Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

«Метод сеток для решения уравнения параболического типа»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б _________________ (Карельский М.К.)
(Подпись)

Проверил: _________________ (Никитенко У.В.)
(Подпись)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель: сформировать практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов численного или приближенно-аналитического решения ДУЧП2 параболического типа на основе сравнения результатов.

Задачи: решить уравнение, указанное в варианте методом аппроксимации дифференциального оператора, выбрать среду для проведения расчетов и вычислительного эксперимента. Написать программу, реализующую решение задачи. Оценить результаты расчетов. Визуализировать результаты.

Задание:

Найти решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), 0 < t \leq 0.1$$
$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1$$
$$\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = \alpha(t), 0 \leq t \leq 0.1$$
$$\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=1} = \beta(t), 0 \leq t \leq 0.1$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2+\tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами порядка при σ = 0, σ = 1, σ = 1/2 с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$.

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий

1) Алгоритм решения задачи.
2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x,t) = x^3 + t^3$, $u(x,t) = x^3 t^3$, $\sin(2t+1)\cos(2x)$, $\sin(2t+1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
4) Таблицы решения на «крупной» сетке независимо от шагов по t и x, с которыми строится решение (N = 5, 10, 20)
5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость

Вариант 9

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x\, u + f(x,t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t)-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha(t), u(1,t)+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=\beta(t), 0\le t\le 0.1$$

Решение:

Явная разностная схема $\boldsymbol{O(h^2+\tau)}$

Аппроксимируем данное уравнение в узле (x_i, t_k):

$$\frac{u_i^k-u_i^{k-1}}{\tau}=L_h u_i^{k-1}+f_i^{k-1}$$

$L_h u_i^k$ имеет вид:

$$L_h u_i^k=a(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h^2}+b(x_i,t_k)\frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h}+c(x_i,t_k)u_i^k$$

В случае данного уравнения:

$$a(x_i,t_k)=1$$
$$b(x_i,t_k)=0$$
$$c(x_i,t_k)=-\sin x_i$$

После подстановки получаем:

$$\frac{u_i^k-u_i^{k-1}}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{k-1}-2u_i^{k-1}+u_{i-1}^{k-1}}{h^2}-u_i^{k-1}\sin x_i+f_i^{k-1}$$

Найдем начальные условия:

$$u_i^0=\varphi(x_i)$$

$$\frac{u_i^k-u_i^{k-1}}{\tau}=L_h u_i^{k-1}+f_i^{k-1}$$
$$u_i^k=u_i^{k-1}+\tau\left(L_h u_i^{k-1}+f_i^{k-1}\right)$$

Найдем граничные условия:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k-\alpha_2(t_k)\frac{-3u_0^k+4u_1^k-u_2^k}{2h}=\alpha(t_k)$$
$$\beta_1(t_k)u_n^k+\beta_2(t_k)\frac{3u_n^k-4u_{n-1}^k+u_{n-2}^k}{2h}=\beta(t_k)$$

Найдем нужные функции из условия:

$$\alpha_1(t)u(0,t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t)$$
$$\beta_1(t)u(1,t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta(t)$$

$$\alpha_1(t_k) = 1$$
$$\alpha_2(t_k) = 1$$
$$\beta_1(t_k) = 1$$
$$\beta_2(t_k) = 1$$

После подстановки и выражения получаем:

$$u_0^k - \frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k)$$
$$u_0^k = \frac{2h\alpha(t_k) - 4u_1^k + u_2^k}{2h + 3}$$

$$u_n^k + \frac{3u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{2h} = \beta(t_k)$$
$$u_n^k = \frac{2h\beta(t_k) + 4u_{n-1}^k - u_{n-2}^k}{2h + 3}$$

Проведем тестирование на $u = x^2 + t$

$$1 = 2 - (x^2 + t)\sin x + f(x,t)$$
$$f(x,t) = (x^2 + t)\sin x - 1$$

$$\alpha(t) = u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t$$
$$\beta(t) = u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 1 + t + 2 = t + 3$$
$$\varphi(x) = u(x,0) = x^2$$

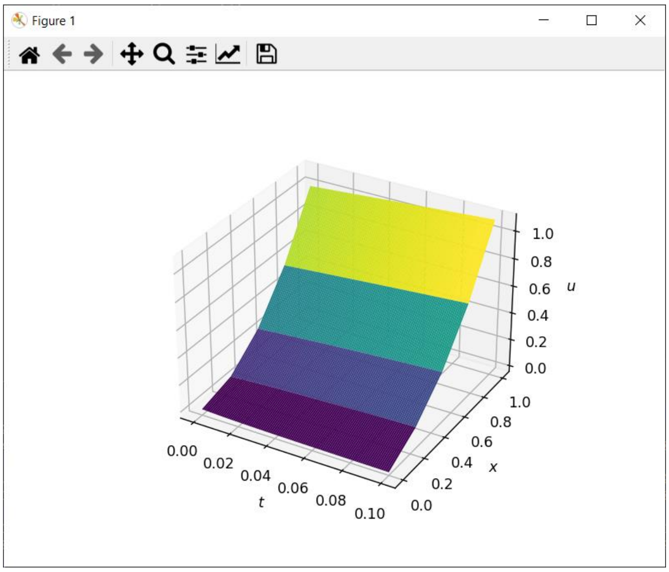

Рис. 1. График функции

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.25	0.001	0.0	0.0
0.125	0.001	0.0	0.0
0.0625	0.001	0.0	0.0

Рис. 2. Точность решения

Проведем тестирование на $u = x^3 + t^3$

$$3t^2 = 6x - (x^3 + t^3)\sin x + f(x,t)$$
$$f(x,t) = 3t^2 - 6x + (x^3 + t^3)\sin x$$

$$\alpha(t) = u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^3$$
$$\beta(t) = u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 1 + t^3 + 3 = t^3 + 4$$
$$\varphi(x) = u(x,0) = x^3$$

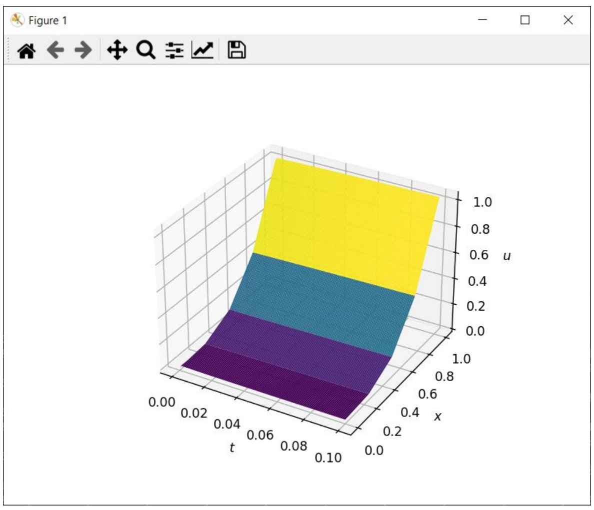

Рис. 3. График функции

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0179	0.0146	0.0132	0.0126	0.0121	0.0118	0.0114	0.0111	0.0108	0.0104
0.25	0.0156	0.0156	0.0185	0.0199	0.0208	0.0216	0.0222	0.0229	0.0235	0.0242	0.0249
0.5	0.125	0.125	0.125	0.1259	0.1272	0.1286	0.13	0.1314	0.1328	0.1341	0.1355
0.75	0.4219	0.4219	0.4247	0.4272	0.4294	0.4315	0.4334	0.4353	0.4371	0.4389	0.4406
1.0	1.0	1.0179	1.0211	1.0237	1.0259	1.0278	1.0297	1.0315	1.0331	1.0348	1.0364

Рис. 4. Аппроксимация при h = 0.25, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0024	0.0005	0.0028	-0.0008	0.0047	-0.0041	0.01	-0.0129	0.0243	-0.0366
0.125	0.002	0.002	0.0035	0.0019	0.0045	0.0006	0.0068	-0.0029	0.0131	-0.0127	0.0297
0.25	0.0156	0.0156	0.0156	0.0166	0.0153	0.0178	0.014	0.0207	0.0103	0.028	-0.0004
0.375	0.0527	0.0527	0.0527	0.0527	0.0534	0.0524	0.0549	0.0513	0.0582	0.0474	0.0664
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.1259	0.1251	0.1276	0.1241	0.1313	0.1203
0.625	0.2441	0.2441	0.2441	0.2442	0.2448	0.2448	0.246	0.2452	0.2479	0.2446	0.2518
0.75	0.4219	0.4219	0.4219	0.4229	0.4231	0.424	0.4241	0.4253	0.4248	0.4273	0.4247
0.875	0.6699	0.6699	0.6715	0.6722	0.6731	0.6736	0.6744	0.6748	0.6756	0.6758	0.6771
1.0	1.0	1.0024	1.0043	1.005	1.0059	1.0063	1.0072	1.0074	1.0085	1.0081	1.0104

Рис. 5. Аппроксимация при h = 0.125, t = 0.01

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}}||
0.25	0.001	0.0363328	0.0
0.125	0.001	0.0086168	0.027716
0.0625	0.001	0.0021096	0.0065072

Рис. 6. Точность решения

Схема с весами

Найдем начальные условия:

$$u_i^0 = \phi(x)$$

Найдем граничные условия:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k)$$
$$\beta_1(t_k)u_n^k + \beta_2(t_k)\frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} = \beta(t_k)$$

$$u_0^k - \frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k)$$
$$u_n^k + \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} = \beta(t_k)$$

$$(h+1)u_0^k - u_1^k = h\alpha(t_k)$$
$$-u_{n-1}^k + (h+1)u_n^k = h\beta(t_k)$$

Найдем коэффициенты системы, решив которую можно получить решения на последующих слоях:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k$$
$$\sigma\left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - u_i^k \sin x_i\right) - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k$$
$$\frac{\sigma}{h^2} u_{i-1}^k - \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \sin x_i + \frac{1}{\tau}\right) u_i^k + \frac{\sigma}{h^2} u_{i+1}^k = G_i^k$$

Имея:

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1-\sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, t_k)$$

Составим систему:

$$\begin{matrix} 0 & -(h+1)u_0^k & -u_1^k & & h\alpha(t_k) \\ & \dots & & & \dots \\ \frac{\sigma}{h^2} u_{i-1}^k & \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \sin x_i + \frac{1}{\tau}\right) u_i^k & \frac{\sigma}{h^2} u_{i+1}^k & = & G_i^k \\ & \dots & & & \dots \\ -u_{n-1}^k & -(h+1)u_n^k & 0 & & h\beta(t_k) \end{matrix}$$

Проведем тестирование на $u = x^5 + t^3$

$$3t^2 = 20x^3 - (x^5 + t^3)\sin x + f(x,t)$$
$$f(x,t) = 3t^2 - 20x^3 + (x^5 + t^3)\sin x$$

$$\alpha(t) = u(0,t) - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^3$$
$$\beta(t) = u(1,t) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 1 + t^3 + 5 = t^3 + 6$$
$$\varphi(x) = u(x,0) = x^5$$

Найдем результат для $\sigma = 0$:

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423	0.424	0.425	0.427	0.428	0.43
1.0	1.0	1.0	1.172	1.172	1.173	1.173	1.174	1.175	1.177	1.178	1.18

Рис. 7. Аппроксимация при h = 0.25, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.731	0.732	0.733	0.735	0.736
1.0	1.0	1.0	1.029	1.029	1.03	1.03	1.031	1.032	1.033	1.035	1.036

Рис. 8. Аппроксимация при h = 0.1, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.15	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.35	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.044	0.044
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.45	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.092	0.092	0.092
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.55	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.65	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.276
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.85	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.615	0.615	0.615
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.731
0.95	0.857	0.857	0.857	0.858	0.858	0.859	0.859	0.86	0.861	0.862	0.864
1.0	1.0	1.0	1.007	1.008	1.008	1.009	1.009	1.01	1.011	1.012	1.014

Рис. 9. Аппроксимация при h = 0.05, t = 0.01

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.2	0.001	0.0	0.12133
0.1	0.001	0.08401	0.03732
0.05	0.001	0.02297	0.01435

Рис. 10. Точность решения

Найдем результат для $\sigma = 0.5$:

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423	0.424	0.425	0.427	0.428	0.43
1.0	1.0	1.0	1.172	1.172	1.173	1.173	1.174	1.175	1.177	1.178	1.18

Рис. 11. Аппроксимация при h = 0.25, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.731	0.732	0.733	0.735	0.736
1.0	1.0	1.0	1.029	1.029	1.03	1.03	1.031	1.032	1.033	1.035	1.036

Рис. 12. Аппроксимация при h = 0.1, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.15	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.35	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.044	0.044
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.45	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.092	0.092	0.092
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.55	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.65	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.276
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.85	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.615	0.615	0.615
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.73	0.731
0.95	0.857	0.857	0.857	0.858	0.858	0.859	0.859	0.86	0.861	0.862	0.864
1.0	1.0	1.0	1.007	1.008	1.008	1.009	1.009	1.01	1.011	1.012	1.014

Рис. 13. Аппроксимация при h = 0.05, t = 0.01

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}}||
0.2	0.001	0.0	0.12133
0.1	0.001	0.08401	0.03732
0.05	0.001	0.02297	0.01435

Рис. 14. Точность решения

Найдем результат для $\sigma = 1$:

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423	0.424	0.425	0.427	0.428	0.43
1.0	1.0	1.0	1.172	1.172	1.173	1.173	1.174	1.175	1.177	1.178	1.18

Рис. 15. Аппроксимация при h = 0.25, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.731	0.732	0.733	0.735	0.736
1.0	1.0	1.0	1.029	1.029	1.03	1.03	1.031	1.032	1.033	1.035	1.036

Рис. 16. Аппроксимация при h = 0.1, t = 0.01

x \ t	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001	0.001	0.001
0.1	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002
0.15	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
0.2	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.009	0.009	0.009
0.25	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.017
0.3	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.028	0.028	0.028
0.35	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.043	0.044	0.044
0.4	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.065	0.065	0.065
0.45	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.091	0.092	0.092	0.092
0.5	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.126	0.126	0.126
0.55	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
0.6	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.216	0.217	0.217	0.217
0.65	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.276
0.7	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.343	0.344	0.344	0.344
0.75	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.422	0.423	0.423
0.8	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.512	0.513	0.513	0.513
0.85	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.614	0.615	0.615	0.615
0.9	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.729	0.73	0.73	0.73	0.731
0.95	0.857	0.857	0.858	0.858	0.858	0.859	0.859	0.86	0.861	0.862	0.864
1.0	1.0	1.0	1.008	1.008	1.008	1.009	1.009	1.01	1.011	1.012	1.014

Рис. 17. Аппроксимация при h = 0.05, t = 0.01

h	tau	||U_{exact}-U_{h}||	||U_{2h}-U_{h}||
0.2	0.001	0.0	0.12133
0.1	0.001	0.08401	0.03732
0.05	0.001	0.02297	0.01435

Рис. 18. Точность решения

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы были получены практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов численного или приближенно-аналитического решения ДУЧП2 параболического типа на основе сравнения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Листинг:
LW4_1.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from prettytable import PrettyTable

def f(x, t):
    return 3*t**2 - 6*x + (x**3 + t**3)*np.sin(x)
    #return (x**2 + t)*np.sin(x) - 1

def lu(u: np.array, x: np.linspace, t: np.linspace, i, k, h):
     return (u[i + 1, k] - 2*u[i, k] + u[i - 1, k]) / pow(h, 2) - u[i,
k]*np.sin(x[i])

def solve(h, tau):
    x_min = 0
    x_max = 1
    xs = np.arange(x_min, x_max + h, h)
    n_x = len(xs)

    t_min = 0
    t_max = 0.1
    ts = np.arange(t_min, t_max + tau, tau)
    n_t = len(ts)

    #phi = lambda x, t: x**2
    phi = lambda x, t: pow(x, 3)
    #alpha = lambda t: t
    alpha = lambda t: pow(t, 3)
    #beta = lambda t: t + 3
    beta = lambda t: 4 + pow(t, 3)

    U = np.zeros((n_x, n_t))
    U[:, 0] = [phi(x, t_min) for x in xs]

    for k in range(1, n_t):
        for i in range(1, n_x - 1):
            U[i, k] = U[i, k - 1] + tau * (lu(U, xs, ts, i, k - 1, h) +
                                            f(xs[i], ts[k - 1]))

        U[0, k] = (2*h*alpha(ts[k]) - 4*U[1, k] + U[2, k]) / (2*h + 3)
        U[-1, k] = (2*h*beta(ts[k]) + 4*U[-2, k] - U[-3, k]) / (2*h + 3)

    return [xs, ts, U]

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(4)
    xs = xs.round(4)
```

```
    U = U.round(4)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

h = 0.125
tau = 0.01

[xs, ts, U] = solve(h, tau)

print("Результат:")
print(makeTableFromResult(xs, ts, U))

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)
ax.plot_surface(X, Y, U, rstride=1, cstride=1,
    cmap='viridis', edgecolor='none')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_ylabel('$x$')
ax.set_zlabel('$u$')
plt.show()

def makeTableFromStep(hs, taus, exact_diff, diff):
    table = PrettyTable()
    table.add_column("h", hs)
    table.add_column("tau", taus)
    table.add_column("||U_{exact}-U_{h}||", diff)
    table.add_column("||U_{2h}-U_{h}}||", exact_diff)
    return table

hs = []
taus = []
exact_diff = []
last_diff = []

[_, _, last_u] = solve(h, tau)
last_u = last_u[0::2]

for i in range(3):
    [xs, ts, U] = solve(h, tau)

    u = lambda t, x: x**3 + t**3
    #u = lambda t, x: x**2 + t
    U_exact = np.array([[u(t, x) for t in ts] for x in xs])

    hs.append(h)
    taus.append(tau)
    exact_diff.append(np.amax(np.abs(U - U_exact)))
    last_diff.append(np.amax(np.abs(last_u - U[0::2])))
```

```
    h /= 2
    last_u = U

hs = np.array(hs).round(7)
taus = np.array(taus).round(7)
exact_diff = np.array(exact_diff).round(7)
last_diff = np.array(last_diff).round(7)

print(makeTableFromStep(hs, taus, last_diff, exact_diff))
```

LW4_2.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits import mplot3d
import scipy.linalg as la
from prettytable import PrettyTable

def f(x, t):
    return 3*t**2 - 20*x**3 + (x**5 + t**3)*np.sin(x)

def lu(u: np.array, x: np.linspace, t: np.linspace,
       i, k, h):
     return (u[i + 1, k] - 2 * u[i, k] + u[i - 1, k]) / pow(h, 2) - u[i,
k]*np.sin(x[i])

def solve(h, tau, sigma):
    x_min = 0
    x_max = 1
    xs = np.arange(x_min, x_max + h, h)
    n_x = len(xs)

    t_min = 0
    t_max = 0.1
    ts = np.arange(t_min, t_max + tau, tau)
    n_t = len(ts)

    phi = lambda x, t: pow(x, 5)
    alpha = lambda t: pow(t, 3)
    beta = lambda t: pow(t, 3) + 6

    U = np.zeros((n_x, n_t))
    G = np.zeros((n_x, n_t))
    U[:, 0] = [phi(x, t_min) for x in xs]
    A = np.zeros((n_x - 1))
    B = np.zeros((n_x))
    C = np.zeros((n_x - 1))

    G[0, 0] = h*alpha(ts[0])
    G[-1, 0] = h*beta(ts[0])

    for k in range(0, n_t - 1):
```

```
        for i in range(1, n_x - 1):
            G[i, k+1] = (-1 * U[i, k]) / tau \
                - (1 - sigma) * lu(U, xs, ts, i, k, h) \
                - f(xs[i], ts[k])
            A[i - 1] = sigma / h**2
            B[i] = 2*sigma / h**2 + np.sin(xs[i]) + 1 / tau
            C[i] = sigma / h**2

        B[0] = -(h + 1)
        C[0] =  -1
        A[-1] = -1
        B[-1] = -(h + 1)

        G[0, k+1] = h*alpha(ts[k+1])
        G[-1, k+1] = h*beta(ts[k+1])

        matrix = np.array([[0, *C], B, [*A, 0]])

        U[:, k+1] = la.solve_banded((1,1), matrix, G[:, k+1])

    return [xs, ts, U]

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(4)
    xs = xs.round(4)
    U = U.round(5)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

h = 0.25
tau = 0.01
sigma = 0.5

[xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
X, Y = np.meshgrid(ts, xs)
ax.plot_surface(X, Y, U, rstride=1, cstride=1,
    cmap='magma', edgecolor='none')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_ylabel('$x$')
ax.set_zlabel('$u$')
plt.show()

def makeTableFromStep(hs, taus, diff, exact_diff):
    table = PrettyTable()
    table.add_column("h", hs)
    table.add_column("tau", taus)
```

```python
    table.add_column("||U_{exact}-U_{h}||", diff)
    table.add_column("||U_{2h}-U_{h}}||", exact_diff)
    return table

def makeTableFromResult(xs, ts, U):
    table = PrettyTable()
    ts = ts.round(3)
    xs = xs.round(3)
    U = U.round(3)
    table.add_column("x \ t", xs)
    for k in range(len(ts)):
        table.add_column(f"{ts[k]}", U[:, k])
    return table

[xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

print("Результат:")
print(makeTableFromResult(xs, ts, U))

hs = []
taus = []
exact_diff = []
last_diff = []

[_, _, last_u] = solve(h, tau, sigma)
last_u = last_u[0::2]

for i in range(3):
    [xs, ts, U] = solve(h, tau, sigma)

    u = lambda t, x: x**5 + t**3
    U_exact = np.array([[u(t, x) for t in ts] for x in xs])

    hs.append(h)
    taus.append(tau)
    exact_diff.append(np.amax(np.abs(U - U_exact)))
    last_diff.append(np.amax(np.abs(last_u - U[0::2])))

    h /= 2
    last_u = U

hs = np.array(hs).round(5)
taus = np.array(taus).round(5)
exact_diff = np.array(exact_diff).round(5)
last_diff = np.array(last_diff).round(5)

print(makeTableFromStep(hs, taus, exact_diff, last_diff))
```