Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
*«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»*
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***М-КФ «Машиностроительный»***

КАФЕДРА ***М10-КФ «Высшая математика и физика»***

ДОМАШНАЯ РАБОТА №1

«Пределы и непрерывность»

ДИСЦИПЛИНА: «Математический анализ»

Выполнил: студент гр. ИУК4-12Б ________ (Карельский М.К.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________ (Рамазанов А.К.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты): 27.10.20

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка: 20
- Оценка:

Калуга , 2020

Вариант №13.

№1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4-2n)^3+(4+2n)^3}{(4+n)^3+(4-n)^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^3\cancel{-3\cdot4^2\cdot2n}+3\cdot4\cdot4n^2\cancel{-8n^3}+4^3\cancel{+3\cdot4^2\cdot2n}+3\cdot4\cdot4n^2\cancel{+8n^3}}{4^3\cancel{+3\cdot4^2\cdot n}+3\cdot4\cdot n^2\cancel{+n^3}+4^3\cancel{-3\cdot4^2 n}+3\cdot4n^2\cancel{-n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{128+96n^2}{128+24n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\frac{128}{n^2}+96)}{n^2(\frac{128}{n^2}+24)}=\frac{96}{24}=4$$

+

ответ: 4

№2

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n-2)^2}\left(\sqrt[3]{n+4}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n-2)^2}\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{(n-2)^2}\left(\frac{n+4-n-1}{\sqrt[3]{(n+4)^2}+\sqrt[3]{(n+4)(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{n-n-1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{2/3}\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}\left(\frac{3}{n^{2/3}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{-1}{n^{2/3}\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right)}\right)=$$

+

$$=\frac{3}{1+1+1}-\frac{1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

ответ: $\frac{2}{3}$

№3

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+2}{3x^2+2x-6}\right)^{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x-6+8}{3x^2+2x-6}\right)^{2x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{3x^2+2x-6}\right)^{2x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{3x^2+2x-6}\right)^{\frac{3x^2+2x-6}{8}\cdot\frac{8(2x^2+x)}{3x^2+2x-6}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{3x^2+2x-6}\right)^{\frac{3x^2+2x-6}{8}\cdot\frac{x^2(16+\frac{8}{x})}{x^2(3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2})}} =$$

$= e^{\frac{16}{3}}$ (по II замечательному пределу)

ответ: $e^{\frac{16}{3}}$ +

№4

$$\lim_{x\to 1}\frac{5^x-5x}{x^2+4x-5} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

пусть $t = x-1$

$x = t+1$

$t \to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{5^{t+1}-5(t+1)}{(t+1)^2+4(t+1)-5} = \lim_{t\to 0}\frac{5\cdot 5^t-5t-5}{t^2+2t+1+4t+4-5} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{5(5^t-1-t)}{t^2+6t} = \quad \boxed{a^\alpha-1 \sim \alpha\cdot\ln a,\ \alpha\to 0}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{5(t\cdot\ln 5-t)}{t^2+6t} = \lim_{t\to 0}\frac{t(5\ln 5-5)}{t(t+6)} =$$ +

$$= \lim_{t \to 0} \frac{5\ln 5 - 5}{t+6} = \lim_{x \to 1} \frac{5\ln 5 - 5}{x-1+6} = \frac{5\ln 5 - 5}{6}$$

ответ: $\frac{5\ln 5 - 5}{6}$ +

№5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(5+x)} - \sqrt[3]{5-x}}{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{5-x}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5+x-5+x}{(5+x)^{2/3} + \sqrt[3]{(5+x)(5-x)} + (5-x)^{2/3}} \cdot \frac{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}}{4-x-4-x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(- \frac{\sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}}{(5+x)^{2/3} + \sqrt[3]{(5+x)(5-x)} + (5-x)^{2/3}} \right) =$$

$$= - \frac{2+2}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25}} = \frac{-4}{3 \cdot \sqrt[3]{25}} = \frac{-4 \cdot \sqrt[3]{5}}{3 \cdot 5} = \frac{-4 \cdot \sqrt[3]{5}}{15}$$

+

ответ: $\frac{-4 \cdot \sqrt[3]{5}}{15}$

№6

$$\lim_{x \to 3} (3-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} = (0 \cdot \infty)$$

пусть $t = x - 3$

$x = t + 3$

$t \to 0$

+

$$\lim_{t\to 0}(3-t-3)\,tg\frac{\pi(t+3)}{6} = \lim_{t\to 0}\left(-t\cdot tg\frac{\pi t+3\pi}{6}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-t\cdot\frac{\sin\frac{\pi t+3\pi}{6}}{\cos\frac{\pi t+3\pi}{6}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-t\cdot\frac{\sin\frac{\pi t+3\pi}{6}}{\cos\frac{\pi t}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi t}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}}\right) = \boxed{\begin{matrix}\sin\alpha\sim\alpha,\\ \alpha\to 0\end{matrix}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-t\cdot\frac{\sin\frac{\pi t+3\pi}{6}}{-\frac{\pi t}{6}}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{6\sin\frac{\pi t+3\pi}{6}}{\pi} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{6\sin\frac{\pi(x-3)+3\pi}{6}}{\pi} = \lim_{x\to 3}\frac{6\sin\frac{\pi x}{6}}{\pi} = \frac{6\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{6}{\pi}$$

ответ: $\frac{6}{\pi}$

№7

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{2x^3}-5^{3x^3}}{\ln(3-x^2\sin 3x)-\ln 3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \boxed{\begin{matrix}\sin\alpha\sim\alpha,\\ \alpha\to 0\end{matrix}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7^{2x^3}-1-(5^{3x^3}-1)}{\ln(3-x^2\cdot 3x)-\ln 3} = \boxed{\begin{matrix}a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a,\\ \alpha\to 0\end{matrix}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^3\ln 7-3x^3\ln 5}{\ln(3(1-x^3))-\ln 3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3\ln 7-3x^3\ln 5}{\ln 3+\ln(1-x^3)-\ln 3} =$$

$$\boxed{\begin{matrix}\ln(1+\alpha)\sim\alpha,\\ \alpha\to 0\end{matrix}} = \lim\frac{2x^3\ln 7-3x^3\ln 5}{-x^3} =$$

+

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3(2\ln 7 - 3\ln 5)}{-x^3} = 3\ln 5 - 2\ln 7 =$$

$$= \ln 125 - \ln 49 = \ln \frac{125}{49}$$ ответ: $\ln \frac{125}{49}$

№8

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \sin^2(\pi x)\right)^{\frac{4}{x\,tg(\pi x)}} = (1^\infty) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 + \sin^2(\pi x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(\pi x)} \cdot \frac{4\sin^2(\pi x)}{x\,tg(\pi x)}} = (*)$$

+

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2(\pi x)}{x\,tg(\pi x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(2\pi x)}{x} =$$

$$\boxed{\begin{matrix}\sin\alpha \sim \alpha, \\ \alpha \to 0\end{matrix}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot 2\pi x}{x} = 4\pi$$

$(*) = e^{4\pi}$ ~~ответ~~ (по II замечат. пределу)

ответ: $e^{4\pi}$