Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»***

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

«Модели – ДУЧП 2-го порядка»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-62Б ________________ (Карельский М.К.)
(Подпись)

Проверил: ________________ (Никитенко У.В.)
(Подпись)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель: овладеть навыками использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками презентации результатов вычислений.

Задачи: самостоятельно изучить синтаксис и важнейшие структуры библиотеки символьной математики; установление соответствия моделей и физических процессов; приведение ДУЧП2 2-го порядка к каноническому виду.

Задание: привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где тип уравнения сохраняется.

Вариант 11

$$(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$$

Решение:

Общий вид уравнения:

$$a_{11}(x,y)u_{xx}+2a_{12}(x,y)u_{xy}+a_{22}(x,y)u_{yy}+F\big(x,y,u,u_x,u_y\big)=0$$

В случае данного уравнения:

$$a_{11}=1+x^2$$
$$a_{12}=0$$
$$a_{22}=1+y^2$$
$$F\big(x,y,u,u_x,u_y\big)=xu_x+yu_y$$

Найдем D:

$$D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0-(1+x^2)(1+y^2)$$

D < 0 при любых значениях x и y, следовательно уравнение эллиптического типа.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm i\sqrt{-D}}{a_{11}}=\frac{0\pm i\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+x^2}=\pm i\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\pm i\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \left| \begin{matrix} t = arctg(y) & y = tg(t) \\ \dfrac{1}{\cos^2 t} = y^2 + 1 & dy = \dfrac{1}{\cos^2 t} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \sec t \, dt$$

$$= \int \frac{\sec t \, tg\, t + \sec^2 t}{tg\, t + \sec t} dt = \left| \begin{matrix} v = tg\, t + \sec t \\ dv = (\sec t \, tg\, t + \sec^2 t) dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dv}{v}$$

$$= \ln v = \ln(tg\, t + \sec t) = \ln\left(\sqrt{y^2+1} + y\right)$$

$$\pm i \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pm i \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{y^2+1} + y\right) = \pm i \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + C$$

$$C = \ln\left(\sqrt{y^2+1} + y\right) \pm i \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$\xi = Re(C) = \ln\left(\sqrt{y^2+1} + y\right)$$

$$\eta = Im(C) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$$

$$U_x = \frac{U_\eta}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$U_y = \frac{U_\xi}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{\eta\eta}}{1+x^2} + U_\eta \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2x}{(1+x^2)^{1.5}} = \frac{U_{\eta\eta}}{1+x^2} - \frac{xU_\eta}{(1+x^2)^{1.5}} = \frac{U_{\eta\eta}\sqrt{1+x^2} - U_\eta x}{(1+x^2)^{1.5}}$$

$$U_{yy} = \frac{U_{\xi\xi}\sqrt{1+y^2} - U_\xi y}{(1+y^2)^{1.5}}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$(1+x^2)\frac{U_{\eta\eta}\sqrt{1+x^2} - U_\eta x}{(1+x^2)^{1.5}} + (1+y^2)\frac{U_{\xi\xi}\sqrt{1+y^2} - U_\xi y}{(1+y^2)^{1.5}} + x\frac{U_\eta}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$+ y\frac{U_\xi}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

$$\frac{U_{\eta\eta}\sqrt{1+x^2} - U_\eta x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{U_{\xi\xi}\sqrt{1+y^2} - U_\xi y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{xU_\eta}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{yU_\xi}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

$$U_{\eta\eta} - \frac{xU_\eta}{\sqrt{1+x^2}} + U_{\xi\xi} - \frac{yU_\xi}{\sqrt{1+y^2}}\frac{xU_\eta}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{yU_\xi}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$

$$U_{\eta\eta} + U_{\xi\xi} = 0$$

Вывод: в ходе выполнения домашней работы были получены практические навыки использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений и визуализации результатов вычислений; навыками презентации результатов вычислений.