第 6 章 目标鲁棒性优化（Robust Satisficing）

周明龙

6.1 满意度优化模型（Satisficing Models）

当考虑复杂系统中的优化问题时，决策者通常会将复杂的系统简化后并求得对于简化系统的最优解，或选择在复杂系统中找到一个较为理想的解。在经济学中，Simon (1955) 在其有限理性模型（bounded rationality model）中指出在现实生活中决策者更倾向于找到一个较为理想并有效可行的方案。例如，企业决策者可以将利润作为一个约束条件并使其尽可能达到一定的理想程度（aspirational level），而不是将其作为目标函数来进行最大化。Simon (1959) 将这样的决策方式称为 **satisficing**。Satisficing 一词由 satisfy 和 suffice 合并产生，直观的描述了决策者寻求一个足够好并使人满意的方案。经济学和心理学中常用 Satisficing 理论来研究决策者在不确定环境下的决策过程。在 satisficing 的框架下，出现了许多优化模型。Charnes and Cooper (1963) 最早将 satisficing 的思想融入优化模型中以最大化约束满足的概率。此模型被称为 P-model，其简化形式可以写为：

$$\begin{array}{ll} \max & \ln \mathbb{P}\left(\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\tilde{\boldsymbol{z}})\right) \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{array}$$

P-model 假设随机参数的分布是已知的。决策者依据能够同时满足全部约束的可能性大小来对各决策进行排序，并选取其中最有可能同时满足全部约束的决策为最优决策。例如，当约束集包含利润目标时，P-model 会倾向于更稳定的达到目标利润的解，而不是给予决策者最大期望利润的解。P-model 是一个非线形的优化问题，因此在实际问题中不容易求解。以下，我们先介绍两类更加实际可行，并且在目前被广泛应用的满意度优化模型。

6.1.1 基于最大参数不确定集合的满意度模型（Satisficing models based on maximal uncertainty sets）

P-model 的目标函数，$v(\boldsymbol{x}) = \ln \mathbb{P}\left(\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\tilde{\boldsymbol{z}})\right)$，可被看作一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）。让我们首先定义一个约束可行集合（tolerance set）$\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ 来表示所有使得决策 $\boldsymbol{x}$ 保持可行的参数集合。例如，在 P-model 中，$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z} \mid \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z})\}$.

Jaillet et al. (2016) 对 satisficing decision criterion 进行了如下的定义：

定义 6.1: Satisficing decision criterion

给定一系列约束可行集合（tolerance set）$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{Z}$，$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$。函数 $\nu : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）当且仅当其符合以下两个性质。对于所有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$，

1. Satisficing dominance：如果 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathcal{T}(\boldsymbol{y})$，那么 $\nu(\boldsymbol{x}) \le \nu(\boldsymbol{y})$。
2. Infeasibility：如果 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \emptyset$，那么 $\nu(\boldsymbol{x}) = -\infty$。

♣

如以上定义的满意度方法的决策准则存在一个关于参数不确定集合的表示定理。Jaillet et al. (2016) 提出以下结论。

定理 6.1: 满意度方法决策准则的表示定理（Representation theorem）

一个函数 $\nu : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）当且仅当

$$\nu(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}} \{\rho(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})\}.$$

其中 $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个定义域在 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n_\alpha}$ 的函数，$\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{Z}$ 是定义在所有 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}$ 上的一系列参数不确定集合。

♡

基于以上定理，Jaillet et al. (2016) 提出如下基于最大参数不确定集合的满意度模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho(\boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\ & \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

一般地，对参数化不确定集合 $\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})$, 可行决策 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 需要满足鲁棒约束

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}).$$

参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 决定了不确定集合 $\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})$ 的大小，函数 $\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 则反映了决策者对这一参数的喜好程度。

最简单的，取一维参数 α，$\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$，和 $\rho(\alpha) = \alpha$, 上述模型即变为

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\alpha), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\ & \alpha \ge 0. \end{aligned}$$

Jaillet et al. (2016) 称之为鲁棒性优化（robustness optimization）模型。

从 Satisficing 理论出发，鲁棒性优化模型为一般鲁棒优化模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\Gamma), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

提供了新的解释。一般鲁棒优化模型需要决策者声明自己对不确定性的偏好，即声明不确定集合 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 的大小。不确定集合 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 的大小通常由参数 Γ 直接调控。例如，Bertsimas and Sim (2004) 提出的鲁棒价格 Γ 调控了不确定参数中有多少成分能够同时取到最坏情况。对于一些决策者而言，这并不是一件容易的事，因为他们对自己的偏好并没有清楚的认识；相反，声明自身可接受的成本（亦即 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$）也许更容易。对这样的决策者而言，求解如下鲁棒性优化模型或许更为直观

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\alpha), \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\
& \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq B, \\
& \alpha \geq 0.
\end{aligned}
$$

在可控成本范围内（$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq B$），在更大的不确定集合影响下依然能满足不确定性约束的决策则更优。这样的决策标准，正好可以在 Satisficing 理论的框架下进行解释。本节讨论的基于最大参数不确定集合的满意度模型的思想已经被应用在了许多实际问题当中，例如Zhu et al. (2021).

6.1.2 目标满意度优化模型（shortfall-based satisficing models）

Brown and Sim (2009) 提出的满意度模型是基于目标差额（target premium）的满意度模型。考虑一个可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和在 Ω 上的所有随机变量的集合 $\mathcal{L}$。一个随机变量 $\tilde{\xi} \in \mathcal{L}$ 表示一个随机回报。为了方便，我们用 $\tilde{\xi}_1 \geq \tilde{\xi}_2$ 来表示 $\tilde{\xi}_1(\omega) \geq \tilde{\xi}_2(\omega)$，$\forall \omega \in \Omega$。我们定义目标差额为 $\tilde{v} := \tilde{\xi} - \tau$，其中 $\tilde{\xi} \in \mathcal{L}$，$\tau$ 是一个对于回报的目标（target）。在此定义下，目标差额 $\tilde{v}$ 表示超过目标的回报。对于目标差额的满意度测量的一个直观描述是目标差额大于等于零的概率，$\mathbb{P}(\tilde{v} \geq 0)$。

那么是否存在一个更加广义的描述来定义对于目标差额的满意度呢？Brown and Sim (2009) 对目标满意度（satisficing measure）进行了如下定义。

定义 6.2: 目标满意度（Satisficing measure）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个定义在目标差额上的目标满意度当且仅当它有以下性质。对于所有 $\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathcal{L}$：

1. Attainment content：如果 $\tilde{v} \geq 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = \bar{\rho}$。
2. Nonattainment apathy：如果 $\tilde{v} < 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = 0$。
3. Monotonicity：如果 $\tilde{v}_1 \geq \tilde{v}_2$，那么 $\rho(\tilde{v}_1) \geq \rho(\tilde{v}_2)$。
4. Gain continuity：$\lim_{a \downarrow 0} \rho(\tilde{v} + a) = \rho(\tilde{v})$. ♣

基于目标差额的目标满意度也存在一个简洁的表示定理。Brown and Sim (2009) 提出此表示定理并展示了目标满意度与风险测度（risk measure）之间的关系。我们首先来定义风险测度。

定义 6.3: 风险测度（Risk measure）

当一个函数 $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ 具有以下性质时，它被称作一个风险测度。对于所有 $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \in \mathcal{L}$:

1. Monotonicity：如果 $\tilde{\xi}_1 \geq \tilde{\xi}_2$，那么 $\mu(\tilde{\xi}_1) \leq \mu(\tilde{\xi}_2)$。
2. Translation invariance：如果 $c \in \mathbb{R}$，那么 $\mu(\tilde{\xi}_1 + c) = \mu(\tilde{\xi}) - c$。 ♣

风险测度表示一个最小的确定性回报以使得随机回报 $\tilde{\xi}$ 可以被接受，而可被接受的条件即为定义风险测度的一个要素。常见的风险测度包括 value-at-risk，conditional value-at-risk 和 entropic risk measure。在此文中，我们不对风险测度的理论进行更加深入的探讨。对风险测度有兴趣的读者可以参考Föllmer and Schied (2002) 和Föllmer et al. (2004)。

基于目标满意度和风险测度的定义，Brown and Sim (2009) 提出了以下表示定理。

定理 6.2: 基于风险测度的的表示定理（Representation theorem）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个目标满意度（satisficing measure）当且仅当存在一系列风险测度 $\{\mu_\alpha | \alpha \in (0, \bar{\rho}]\}$ 使得

$$\rho(\tilde{v}) = \sup\{\alpha > 0 \mid \mu_\alpha(\tilde{v}) \leq 0\}.$$

其中 μ_α 在 $\alpha \in (0, \bar{\rho}]$ 中不递减，并且 $\mu_0 = -\infty$。相类似的，给定任何目标满意度 ρ, 其相对应的风险测度可被写为

$$\mu_k(\tilde{v}) = \inf\{a \mid \rho(\tilde{v} + a) \geq k\}.$$ ♡

上述定理确立了每个目标满意度函数都可以用一系列风险测度来描述。同样的，给定一个目标满意度函数。我们也可以构造出其对应的风险测度。此定理展示了在经济学中常见的风险测度和目标满意度之间的关联，并赋予了目标满意度一个实际的含义。具体来说，目标满意度量化了决策者达成回报目标的同时可以接受的最大风险厌恶程度。在实际应用中，我们常用凸风险测度（convex risk measure）和一致性风险测度（coherent risk measure）来构造目标满意度，以得到更好的性质，如拟凹和一致性。

定义 6.4: 拟凹目标满意度（Quasiconcave satisficing measure）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个定义在目标差额上的拟凹目标满意度当且仅当它符合目标满意度定义并有以下性质。对于所有 $\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathcal{L}$:

1. Quasiconcavity：对于任何 $\lambda \in [0, 1]$，$\rho(\lambda\tilde{v}_1 + (1 - \lambda)\tilde{v}_2) \geq \min\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$。

另外，如果 ρ 还满足以下条件，那么它被称为一致性目标满意度（coherent satisficing measure）。对于任何 $\lambda > 0$:

2. Scale invariance：$\rho(\lambda\tilde{v}) = \lambda\rho(\tilde{v})$。 ♣

定理 6.3: 拟凹与一致性目标满意度

一个函数目标满意度 ρ 是一个拟凹目标满意度当且仅当其对应的风险测度 $\{\mu_\alpha|\alpha \in (0,\bar{\rho}]\}$ 是一系列凸风险测度。类似的，目标满意度 ρ 是一个一致性目标满意度当且仅当其对应的风险测度 $\{\mu_\alpha|\alpha \in (0,\bar{\rho}]\}$ 是一系列一致性风险测度。♡

接下来我们考虑如何求解以下的目标满意度优化模型：

$$\rho^* = \max_{\tilde{v}\in\mathcal{L}} \rho(\tilde{v}).$$

以上模型可以被写为以下等价模型

$$\begin{aligned} \rho^* = \quad & \max \quad \alpha \\ & \text{s.t.} \quad \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0, \\ & \qquad\ \ \tilde{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

对于任意 $\alpha > 0$，集合 $\{\tilde{v} \in \mathcal{L} \mid \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0\}$ 是一个凸集合。因此，我们可以使用二分法来解决以上目标满意度优化问题。在二分法步骤中，每个子问题都是一个对于一个给定的 $\alpha > 0$ 值的可行性问题：

$$\begin{aligned} & \max \quad 0 \\ & \text{s.t.} \quad \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0, \\ & \qquad\ \ \tilde{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

具体的二分法步骤可以参考Brown and Sim (2009)，我们在此不再详细描述。

此类目标满意度模型已经被广泛应用到很多实际问题当中。在实际应用中，大家经常会选择用 conditional value-at-risk 和 entropic risk measure 来构造目标满意度。例如，基于 conditional value-at-risk 的目标满意度被应用在Zhang et al. (2019)；基于 entropic risk measure 的目标满意度被应用在Hall et al. (2015); Zhou et al. (2021)。我们推荐感兴趣的读者参考这一系列的文献以进一步了解目标满意度优化模型的应用。

6.2 目标鲁棒性优化（Robust satisficing）

Long et al. (2022) 提出了一个数据驱动的满意度优化的框架。此框架被称为 Robust Satisficing，译为目标鲁棒性优化。

考虑一个成本函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) : \mathcal{X}\times\mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 代表决策变量，$\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}$ 表示影响成本的一系列不确定性参数。当不确定性参数为随机变量并服从某个分布 $\mathbb{P}^*$ 时，决策者常常考虑以下风险中性的优化模型：

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})] \\ & \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

虽然我们在实际当中通常无法知晓模型中不确定性参数的真实分布 $\mathbb{P}^*$，但是决策者可以利用历史数据来估测或近似不确定性参数的分布。我们用 $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_S$ 来代表历史数据中的 S 个对于随机参数取值的观测，并用 $\hat{\mathbb{P}}$ 来表示经验分布（empirical distribution）。对于任何 $s \in [S]$，$\hat{\mathbb{P}}[\tilde{z} = \hat{z}_s] = 1/S$。我们可以利用以下 empirical optimization 方法来近似最优期望成本：

$$\begin{aligned} Z_0 = \min \quad & \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

当经验分布不能够准确的近似真实分布时，基于经验分布的 empirical optimization 方法可能会得到较差的解。

为了减少解对经验分布的过度拟合（overfitting），我们可以借助鲁棒优化的思想。我们首先定义一个数据驱动模糊集

$$\mathcal{B}(r) := \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{z} \sim \mathbb{P} \\ \Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) \leq r \end{array} \right\}$$

其中，$\mathcal{P}_0(\mathcal{Z})$ 代表定义在 $\mathcal{Z}$ 上的分布的集合，Δ 是一个非负的函数，并满足 $\Delta(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = 0$。$\Delta$ 代表了两个分布之间的距离，在数据驱动的分布鲁棒优化框架下，我们常选用 Wasserstein distance (例如, Mohajerin Esfahani and Kuhn, 2018; Gao and Kleywegt, 2016)。我们考虑以下数据驱动的分布鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} Z_r = \min \quad & \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{B}(r)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

当 Δ 被定为 Wasserstein distance 时，以上分布鲁棒优化模型可以被转化为一个简洁的传统鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & kr + \frac{1}{S} \sum_{s \in [S]} y_s \\ \text{s.t.} \quad & y_s \geq \sup_{z_s \in \mathcal{Z}} \left\{ f(\boldsymbol{x}, z_s) - k\|z_s - \hat{z}_s\| \right\} \quad \forall s \in [S], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

我们现在考虑另一种减少对经验分布过度拟合的框架，即Long et al. (2022) 提出的目标鲁棒性优化框架。目标鲁棒性优化一般被写为以下形式：

$$\begin{aligned} \kappa_\tau = \quad \min \quad & k \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] - \tau \leq k\Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) \qquad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中，$\tau \geq Z_0$ 为模型参数，表示一个目标成本预算。

由于不确定性参数的真实分布 $\mathbb{P}^*$ 很可能与经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 不同，基于经验分布而得到的最优成本 Z_0 在实际中常常是无法达到的。为了提高模型的鲁棒性，目标鲁棒性优

化模型设置一个目标成本 $\tau \geq Z_0$，并尽可能的在不确定性环境中达到目标成本 τ。当 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x},\tilde{z})] \geq \tau$，我们说在分布 $\mathbb{P}$ 下的期望成本超过了目标成本。在目标鲁棒性优化的框架下，在任何分布 $\mathbb{P}$ 下，期望成本超过目标成本的大小会被 Δ 函数限制。从直观上讲，目标鲁棒性优化模型旨在最小化模型的脆弱性（fragility）。具体来说，系统的脆弱性是通过其目标函数 κ_τ 衡量的。当目标鲁棒性优化的目标函数变小，亦即 κ_τ 变小，在任何分布 $\mathbb{P}$ 下的期望成本的上界都会更靠近目标成本。因此，当 κ_τ 变小时，目标鲁棒性优化模型的最优解也就能更好的将期望成本控制在目标成本附近。

与鲁棒优化不同，目标满意度优化模型考虑了所有可能的分布 $\{\mathbb{P} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z})\}$，而不只是在模糊集中的分布 $\{\mathbb{P} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{B}(r)\}$。决策者不再设定模糊集的大小 r，而是设定目标成本 τ。由于目标成本 τ 可以直接联系到经验分布优化模型的目标函数 Z_0，我们认为 τ 是一个更加容易理解并有具体意义的模型参数。例如，对于一个 $\alpha \geq 1$，决策者可以将目标成本设置为 $Z_0(1+\alpha)$，表示我们可以接受比经验分布下的最优期望成本多 $\alpha\%$ 的成本。

模型(6.3)是否可解很大程度上取决于函数 f 和 Δ 的形式。在本文中，我们只着重于 Δ 为 Wasserstein distance 的情况。在此情况下，模型(6.3)可以被写为：

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad \min \quad & k \\
\text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(\boldsymbol{x},\tilde{z})] - \tau \leq k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\|\tilde{z} - \tilde{\boldsymbol{u}}\|] \qquad \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad k \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

其中，我们定义模糊集

$$
\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\tilde{z}, \tilde{\boldsymbol{u}}) \sim \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}[\tilde{\boldsymbol{u}} = \hat{z}_s] = 1/S \;\forall s \in [S] \end{array} \right\}.
$$

当集合 $\mathcal{Z}$ 为凸并是闭集时，模型(6.4)可以被写为以下的传统鲁棒优化模型：

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad \min \quad & k \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]} y_s \leq \tau \\
& y_s \geq \sup_{z_s \in \mathcal{Z}} \{f(\boldsymbol{x}, z_s) - k\|z_s - \hat{z}_s\|\} \qquad \forall s \in [S], \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, k \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

模型(6.5)与模型(6.2)在形式上有很多共同之处。这也使得目标鲁棒性优化模型与分布鲁棒优化模型的复杂度相似。基于 Wasserstein distance 的性质，目标鲁棒性优化模型有以下的样本外表现保障：

命题 6.1: 样本外表现保障

考虑 Wasserstein distance，Δ。假设产生真实数据的分布 $\mathbb{P}^*$，$\tilde{z} \sim \mathbb{P}^*$，是一个轻尾分布（light-tailed distribution），并对于一个 $\alpha > 1$ 满足

$$
\delta := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\exp(\|\tilde{z}\|^\alpha)] < \infty.
$$

让 $\mathbb{P}^S$ 表示从 $\mathbb{P}^*$ 中抽取独立样本 $\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_S$ 的分布。对于模型(6.4)的任何可行解 $\boldsymbol{x}$ 和 k，我们有以下不等式

$$\mathbb{P}^S\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[f\left(\boldsymbol{x},\tilde{z}\right)\right]>\tau+kr\right]\leq\begin{cases}c_1\exp(-c_2Sr^{\max\{N,2\}}) & \text{if } 0<r\leq 1,\\ c_1\exp(-c_2Sr^{\alpha}) & \text{if } r>1,\end{cases}$$

其中 c_1 和 c_2 是只取决于 α，δ 和 N 的正常数。♠

目标鲁棒性优化的解可以以高概率保证真实的期望成本与目标成本之间的差距不会超过 kr。并且，这个概率上界对于 r 以指数形式缩减。因此，目标鲁棒性优化模型的可行解对于更大的目标超额拥有更高的概率保证。对于同一组参数 c_1，c_2，α，δ 和 r，减小 k 可以在不影响概率上界的前提下减少目标超额。换言之，增长模型的鲁棒性和减少 k 的值是相互统一的，而目标鲁棒性优化的目标函数正是最小化 k。

6.2.1 目标脆弱度（Fragility measure）

注意到模型(6.1)的决策标准为最差期望。最差期望是一个一致性风险测度，拥有良好的性质以促进分布鲁棒优化得到更合理的解。那么，目标鲁棒性优化模型的决策标准是否也有一系列良好的性质呢？我们首先来定义目标鲁棒性优化模型的决策标准，目标脆弱度（Fragility measure）。考虑一个可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 和在 Ω 上的所有随机变量的集合 $\mathcal{L}$，并用 $\mathcal{P}_0$ 表示这个空间上的所有分布的集合。我们用一个随机变量 $\tilde{v}\in\mathcal{L}$ 来表示在一个给定的 $\boldsymbol{x}$ 下不确定性的目标超额 $f(\boldsymbol{x},\tilde{z})-\tau$。

定义 6.5: 目标脆弱度（Fragility measure）

一个函数 $\rho:\mathcal{L}\to[0,+\infty]$ 是一个定义在经验分布 $\hat{\mathbb{P}}\in\mathcal{P}_0$ 上的目标脆弱度当且仅当它符合以下表达形式：

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{v})=\quad&\min\quad k\\ &\text{s.t.}\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{v}\right]\leq k\Delta(\mathbb{P},\hat{\mathbb{P}})\qquad\forall\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0,\\ &\qquad\quad k\geq 0.\end{aligned}$$

其中，Δ 是一个测量分布间距离的函数，Δ 非负，并满足 $\Delta(\mathbb{P},\mathbb{P})=0$。♣

基于上述目标脆弱度的定义，目标鲁棒性优化模型(6.3)可以被写为以下简化形式：

$$\begin{aligned}\kappa_\tau=\quad&\min\quad\rho(f(\boldsymbol{x},\tilde{z})-\tau)\\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}.\end{aligned}$$

换言之，目标鲁棒性优化模型旨在最小化一个目标脆弱度。接下来我们研究目标脆弱度是否具有合理的决策准则所需的良好的性质。

定理 6.4: 目标脆弱度的性质

一个定义在分布 $\hat{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_0$ 上的目标脆弱度 $\rho : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ 是一个有下半连续性的函数，并具有以下性质：

1. Monotonicity: 如果对于所有的 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$ 都满足 $\mathbb{P}[\tilde{v}_1 \geq \tilde{v}_2] = 1$，那么 $\rho(\tilde{v}_1) \geq \rho(\tilde{v}_2)$.
2. Positive homogeneity: 对于任何 $\lambda \geq 0$，$\rho(\lambda\tilde{v}) = \lambda\rho(\tilde{v})$。
3. Subadditivity: $\rho(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) \leq \rho(\tilde{v}_1) + \rho(\tilde{v}_2)$.
4. Pro-robustness: 如果 $\tilde{v} \leq 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = 0$。
5. Anti-fragility: 如果 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\tilde{v} > 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = \infty$.

在额外的理论条件下 (例如 Föllmer and Schied, 2002, 中的定理 6)，相对应的分布距离函数 Δ 可以被表示为

$$\Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) = \sup_{\tilde{v} \in \mathcal{L}} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{v}] \;\middle|\; \rho(\tilde{v}) \leq 1 \right\}.$$

♡

前三条性质与一致性风险测度定义中的三条性质相同，这也很大程度的确保目标脆弱度是一个合理的决策准则。由于前三条性质相对常见，我们在此不再解释前三条性质。第四条性质（稳健性）表示如果模型的约束总是可行的，那么相应的目标脆弱度应该是最低值零。第五条性质（反脆弱性）确保任何具有有限目标脆弱度的解在经验分布下可以满足 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{v}] \leq 0$。

6.2.2 目标鲁棒性优化的应用

Long et al. (2022) 探讨了目标鲁棒性优化在不同问题中的可解性并展示如何将目标鲁棒性优化应用在基于风险的线性优化、组合优化，和多阶段优化问题中。在此，我们不过多讲述这一部分内容。我们仅用Long et al. (2022) 中的一部分仿真实验模型来展示目标鲁棒性优化在实际问题中的应用。

我们首先考虑一个数据驱动下的投资组合选择问题。决策者投资 N 个风险资产，其中投资组合的风险是依据经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 来进行评估的。基于经验分布的基准模型如下：

$$\begin{aligned} Z_0 = \quad \max \quad & \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{C}^{\epsilon}_{\hat{\mathbb{P}}}[-\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}] \leq \beta, \\ & \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+. \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 代表资产的回报，$\mathbb{C}^{\epsilon}_{\hat{\mathbb{P}}}$ 代表如下定义的 Conditional Value-at-Risk（CVaR）风险测度：

$$\mathbb{C}^{\epsilon}_{\mathbb{P}}[\tilde{v}] := \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha + \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\tilde{v} - \alpha)^+\right].$$

此基准优化模型最大化在经验分布下的期望回报，并用 CVaR 测度来限制投资风险。

根据此基准优化模型，我们考虑以下目标鲁棒性优化模型:

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad \min \quad & k_0 + w k_1 \\
\text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}\right] \geq \tau - k_0 \Delta_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) && \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\
& \alpha + \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(-\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}} - \alpha)^+\right] \leq \beta + k_1 \Delta_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) && \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\
& \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

其中，目标回报为 $\tau \leq Z_0$，w 为调节两个目标的权重参数。在一定条件下，模型(6.6)可以被写为一个线性规划问题。

命题 6.2

当 Δ 是用 ℓ_1-范数定义的 Wasserstein distance，$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^N$，目标鲁棒性优化模型(6.6)可以被写为以下形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \|\boldsymbol{x}\|_\infty \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]} y_{1s} \geq \tau, \\
& y_{1s} \leq \boldsymbol{x}^\top \hat{\boldsymbol{z}}_s && \forall s \in [S], \\
& \alpha + \frac{1}{\epsilon S}\sum_{s\in[S]} y_{2s} \leq \beta, \\
& y_{2s} \geq -\boldsymbol{x}^\top \hat{\boldsymbol{z}}_s - \alpha && \forall s \in [S], \\
& y_{2s} \geq 0 && \forall s \in [S], \\
& \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+, \ \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

♠

可以看出，目标鲁棒性优化可以被应用于在复杂的环境中，并且通常有较低的计算复杂度。在很多问题中，目标鲁棒性优化模型的解具有良好的性质并很容易被决策者理解。例如，在以上投资组合的问题背景下，目标鲁棒性优化模型(6.6)的解会尽可能的倾向于多元化投资组合，在此我们不展开讨论。有兴趣的读者可以参考Long et al. (2022)。

本章参考文献

Bertsimas, Dimitris and Melvyn Sim, "The price of robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

Brown, David B and Melvyn Sim, "Satisficing measures for analysis of risky positions," *Management Science*, 2009, *55* (1), 71–84.

Charnes, Abraham and William W Cooper, "Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints," *Operations Research*, 1963, *11* (1), 18–39.

Esfahani, Peyman Mohajerin and Daniel Kuhn, "Data-driven distributionally robust optimization using the Wasserstein metric: performance guarantees and tractable reformulations," *Mathematical Programming*, 2018, *171* (1), 115–166.

Föllmer, Hans, Alexander Schied, and Terry J Lyons, "Stochastic finance. An introduction in discrete time," *The Mathematical Intelligencer*, 2004, *26* (4), 67–68.

__ **and** __ , "Convex measures of risk and trading constraints," *Finance and Stochastics*, 2002.

Gao, Rui and Anton J Kleywegt, "Distributionally robust stochastic optimization with Wasserstein distance," *Available at arXiv:1604.02199*, 2016.

Hall, Nicholas G, Daniel Zhuoyu Long, Jin Qi, and Melvyn Sim, "Managing underperformance risk in project portfolio selection," *Operations Research*, 2015, *63* (3), 660–675.

Jaillet, Patrick, Sanjay Dominik Jena, Tsan Sheng Ng, and Sim Melvyn, "Satisficing Awakens: Models to Mitigate Uncertainty.," 2016, p. *Available at Optimization Online*.

Long, Daniel Zhuoyu, Melvyn Sim, and Minglong Zhou, "Robust Satisficing," *Operations Research (forthcoming)*, 2022.

Simon, Herbert A, "A behavioral model of rational choice," *The Quarterly Journal of Economics*, 1955, *69* (1), 99–118.

__ , "Theories of decision-making in economics and behavioral science," *The American Economic Review*, 1959, *49* (3), 253–283.

Zhang, Yu, Roberto Baldacci, Melvyn Sim, and Jiafu Tang, "Routing optimization with time windows under uncertainty," *Mathematical Programming*, 2019, *175* (1), 263–305.

Zhou, Minglong, Gar Goei Loke, Chaithanya Bandi, Zi Qiang Glen Liau, and Wilson Wang, "Intraday scheduling with patient re-entries and variability in behaviours," *Manufacturing and Operations Management*, 2021.

Zhu, Taozeng, Jingui Xie, and Melvyn Sim, "Joint estimation and robustness optimization," *Management Science*, 2021.