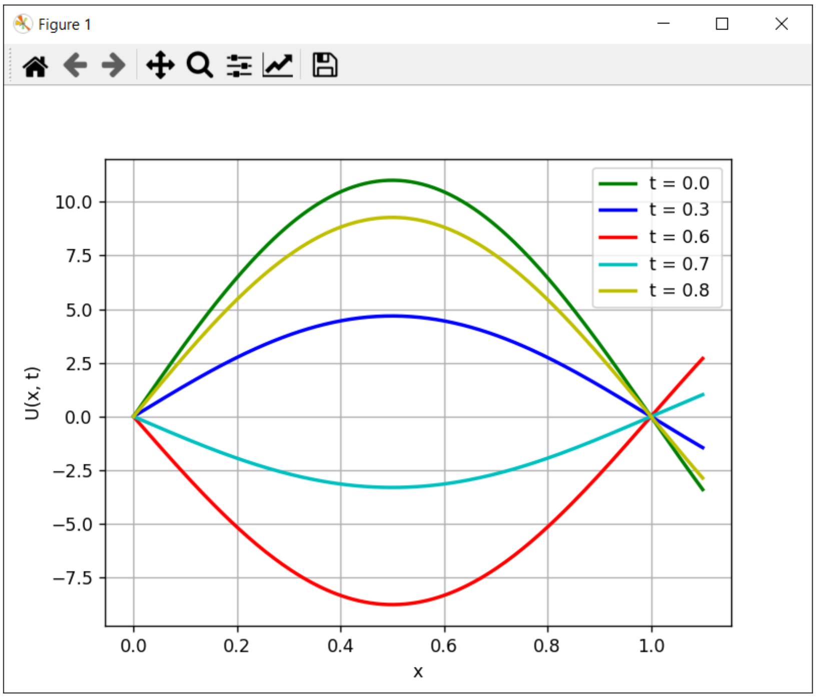

Рис. 2. Профиль струны

Задача 2.

Решить методом Фурье начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности.

2.1. Ответ представить в максимально компактной форме

2.2. Построить графики изменения температуры в различные моменты времени, начиная с нулевого.

$$u(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$
$$u_t = 4u_{xx} + 11\sin 5t \sin 9x$$

Решение:

Из условия имеем:

$$a^2 = 2^2$$
$$l = \frac{\pi}{2}$$
$$f(x,t) = 11\sin 5t \sin 9x$$

Решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x$$
$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx$$
$$f_n(t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 11\sin 5t \sin 9x \sin 2nx\, dx = -\frac{88n\cos\pi n \sin 5t}{\pi(4n^2-81)}$$

После подстановки получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin\frac{\pi n}{l} x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{88n\cos\pi n \sin 5t}{\pi(4n^2-81)}$$

Для каждого n должно выполняться равенство:

$$T_n'(t) = -(4n)^2 T_n(t) - \frac{88n\cos\pi n \sin 5t}{\pi(4n^2-81)}$$

Пользуясь начальным условием для

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

Получаем начальное условие для $T_n(0) = 0$. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение с нулевым начальным условием, находим:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-(4n)^2(t-\xi)} \left(-\frac{88n \cos \pi n \sin 5\xi}{\pi(4n^2 - 81)} \right) d\xi$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(4n)^2(t-\xi)} \left(-\frac{88n \cos \pi n \sin 5\xi}{\pi(4n^2 - 81)} \right) d\xi \right) \sin 2nx$$

$$(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{88n \cos \pi n \left(16n^2 \sin 5t - 5 \cos 5t + 5e^{-16n^2 t}\right)}{\pi(4n^2 - 81)(256n^4 + 25)} \right) \sin 2nx$$

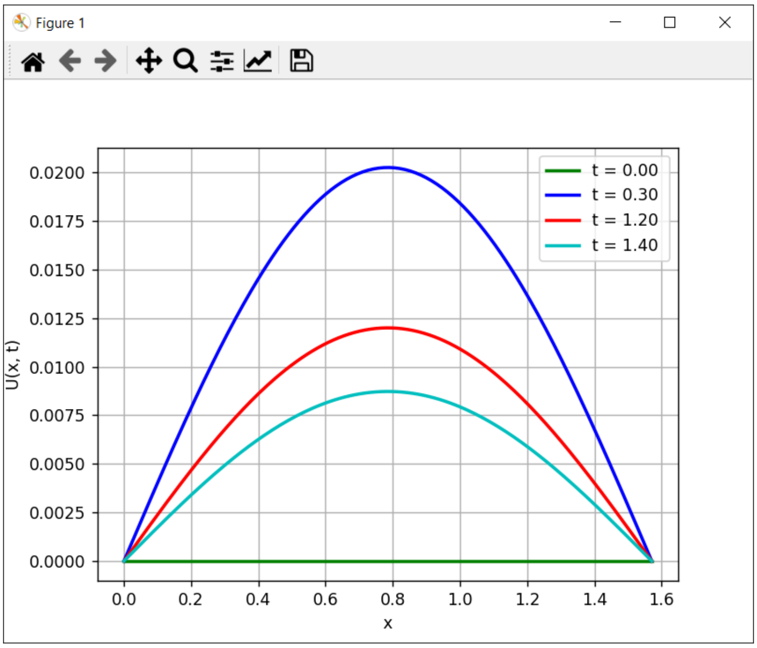

Рис. 3. Изменение температуры

Задача 3.

Решить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1, 0 < \varphi < \alpha$

$$u(1,\varphi) = 11 \cos 24\varphi$$
$$u_\varphi(r,0) = u_\varphi\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Из условия имеем:

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

Решение уравнения имеет вид:

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Подставляя выражение в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получаем задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $0 < \varphi < \alpha$ для определения $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$
$$\Phi(0) = 0$$
$$\Phi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

А также задачу для определения $R(r)$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

Решение задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 = (6k)^2$$
$$\Phi_k(\varphi) = \sin 6k\varphi\,, k = 1,2,\ldots$$

Подставив λ_k, получим:

$$r^2R'' + rR' - \lambda_k R = 0$$

Решение имеет вид:

$$R(r) = r^{\mu}, \mu - \text{некоторая постоянная}$$

После подстановки имеем:

$$\mu^2 = \lambda_k$$
$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm\frac{k\pi}{\alpha} = \pm 6k$$

Общее решение уравнения Эйлера:

$$R_k(r) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}}$$

Частные решения исходного уравнения:

$$u_k(r,\varphi) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \sin 6k\varphi$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} \sin 6k\varphi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin 6k\varphi = 11 \cos 24\varphi$$

$$c_k = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi = \frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 11 \cos 24\varphi \sin 6k\varphi\, d\varphi = -\frac{22k(\cos \pi k - 1)}{\pi(k^2-16)}$$

Решение задачи Дирихле:

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{22k(\cos \pi k - 1)}{\pi(k^2-16)} r^{6k} \sin 6k\varphi$$

Вывод: в ходе выполнения домашней работы были получены практические навыки использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования; практических навыков решения ДУЧП2.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Листинг:
HW2_1.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

def U(x, t):
    pi = np.pi
    r = 1/2*(11*math.sin(pi*(x - 8*t)) + 4*(math.cos(pi*(x - 8*t)) - 1)) + \
        1/2*(11*math.sin(pi*(x + 8*t)) - 4*(math.cos(pi*(x + 8*t)) - 1))

    print("r=",r)
    print(2/math.pi+t, "\n")
    return r

l = 6
a = 8

t = [0.0, 0.31, 0.61, 0.69, 0.79]
color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-', 'y-']
indx = 0
for tt in t:
     x = np.linspace(0, 1.1, num=200)
     print("x=",x)
     y = []
     print("tt=",tt)
     for i in x:
        y.append(U(i, tt))
     plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t = %.1f '% tt)
     indx+=1
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('U(x, t)')
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.show()
```

HW2_2.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

def U(x, t):
    pi = math.pi
    repetitions = 1
    r = 0.0
    for i in range(repetitions):
        n = i + 1
```

```
        temp = -(88*n*np.cos(pi*n)*(16*n**2*np.sin(5*t) - 5*np.cos(5*t) +
5*np.exp(-16*n**2*t))) \
            / (pi*(4*n**2 - 81)*(256*n**4 + 25))
        temp *= np.sin(2*n*x)

        r += temp

    return r

t = [0.0, 0.3, 1.2, 1.4]
color = ['g-', 'b-', 'r-', 'c-']
indx = 0
for tt in t:
     x = np.linspace(0, math.pi/2, num=200)
     y = []
     for i in x:
        y.append(U(i, tt))
     plt.plot(x, y, '%s' % color[indx], linewidth=2, label='t = %.2f '% tt)
     indx+=1
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('U(x, t)')
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.show()
```