1.2 Questions

Q3- (a)

$$x - 3y + 4z = 7$$
$$y + 2z = 2$$
$$\underline{z = 5}$$

$\rightarrow$ $y + 2(5) = 2$,

$\underline{y = -8}$

$x - 3(-8) + 4(5) = 7$

$x + 24 + 20 = 7$

$x = 7 - 44$

$\underline{x = -37}$

(b)

$$x_1 + 8x_3 - 5x_4 = 6$$
$$x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 3$$
$$x_3 + x_4 = 2$$

$x_1 = 6 - 8x_3 + 5x_4$

$x_4 = z$

$x_2 = 3 + 9x_4 - 4x_3$

$x_3 = 2 - x_4$

$x_3 = 2 - z$ ✓ ; $x_2 = 3 + 9z - 4(2-z)$; $x_1 = 6 - 8(2-z) + 5z$

$x_2 = 3 + 9z - 8 + 4z$; $x_1 = 6 - 16 + 8z + 5z$

$\underline{x_2 = 13z - 5}$ ✓ ; $x_1 = -10 + 13z$

$\underline{x_1 = -10 + 13z}$ ✓

Q5-

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (-1)R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \quad R_3 - 3R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix} \quad R_3 + 10R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{52}R_3$$

$x_3 = 2$ ✓

$x_2 - 5x_3 = -9$

$x_1 - 5(2) = -9$

$x_1 = 1$ ✓

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

$1 + x_2 + 4 = 8$

$x_2 = 3$ ✓

Q6-

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{2}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2+2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{7}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3-8R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3+7R_2$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + \frac{4}{7}x_3 = \frac{1}{7}$

$0=0$

$\rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

$\rightarrow x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}x_3$ $\qquad x_3 = t$

$x_1 = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}t - t$ $\qquad x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$

$x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t$

Q7-

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad R_2-2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \tfrac{1}{3}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad R_3+2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{34}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3-3R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3-3R_2$$

$x - y + 2z - w = -1$

$y - 2z = 0$ $\qquad z = t$, $w = r$

$y = 2t \quad -(1)$

$x - \cancel{2t} + \cancel{2t} - r = -1$

$x = r - 1$, infinite solutions

Q8. $-2b+3c=1$

$3a+6b-3c=-2$

$6a+6b+3c=5$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad R_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad R_3-6R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad R_3+6R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{12}R_3$$

$a+2b-c=-\frac{2}{3}$

$b-\frac{3}{2}c=-\frac{1}{2}$

$0=1$

$\rightarrow$ no solutions

Q15. $2x_1+x_2+3x_3=0$

$x_1+2x_2=0$

$x_2+x_3=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2-R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{1.5}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3-R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - 0.5R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - 2R_3$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ ✓

Q16- $2x - y - 3z = 0$

$-x + 2y - 3z = 0$

$x + y + 4z = 0$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 - 2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 - R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + 3R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{10}R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 - \frac{1}{3}R_3,\ R_1 - \frac{11}{3}R_3$$

$x = y = z = 0$ ✓

Q21-

$$\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 \quad - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad R_3 - 3R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_4 - 2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2R_2,\ R_1 + R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + \frac{3}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \quad R_4 - 2R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{14}R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \quad R_4 - 15R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \quad R_1 + 2R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{5}R_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2 + 7R_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_2 - 3R_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_1 - 5R_4$$

$I_1 = -1, \ I_2 = 0, \ I_3 = 1, \ I_4 = 2$ ✓

*Q25- $x + 2y - 3z = 4$

$3x - y + 5z = 2$

$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{bmatrix} \quad R_2 - 3R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} \quad R_3 - 4R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{7}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{bmatrix} \quad R_1 - 2R_2$$

$a - 4 = 0$, $\underline{a = 4}$

$a = -4$, $\underline{\text{no solutions}}$

$a = 4$, infinitely many solutions

$a \neq 4$, $a \neq -4$, exactly one solution

Q26- $x + 2y + z = 2$
$2x - 2y + 3z = 1$
$x + 2y - (a^2-3)z = a$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3-a^2 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3-a^2 & a \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3-a^2 & a \end{bmatrix} \quad R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2-a^2 & a-2 \end{bmatrix} \quad R_3 - R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 2-a^2 & a-2 \end{bmatrix} \quad -\frac{2}{3}R_2$$

- $a = \pm\sqrt{2}$ no solutions
- There is no value of a for infinitely many solutions.
- $a \neq \pm\sqrt{2}$, there is only one solution.

Q27- $x + 3y - z = a$
$x + y + 2z = b$
$2y - 3z = c$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & -3 & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & -2 & 3 & b-a \\ 0 & 2 & -3 & c \end{bmatrix} \quad R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & -2 & 3 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b-a+c \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b-a+c \end{bmatrix}$$

$b-a+c=0$, infinitely many solutions
to be consistent

Q28- $x+3y+z=a$
$-x-2y+z=b$
$3x+7y-z=c$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ -1 & -2 & 1 & b \\ 3 & 7 & -1 & c \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 3 & 7 & -1 & c \end{array}\right] \quad R_2+R_1$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & -2 & -4 & c-3a \end{array}\right] \quad R_3-3R_1$$

$2a+2b+c-3a$
$2b+c-a$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c-a \end{array}\right] \quad R_3+2R_2$$

$2b+c-a=0 \rightarrow$ consistent

Q9- Ex 5

$x_1+x_2+2x_3=8$
$-x_1-2x_2+3x_3=1$
$3x_1-7x_2+4x_3=10$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \quad R_2+R_1$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \quad R_3-3R_1$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \quad R_1+R_2$$

$-90 \quad -14$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right] \quad -R_2,\ R_3+10R_2$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{52}R_3$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_2+5R_3$$

$$=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_1-7R_3$$

$x_1=3$ ✓
$x_2=1$ ✓
$x_3=2$ ✓

Q10- Ex 6

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$
$$8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3 - 4R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_1 , \ \frac{1}{7}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + \frac{3}{7}x_3 = -\frac{1}{7}$$

$$x_1 = -\frac{3}{7}s - \frac{1}{7}$$

$$x_2 + \frac{4}{7}x_3 = \frac{1}{7}$$

$$x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}s \quad ; \quad x_3 = s$$

Q11- Ex 8

$$-2b + 3c = 1$$
$$3a + 6b - 3c = -2$$
$$6a + 6b + 3c = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & -9 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 2R_2 , \rightarrow R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad -\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{2} \qquad \frac{5+9}{6} \quad \frac{14}{6}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{14}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{14}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad 0 = -2 \ ; \ \text{no sol}$$

Q13- non-trivial
14- trivial] An eq having more unknowns than the eqs have infinite solutions.

Q17- $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad 8R_1,\ R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad 3R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{8}R_2$$

$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 0$

$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad -1$

$x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 0$

$4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$

$4x_2 = -4x_4 - x_3$

$\underline{\underline{x_2 = -x_4 - \frac{1}{4}x_3}}$; $\underline{\underline{x_4 = s}}$, $\underline{\underline{x_3 = t}}$

$x_2 = -s - \frac{1}{4}t$

$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$3x_1 - \cancel{x_4} - \frac{1}{4}x_3 + x_3 + \cancel{x_4} = 0$

$3x_1 + \frac{3}{4}x_3 = 0$

$\cancel{3}x_1 = -\frac{\cancel{3}}{4}x_3$

$\underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{4}t}}$

Q20- $x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$
$-2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$
$2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4 - 2R_1,\ R_4 - R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 + 2R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4 + 10R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 - 3R_2$

$R_5 + 5R_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 - 6R_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{-63}{2}$

$-11 + \frac{63}{2}$

$\frac{-22+63}{2}$ $\quad \frac{41}{2}$

$R_4 - 21R_3$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{41}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{2}{41}R_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$R_5 - 9R_3$

$-5 + \frac{27}{2}$

$\frac{17}{2}$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Q29- $2x + y = a$
$3x + 6y = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 6 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}a \\ 3 & 6 & b \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}a \\ 0 & \frac{9}{2} & b - \frac{3}{2}a \end{bmatrix} \quad R_2 - 3R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}a \\ 0 & 1 & \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}a \end{bmatrix} \quad \frac{2}{9}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}a - \frac{1}{9}b + \frac{1}{6}a \\ 0 & 1 & \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}a \end{bmatrix} \quad R_1 - \frac{1}{2}R_2$$

$x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b$, $y = \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}a$

Q30- $x_1 + x_2 + x_3 = a$
$2x_1 + 2x_3 = b$
$3x_2 + 3x_3 = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-2a \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix} \quad R_2 - 2R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{2c-6a+3b}{2} \end{bmatrix} \quad R_3 - 3R_2, \; R_1 - R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2c-6a+3b}{6} \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2c-6a+3b}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\cancel{3b}-2c+6a-\cancel{3b}}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2c-6a+3b}{6} \end{bmatrix} \quad R_1 - R_3$$

$x_1 = \frac{\cancel{6}^{3}a - \cancel{2}^{1}c}{\cancel{6}3} = \frac{3a-c}{3}$

$x_2 = a - \frac{b}{2}$, $x_3 = -a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$

Q33- $\sin\alpha + 2\cos\beta + 3\tan\gamma = 0$

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2-2R_1,\ R_3+R_1$$

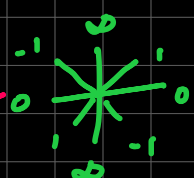
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1-2R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3-3R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -R_3,\ R_2+3R_3,\ R_1-9R_3$$

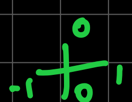
$\tan\gamma = 0$

$\gamma = 0, \pi, 2\pi$



$\sin\alpha = 0$

$\alpha = 0, \pi, 2\pi$



Arrangement

$= 3\times2\times3 = \underline{\underline{18}}$

$\cos\beta = 0 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Q34-

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad R_2-R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3-R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{8}R_3,\ \frac{1}{2}R_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1+\frac{1}{2}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

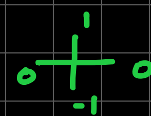
$R_1+\frac{1}{2}R_3,\ R_2+2R_3$

$\tan\gamma = 0$

$\gamma = 0$ ✓

$\sin\alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ✓



$\cos\beta = -1$

$\beta = \pi$ ✓