第 9 章 鲁棒优化与风险偏好（Risk preference）

黄文杰

在 2.4 节中，我们已经介绍了关于风险度量的基本知识。本章中，我们将给出风险度量定义，并介绍其与鲁棒优化之间的联系。同时我们会讲述与风险偏好相关的一系列优化问题，包括风险规避优化和偏好鲁棒优化问题。

9.1 风险度量与鲁棒优化的联系

现实中，我们来决策做一件事（比如投资）时，在未来得到的回报往往都是不确定的。在一些投资组合优化的问题中，如以最大化期望收益为目标，最优的结果是将所有的资金都投入到期望回报率最大的资产当中。但是这样的决策是不合理的，因为没有将风险考虑在内，实际的回报发生时，存在着损失所有投资资金的可能性。因此需要通过合理地分散投资来降低风险。为了衡量一件事未来的与风险相关的收益和成本，人们引入了风险度量的概念。风险度量可以用来反映决策者对小概率极端事件的态度，提升决策在不确定环境下的可靠性（比如说风险规避的决策者而言，在获得随机收益时，风险度量可以反映其对小概率但低收益事件的态度；而其在损失随机成本时，风险度量可以反映其对小概率但高成本事件的态度）。

首先，我们给出风险度量的一般化定义。定义 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为样本空间，用 $\mathcal{F}$ 表示其 σ-代数。定义随机变量的空间为 $\mathcal{X} := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，即给定随机变量 $X \in \mathcal{X}$，我们假设 $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ 的 p 阶矩（pth order moment）是有限的，并且其概率测度为 $\mathbb{P}$。定义拓展实数线为 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$。

风险度量 ρ 可以定义为从随机变量空间到拓展实数线的 proper 映射，$\rho : \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$. 通常来讲风险度量包含以下的性质：

1. 归一化（normalized）：$\rho(0) = 0$.
2. 凸性（convexity）：$\rho(tX + (1-t)X') \le t\rho(X) + (1-t)\rho(X')$，对于任意的 $X, X' \in \mathcal{X}$ 和 $t \in [0, 1]$.
3. 单调性（monotonicity）：如果 $X, X' \in \mathcal{X}$ 且 $X(\omega) \ge X'(\omega)$ 对于 $\omega \in \Omega$ 几乎处处成立，那么 $\rho(X) \ge \rho(X')$（这里我们假设 X 的实现值是越小越好，例如 X 是随机成本。）
4. 平移不变性（translation invariance）：如果 $a \in \mathbb{R}$ 且 $X \in \mathcal{X}$，那么 $\rho(X+a) = \rho(X)+a$.
5. 同质性（positive homogeneity）：如果 $t > 0$ 且 $X \in \mathcal{X}$，那么 $\rho(tX) = t\rho(X)$.
6. 分布不变性（law invariance）：如果对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X \le t] = \mathbb{P}[X' \le t]$ 成立，那么 $\rho(X) = \rho(X')$.

若风险度量满足上述性质 1-4，则称其为凸风险度量（convex risk measure）；若风险度量满足上述性质 1-5，则称其为一致风险度量（coherent risk measure）。关于分布不变性的风险度量，我们由于篇幅限制不进行介绍，有兴趣的读者可以阅读文献Kusuoka (2001); Shapiro (2013); Shapiro et al. (2021).

Ruszczyński and Shapiro (2006); Shapiro et al. (2021) 将风险度量和分布鲁棒优化（distributionally robust optimization）进行了联系，可以将凸风险度量和一致性风险度量以分布鲁棒优化的方式进行表达。给定 $\mathcal{X}$ 的对偶空间 $\mathcal{X}^* = \mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其中 $q \in (1, +\infty)$ 满足 $1/p + 1/q = 1$。对于 $X \in \mathcal{X}$ 及 $\zeta \in \mathcal{X}^*$, 它们的点积（scalar product）定义为

$$\langle \zeta, X \rangle = \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

风险度量 ρ 的共轭函数（conjugate function）$\rho^* : \mathcal{X}^* \to \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$\rho^*(\zeta) := \sup_{X \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \zeta, X \rangle - \rho(X) \right\}. \tag{9.1}$$

根据 Fenchel-Moreau 定理, 如果凸风险度量 ρ 是下半连续的（lower semi-continuous）的，式（9.1）的等价表达为

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \left\{ \langle \zeta, X \rangle - \rho^*(\zeta) \right\}, \tag{9.2}$$

其中 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$ 是共轭函数 ρ 的定义域。下述定理是 Fenchel–Moreau 定理的直接结果，反映出了对偶空间 $\mathcal{A}$ 对风险度量各个性质的影响。

定理 9.1: 凸风险度量的对偶 (Ruszczyński and Shapiro, 2006; Shapiro et al., 2021)

假设 $\rho : \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ 是常义和下半连续的凸风险度量，则表达式 (9.2) 成立且 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$。此外，有以下结论（i）风险度量的单调性满足当且仅当所有的 $\zeta \in \mathcal{A}$ 是非负的，即 $\zeta \geq 0$ 对 $\omega \in \Omega$ 几乎处处成立；（ii）风险测度的平移不变性满足当且仅当对所有的 $\zeta \in \mathcal{A}$, $\int_\omega \zeta d\mathbb{P} = 1$ 成立；（iii）风险测度的同质性满足当且仅当 ρ 为集合 $\mathcal{A}$ 的支撑函数（support function），并可由以下方式表达

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \langle \zeta, X \rangle, \forall X \in \mathcal{X}. \tag{9.3}$$

♡

定理9.1指出了当 ρ 是下半连续的凸风险测度时，可以将其用式（9.2）表达，且 $\mathcal{A}$ 是如下概率密度分布（probability density functions）的集合的一个子集

$$\mathcal{B} := \left\{ \zeta \in \mathcal{X}^* : \int_\Omega \zeta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 1, \ \zeta(\omega) \geq 0 \text{ for a.e. } \omega \in \Omega \right\}.$$

该定理还指出了当 ρ 为一致性风险的时候，它的共轭函数 ρ^* 是集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}^*$ 的指示函数（indicator function），集合 $\mathcal{A}$ 可以特别地表达为

$$\mathcal{A} = \{ \zeta \in \mathcal{B} : \langle \zeta, X \rangle \leq \rho(X), \ \forall X \in \mathcal{X} \}.$$

事实上，我们可以把 $\mathcal{A}$ 看成是一个概率密度分布的集合，那么对于任意的 $\zeta \in \mathcal{A}$，点积 $\langle \zeta, X \rangle$ 是基于概率测度 $\zeta d\mathbb{P}$ 的期望值 $\mathbb{E}_\zeta[X]$。

如何从实际决策者风险度量的角度去理解分布鲁棒优化表达式（9.3）呢？可以将 ζ 看成在原始概率分布 $\mathbb{P}$ 上对每个事件 $\omega \in \Omega$ 的加权调整（也可以将其看成是在随机变量的实现值 $X(\omega)$ 上的加权调整）。如果决策者是风险规避（risk-averse）的，那么在面对需要损失随机成本时，其会在小概率且极端高成本上附以更高的权重---关于这一观点，有兴趣的读者可以进一步阅读关于频谱风险测度（spectral risk measure）和扭曲风险度量（distortion risk measure）的相关工作：Acerbi (2002); Balbás et al. (2009)。决策者的风险偏好对应了一类附权重的准则，即以集合 $\mathcal{A}$ 来表达，风险度量需要同时考虑随机变量实现和原始概率分布的情况，通过分布鲁棒优化中最差结果（worst-case）的形式，求解得到最优（可能是唯一）的附权方式，也得到最极端的度量结果。

以下我们以四个经典的风险测度为例，给出它们在定理9.1下的对偶结果。

示例 9.1: 条件风险价值（Conditional Value-at-Risk，CVaR）：在 2.4 节中我们已经给出了 CVaR 的几种数学表达式。CVaR_α 是一致性风险度量，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\eta \in \mathcal{B} : \zeta(\omega) \in [0, 1/\alpha] \text{ a.e. } \omega \in \Omega\}.$$

即决策者给定了准则，对每个事件的加权分布都允许在 0 到 $1/\alpha$ 之间波动，CVaR_α 是在该准则下的最极端（分布鲁棒优化）结果。

示例 9.2: 熵风险度量（Entropic risk measure）：熵风险度量表达为

$$\rho_e(X) = \ln(\mathbb{E}[\exp(X)]).$$

该测度满足凸性，但不满足一致性，因此根据定理9.1和式（9.2）的结果，它的共轭函数表达为

$$\rho_e^* = \begin{cases} \mathbb{E}[\zeta \ln \zeta] & \text{if } \zeta \in \mathcal{B}, \\ +\infty & \text{if } \zeta \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

示例 9.3: p 阶平均-偏差风险度量（mean-deviation risk measures of order p）：p 阶平均-偏差风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + c\left(\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^p]\right)^{1/p},$$

其中 $p \in [1, +\infty)$ 及 $c \geq 0$。该测度满足凸性和同质性，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\zeta' \in \mathcal{X}^* : \zeta' = 1 + \zeta - \mathbb{E}[\zeta],\ \|\zeta\|_q \leq c\}.$$

若 $c \leq 1/2$, 则该风险度量满足单调性即其为一致性风险测度；若 $c > 1/2$ 时，其单调性需要进一步分析，在这里我们不多赘述，有兴趣的读者可以参考Shapiro et al. (2021, Section 6.3.2)。

示例 9.4: p 阶平均-上半偏差风险度量（mean-upper-semideviation of order p）：p 阶平均-上半偏差风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + c\left(\mathbb{E}\left[[X - \mathbb{E}[X]]_+^p\right]\right)^{1/p},$$

其中 $p \in [1, +\infty)$ 及 $c \geq 0$, 符号 $[x]_+$ 给出 x 和 0 更大值（即 $\max\{x, 0\}$）。该测度满足凸性和同质性，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\zeta' \in \mathcal{X}^* : \zeta' = 1 + \zeta - \mathbb{E}[\zeta],\ |\zeta\|_q \leq c,\ \zeta(\omega) \geq 0 \text{ for a.e. } \omega \in \Omega\}.$$

若 $c \leq 1$, 则该风险度量满足单调性即其为一致性风险测度；若 $c > 1$ 时，其单调性需要进一步分析，在这里我们同样不多赘述，有兴趣的读者可以参考Shapiro et al. (2021, 6.3.2)。

9.2 风险度量优化 (Optimization of risk measures)

在本章节我们将介绍风险度量应用在优化问题中的理论。我们定义决策变量的可行域 $\mathcal{Z}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空凸闭子集（nonempty convex closed subset）。考虑复合函数（composition function）$\phi(\cdot) := \rho(F(\cdot))$, 关联了映射 $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 和风险度量 $\rho : \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$。我们将 $[F(z)](\omega)$ 记作 $f(z, \omega)$，可以将 $f(z, \omega)$ 看作定义在测度空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个随机函数。由于 $F(z)$ 是空间 $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个元素，则 $f(z, \cdot)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的，且其数值是有限的。

我们研究的优化问题可以表达为复合函数的最小化问题

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{\phi(z) := \rho(F(z))\right\}. \tag{9.4}$$

在不同的现实问题中，$F(z)$ 和 z 有不同的定义和结构。例如在投资组合优化 (portfolio optimization) 问题中，z 为各个资产的投资比例，$F(z)$ 为其对应的随机成本（收益的负值）；在库存控制（inventory control）问题中，z 为订货量，$F(z)$ 为其对应的库存运营成本。基于定理9.1的结果，我们可将式（9.2）带入到问题（9.4）中得到

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \Phi(z, \zeta),$$

其中 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$ 并且函数 $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathcal{X}^* \to \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$\Phi(z, \zeta) = \int_\Omega f(z, \omega)\zeta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) - \rho^*(\zeta).$$

特别地，当 ρ 为常义下半连续的一致性风险测度时，问题（9.4）可以写成一个最小最大化（minmax）问题

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_\zeta[f(z, \omega)], \tag{9.5}$$

其中符号 $\mathbb{E}_\zeta$ 指针对概率分布 $\zeta d\mathbb{P}$ 的期望。

假设映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 是凸的，即对于几乎处处 $\omega \in \Omega$，函数 $f(\cdot, \omega)$ 都是凸的。这点说明了对于所有的 $\zeta \geq 0$, 函数 $\Phi(\cdot, \zeta)$ 是连续凸函数。我们同时可以得知对 $\zeta \in \mathcal{X}^*$, $\langle F(x), \zeta \rangle$ 是线性的且 $\rho^*(\zeta)$ 是凸的。因此对任意的 $z \in \mathcal{Z}$, 函数 $\Phi(z, \cdot)$ 是凹的。问题 (9.4) 和它互换最小和最大算子得到的对偶问题

$$\max_{\zeta \in \mathcal{A}} \inf_{z \in \mathcal{Z}} \Phi(z, \zeta). \tag{9.6}$$

是没有对偶间隙（duality gap）的。存在一个鞍点（saddle point）$(\bar{z}, \bar{\zeta}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{A}$ 使得其同时为问题 (9.4) 和 (9.6) 的最优解。

命题 9.1: 风险规避优化次微分 (Shapiro et al., 2021)

假设映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 是凸的, 且 $\rho: \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ 是常义、下半连续的凸风险度量，则 $(\bar{z}, \bar{\zeta}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{A}$ 是 $\Phi(z, \cdot)$ 的鞍点当且仅当 $\bar{\zeta} \in \partial \rho(\bar{X})$，以及

$$0 \in N_{\mathcal{Z}}(\bar{z}) + \mathbb{E}_{\bar{\zeta}}[\partial_z f(\bar{z}, \omega)],$$

其中 $\bar{X} := F(\bar{z})$, $N_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ 表示对集合 $\mathcal{Z}$ 的标准锥（norm cone），风险度量的次微分 $\partial \rho(\cdot)$ 定义为

$$\partial \rho(\bar{X}) := \arg\max_{\zeta \in \mathcal{A}} \left\{ \langle \zeta, \bar{X} \rangle - \rho^*(\zeta) \right\}.$$

♠

关于风险度量次梯度的存在性(和次微分非空性)证明, 鞍点和问题 (9.4) 和 (9.6) 最优解之间的充分性和必要性证明, 有兴趣的读者可以参考 (Shapiro et al., 2021, Proposition 6.33，Corollary 6.34，Theorem 6.35.)。上述结论的意义在于对于一些常见的凸优化问题（满足映射 F 是凸的），例如库存控制问题和投资组合优化问题，可以通过搜索鞍点的算法来找到风险规避优化的最优解。关于如何使用设计算法（如原始-对偶次梯度（primal-dual subgradient）算法）来解决该类问题，有兴趣的读者可以参考Drori et al. (2015); Nedić and Ozdaglar (2009); Nesterov (2009) 等相关文献。特别地，我们给出下述两个风险规避优化解决现实问题的例子。

示例 9.5: 风险规避的库存控制 (Risk averse optimization of an inventory model): 该问题的成本函数为

$$F(z, d) = cz + b[d - z]_+ + h[x - d]_+,$$

其中 $c, b, h > 0$ 分别代表订货成本，延期交货和存货成本, z 和 d 分别代表订货量和需求量。这里我们假设 $b > c$，即延期交货成本要高于订货成本。定义随机的需求量 $D \in \mathcal{X} := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。风险规避的优化问题为

$$\min_{z \geq 0} \{C(z) := \rho(F(z, D))\},$$

其中 ρ 是一个特定的风险度量，即我们找到最优的订货量来希望最小化库存运营成本的风险。这里如果我们特别地考虑 ρ 是一致性风险度量时，会有以下的结论

命题 9.2: 库存运营成本风险的等价表达 (Ahmed et al., 2007; Shapiro et al., 2021)

假设 $\mathcal{G}$ 为一个累积概率分布函数（cumulative distribution functions）的集合，其中的元素 $\mathbb{Q} \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{Q}(t) = 0$ 对于 $t < 0$ 和 $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{G}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D] < +\infty$。那么存在一个于集合 $\mathcal{G}$ 和参数 $b/(b+h)$ 相关的累积概率分布函数 $\bar{\mathbb{Q}}$（满足 $\bar{\mathbb{Q}}(t) = 0$ 对于任意 $t < 0$），则库存控制成本的风险度量可以表达为

$$C(z) = b \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{G}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D] + (c-b)z + (b+h)\int_{-\infty}^{z} \bar{\mathbb{Q}}(t)dt. \tag{9.7}$$

♠

基于式子 (9.7)，我们发现最优的订货量其实是分布 $\bar{\mathbb{Q}}$ 的 $\frac{b-c}{b+h}$ 分位数 (quantile)。对于特定的某些一致性风险测度，我们可以得到 $\bar{\mathbb{Q}}$ 解析形式。例如我们可以考虑一类风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \inf_{\eta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left\{\beta_1[\eta - X]_+ + \beta_2[X-\eta]_+\right\},$$

其中 $\beta_1 \in [0, 1]$ 和 $\beta_2 \geq 0$。特别地我们假设需求量是在 $[0, 1]$ 上满足均匀分布的，则

$$\bar{\mathbb{Q}}(t) := \max\left\{(1-\beta_1)t, (1+\beta_2)t - \beta_2\right\}, \forall t \in [0, 1].$$

而当 $\beta_1 = 1$ 且 $\alpha = 1/(1+\beta_2)$ 时，风险度量即为 CVaR_α，此时的最优订货量为

$$z^* = 1 - \alpha + \sqrt{\frac{2\alpha(b-c)}{b+h}}.$$

示例 9.6: 风险规避的投资组合优化 (Risk averse portfolio selection)：我们考虑如下风险规避的投资组合优化问题。假设一共有 n 个资产，每一个资产回报是随机的，用 $\xi_i, i = 1, \ldots, n$。现在我们希望将总量为 W_0 的预算分配到各个资产当中，使得投资的损失 (回报的负值) 风险最小化。

$$\min_{z\in\mathcal{Z}} \rho(-\sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i), \tag{9.8}$$

其中 $\mathcal{Z} := \left\{z \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} z_i = W_0, z \geq 0\right\}$。如果我们考虑 ρ 为一致性风险度量，根据最小最大表达式（9.5），我们可以把问题（9.8）转化为如下形式

$$\min_{z\in\mathcal{Z}} \sup_{\zeta\in\mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} \left(-\mathbb{E}_\zeta[\xi_i]\right) z_i,$$

等价于

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} \inf_{\zeta\in\mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}_\zeta[\xi_i]\right) z_i. \tag{9.9}$$

由于集合 $\mathcal{Z}$ 是一个紧集 (compact set)，问题 (9.8) 存在一个最优解 z^*。问题 (9.9) 存在一个鞍点，且 (z^*, ζ^*) 是鞍点当且仅当其满足 $\zeta^* \in \partial\rho(\bar{X})$ 以及 $z^* \in \arg\max_{z\in\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i z_i$，其中 $\bar{X}(\omega) := -\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) z_i^*$ 且 $\bar{u}_i := \mathbb{E}_{\zeta^*}[\xi_i]$。我们可以将上述风险规避最优解 (z^*, ζ^*)

的求解看成一个博弈问题。当 $W_0 = 1$ 时，投资分配 z 可以看成投资者的混合策略（mixed strategy）（对于其他的 W_0，z_i/W_0 可以看成一个混合策略）。测度 ζ 代表对手（市场）的混合策略。这个混合策略是从集合 $\mathcal{A}$ 中选取的。风险规避的最优解是这个博弈问题的均衡策略。不难发现集合 $\arg\max_{z\in\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i z_i$ 可由向量 $W_0 e_i, i \in \mathfrak{L}$ 的凸组合 (convex combination) 组成，其中 $e_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个坐标向量 (coordinate vector) (除了第 i 个元素为 1 外，其他元素皆为 0)，集合 $\mathfrak{L} := \{i' : \bar{\mu}_{i'} = \max_{1\le i\le n} \bar{\mu}_i, i' = 1, ..., n\}$。此外，根据命题 (9.2) 中对风险度量次微分的定义，我们也得知次微分满足 $\partial\rho(\bar{X}) \subset \mathcal{A}$.

9.3 偏好鲁棒优化 (Preference robust optimization)

在本章最后，我们介绍偏好鲁棒优化（preference robust optimization）的相关内容。偏好鲁棒优化是鲁棒优化近年来的一个新兴方向。偏好鲁棒优化所研究的不确定性并非来源于环境和模型（如鲁棒优化模型的参数和分布鲁棒优化模型的概率分布），而是来自于决策者本身对风险的偏好 (风险偏好相对于风险度量是更广义的概念，风险度量是对决策者风险偏好的一类建模方式)。

Grable and Lytton (1999) 设置一个简单的调查来研究不同人的风险偏好：决策者需要从以下四种方案中选择一种：A）拿到 1000 美元；B）有 50% 的概率拿到 5,000 美元；C）有 25% 的概率拿到 10,000 美元；D）有 5% 的概率拿到 100,000 美元。如果只考虑最大化期望收益那么方案 D 是最优的。但在实际调查时，依旧有决策者选择了其他的几个方案，其原因是决策者对风险偏好的不同。对于极端风险厌恶的决策者而言，方案 A 是保证收益最稳妥的方案。所以在实际的决策问题中，我们很难设置一个固定的风险度量来精确反应任何决策者对于风险的偏好。事实上对于决策者自己来讲，常常也无法使用一个精确的数学模型来表达自己的风险偏好。如何在决策者的风险偏好信息不完整的情况下，依然得到可靠性高的决策呢？偏好鲁棒优化就是来解决这类问题的。

Armbruster and Delage (2015) 研究了基于期望效用函数（expected utility）理论的偏好鲁棒优化问题。假设决策者的效用函数属于某一个集合 $\mathcal{U}$，有一类偏好鲁棒优化问题可以写成如下的形式

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} \left\{ \psi(z; \mathcal{U}, X) := \inf_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}[u(f(z,\xi) - u(X)] \right\} \tag{9.10}$$

其中函数 $f(z, \xi)$ 基于决策变量 z 和随机变量 ξ 的一个映射，随机变量 X 代表决策的基准。问题（9.10）可以理解成效用最坏情况下的使 $f(z, \xi)$ 和 X 之间期望效用差距越大越好。事实上我们还发现该目标保证了 $f(z, \xi)$ 二次随机占优（second-order stochastic dominance）于 X 是恒成立的。

集合 $\mathcal{U}$ 包含了满足某些性质的所有效用函数，可由以下集合来描述：

$$\mathcal{U}_2 := \{u : u\text{是单调递增且凹的}\},$$

$$\mathcal{U}_s := \{u: \ u\text{是单调递增的,在}(-\infty, 0]\text{上是凸的,在}[0, \infty)\text{上是凹的}\},$$

$$\mathcal{U}_3 := \{u: \ \text{一阶导数}u'\text{存在且是凸的}\},$$

$$\mathcal{U}_n := \{u: \ \mathbb{E}[W_0] - \mathbb{E}[Y_0] = 1\},$$

$$\mathcal{U}_a := \{u: \ \mathbb{E}[W_k] \geq \mathbb{E}[W_k], \forall k = 1, ..., K\},$$

其中 $W_0, ..., W_K, Y_0, ..., Y_K$ 是随机变量代表不同的奖券（lottery）。$\mathcal{U}_2$ 描述了风险规避的特性。$\mathcal{U}_s$ 描述了 S 形的函数，即在收益上是风险规避的，在损失上是风险喜好的。$\mathcal{U}_3$ 描述了谨慎型效用函数（prudent utility）。$\mathcal{U}_n$ 用来进行归一化。最后偏好抽取（preference elicitation）集合 $\mathcal{U}_a$ 代表了对于任意的 k，决策者对奖券 W_k 的偏好都要高于 Y_k，这个集合需要通过和决策者互动提问得到。其中集合 $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_n$ 称为全局（global）信息，是该类决策者的效用函数都需要服从的性质，独立于决策者个体。集合 $\mathcal{U}_a$ 称为局部（local）信息，反映特定决策者效用的情况。效用函数的集合 $\mathcal{U}$ 便是由各类全局信息的组合与局部信息的交集构成的。

我们以集合 $\mathcal{U}^2 := \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_a$ 为例来进行研究。该集合包含了所有单调递增的凹效用函数，且满足一定的局部信息。一个重要的问题是如何将问题（9.10）转化成为一个有限维的易处理的（finite dimentional and tractable）优化问题。我们假设这里所有的随机变量 $X, W_0, ..., W_K, Y_0, ..., Y_K$ 的支集是有限的 (finite support)。随机变量的支集用 supp 符合表示。集合 $\mathcal{S} = \text{supp}(X) \cup \bigcup_{k=0}^{K} (\text{supp}(Y_k) \cup \text{supp}(W_k))$，同时集合 $\mathcal{S}$ 对所有随机变量的结果（outcome）进行从小到大的排序。我们用 $\bar{y}_j$ 代表集合 $\mathcal{S}$ 中第 j 小的结果。我们用 i 表示随机变量 ξ 事件的序号（事件的总数为 M），以 j 表示集合 $\mathcal{S}$ 内结果的序号（总数为 $N := |\mathcal{S}|$），用 k 来代表奖券比选的序号，总共有 K 组。

定理 9.2: 偏好鲁棒优化的线性规划表达 (Armbruster and Delage, 2015, Theorem 1)

以下线性规划问题的最优值

$$\min_{\alpha, \beta, v, w} \sum_i p_i(v_i h(z, \xi_i) + w_i) - \sum_j \mathbb{P}[X = \bar{y}_j]\alpha_j \tag{9.11}$$

$$\text{s.t. } \bar{y}_j v_i + w_i \geq \alpha_j, \quad \forall i = 1, ..., M, \ \forall j = 1, ..., N, \tag{9.12}$$

$$\sum_j \left(\mathbb{P}[W_0 = \bar{y}_j]\alpha_j - \mathbb{P}[Y_0 = \bar{y}_j]\alpha_j\right) = 1, \tag{9.13}$$

$$\sum_j \mathbb{P}[W_k = \bar{y}_j]\alpha_j \geq \mathbb{P}[Y_k = \bar{y}_j]\alpha_j, \quad \forall k = 1, ..., K, \tag{9.14}$$

$$(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \geq \beta_{j+1}(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j), \quad \forall j = 1, ..., N-1, \tag{9.15}$$

$$(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \leq \beta_j(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j), \quad \forall j = 1, ..., N-1, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\beta} \geq 0, \tag{9.17}$$

对于给定的 $z \in \mathcal{Z}$, 等于函数值 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$。此外，最坏情况情况下的效用函数

（取到 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$ 中的最小值）可以表达为

$$u^*(y) = \begin{cases} \alpha_N, & y \geq \bar{y}_N, \\ \frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{\bar{y}_{j+1}-\bar{y}_j} y + \frac{\bar{y}_{j+1}\alpha_j - \bar{y}_j\alpha_{j+1}}{\bar{y}_{j+1}-\bar{y}_j}, & \bar{y}_j \leq y \leq \bar{y}_{j+1}, \\ -\infty, & y < \bar{y}_1. \end{cases}$$

上述的函数是一个分段线性（piecewise linear）函数连接了满足 $u(\bar{y}_j) = \alpha_j$ 的各点，其次梯度为 $\beta_j \in \partial u(\bar{y}_j)$。

定理 9.2 表明了偏好鲁棒优化的内层问题 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$ 等价于求解一个有限维的线性规划问题，包含 $2(N+M)$ 个决策变量和 $MN+K+M+2N-1$ 个约束。定理 9.2 的难点在于推导目标函数（9.11）和约束（9.13），其利用了效用函数满足单调递增和凹的条件，所以对于给定的事件 ξ_i 所在的线性分段，其对于 $\bar{y}_j$ 的函数值不会低于其最坏情况情况下的效用函数值 α_j。

Armbruster and Delage (2015) 使用类似的思想给出了 S 形效用函数和谨慎型效用函数的等价线性规划表达。同时他们还考虑出了问题（9.10）外的其他偏好鲁棒优化问题，包括了随机占优约束问题和鲁棒确定等值 (certainty equivalent) 。此外他们也研究如何用尽可能少的问题来构建偏好抽取集合来降低等价线性规划问题的规模，以及如何消除偏好抽取集合中包含的各类错误和偏差。通过实验发现，当 K 增大的时候，风险偏好的不确定性会逐渐消除，最坏情况下的效用函数也逐步逼近决策者真实的效用函数。当 $K = 80$ 时已经能得到质量非常高的决策结果（即接近决策真实的最优决策）

近年来，偏好鲁棒优化领域得到了长足的关注和发展。有一些比较有代表性的工作。Delage and Li (2018) 建立了基于凸风险度量的偏好鲁棒优化理论。后续一些研究分别考虑了特定风险度量的偏好鲁棒优化，包括了频谱风险度量（Wang and Xu (2020); Guo and Xu (2021a)）和亏空（shortfall）风险度量（Zhang et al. (2020); Guo and Xu (2021b); Delage et al. (2022)）等。Haskell et al. (2016) 同时考虑了偏好鲁棒和分布鲁棒结合的优化问题。Wu et al. (2020); Haskell et al. (2022) 研究了多准则（multi-attribute）偏好鲁棒优化问题，分别基于结果空间和概率分布空间来构建选择函数（choice function）集合，他们提出的选择函数理论相比效用函数理论和风险度量理论包含了更多的决策者偏好，也能消除现有的决策分析当中的一些悖论。Liu et al. (2021) 将偏好鲁棒的思想扩展到了多阶段决策问题中。有兴趣的读者可以深入阅读上述文献。

本章参考文献

Acerbi, Carlo, "Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion," *Journal of Banking & Finance*, 2002, *26* (7), 1505–1518.

Ahmed, Shabbir, Ulaş Çakmak, and Alexander Shapiro, "Coherent risk measures in inventory problems," *European Journal of Operational Research*, 2007, *182* (1), 226–238.

Armbruster, Benjamin and Erick Delage, "Decision making under uncertainty when preference information is incomplete," *Management science*, 2015, *61* (1), 111–128.

Balbás, Alejandro, José Garrido, and Silvia Mayoral, "Properties of distortion risk measures," *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2009, *11* (3), 385–399.

Delage, Erick and Jonathan Yu-Meng Li, "Minimizing risk exposure when the choice of a risk measure is ambiguous," *Management Science*, 2018, *64* (1), 327–344.

__ , Shaoyan Guo, and Huifu Xu, "Shortfall Risk Models When Information on Loss Function Is Incomplete," *Operations Research*, 2022.

Drori, Yoel, Shoham Sabach, and Marc Teboulle, "A simple algorithm for a class of nonsmooth convex–concave saddle-point problems," *Operations Research Letters*, 2015, *43* (2), 209–214.

Grable, John and Ruth H Lytton, "Financial risk tolerance revisited: the development of a risk assessment instrument," *Financial services review*, 1999, *8* (3), 163–181.

Guo, Shaoyan and Huifu Xu, "Robust spectral risk optimization when the subjective risk aversion is ambiguous: a moment-type approach," *Mathematical Programming*, 2021, pp. 1–36.

__ and __ , "Statistical robustness in utility preference robust optimization models," *Mathematical Programming*, 2021, *190* (1), 679–720.

Haskell, William B, Huifu Xu, and Wenjie Huang, "Preference robust optimization for choice functions on the space of CDFs," *SIAM Journal on Optimization*, 2022, *32* (2), 1446–1470.

__ , Lunce Fu, and Maged Dessouky, "Ambiguity in risk preferences in robust stochastic optimization," *European Journal of Operational Research*, 2016, *254* (1), 214–225.

Kusuoka, Shigeo, "On law invariant coherent risk measures," in "Advances in mathematical economics," Springer, 2001, pp. 83–95.

Liu, Jia, Zhiping Chen, and Huifu Xu, "Multistage Utility Preference Robust Optimization," *arXiv preprint arXiv:2109.04789*, 2021.

Nedić, Angelia and Asuman Ozdaglar, "Subgradient methods for saddle-point problems," *Journal of optimization theory and applications*, 2009, *142* (1), 205–228.

Nesterov, Yurii, "Primal-dual subgradient methods for convex problems," *Mathematical programming*, 2009, *120* (1), 221–259.

Ruszczyński, Andrzej and Alexander Shapiro, "Optimization of convex risk functions," *Mathematics of operations research*, 2006, *31* (3), 433–452.

Shapiro, Alexander, "On Kusuoka representation of law invariant risk measures," *Mathematics of Operations Research*, 2013, *38* (1), 142–152.

__ , Darinka Dentcheva, and Andrzej Ruszczyński, *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*, Vol. 28, SIAM, 2021.

Wang, Wei and Huifu Xu, "Robust spectral risk optimization when information on risk spectrum is incomplete," *SIAM Journal on Optimization*, 2020, *30* (4), 3198–3229.

Wu, Jian, William B Haskell, Wenjie Huang, and Huifu Xu, "Preference robust optimization with quasi-concave choice functions for multi-attribute prospects," *arXiv preprint arXiv:2008.13309*, 2020.

Zhang, Yuan, Huifu Xu, and Wei Wang, "Preference robust models in multivariate utility-based shortfall risk minimization," *Optimization Methods and Software*, 2020, pp. 1–41.