Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.1

«Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б ________________ (Карельский М.К.)
(Подпись)

Проверил: ________________ (Никитенко У.В.)
(Подпись)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель: сформировать практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов численного или приближенно-аналитического решения ДУЧП2 гиперболического типа на основе сравнения результатов.

Задачи: решить уравнение, указанное в варианте методом разделения переменных (Фурье), выдвинуть и обосновать гипотезу целесообразности использования того или иного метода в зависимости от предложенной задачи и ее вариаций, точности результата, трудоемкости, сложности алгоритма, сложности обоснования применимости метода, вычислительной эффективности алгоритма. Визуализировать результаты.

Задание:

Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t), 0 < x < 1, 0 < t \le t$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le 1$$

$$\left.\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = \alpha(t), 0 \le t \le 1$$

$$\left.\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=1} = \beta(t), 0 \le t \le 1$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2 + \tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- явную схему порядка $O(h^2 + \tau^2)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами порядка $O(h + \tau)$ и $O(h + \tau^2)$ при σ = 0, σ = 1/2, σ = 1/4 (с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$).

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий

1) Алгоритм решения задачи.
2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x,t) = x^3 + t^3$, x^3t^3, $\sin(2t+1)\cos(2x)$, $\sin(2t+1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
4) Таблицы решения на «крупной» сетке независимо от шагов по t и x, с которыми строится решение (N = 5, 10, 20)
5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость

Вариант 26

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{dt}\right|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le 1$$
$$u(0,t) = \alpha(t), \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = \beta(t), 0 \le t \le 1$$

Решение:

Явная разностная схема $O(h^2+\tau)$

Аппроксимируем данное уравнение в узле (x_i, t_k):

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h u_i^k + f_i^k$$

$L_h u_i^k$ имеет вид:

$$L_h u_i^k = a(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i,t_k)u_i^k$$

В случае данного уравнения:

$$a(x_i,t_k) = \cos(x)$$
$$b(x_i,t_k) = 0$$
$$c(x_i,t_k) = 0$$

После подстановки получаем:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = \cos(x)\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k$$

Найдем начальные условия:

$$u_i^0 = \varphi(x_i)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i)$$
$$u_i^1 = \psi(x_i)\tau + u_i^0$$

Найдем граничные условия:

$$\alpha_1(t_{k+1})u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} = \alpha(t_{k+1})$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_n^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{3u_n^{k+1} - 4u_{n-1}^{k+1} + u_{n-2}^{k+1}}{2h} = \beta(t_{k+1})$$

Найдем нужные функции из условия:

$$\alpha_1(t)u(0,t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t)$$
$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta(t)$$

$$\alpha_1(t_{k+1}) = 1$$
$$\alpha_2(t_{k+1}) = 0$$
$$\beta_1(t_{k+1}) = 0$$
$$\beta_2(t_{k+1}) = 1$$

После подстановки и выражения получаем:

$$u_0^{k+1} = \alpha(t_{k+1})$$
$$u_n^{k+1} = \frac{2h * \beta(t_{k+1}) + 4u_{n-1}^{k+1} - u_{n-2}^{k+1}}{3}$$

Выразим u_i^{k+1} из:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h u_i^k + f_i^k$$
$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2\left(Lu_h u_i^k + f(x_i, t_k)\right)$$

Проведем тестирование на $u = x^3 + t^3$

$$6t = \cos(x)6x + f(x,t)$$
$$f(x,t) = 6t - \cos(x)\,6x$$

$$\alpha(t) = u(0,t) = t^3$$
$$\beta(t) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 3$$
$$\varphi(x) = u(x,0) = x^3$$
$$\psi(x) = \left.\frac{\partial u}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

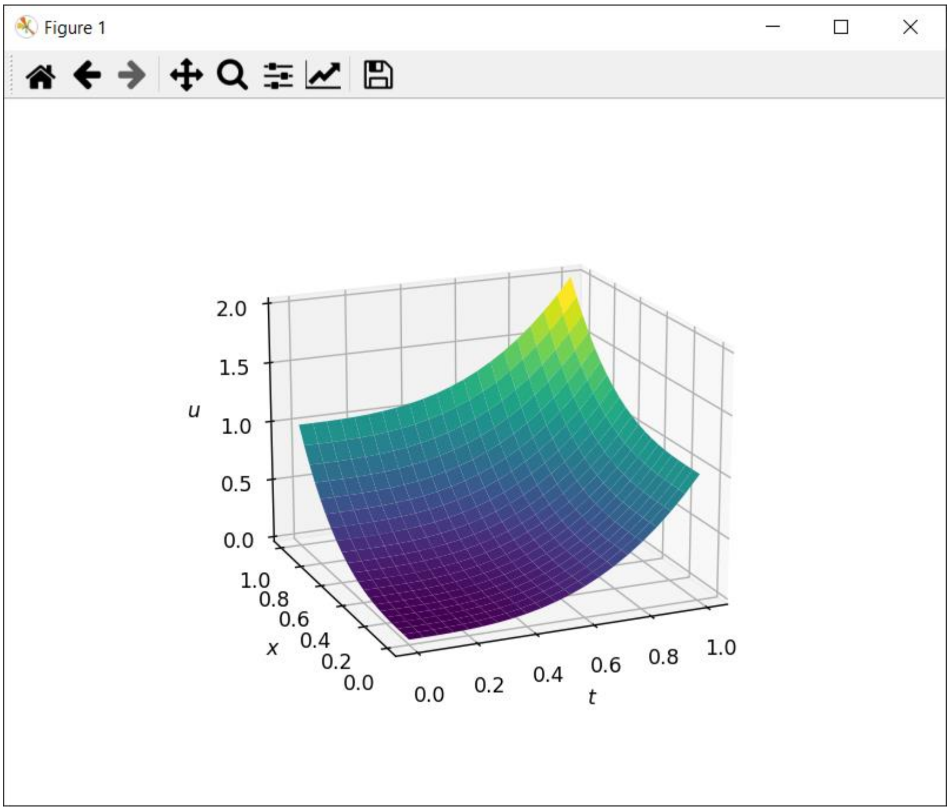

Рис. 1. График функции

x \ t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.0	0.0	0.0	0.125	0.422	1.0
0.25	0.016	0.016	0.109	0.421	1.0
0.5	0.125	0.125	0.219	0.5	1.102
0.75	0.422	0.422	0.516	0.812	1.398
1.0	1.0	1.0	1.115	1.416	1.996

Рис. 2. Аппроксимация при h = t = 0.25

x \ t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.0	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.1	0.001	0.001	0.007	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.2	0.008	0.008	0.014	0.032	0.07	0.131	0.222	0.349	0.518	0.735	1.006
0.3	0.027	0.027	0.033	0.051	0.087	0.149	0.24	0.367	0.536	0.753	1.025
0.4	0.064	0.064	0.07	0.088	0.124	0.184	0.276	0.403	0.572	0.79	1.063
0.5	0.125	0.125	0.131	0.149	0.185	0.245	0.335	0.463	0.633	0.851	1.124
0.6	0.216	0.216	0.222	0.24	0.276	0.336	0.426	0.553	0.724	0.944	1.216
0.7	0.343	0.343	0.349	0.367	0.403	0.463	0.555	0.682	0.852	1.07	1.344
0.8	0.512	0.512	0.518	0.536	0.573	0.634	0.725	0.853	1.023	1.24	1.513
0.9	0.729	0.729	0.735	0.754	0.791	0.853	0.944	1.072	1.242	1.459	1.731
1.0	1.0	1.0	1.007	1.026	1.064	1.126	1.217	1.345	1.515	1.732	2.004

Рис. 3. Аппроксимация при h = t = 0.1

x \ t	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.0	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.05	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.1	0.001	0.001	0.002	0.004	0.009	0.016	0.028	0.044	0.065	0.092	0.126	0.167	0.217	0.275	0.344	0.423	0.513	0.615	0.73	0.858	1.001
0.15	0.003	0.003	0.004	0.006	0.011	0.019	0.03	0.046	0.067	0.094	0.128	0.169	0.219	0.278	0.346	0.425	0.515	0.617	0.732	0.86	1.003
0.2	0.008	0.008	0.009	0.011	0.015	0.023	0.034	0.05	0.071	0.099	0.132	0.174	0.223	0.282	0.35	0.429	0.519	0.622	0.736	0.865	1.008
0.25	0.016	0.016	0.016	0.019	0.023	0.031	0.042	0.058	0.079	0.106	0.14	0.181	0.231	0.29	0.358	0.437	0.527	0.629	0.744	0.873	1.015
0.3	0.027	0.027	0.028	0.03	0.034	0.042	0.053	0.069	0.09	0.117	0.151	0.193	0.242	0.301	0.369	0.448	0.538	0.64	0.755	0.884	1.027
0.35	0.043	0.043	0.044	0.046	0.05	0.058	0.069	0.085	0.106	0.133	0.167	0.208	0.258	0.317	0.385	0.464	0.554	0.656	0.771	0.9	1.043
0.4	0.064	0.064	0.065	0.067	0.072	0.079	0.09	0.106	0.127	0.154	0.188	0.229	0.279	0.338	0.406	0.485	0.575	0.677	0.793	0.921	1.064
0.45	0.091	0.091	0.092	0.094	0.099	0.106	0.117	0.133	0.154	0.181	0.215	0.256	0.306	0.365	0.433	0.512	0.602	0.705	0.82	0.948	1.091
0.5	0.125	0.125	0.126	0.128	0.132	0.14	0.151	0.167	0.188	0.215	0.249	0.29	0.34	0.398	0.467	0.546	0.636	0.739	0.854	0.982	1.125
0.55	0.166	0.166	0.167	0.169	0.174	0.181	0.193	0.208	0.229	0.256	0.29	0.331	0.381	0.44	0.508	0.587	0.678	0.78	0.895	1.024	1.167
0.6	0.216	0.216	0.217	0.219	0.224	0.231	0.242	0.258	0.279	0.306	0.34	0.381	0.431	0.489	0.558	0.637	0.727	0.83	0.945	1.073	1.216
0.65	0.275	0.275	0.275	0.278	0.282	0.29	0.301	0.317	0.338	0.365	0.398	0.44	0.49	0.548	0.617	0.696	0.786	0.889	1.004	1.132	1.275
0.7	0.343	0.343	0.344	0.346	0.351	0.358	0.369	0.385	0.406	0.433	0.467	0.508	0.558	0.617	0.685	0.764	0.855	0.957	1.072	1.201	1.343
0.75	0.422	0.422	0.423	0.425	0.429	0.437	0.448	0.464	0.485	0.512	0.546	0.588	0.637	0.696	0.764	0.843	0.934	1.036	1.151	1.28	1.422
0.8	0.512	0.512	0.513	0.515	0.52	0.527	0.538	0.554	0.575	0.603	0.636	0.678	0.728	0.786	0.855	0.934	1.024	1.126	1.241	1.37	1.513
0.85	0.614	0.614	0.615	0.617	0.622	0.629	0.641	0.656	0.678	0.705	0.739	0.78	0.83	0.889	0.957	1.036	1.126	1.229	1.344	1.472	1.615
0.9	0.729	0.729	0.73	0.732	0.737	0.744	0.756	0.772	0.793	0.82	0.854	0.895	0.945	1.004	1.072	1.151	1.241	1.344	1.459	1.587	1.73
0.95	0.857	0.857	0.858	0.86	0.865	0.873	0.884	0.9	0.921	0.949	0.983	1.024	1.074	1.132	1.201	1.28	1.37	1.472	1.587	1.716	1.858
1.0	1.0	1.0	1.001	1.003	1.008	1.016	1.027	1.043	1.064	1.091	1.125	1.167	1.217	1.275	1.344	1.423	1.513	1.615	1.73	1.859	2.001

Рис. 4. Аппроксимация при h = t = 0.05

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.25	0.01	0.0	0.10697
0.125	0.01	0.08125	0.02572
0.0625	0.01	0.01944	0.00628
0.03125	0.01	0.00479	0.00149

Рис. 5. Точность решения

Явная разностная схема $O(h^2+\tau^2)$

Подставим найденные значения в:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i) + \tau^2/2\left(L\phi(x)|_{x=x_i} + f(x_i,0)\right)$$

$$L\phi(x)|_{x=x_i} = a(x,0)\left.\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}\right|_{x=x_i} + b(x,0)\left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_i} + c(x,0)\phi(x_i)$$

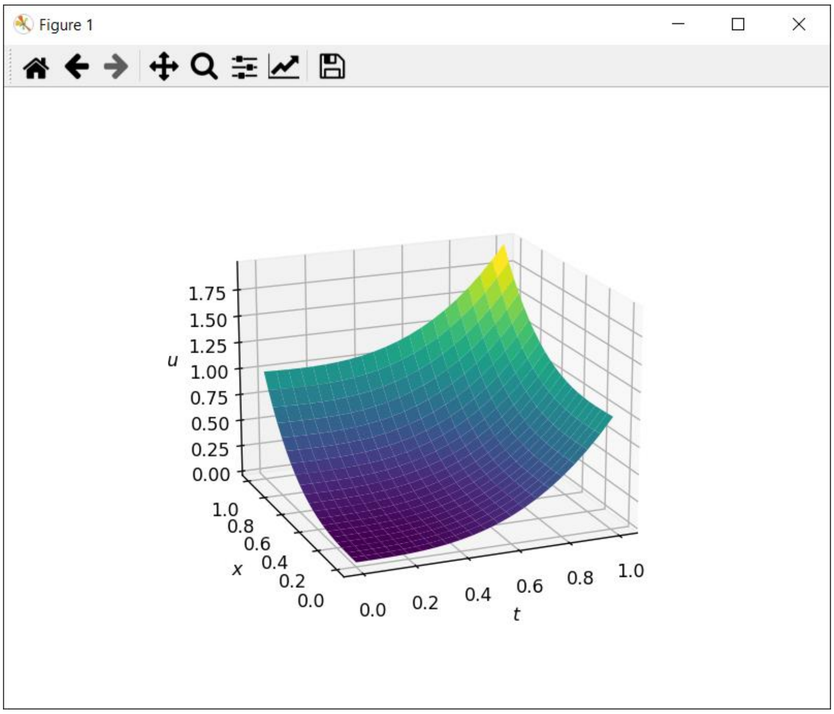

Рис. 6. График функции

x \ t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.0	0.0	0.0	0.125	0.422	1.0
0.25	0.016	0.021	0.1	0.373	0.906
0.5	0.125	0.115	0.176	0.396	0.96
0.75	0.422	0.37	0.406	0.678	1.252
1.0	1.0	0.899	0.983	1.272	1.85

Рис. 7. Аппроксимация при h = t = 0.25

x \ t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.0	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.1	0.001	0.002	0.008	0.028	0.064	0.123	0.212	0.337	0.503	0.717	0.985
0.2	0.008	0.009	0.015	0.033	0.069	0.127	0.214	0.336	0.499	0.711	0.977
0.3	0.027	0.028	0.034	0.051	0.084	0.142	0.227	0.347	0.508	0.717	0.984
0.4	0.064	0.064	0.069	0.085	0.118	0.172	0.256	0.375	0.535	0.746	1.014
0.5	0.125	0.123	0.127	0.142	0.173	0.226	0.308	0.426	0.589	0.801	1.071
0.6	0.216	0.212	0.214	0.227	0.256	0.308	0.39	0.51	0.675	0.89	1.159
0.7	0.343	0.336	0.335	0.346	0.374	0.426	0.511	0.634	0.8	1.015	1.287
0.8	0.512	0.502	0.498	0.506	0.534	0.589	0.676	0.801	0.968	1.185	1.456
0.9	0.729	0.716	0.709	0.717	0.747	0.803	0.891	1.017	1.186	1.403	1.675
1.0	1.0	0.984	0.979	0.988	1.018	1.075	1.163	1.289	1.459	1.676	1.948

Рис. 8. Аппроксимация при h = t = 0.1

x \ t	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.0	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.05	0.0	0.0	0.001	0.004	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.215	0.273	0.341	0.42	0.51	0.611	0.726	0.854	0.996
0.1	0.001	0.001	0.002	0.004	0.009	0.017	0.028	0.044	0.065	0.091	0.125	0.166	0.215	0.273	0.341	0.419	0.508	0.61	0.724	0.851	0.993
0.15	0.003	0.004	0.005	0.007	0.011	0.019	0.03	0.046	0.067	0.093	0.127	0.167	0.216	0.274	0.341	0.419	0.508	0.609	0.723	0.85	0.992
0.2	0.008	0.008	0.009	0.012	0.016	0.024	0.035	0.05	0.071	0.098	0.131	0.171	0.22	0.277	0.344	0.422	0.51	0.611	0.724	0.851	0.993
0.25	0.016	0.016	0.017	0.019	0.024	0.031	0.042	0.058	0.078	0.104	0.137	0.178	0.226	0.283	0.35	0.427	0.515	0.616	0.729	0.856	0.998
0.3	0.027	0.027	0.028	0.03	0.035	0.042	0.053	0.068	0.089	0.115	0.148	0.188	0.236	0.293	0.359	0.436	0.524	0.624	0.738	0.865	1.007
0.35	0.043	0.043	0.044	0.046	0.05	0.058	0.068	0.083	0.104	0.13	0.162	0.202	0.25	0.307	0.373	0.45	0.538	0.638	0.751	0.879	1.02
0.4	0.064	0.064	0.065	0.067	0.071	0.078	0.089	0.104	0.124	0.149	0.182	0.222	0.269	0.326	0.392	0.468	0.557	0.657	0.771	0.898	1.04
0.45	0.091	0.091	0.091	0.093	0.097	0.104	0.115	0.13	0.149	0.175	0.207	0.247	0.294	0.351	0.417	0.494	0.582	0.683	0.796	0.924	1.065
0.5	0.125	0.125	0.125	0.127	0.13	0.137	0.148	0.162	0.182	0.207	0.239	0.278	0.326	0.382	0.449	0.526	0.614	0.715	0.829	0.956	1.098
0.55	0.166	0.166	0.166	0.167	0.171	0.177	0.187	0.202	0.221	0.247	0.278	0.318	0.365	0.422	0.488	0.566	0.654	0.755	0.869	0.997	1.139
0.6	0.216	0.215	0.215	0.216	0.219	0.226	0.235	0.25	0.269	0.294	0.326	0.365	0.413	0.47	0.536	0.614	0.703	0.804	0.918	1.046	1.188
0.65	0.275	0.273	0.273	0.274	0.277	0.283	0.292	0.306	0.325	0.35	0.382	0.422	0.47	0.527	0.594	0.671	0.761	0.862	0.976	1.104	1.246
0.7	0.343	0.341	0.34	0.341	0.344	0.349	0.359	0.372	0.391	0.416	0.448	0.488	0.536	0.594	0.661	0.739	0.828	0.93	1.044	1.172	1.315
0.75	0.422	0.42	0.418	0.419	0.421	0.426	0.435	0.449	0.468	0.493	0.526	0.566	0.614	0.672	0.739	0.817	0.907	1.008	1.123	1.251	1.394
0.8	0.512	0.51	0.508	0.508	0.51	0.515	0.523	0.537	0.556	0.582	0.614	0.654	0.703	0.761	0.829	0.907	0.997	1.098	1.213	1.341	1.484
0.85	0.614	0.611	0.609	0.608	0.61	0.615	0.624	0.638	0.657	0.683	0.715	0.756	0.804	0.862	0.93	1.009	1.099	1.201	1.315	1.444	1.586
0.9	0.729	0.726	0.723	0.722	0.724	0.729	0.738	0.751	0.771	0.797	0.829	0.87	0.919	0.977	1.045	1.123	1.213	1.316	1.43	1.559	1.701
0.95	0.857	0.854	0.851	0.85	0.851	0.856	0.865	0.879	0.899	0.925	0.957	0.998	1.047	1.105	1.173	1.252	1.342	1.444	1.559	1.687	1.83
1.0	1.0	0.996	0.993	0.992	0.994	0.999	1.008	1.022	1.041	1.067	1.1	1.14	1.19	1.248	1.316	1.395	1.485	1.587	1.702	1.83	1.973

Рис. 9. Аппроксимация при h = t = 0.05

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.25	0.01	0.0	0.10292
0.125	0.01	0.0824	0.02052
0.0625	0.01	0.01979	0.00311
0.03125	0.01	0.00489	0.00486

Рис. 10. Точность решения

Схема с весами

Найдем начальные условия:

$$u_i^0 = \phi(x)$$
$$u_i^1 = \psi(x)\tau + u_i^0$$

Найдем граничные условия:

$$\alpha_1(t_{k+1})u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} = \alpha(t_{k+1})$$
$$\beta_1(t_{k+1})u_n^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} = \beta(t_{k+1})$$

$$u_0^{k+1} = \alpha(t_{k+1})$$
$$\frac{u_n^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} = \frac{u_n^{k+1}}{h} - \frac{u_{n-1}^{k+1}}{h} = \beta(t_{k+1})$$

Найдем коэффициенты системы, решив которую можно получить решения на последующих слоях:

$$\sigma L_h u_i^{k+1} - \frac{1}{\tau^2}u_i^{k+1} = G_i^{k+1}$$
$$\sigma\cos(x)\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2} - \frac{1}{\tau^2}u_i^{k+1} = G_i^{k+1}$$
$$u_{i-1}^{k+1}\frac{\sigma\cos(x)}{h^2} - u_i^{k+1}\left(\frac{2\sigma\cos(x)}{h^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) + u_{i+1}^{k+1}\frac{\sigma\cos(x)}{h^2} = G_i^{k+1}$$

Имея:

$$G_i^{k+1} = \frac{-2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} - (1-2\sigma)L_h u_i^{k-1} - \sigma L_h u_i^{k-1} - f(x_i, t_k)$$

Составим систему:

$$\begin{matrix} 0 & u_0^{k+1} & 0 & & \alpha(t_{k+1}) \\ & \dots & & & \dots \\ u_{i-1}^{k+1}\dfrac{\sigma\cos(x)}{h^2} & -u_i^{k+1}\left(\dfrac{2\sigma\cos(x)}{h^2} + \dfrac{1}{\tau^2}\right) & u_{i+1}^{k+1}\dfrac{\sigma\cos(x)}{h^2} & = & G_i^{k+1} \\ & \dots & & & \dots \\ -\dfrac{u_{N-1}^{k+1}}{h} & \dfrac{u_N^{k+1}}{h} & 0 & & \beta(t_{k+1}) \end{matrix}$$

Найдем результат для $\sigma = 0$:

x \ t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.0	0.0	0.0	0.125	0.422	1.0
0.25	0.016	0.016	0.109	0.421	1.0
0.5	0.125	0.125	0.219	0.5	1.199
0.75	0.422	0.422	0.516	0.923	1.645
1.0	1.0	1.0	1.266	1.673	2.395

Рис. 11. Аппроксимация при h = t = 0.25

x \ t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.0	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.1	0.001	0.001	0.007	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.2	0.008	0.008	0.014	0.032	0.07	0.131	0.222	0.349	0.518	0.735	1.012
0.3	0.027	0.027	0.033	0.051	0.087	0.149	0.24	0.367	0.536	0.759	1.05
0.4	0.064	0.064	0.07	0.088	0.124	0.184	0.276	0.403	0.578	0.816	1.115
0.5	0.125	0.125	0.131	0.149	0.185	0.245	0.335	0.469	0.66	0.905	1.203
0.6	0.216	0.216	0.222	0.24	0.276	0.336	0.434	0.582	0.78	1.023	1.318
0.7	0.343	0.343	0.349	0.367	0.403	0.473	0.586	0.74	0.932	1.174	1.472
0.8	0.512	0.512	0.518	0.536	0.585	0.669	0.785	0.935	1.128	1.37	1.667
0.9	0.729	0.729	0.735	0.771	0.832	0.916	1.03	1.181	1.374	1.615	1.912
1.0	1.0	1.0	1.035	1.071	1.132	1.216	1.33	1.481	1.674	1.915	2.212

Рис. 12. Аппроксимация при h = t = 0.1

x \ t	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.0	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.05	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.1	0.001	0.001	0.002	0.004	0.009	0.016	0.028	0.044	0.065	0.092	0.126	0.167	0.217	0.275	0.344	0.423	0.513	0.615	0.73	0.858	1.001
0.15	0.003	0.003	0.004	0.006	0.011	0.019	0.03	0.046	0.067	0.094	0.128	0.169	0.219	0.278	0.346	0.425	0.515	0.617	0.732	0.861	1.005
0.2	0.008	0.008	0.009	0.011	0.015	0.023	0.034	0.05	0.071	0.099	0.132	0.174	0.223	0.282	0.35	0.429	0.519	0.622	0.737	0.867	1.014
0.25	0.016	0.016	0.016	0.019	0.023	0.031	0.042	0.058	0.079	0.106	0.14	0.181	0.231	0.29	0.358	0.437	0.527	0.629	0.746	0.879	1.028
0.3	0.027	0.027	0.028	0.03	0.034	0.042	0.053	0.069	0.09	0.117	0.151	0.193	0.242	0.301	0.369	0.448	0.538	0.642	0.761	0.897	1.047
0.35	0.043	0.043	0.044	0.046	0.05	0.058	0.069	0.085	0.106	0.133	0.167	0.208	0.258	0.317	0.385	0.464	0.556	0.663	0.784	0.92	1.069
0.4	0.064	0.064	0.065	0.067	0.072	0.079	0.09	0.106	0.127	0.154	0.188	0.229	0.279	0.338	0.406	0.487	0.582	0.691	0.813	0.947	1.096
0.45	0.091	0.091	0.092	0.094	0.099	0.106	0.117	0.133	0.154	0.181	0.215	0.256	0.306	0.365	0.435	0.519	0.616	0.725	0.846	0.981	1.13
0.5	0.125	0.125	0.126	0.128	0.132	0.14	0.151	0.167	0.188	0.215	0.249	0.29	0.34	0.401	0.474	0.56	0.657	0.765	0.886	1.021	1.171
0.55	0.166	0.166	0.167	0.169	0.174	0.181	0.193	0.208	0.229	0.256	0.29	0.332	0.383	0.447	0.523	0.609	0.705	0.813	0.934	1.069	1.218
0.6	0.216	0.216	0.217	0.219	0.223	0.231	0.242	0.258	0.279	0.306	0.34	0.384	0.439	0.504	0.58	0.664	0.761	0.869	0.991	1.126	1.275
0.65	0.275	0.275	0.275	0.278	0.282	0.29	0.301	0.317	0.338	0.365	0.402	0.449	0.505	0.57	0.644	0.729	0.826	0.935	1.056	1.191	1.34
0.7	0.343	0.343	0.344	0.346	0.351	0.358	0.369	0.385	0.407	0.437	0.477	0.525	0.581	0.645	0.719	0.805	0.901	1.01	1.131	1.266	1.415
0.75	0.422	0.422	0.423	0.425	0.429	0.437	0.448	0.465	0.489	0.523	0.563	0.611	0.666	0.731	0.806	0.891	0.987	1.096	1.217	1.352	1.501
0.8	0.512	0.512	0.513	0.515	0.52	0.527	0.539	0.559	0.587	0.621	0.66	0.707	0.763	0.828	0.903	0.988	1.084	1.193	1.314	1.449	1.598
0.85	0.614	0.614	0.615	0.617	0.622	0.631	0.647	0.67	0.697	0.729	0.769	0.817	0.872	0.937	1.012	1.097	1.193	1.302	1.423	1.558	1.707
0.9	0.729	0.729	0.73	0.732	0.739	0.752	0.77	0.792	0.818	0.852	0.891	0.939	0.994	1.059	1.134	1.219	1.315	1.424	1.545	1.68	1.829
0.95	0.857	0.857	0.858	0.865	0.875	0.889	0.906	0.927	0.954	0.987	1.027	1.074	1.13	1.195	1.269	1.355	1.451	1.56	1.681	1.816	1.965
1.0	1.0	1.0	1.008	1.015	1.025	1.039	1.056	1.077	1.104	1.137	1.177	1.224	1.28	1.345	1.419	1.505	1.601	1.71	1.831	1.966	2.115

Рис. 13. Аппроксимация при h = t = 0.05

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.2	0.01	0.0	0.53734
0.1	0.01	0.28011	0.25723
0.05	0.01	0.13188	0.12535
0.025	0.01	0.06358	0.06177

Рис. 14. Точность решения

Найдем результат для $\sigma = 0.5$:

x \ t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.0	0.0	0.0	0.125	0.422	1.0
0.25	0.016	0.016	0.121	0.427	1.041
0.5	0.125	0.125	0.233	0.555	1.207
0.75	0.422	0.422	0.565	0.931	1.64
1.0	1.0	1.0	1.315	1.681	2.39

Рис. 15. Аппроксимация при h = t = 0.25

x \ t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.0	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.1	0.001	0.001	0.008	0.026	0.064	0.125	0.216	0.343	0.513	0.732	1.006
0.2	0.008	0.008	0.014	0.033	0.069	0.131	0.222	0.35	0.521	0.742	1.02
0.3	0.027	0.027	0.033	0.051	0.088	0.149	0.241	0.37	0.543	0.768	1.052
0.4	0.064	0.064	0.07	0.088	0.124	0.186	0.278	0.409	0.587	0.817	1.108
0.5	0.125	0.125	0.131	0.149	0.186	0.248	0.342	0.477	0.66	0.898	1.196
0.6	0.216	0.216	0.222	0.241	0.278	0.342	0.441	0.582	0.773	1.016	1.317
0.7	0.343	0.343	0.349	0.369	0.409	0.479	0.585	0.734	0.93	1.175	1.474
0.8	0.512	0.512	0.52	0.542	0.589	0.667	0.781	0.935	1.13	1.373	1.668
0.9	0.729	0.729	0.742	0.772	0.829	0.915	1.031	1.182	1.374	1.615	1.912
1.0	1.0	1.0	1.042	1.072	1.129	1.215	1.331	1.482	1.674	1.915	2.212

Рис. 16. Аппроксимация при h = t = 0.1

x \ t	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.0	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.05	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.858	1.001
0.1	0.001	0.001	0.002	0.004	0.009	0.016	0.028	0.044	0.065	0.092	0.126	0.167	0.217	0.275	0.344	0.423	0.513	0.615	0.731	0.86	1.003
0.15	0.003	0.003	0.004	0.006	0.011	0.019	0.03	0.046	0.067	0.094	0.128	0.169	0.219	0.278	0.346	0.425	0.515	0.618	0.733	0.863	1.008
0.2	0.008	0.008	0.009	0.011	0.016	0.023	0.034	0.05	0.071	0.099	0.133	0.174	0.224	0.282	0.351	0.43	0.52	0.623	0.739	0.869	1.015
0.25	0.016	0.016	0.016	0.019	0.023	0.031	0.042	0.058	0.079	0.106	0.14	0.181	0.231	0.29	0.358	0.438	0.528	0.632	0.749	0.88	1.027
0.3	0.027	0.027	0.028	0.03	0.035	0.042	0.053	0.069	0.09	0.117	0.151	0.193	0.242	0.301	0.37	0.449	0.541	0.645	0.763	0.895	1.044
0.35	0.043	0.043	0.044	0.046	0.05	0.058	0.069	0.085	0.106	0.133	0.167	0.208	0.258	0.317	0.386	0.466	0.558	0.664	0.783	0.917	1.066
0.4	0.064	0.064	0.065	0.067	0.072	0.079	0.09	0.106	0.127	0.154	0.188	0.23	0.28	0.339	0.408	0.489	0.583	0.689	0.81	0.945	1.095
0.45	0.091	0.091	0.092	0.094	0.099	0.106	0.117	0.133	0.154	0.181	0.215	0.257	0.307	0.367	0.437	0.52	0.614	0.722	0.844	0.98	1.13
0.5	0.125	0.125	0.126	0.128	0.133	0.14	0.151	0.167	0.188	0.215	0.249	0.291	0.342	0.403	0.474	0.558	0.654	0.763	0.886	1.022	1.172
0.55	0.166	0.166	0.167	0.169	0.174	0.181	0.193	0.208	0.23	0.257	0.291	0.334	0.386	0.448	0.521	0.606	0.703	0.813	0.935	1.071	1.219
0.6	0.216	0.216	0.217	0.219	0.224	0.231	0.242	0.258	0.279	0.307	0.342	0.386	0.439	0.502	0.577	0.663	0.761	0.87	0.992	1.126	1.275
0.65	0.275	0.275	0.275	0.278	0.282	0.29	0.301	0.317	0.339	0.367	0.403	0.448	0.503	0.568	0.644	0.73	0.827	0.936	1.056	1.191	1.34
0.7	0.343	0.343	0.344	0.346	0.351	0.358	0.37	0.386	0.409	0.438	0.476	0.523	0.579	0.645	0.72	0.806	0.902	1.01	1.131	1.266	1.415
0.75	0.422	0.422	0.423	0.425	0.43	0.437	0.449	0.467	0.49	0.522	0.561	0.609	0.666	0.732	0.806	0.891	0.987	1.095	1.217	1.352	1.501
0.8	0.512	0.512	0.513	0.515	0.52	0.528	0.541	0.56	0.586	0.619	0.66	0.708	0.764	0.829	0.903	0.987	1.084	1.193	1.314	1.449	1.598
0.85	0.614	0.614	0.615	0.618	0.623	0.632	0.647	0.668	0.696	0.729	0.77	0.817	0.873	0.937	1.011	1.097	1.194	1.302	1.423	1.558	1.707
0.9	0.729	0.729	0.73	0.733	0.74	0.752	0.769	0.791	0.819	0.852	0.892	0.939	0.994	1.059	1.134	1.219	1.316	1.424	1.545	1.68	1.829
0.95	0.857	0.857	0.86	0.865	0.875	0.888	0.906	0.927	0.954	0.987	1.027	1.074	1.13	1.195	1.27	1.355	1.451	1.56	1.681	1.816	1.965
1.0	1.0	1.0	1.01	1.015	1.025	1.038	1.056	1.077	1.104	1.137	1.177	1.224	1.28	1.345	1.42	1.505	1.601	1.71	1.831	1.966	2.115

Рис. 17. Аппроксимация при h = t = 0.05

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}}||
0.2	0.01	0.0	0.53734
0.1	0.01	0.28012	0.25722
0.05	0.01	0.13187	0.12535
0.025	0.01	0.06358	0.06177

Рис. 18. Точность решения

Найдем результат для $\sigma = 0.25$:

x \ t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
0.0	0.0	0.0	0.125	0.422	1.0
0.25	0.016	0.016	0.115	0.42	1.033
0.5	0.125	0.125	0.224	0.538	1.195
0.75	0.422	0.422	0.543	0.922	1.644
1.0	1.0	1.0	1.293	1.672	2.394

Рис. 19. Аппроксимация при h = t = 0.25

x \ t	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.0	0.0	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1.0
0.1	0.001	0.001	0.007	0.026	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.731	1.004
0.2	0.008	0.008	0.014	0.032	0.069	0.131	0.222	0.35	0.52	0.74	1.018
0.3	0.027	0.027	0.033	0.051	0.087	0.148	0.24	0.369	0.541	0.765	1.05
0.4	0.064	0.064	0.07	0.088	0.124	0.185	0.277	0.407	0.584	0.815	1.109
0.5	0.125	0.125	0.131	0.149	0.185	0.246	0.34	0.474	0.658	0.899	1.2
0.6	0.216	0.216	0.222	0.24	0.277	0.34	0.438	0.581	0.774	1.02	1.321
0.7	0.343	0.343	0.349	0.368	0.407	0.476	0.584	0.735	0.933	1.177	1.472
0.8	0.512	0.512	0.519	0.54	0.587	0.667	0.783	0.937	1.13	1.37	1.666
0.9	0.729	0.729	0.739	0.771	0.83	0.916	1.031	1.181	1.374	1.616	1.912
1.0	1.0	1.0	1.039	1.071	1.13	1.216	1.331	1.481	1.674	1.916	2.212

Рис. 20. Аппроксимация при h = t = 0.1

x \ t	0.0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0
0.0	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.857	1.0
0.05	0.0	0.0	0.001	0.003	0.008	0.016	0.027	0.043	0.064	0.091	0.125	0.166	0.216	0.275	0.343	0.422	0.512	0.614	0.729	0.858	1.001
0.1	0.001	0.001	0.002	0.004	0.009	0.016	0.028	0.044	0.065	0.092	0.126	0.167	0.217	0.275	0.344	0.423	0.513	0.615	0.73	0.859	1.003
0.15	0.003	0.003	0.004	0.006	0.011	0.019	0.03	0.046	0.067	0.094	0.128	0.169	0.219	0.278	0.346	0.425	0.515	0.617	0.733	0.862	1.007
0.2	0.008	0.008	0.009	0.011	0.016	0.023	0.034	0.05	0.072	0.099	0.133	0.174	0.223	0.282	0.351	0.429	0.52	0.622	0.738	0.869	1.014
0.25	0.016	0.016	0.016	0.019	0.023	0.031	0.042	0.058	0.079	0.106	0.14	0.181	0.231	0.29	0.358	0.437	0.528	0.631	0.748	0.879	1.026
0.3	0.027	0.027	0.028	0.03	0.035	0.042	0.053	0.069	0.09	0.117	0.151	0.193	0.242	0.301	0.37	0.449	0.54	0.644	0.762	0.895	1.044
0.35	0.043	0.043	0.044	0.046	0.05	0.058	0.069	0.085	0.106	0.133	0.167	0.208	0.258	0.317	0.386	0.466	0.558	0.663	0.783	0.917	1.068
0.4	0.064	0.064	0.065	0.067	0.072	0.079	0.09	0.106	0.127	0.154	0.188	0.229	0.279	0.338	0.408	0.489	0.582	0.689	0.81	0.946	1.097
0.45	0.091	0.091	0.092	0.094	0.099	0.106	0.117	0.133	0.154	0.181	0.215	0.257	0.307	0.366	0.437	0.519	0.614	0.723	0.845	0.981	1.131
0.5	0.125	0.125	0.126	0.128	0.133	0.14	0.151	0.167	0.188	0.215	0.249	0.291	0.341	0.402	0.474	0.558	0.655	0.765	0.887	1.022	1.171
0.55	0.166	0.166	0.167	0.169	0.174	0.181	0.193	0.208	0.229	0.257	0.291	0.333	0.385	0.447	0.521	0.607	0.704	0.814	0.935	1.07	1.218
0.6	0.216	0.216	0.217	0.219	0.224	0.231	0.242	0.258	0.279	0.307	0.342	0.385	0.438	0.503	0.578	0.664	0.762	0.87	0.991	1.125	1.274
0.65	0.275	0.275	0.275	0.278	0.282	0.29	0.301	0.317	0.338	0.366	0.403	0.448	0.503	0.569	0.645	0.73	0.827	0.934	1.056	1.191	1.341
0.7	0.343	0.343	0.344	0.346	0.351	0.358	0.369	0.386	0.408	0.438	0.476	0.523	0.58	0.646	0.72	0.805	0.901	1.009	1.131	1.266	1.416
0.75	0.422	0.422	0.423	0.425	0.429	0.437	0.449	0.466	0.49	0.522	0.562	0.61	0.667	0.731	0.805	0.89	0.987	1.096	1.217	1.352	1.501
0.8	0.512	0.512	0.513	0.515	0.52	0.528	0.541	0.56	0.586	0.62	0.66	0.708	0.763	0.828	0.902	0.988	1.084	1.193	1.314	1.449	1.598
0.85	0.614	0.614	0.615	0.617	0.622	0.632	0.647	0.668	0.696	0.73	0.77	0.817	0.872	0.937	1.012	1.097	1.193	1.302	1.423	1.558	1.707
0.9	0.729	0.729	0.73	0.733	0.74	0.752	0.769	0.792	0.819	0.852	0.891	0.939	0.995	1.059	1.134	1.219	1.315	1.424	1.545	1.68	1.829
0.95	0.857	0.857	0.859	0.865	0.875	0.889	0.906	0.927	0.954	0.987	1.027	1.075	1.13	1.195	1.27	1.355	1.451	1.56	1.681	1.816	1.965
1.0	1.0	1.0	1.009	1.015	1.025	1.039	1.056	1.077	1.104	1.137	1.177	1.225	1.28	1.345	1.42	1.505	1.601	1.71	1.831	1.966	2.115

Рис. 21. Аппроксимация при h = t = 0.05

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.2	0.01	0.0	0.53734
0.1	0.01	0.28011	0.25722
0.05	0.01	0.13188	0.12535
0.025	0.01	0.06358	0.06177

Рис. 22. Точность решения

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы были получены практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов численного или приближенно-аналитического решения ДУЧП2 гиперболического типа на основе сравнения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Листинг:

Task_1.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from prettytable import PrettyTable

def f(x, t):
    return 6*t - np.cos(x)*6*x

def lu(u: np.array, x: np.linspace, t: np.linspace,
       i, k, h):
    return np.cos(x[i]) * (u[i + 1, k] - 2 * u[i, k] + u[i - 1, k]) / pow(h, 2)

def solve(h, tau):
    x_min = 0
    x_max = 1
    xs = np.arange(x_min, x_max + h, h)
    n_x = len(xs)

    t_min = 0
    t_max = 1
    ts = np.arange(t_min, t_max + tau, tau)
    n_t = len(ts)

    phi = lambda x: x**3
    psi = lambda x: 0
    alpha = lambda t: t**3
    beta = lambda t: 3

    U = np.zeros((n_x, n_t))
    U[:, 0] = [phi(x) for x in xs]
    U[:, 1] = [tau * psi(x) + phi(x) for x in xs]

    for k in range(1, n_t - 1):
        for i in range(1, n_x - 1):
            U[i, k + 1] = 2*U[i, k] - U[i, k - 1] + \
                tau**2*(lu(U, xs, ts, i, k, h) + f(xs[i], ts[k]))

        U[0, k + 1] = alpha(ts[k+1])
        U[-1, k + 1] = (2*h*beta(ts[k+1]) + 4*U[-2, k+1] - U[-3, k+1]) / 3

    return [xs, ts, U]

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(3)
    xs = xs.round(3)
    U = U.round(3)
    table.add_column("x \ t", xs)
```

```python
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

h = 0.25
tau = 0.01

[xs, ts, U] = solve(h, tau)

print("Результат:")
print(makeTableFromResult(xs, ts, U))

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)
ax.plot_surface(X, Y, U, rstride=1, cstride=1,
    cmap='viridis', edgecolor='none')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_ylabel('$x$')
ax.set_zlabel('$u$')
plt.show()

def makeTableFromStep(hs, taus, diff, exact_diff):
    table = PrettyTable()
    table.add_column("h", hs)
    table.add_column("tau", taus)
    table.add_column("||U_{exact}-U_{h}||", diff)
    table.add_column("||U_{2h}-U_{h}}||", exact_diff)
    return table

hs = []
taus = []
exact_diff = []
last_diff = []

[_, _, last_u] = solve(h, tau)
last_u = last_u[0::2]

for i in range(4):
    [xs, ts, U] = solve(h, tau)

    u = lambda t, x: x**3 + t**3
    U_exact = np.array([[u(t, x) for t in ts] for x in xs])

    hs.append(h)
    taus.append(tau)
    exact_diff.append(np.amax(np.abs(U - U_exact)))
    last_diff.append(np.amax(np.abs(last_u - U[0::2])))

    h /= 2
    last_u = U
```

```
hs = np.array(hs).round(5)
taus = np.array(taus).round(5)
exact_diff = np.array(exact_diff).round(5)
last_diff = np.array(last_diff).round(5)

print(makeTableFromStep(hs, taus, last_diff, exact_diff))
```

Task_2.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import approximate_taylor_polynomial
from prettytable import PrettyTable

def f(x, t):
    return 6*t - np.cos(x)*6*x

def lu(u: np.array, x: np.linspace, t: np.linspace,
       i, k, h):
    return np.cos(x[i]) * (u[i + 1, k] - 2 * u[i, k] + u[i - 1, k]) / pow(h, 2)

def lphi(phi, x):
    return approximate_taylor_polynomial(phi, 0, 2, 1)(x)

def solve(h, tau):
    x_min = 0
    x_max = 1
    xs = np.arange(x_min, x_max + h, h)
    n_x = len(xs)

    t_min = 0
    t_max = 1
    ts = np.arange(t_min, t_max + tau, tau)
    n_t = len(ts)

    phi = lambda x: x**3
    psi = lambda x: 0
    alpha = lambda t: t**3
    beta = lambda t: 3

    U = np.zeros((n_x, n_t))
    U[:, 0] = [phi(x) for x in xs]
    U[:, 1] = [tau * psi(x) + phi(x) + tau**2 / 2 * (lphi(phi, x) * f(x, 0)) for
x in xs]

    for k in range(1, n_t - 1):
        for i in range(1, n_x - 1):
            U[i, k + 1] = 2*U[i, k] - U[i, k - 1] + \
                tau**2*(lu(U, xs, ts, i, k, h) + f(xs[i], ts[k]))

        U[0, k + 1] = alpha(ts[k+1])
        U[-1, k + 1] = (2*h*beta(ts[k+1]) + 4*U[-2, k+1] - U[-3, k+1]) / 3
```

```python
    return [xs, ts, U]

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(3)
    xs = xs.round(3)
    U = U.round(3)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

h = 0.25
tau = 0.01

[xs, ts, U] = solve(h, tau)

print("Результат:")
print(makeTableFromResult(xs, ts, U))

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)
ax.plot_surface(X, Y, U, rstride=1, cstride=1,
    cmap='viridis', edgecolor='none')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_ylabel('$x$')
ax.set_zlabel('$u$')
plt.show()

def makeTableFromStep(hs, taus, diff, exact_diff):
    table = PrettyTable()
    table.add_column("h", hs)
    table.add_column("tau", taus)
    table.add_column("||U_{exact}-U_{h}||", diff)
    table.add_column("||U_{2h}-U_{h}}||", exact_diff)
    return table

hs = []
taus = []
exact_diff = []
last_diff = []

[_, _, last_u] = solve(h, tau)
last_u = last_u[0::2]

for i in range(4):
    [xs, ts, U] = solve(h, tau)

    u = lambda t, x: x**3 + t**3
    U_exact = np.array([[u(t, x) for t in ts] for x in xs])
```

```
        hs.append(h)
        taus.append(tau)
        exact_diff.append(np.amax(np.abs(U - U_exact)))
        last_diff.append(np.amax(np.abs(last_u - U[0::2])))

        h /= 2
        last_u = U

hs = np.array(hs).round(5)
taus = np.array(taus).round(5)
exact_diff = np.array(exact_diff).round(5)
last_diff = np.array(last_diff).round(5)

print(makeTableFromStep(hs, taus, last_diff, exact_diff))
```

Task_3.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d
import scipy.linalg as la
from prettytable import PrettyTable

def f(x, t):
    return 6*t - np.cos(x)*6*x

def lu(u: np.array, x: np.linspace, t: np.linspace,
       i, k, h):
    return np.cos(x[i]) * (u[i + 1, k] - 2 * u[i, k] + u[i - 1, k]) / pow(h, 2)

def solve(h, tau, sigma):
    x_min = 0
    x_max = 1
    xs = np.arange(x_min, x_max + h, h)
    n_x = len(xs)

    t_min = 0
    t_max = 1
    ts = np.arange(t_min, t_max + tau, tau)
    n_t = len(ts)

    phi = lambda x: x**3
    psi = lambda x: 0
    alpha = lambda t: t**3
    beta = lambda t: 3

    U = np.zeros((n_x, n_t))
    G = np.zeros((n_x, n_t))
    U[:, 0] = [phi(x) for x in xs]
    U[:, 1] = [tau * psi(x) + phi(x) for x in xs]
    A = np.zeros((n_x - 1))
```

```python
    B = np.zeros((n_x))
    C = np.zeros((n_x - 1))

    for k in range(1, n_t - 1):
        for i in range(1, n_x - 1):
            G[i, k + 1] = (-2 * U[i, k] + U[i, k - 1]) / tau**2 \
                - (1 - 2 * sigma) * lu(U, xs, ts, i, k, h) \
                - sigma * lu(U, xs, ts, i, k - 1, h) \
                - f(xs[i], ts[k])
            A[i - 1] = sigma * np.cos(xs[i]) / h**2
            B[i] = -(2*sigma*np.cos(xs[i]) / h**2 + 1 / tau**2)
            C[i] = sigma * np.cos(xs[i]) / h**2

        B[0] = 1
        C[0] = 0
        A[-1] = -1 / h
        B[-1] = 1 / h

        G[0, k + 1] = alpha(ts[k+1])
        G[-1, k + 1] = beta(ts[k+1])

        matrix = np.array([[0, *C], B, [*A, 0]])

        U[:, k + 1] = la.solve_banded((1,1), matrix, G[:, k + 1])

    return [xs, ts, U]

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(4)
    xs = xs.round(4)
    U = U.round(5)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

h = 0.2
tau = 0.01
sigma = 0.25

[xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)
ax.plot_surface(X, Y, U, rstride=1, cstride=1,
    cmap='viridis', edgecolor='none')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_ylabel('$x$')
ax.set_zlabel('$u$')
plt.show()
```

```
def makeTableFromStep(hs, taus, diff, exact_diff):
    table = PrettyTable()
    table.add_column("h", hs)
    table.add_column("tau", taus)
    table.add_column("||U_{exact}-U_{h}||", diff)
    table.add_column("||U_{2h}-U_{h}}||", exact_diff)
    return table

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(3)
    xs = xs.round(3)
    U = U.round(3)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

[xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

print("Результат:")
print(makeTableFromResult(xs, ts, U))

hs = []
taus = []
exact_diff = []
last_diff = []

[_, _, last_u] = solve(h, tau, sigma)
last_u = last_u[0::2]

for i in range(4):
    [xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

    u = lambda t, x: x**3 + t**3
    U_exact = np.array([[u(t, x) for t in ts] for x in xs])

    hs.append(h)
    taus.append(tau)
    exact_diff.append(np.amax(np.abs(U - U_exact)))
    last_diff.append(np.amax(np.abs(last_u - U[0::2])))

    h /= 2
    last_u = U

hs = np.array(hs).round(5)
taus = np.array(taus).round(5)
exact_diff = np.array(exact_diff).round(5)
last_diff = np.array(last_diff).round(5)

print(makeTableFromStep(hs, taus, last_diff, exact_diff))
```