第 1 章

数理計画

1.1 数理計画モデル

1.1.1 数理計画とは

制約条件の元、目的関数を最大化するような問題

1.1.2 線形計画問題とは

数理計画問題のうち、目的関数が線形かつ、制約条件が線形の等式または不等式であるもの。

1.1.3 以下の線形計画問題のモデル化を行え

以下の生産計画問題に対し、そのモデル化を行え

4 種類の原料 A,B,C,D をもちいて、三種の製品 x,y,z を生産する工場を考える。そして図 1.1 のように製品を生産するために必要な原材料の量が定義されているとする。

そして、現時点で、A を 80、B を 50、C を 100、D を 70 単位持っているとする。

また、x は 70、y は 120、z は 30 万円で売れるとする。

表 1.1: 各製品を 1 単位生産するために必要な各原料の量

	x	y	z
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

このような場合に、最大の利益を上げる生産計画はどのように立てればよいか。

製品 x,y,z の生産量をそのまま x,y,z とする。

このとき、上の生産計画問題は、目的関数 $70x + 120y + 30z$ を以下の制約条件のもと最大化することと同じである。

$$\begin{array}{llllll} 5x & & +6z & \geq & 80 \\ & 2y & +8z & \geq & 50 \\ 7x & & +15z & \geq & 100 \\ 3x & +11y & & \geq & 70 \end{array} \quad \text{(原料による制約)} \tag{1.1}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \quad \text{(非負条件)} \tag{1.2}$$

以下の多期間計画問題に対し、そのモデル化を行え

工場は 2 種類の原料 A,B を加工して 2 種類の製品 x,y を生産しているとする。

そして、以下のようなデータが与えられているとする。

表 1.2: 多期間計画問題のデータ

(a) 単位製品あたりの原料使用量

	x	y
A	2	7
B	5	3

(b) 製品の出荷量

	x	y
1 月	30	20
2 月	60	50
3 月	80	90

(c) 原料の利用可能料

	A	B
1 月	920	790
2 月	750	600
3 月	500	480

(d) 生産コストと在庫コスト

	x	y
生産コスト	75	80
在庫コスト	8	7

このとき、(b) の出荷ノルマを満たしながらコストが最小になるように、各月の生産計画を建てるにはどうすればいいか。

---

t 月における製品 i の生産量を p_{it} とおく。(t=1,2,3 :i=x,y)

次に、t 月から翌月に持ち越す製品 i の在庫量を s_{it} とおく。

次に、目的関数を (d) から導き、制約条件として非負条件、原材料の利用可能料に関する制約条件、出荷ノルマの制約条件を作ればいい。

目的関数が、

$$75(\sum_{i=1}^{3} p_{xi}) + 80(\sum_{i=1}^{3} p_{yi}) + 8(\sum_{i=1}^{2} s_{xi}) + 7(\sum_{i=1}^{2} s_{yi}) \longrightarrow \min$$

として、利用可能条件が、

$$\begin{aligned} 2p_{x1} + 7p_{y1} &\leq 920 \\ 5p_{x1} + 3p_{y1} &\leq 790 \\ 2p_{x2} + 7p_{y2} &\leq 750 \\ 5p_{x2} + 3p_{y2} &\leq 600 \\ 2p_{x3} + 7p_{y3} &\leq 500 \\ 5p_{x3} + 3p_{y3} &\leq 480 \end{aligned}$$

となり、出荷量から導かれる制約条件は次のように書ける。

$$\begin{aligned} p_{x1} - s_{x1} &= 30 \\ p_{y1} - s_{y1} &= 20 \\ s_{x1} + p_{x2} - s_{x2} &= 60 \\ s_{y1} + py2 - s_{y2} &= 50 \\ s_{x2} + p_{x3} &= 80 \\ s_{y2} + p_{y3} &= 90 \end{aligned}$$

更に、p,s に対して非負条件が以下のように課せられる。

$$p_{ij}, s_{ik} \geq 0 (\text{i=x,y j=1,2,3 k=1,2})$$

以下の輸送問題に対し、そのモデル化を行え

この問題は線形計画門でもあるが、グラフで表現できるネットワーク問題でもあることに留意する。

２つの工場 A_1, A_2 で生産された商品が、３つの取引先 B_1, B_2, B_3 に納入されている状況を考える。

工場の生産量、取引先の注文量、工場から取引先への輸送コストを下の図に示す。

表 1.3: 輸送問題のデータ

(a) 注文料

B1	70
B2	40
B3	60

(b) 生産量

A1	90
A2	80

(c) 輸送コスト

	B1	B2	B3
A1	4	7	12
A2	11	6	3

この時、輸送コストを最小にするためには、どのように輸送計画を立てればよいか。

工場 A_i から工場 B_j への輸送量を x_{ij} とする。(i=1,2 j=1,2,3)

目的関数は、輸送コストの総和である、

$$4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} \tag{1.3}$$

となり、以下に示す制約条件の元これを最小化する。

以下のようにいくつかの制約条件が決まる。

生産量に関する条件は、

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 90 \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=2}^{3} x_{2j} = 80 \tag{1.5}$$

注文量に関する条件は、

$$x_{11} + x_{21} = 70 \tag{1.6}$$

$$x_{12} + x_{22} = 40 \tag{1.7}$$

$$x_{13} + x_{23} = 60 \tag{1.8}$$

輸送量に関する非負条件として、

$$x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2j = 1, 2, 3) \tag{1.9}$$

が考えられる。

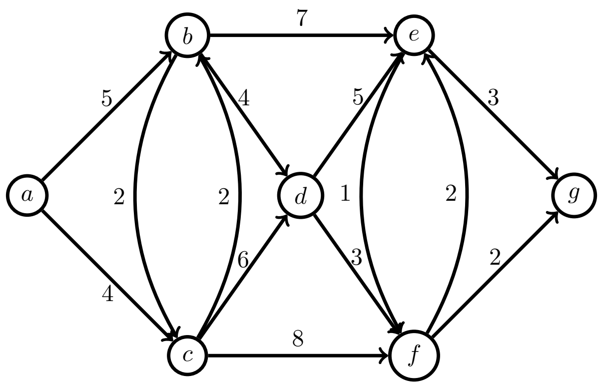
1.1.4　ネットワーク計画問題とは

グラフ上でフローや枝や節点になんらかの属性や数値が与えられている対象をネットワークとする。

このようなネットワークで表現できるような数理計画問題を問題をネットワーク問題という。

ネットワーク問題の対象となるネットワークとして、以下のようなものを暗黙に仮定する。

図 1.1: ネットワークの例



最短路問題とその定式化をせよ

ネットワークを交通機関の路線とみなし、枝の横に書かれている数値をその路線を利用したときの所要時間とみなす。

このとき、あるノードから別のノードへの路のうち、最小の所要時間を持つ路を選ぶのが最小路問題である。最小経路問題を下で定義された 0-1 条件を使って定式化せよ。

0-1 条件

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{(i,j) を通る} \\ 0, \text{(i,j) を通らない} \end{cases} \tag{1.10}$$

路 (i,j) が持つ数値を a_{ij} とおく。すると、目的関数は、

$$\sum_{(i,j)} a_{ij} x_{ij} \tag{1.11}$$

と書ける。制約条件は、0-1 条件で、枝が出ていく数と枝が入る数がちょうどよくなるように設定する。すなわち、

$$\begin{cases} \sum_i x_{in} = 1 \text{ (ノード n が始点の時)} \\ \sum_i x_{in} - \sum_i x_{ni} = 0\text{(ノード n が始点でも終点でもない時)} \\ \sum_i x_{ni} = 1\text{(ノード n が終点の時)} \end{cases}$$

1.1.5　非線形計画モデルとは

目的関数や制約条件の中に非線形の関係が出てくるもの

以下に示す資源配分問題の定式化を示せ

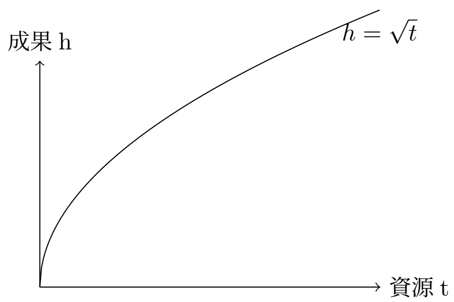
資源配分関数は、資源の割当を考える問題である。

資源配分問題の一例として、試験勉強のシチュエーションを考える。

試験まで時間が T あるとする。試験科目は 3 つあり、それぞれに時間を注ぎ込めば図 1.2 のように非線形の形で得点が上昇するものとする。3 つの科目について、勉強時間と得点の関係を $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ として表すことができると仮定する。

このような場合に、３科目の得点の合計が最大になるように勉強時間を配分するにはどうすればよいか。

図 1.2: 資源配分関数 (非線形)



上の資源配分問題は下のように定式化できる。

科目 h_1, h_2, h_3 にかかる時間を t_1, t_2, t_3 と置く。

$$\text{目的関数：} h_1(t_1) + h_2(t_2) + h_3(t_3) \longrightarrow \max$$
$$\text{制約条件：} t_1 + t_2 + t_3 = T, t_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$$

ポートリフォ選択問題とは何かとその定式化を示せ

ポートリフォ選択問題とは、投資家が資産を投資判断をするためにはどうするべきかを考える問題である。

投資家は現在 w 円をもち、3 種の株式 A_1, A_2, A_3 に分散して投資しようとしている。株式 A_1, A_2, A_3 の（一株あたりの）現在価格は p_1, p_2, p_3 と仮定する。

このような状況下で、利益を出すにはどうすれば良いか。

各株式への投資額を x_1, x_2, x_3 と置く。

すると、制約条件が

$$x_1 + x_2 + x_3 = w \tag{1.12}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{1.13}$$

となる。

一ヶ月後の株式 A_1, A_2, A_3 の価格を確率変数 P_1, P_2, P_3 で表すとする。

このとき、一ヶ月後の資産の総額は、

$$W := \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i x_i}{p_i} \tag{1.14}$$

の確率変数で表現ができる。
得られる利益は、$W - w$ なので、

$$\begin{aligned} Z &:= W - w \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i x_i}{p_i} - w \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{P_i - p_i}{p_i} x_i \end{aligned} \tag{1.15}$$

とかける。

収益率の定義

単位投資額あたりの儲けを表す確率変数を、収益率と定義する。

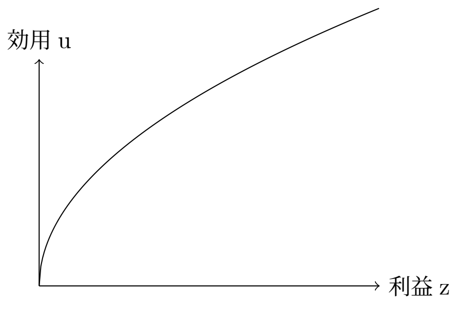
$$R_i := \frac{P_i - p_i}{p_i} (i = 1, 2, 3) \tag{1.16}$$

このことから、

$$Z = \sum_{i=1}^{3} R_i x_i \tag{1.17}$$

と簡潔に表現可能である。
投資家は利益 Z が最大となるように投資を行えば良い。しかし、Z は確率変数である。
このような不確実性の元で意思決定を行うには、期待効用理論に基づく最適化規範を導入する。
ここで、実際に得られた利益 z で投資家の満足度を表す、単調増加関数である効用関数 u(z) を定義する。

図 1.3: 効用関数 (非線形)



ポートリフォ問題は、ポートリフォ関数の期待値を最大化する問題として定式化ができる。

交通流割当問題とその定式化を示せ

図 (1.4) のようなフローとフローを流したときのコスト関数をもつネットワーク。w のフローを A をソース、D をシンクとして流すとする。

この時、コストが最小になるようにフローを流すにはどうすればよいか。

図 1.4: フローを持つネットワーク

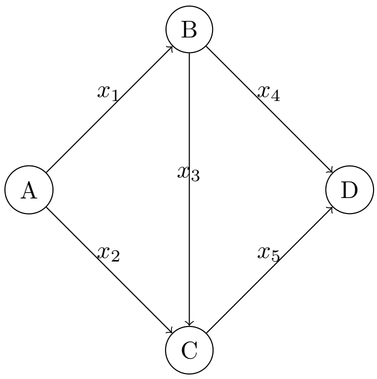


図 1.4 のように枝に与える数値として変数 $x_1, \ldots, x_5$ を定義する。また、この数値は道路を利用する車の台数を意味するとする。

このことから、制約条件が以下のように定まる。

A から出てくる数、D に入る数は w なので

$$x_1 + x_2 = w \tag{1.18}$$

$$x_4 + x_5 = w \tag{1.19}$$

出てくる数と入る数は等しいので、

$$x_1 = x_3 + x_4 \tag{1.20}$$

$$x_2 + x_3 = x_5 \tag{1.21}$$

また、非負条件から、

$$x_i \geq 0 (i = 1, \ldots, 5) \tag{1.22}$$

数値 x_i をもつ路のコスト関数を、$f_i(x_i)$ と置く。

このとき、フローによるコストは

$$\sum_{i=1}^{5} = x_i f_i(x_i) \tag{1.23}$$

となる。まとめると、1.23 を上の制約条件のもとで最小化するような $x_1, \ldots, x_5$ をみつければよい。

システム最適とユーザ最適とは

システム最適

交通流割当問題のように、システムに対して行う最適化

ユーザ最適

ユーザ毎に最適化すること

1.1.6 整数計画問題とは

線形計画問題のうち、変数の各要素が整数に限定されるもの

整数計画問題は、変数が整数値に限定されたことにより、問題が格段に難しくなる。

固定費付き輸送問題の定式化をせよ

この問題は輸送問題に酷似している。

２つの倉庫 A_1, A_2 から B_1, B_2, B_3 へ注文を満たすように品物を送る場合を考える。その際、以下のようなデータが与えられているものとする。

表 1.4: 固定費付き輸送問題のデータ

(a) 注文量

	注文量
B1	20
B2	30
B3	15

(b) 輸送コスト

	B1	B2	B3
A1	5	3	2
A2	2	7	4

(c) 固定費

	固定費
A1	300
A2	200

固定費とは、実際に倉庫を使用するときに、輸送量の大きさに関係なくかかる額とする。

この際、どのように輸送計画を立てれば輸送コストが最小になるだろうか。

倉庫 A_i から B_J への輸送量の変数を x_{ij} とする。このとき、各倉庫に対する費用は 0-1 変数

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{倉庫 } A_i \text{ を使用するとき} \\ 0 & \text{倉庫 } A_i \text{ を使用しないとき} \end{cases} \tag{1.24}$$

を導入すると、

$$\begin{cases} z_1 = 300y_1 + 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \\ z_2 = 300y_2 + 5x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} \end{cases} \tag{1.25}$$

で定義できる。

目的関数は、$z_1 + z_2$ となるので、これを最小化すれば良い。

制約条件は、以下のように定まる。

注文料の総和が 65 であることから、

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 65y_1 \tag{1.26}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leq 65y_2 \tag{1.27}$$

である。

ついでに、非負条件が

$$x_{ij} \geq 0 (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \tag{1.28}$$

として定まる。

取引先の注文料に対する条件で、

$$x_{11} + x_{21} = 20 \tag{1.29}$$
$$x_{12} + x_{22} = 30 \tag{1.30}$$
$$x_{13} + x_{23} = 15 \tag{1.31}$$

となる。

ナップサック問題の定式化をせよ

重さと価値が異なる品物が n 個あるとする。
品物 i の重さは w_i、価値を v_i とする。
今持てる総重量が w のとき、価値の合計が最大となるように品物を選ぶにはどうすればいいか。

各品物 i($i = 1, \ldots, n$) に対して、0-1 変数

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ (品物 i を選ぶとき)} \\ 0 \text{ (品物 i を選ばないとき)} \end{cases} \tag{1.32}$$

すると、問題は制約条件

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq w \tag{1.33}$$

のもと、目的関数

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \tag{1.34}$$

を最大化する整数計画問題と考えられる。

1.1.7 数理計画問題の定式化を行え

数理計画問題

目的関数 : $f(\boldsymbol{x}) \longrightarrow$ 最大あるいは最小
制約条件 : $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$

今まで話してきた問題は全て、上の形で表現することができる。