0.1 線形計画

0.1.1 線形計画問題の標準形はどのような形か

線形計画問題の標準形

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数} &: \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \longrightarrow \min \\
\text{制約条件} &: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

0.1.2 以下に示す問題系を標準形に変形せよ

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}: & -2x_1 + 5x_2 \longrightarrow \max \\
\text{制約条件}: & 4x_1 - 6x_2 = 30 \\
& 2x_1 + 8x_2 \leq 50 \\
& 7x_1 + 5x_2 \geq 10 \\
& x1 \geq 0, x_2 (\text{符号成約なし})
\end{aligned}
$$

この問題は、標準形と比較し、

1. 目的関数を最大化している
2. x_2 に符号制約がない
3. $\leq, \geq$ を含む不等式がある

という 3 点が異なる。

目的関数の最大化は、目的関数全体に-1 をかけた関数を最小化することと同じ。

(2) については、変数 x_2 を

$$x_2 = x_2' - x_2'', x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0$$

と置き換えることで対処できる。

以下では、x_2' を x_2、x_2'' を x_3 とかく。

(3) については、$\leq, \geq$ のかわりに新しい非負変数 (スラック変数) を導入することで解決する。

以上をまとめると、次の問題は、

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}: & 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 \longrightarrow \min \\
\text{制約条件}: & 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 30 \\
& 2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 50 \\
& 7x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_5 = 10 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

と置き換えれる。

0.1.3 シンプレックス法とは

前提として、線形計画問題の実行可能領域 (制約条件を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合) は空間 $\mathbb{R}^n$ 内の凸多面体として存在する。
そして、最適解は一般に凸多面体の頂点の中にある。
２変数の線形計画問題を図示すればこれは容易にわかる。
全実行可能領域から最適解を見つけようとするのではなく、その頂点を効率的に探索して最適解を見つけ出す手法がシンプレックス法である。

基底解、実行可能基底解、基底変数、非基底変数、退化した基底解

線形計画問題において、その変数は $\boldsymbol{x} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ の形であると仮定する。そして、制約条件が k 個あると仮定する。
この時、自由度は $\boldsymbol{x}$ の自由度は n-k である。
n 個の変数のうち n-k 個の変数を適当に選び、それらに 0 を代入すれば残りの変数の値は一意的に定まるはずである。
このようにして決まった $\boldsymbol{x}$ を基底解という。
基底解は $\binom{n}{n-k}$ 個存在する。

実行可能基底解　基底解のうち $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を満たすもの
非基底変数　基底解を求める際に 0 とおいた変数
基底変数　非基底変数以外の変数
退化した基底解　基底変数の中に値が 0 であるようなものが存在する場合

基底行列、非基底行列

ある基底解 $\boldsymbol{x}$ は、n-k 個の非底変数と k 個の基底変数をを持つものとする。
n-k 次元非基底変数ベクトルを $\boldsymbol{x}_N$、k 次元基底変数ベクトルを $\boldsymbol{x}_B$ と置く。
次に、制約条件 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を、基底変数に対応する k 個の列と非基底変数に対応する n-k 個の列に分割し、前者からなる A を B、後者を N、とおく。

基底行列　B が正則である時の B
非基底行列　B が正則であるときの N

制約条件式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は基底行列と非基底行列で

$$B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \tag{1}$$
$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

と書ける。
$B^{-1}\boldsymbol{b} \geq 0$ の時、この基底解は実行可能基底解となる。
実行可能基底解はその各々が凸多面体の頂点に対応する。

ピポット操作

ある実行可能基底解に対して、一組の基底変数と非基底変数を入れ替えた基底解がまた実行可能基底解となる時、この操作は実行可能領域の一つの頂点からそれと隣り合う別の頂点に移動することを意味する。このような基底変数と非基底変数の入れ替えを**ピポット操作**という。

シンプレックス乗数、双対コスト係数

以下のように定義された m 次元ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ をシンプレックス定数と呼ぶ。

$$\boldsymbol{\pi} = (B^\top)^{-1}\boldsymbol{c}_B \tag{3}$$

以下のように定義されたベクトル

$$\boldsymbol{c}_N - N^\top\boldsymbol{\pi} \tag{4}$$

を非規定変数 $\boldsymbol{x}_N$ の相対コスト係数と呼ぶ。

ある実行可能基底解が最適解かどうかの確認方法

ある実行可能基底解 $\boldsymbol{x} = (x_B, x_N) = (B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ を問題に代入する。

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_N \tag{5}$$

と表される。この式を代入し、問題を変形していくと、線形計画問題は

$$\text{目的関数}:\boldsymbol{\pi}^\top\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N - N^\top\boldsymbol{\pi})^\top\boldsymbol{x}_N \longrightarrow \min \tag{6}$$

$$\text{制約条件}:B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0} \tag{7}$$

という形になる。

いま対象にしている以外の全ての実行可能解は $\boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0}$ であることを考えれば、相対コスト係数が 0 以上

$$\boldsymbol{c}_N - N^\top\boldsymbol{\pi} \geq 0 \tag{8}$$

であるならば対象の実行可能界は最適解であると言える。

ある実行可能基底解が最適解でない時はどうするか

$\boldsymbol{c}_N - N^\top\boldsymbol{\pi} > 0$ を満たさない時、双対コスト係数の要素の中に負であるものが少なくとも一つ存在する。

そのような負の係数をもつ非基底変数 x_k を一つ選ぶ。この x_k を 0 から増加させれば、目的関数は減少する。

もちろん、その増加は制約条件を満たしながら行わなければならないので、$\boldsymbol{x}_B$ は式 (5) より、

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}\boldsymbol{a}_k x_k \tag{9}$$

に従い変化する。($\boldsymbol{a}_k$ は A の k 列目を抜き出した列ベクトルとなる) (もとから $B^{-1}\boldsymbol{a}_k x_k$ が差分として引かれた形)

ここで、

$$\bar{\boldsymbol{b}} := B^{-1}\boldsymbol{b} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{y} := B^{-1}\boldsymbol{a}_k \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

を定義し、式 (9) を書き換えれば、

$$x_i = \bar{b_i} - y_i x_k (i \in \text{基底変数の係数の集合}) \tag{13}$$

とかける。よって、非基底変数 x_k を

$$\theta := \min\{\frac{\bar{b_i}}{y_i} | y_i > 0 (i = 1, 2, \ldots, m)\} \tag{14}$$

まで増加させても、非負条件 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ は保たれる。

θ だけ x_k を増加させたなら、$\boldsymbol{x}_B$ のなかに 0 となる値が現れる。

このようにしてピポット操作を行う。

有界でない問題

仮に、$\forall(y_i < 0)$ であるなら、非基底変数 x_k を任意に増加させたとしても、基底変数の非負条件を破ることはないため、目的関数を無限に小さくできる。このような問題を**有界でない**という。

シンプレックス法のまとめ

以上に示したように、非基底変数と基底変数を入れ替えながら実行可能解を探索することで最適解を見つける。そのプロセスを以下にまとめる。

シンプレックス法のアルゴリズム (まとめ)

1. 線形計画問題を標準形にする
2. 初期実行可能基底解として適当な基底解を一つ求める
3. シンプレックス乗数を計算する
4. 相対コスト係数を計算する
5. 相対コスト係数が全て 0 以上なら、計算終了。そうでなければ、相対コスト変数のうち、負の係数をもつ非基底変数 x_k を一つ選ぶ。
6. $\boldsymbol{y} = B^{-1}\boldsymbol{a}_k$ を計算する
7. $\forall(y_i < 0)$ なら、問題は有界でないため終了。そうでないなら、θを計算し、$\boldsymbol{x}$ を更新する。
   ステップ (3) に戻る。

実際に問題を解くときは、以下で紹介するシンプレックスタブローを使って計算する。

0.1.4　シンプレックス・タブローとは

シンプレックス・タブローとはシンプレックス法の計算を表形式で簡単に行う方法である。
以下の線形計画問題をシンプレックスタブローで計算しろ。

$$\text{目的関数：} - x_1 - x_2 \longrightarrow \min \tag{15}$$

$$\text{制約条件：} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \tag{16}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \tag{17}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \tag{18}$$

この問題の初期実行可能基底解を $(0, 0, 12, 8)$ とする。

上の問題に対し、以下のようなシンプレックス・タブローを考える。

	-1	-1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	12
x_4	1	2	0	1	8

タブローの最初の行は目的関数における各変数の係数、その下は制約条件の変数係数、右端の数は制約条件の右辺の定数を示す。
右上角にはこの基底解における目的関数値に-1 をかけた数を書く。
左端の列には対応する基底変数を書く。
そして、このようにシンプレックスタブローを作れる場合、双対コスト係数がタブローの最初の行に、$\boldsymbol{x}_B$ が一番右の列に現れることに注意する。
このタブローに対し、以下のような操作を行う。

1. 双対コスト係数が全て正なら終了
2. 双対コスト係数 (一番上の行) が負となっている列のうち、その絶対値が最も大きい行を選択 (第 i 列とする)
3. 第 i 列の正の要素に注目し、その各要素でその行の右端の列の要素を割った値を計算 (第 i 列が全て負の要素なら、この問題は有界でないので、解を持たない。)
4. 計算した時、その値が最も小さくなる要素をピポット要素とする。
5. ピポット要素で、列基本変形をする
6. 基底変数（左端の列）を更新する
7. 新しく得られたタブローで、１に戻る

この操作は注意深く観察すれば、先に述べたシンプレックス法のアルゴリズムと完全に一致するとわかる。
この手順に沿って計算していくと、最適解が $(x_1, x_2)^\top = (2, 3)\top$ となる。

0.1.5　二段階シンプレックス法とは

ある線形計画問題に対し、シンプレックス法を適用させようとしても、問題に対し初期実行可能基底解が見つからないことがある。

このとき、初期実行可能解を見つけるために用いられるのが、二段階シンプレックス法である。

以下の問題に対し二段階シンプレックス法を適用させよ。

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}:& -2x_1 - x_2 - x_3 \longrightarrow \min && (19)\\
\text{制約条件}:& x_1 + 2x_2 = 12 && (20)\\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 && (21)\\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 && (22)
\end{aligned}
$$

次のような補助問題を考える。

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数}:& x_4 + x_5 \longrightarrow \min && (23)\\
\text{制約条件}:& x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 && (24)\\
& x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 && (25)\\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 && (26)
\end{aligned}
$$

この時導入した x_4, x_5 は人為変数、人工変数と呼ばれる。

仮に、補助問題において目的関数値が 0 となるような実行可能基底解が得られた場合、$x_4 = x_5 = 0$ となるため、$\boldsymbol{x}_b = (x_1, x_2, x_3)$ は元の問題の制約条件も満たす実行可能基底解となる。

補助問題における目的関数値が 0 となる実行可能基底解が存在するとすれば、それは $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ から、そのまま最適解となる。

このことから、補助問題の最適解を求め、その目的関数値が 0 だとすれば、その最適解は元の問題の実行可能基底解となる。

まず、補助問題をタブローで表現しよう。

	0	0	0	1	1	0
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

上端の行は、双対コスト係数を表していない。

これを修正するには、x_4, x_5 に対応する行全体をそれぞれ一番上の行から引き、とすればいい。

	-2	-6	-2	0	0	-32
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

このタブローに対し、計算すれば、$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top = (4, 4, 0, 0, 0)^\top$ となる。

よって、主問題の実行可能基底解を $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 0)$ とすればよい。

0.1.6 弱双対性定理、双対定理とは

任意の線形計画問題に対し、もう一つの双対問題 (Dual Problem) という線形計画問題を定義できる。この時、元の問題を主問題 (Primal Problem) と呼ぶ。

標準形の問題に対する (D) は以下のように定義される。

標準形とその双対問題

$$\begin{aligned} \text{目的関数} : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &\longrightarrow \min \\ \text{制約条件} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}&, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \text{目的関数} : \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} &\longrightarrow \max \\ \text{制約条件} : A^\top \boldsymbol{w} &\leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

対称性を考えた形では、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{目的関数} : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} &\longrightarrow \min \\ \text{制約条件} : A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}&, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{目的関数} : \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} &\longrightarrow \max \\ \text{制約条件} : A^\top \boldsymbol{w} \leq \boldsymbol{c}&, \boldsymbol{w} \geq 0 \end{aligned}$$

適当な一対の (P),(D) から、ほかの任意の (P),(D) の対を導くことも可能である。

任意の (P),(D) の組に対して成立する以下の定理群を紹介する。

弱双対定理

(P) と (D) のそれぞれの任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}$ に対して、常に不等式 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w}$ が成立する。

Proof.
問題 (38) の主問題と双対問題の組で考える。
それぞれの問題の制約条件から、

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq (A^\top \boldsymbol{w})^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{b}$$

となる。

Cor1.
(P) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ に対して、

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq (D)\text{の最大値}$$

(D) の任意の実行可能解 $\boldsymbol{w}$ に対して、

$$\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \leq (P)\text{の最小値}$$

Cor2.
(P) と (D) の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w}$ を満たせば、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ はそれぞれ (P) と (D) の最適解であり、(P) の最小値と (D) の最大値は等しい。

Proof.
弱双対性定理より、(P) の目的関数の値は常に (D) の目的関数の値より大きい。
よって、$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w}$ が成立するということは、(P) はこれ以上小さい解が存在せず、(D) はこれ以上大きい解が存在しないということである。
このことから、Cor2 が成り立つ。

Cor3.
(P) が有界でないならば、(D) は実行可能解をもたない。また、(D) が有界でないならば (P) は実行可能解を持たない。

双対定理

(P) または (D) の一方が最適解をもてば他方も最適解を持ち、(P) の最小値と (D) の最大値は等しい

Proof.
証明の方針として、(P) の最適解におけるシンプレックス乗数が (D) においてどのような振る舞いをするかを探索する。
標準形である問題 (38) の主問題とその双対問題の組で考える。
主問題が最適解を持つ時、その双対問題も最適解を持つことを示せば十分である。
(P) の最適基底解を、$\boldsymbol{x}_B^* = B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$ とし、基底行列を B、非基底行列を N とかく。
ベクトル $\boldsymbol{w}^*$ を $\boldsymbol{w}^* = (B^\top)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と定義する (シンプレックス乗数に同じ)。
すると B は最適基底行列であることから、双対係数より、$\boldsymbol{c}_N - N^\top\boldsymbol{w}^* \geq \boldsymbol{0}$ が成立する。
また、$\boldsymbol{w}^*$ の定義から、$\boldsymbol{c}_B - B^\top\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{0}$ が成立する。これらから、

$$\begin{pmatrix} B^\top \\ N^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{w}^* \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix}$$

の不等式が成り立つ。すなわち、$A^\top\boldsymbol{w}^* \leq \boldsymbol{c}$ ((D) の制約条件) を満たすので、$\boldsymbol{w}^*$ は (D) の実行可能解である。
さらに、

$$\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{x}_B^* + \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{w}^*)^\top\boldsymbol{b}$$

であるから、弱双対性定理の Cor2 より、$\boldsymbol{x}^*$ は (D) の最適解である。

Cor.
(P) と (D) がともに実行可能解を持てば、それらは最適解をもち、(P) の最小値と (D) の最大値は等しい。

Proof.
仮定から、(P) は実行可能解をもつ。
(D) は実行可能解を持つので、弱双対性定理の Cor2 より、(P) は下に有界であることがわかる。
よって、(P) の最小値は存在する。すなわち、(P) は最適解を持つので、双対定理より (P),(D) は最適解をもち、かつ (P) の最小値と (D) の最大値は等しくなる。

これらの結果から、主問題と双対問題は実質的に等価な問題であると示唆される。

0.1.7 双対問題から主問題の最適解の求め方

線形計画問題の解き方の一つに、その問題に対する双対問題を利用する方法がある。
双対問題の最適解におけるシンプレックス乗数をみることで、主問題の最適基底解が見て取れる。

0.1.8 感度分析とは

与えられた線形計画問題に対し、シンプレックス法で最適解を計算できたとする。現実においては、問題の係数に対し微妙な誤差が生じる可能性が存在する。では、その問題の係数の変化に対して最適解はどのように振る舞うのだろうか。このような考察を感度分析という。

標準形の問題において、制約条件の右辺の定数 $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)^\top$ が $\boldsymbol{b} = (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_n)^\top$ だけ変化した問題を考える。

$$\text{目的関数} : \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \longrightarrow \min \tag{28}$$

$$\text{制約条件} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{29}$$

$\Delta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のときの最適基底解が $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_N^* = \boldsymbol{0}$ で既に計算されているものとする。

最適解の条件から、

$$B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{c}_N - N^\top (B^\top)^{-1} \boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0} \tag{31}$$

を満たす。

$\boldsymbol{b}$ が変化したとしても $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ をが最適解であるためには、

$$B^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) \geq \boldsymbol{0} \tag{32}$$

を満たす必要がある。

このことから、仮に $\boldsymbol{x}_B$ が非退化、すなわち $\boldsymbol{x}_B^* = B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ かつ変化量が十分に小さいならば、最適基底行列 B は変化しない。

式 (30) の目的関数の最小値を $\varphi(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b})$ とあらわせば、

$$\varphi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}(\boldsymbol{b}) \tag{33}$$

$$\varphi(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta b) \tag{34}$$

$$\varphi(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}_B^\top B^{-1}(\Delta\boldsymbol{b}) \tag{35}$$

が成立する。

シンプレックス乗数が $\boldsymbol{w}^* = (B^\top)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ となることを考えれば、

$$\varphi(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{w}^{*\top}\Delta\boldsymbol{b} \tag{36}$$

$$\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{b})}{\partial b_i} = w_i^* \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{37}$$

と書き換えることができる。

式 (37) から、制約条件の右辺を一単位変化させたときの目的変数の変化量は、双対問題の解であることを示している。

0.1.9　シンプレックス法の計算量について述べよ

シンプレックス法の反復回数は経験的に、問題の制約条件の数の 2 から 3 倍である。しかし、厳密に言うとシンプレックス法は多項式時間アルゴリズムではない。ある種の人工的に作られた線形計画問題に対して、計算量が爆発的に増加することがあり得る。この欠点を克服したのがカーマーカーにより提唱された内分法である。

内点法そのものは、領域の内部を経由して問題の解に収束する点列を生成するという性質を持つアルゴリズムの総称である。

0.1.10　パス追跡法を主双対内点法の枠組みで構成せよ

相補性条件による問題の書き換え

標準形の形の (P) とその双対問題 (D) を以下に再掲する。

標準形とその双対問題

$$\text{目的関数}: \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \longrightarrow \min \tag{38}$$
$$\text{制約条件}: A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\text{目的関数}: \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \longrightarrow \max$$
$$\text{制約条件}: A^\top \boldsymbol{w} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$$

双対問題はスラック変数で書き換えられていることに注意

双対定理、弱双対定理 Cor2. より、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{w}$ が最適解であることと、

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{w} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{39}$$

は等価である。

相補性条件

(39) の第一式である $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w}$ は、

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} = (A^\top + \boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{w} = \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} + (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})^\top \boldsymbol{w} = \boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} \tag{40}$$

なので、$\boldsymbol{s}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるため、
X,S をそれぞれ x_j, s_j を対角要素とする $n \times n$ 行列、$\boldsymbol{e}$ を全ての要素が 1 である n 次元ベクトルとすると、**相補性条件**[a]

$$XS\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{41}$$

で書き換えることが可能

[a] (39) の第一式を相補性条件に置き換えた、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{s})$ を求めるような問題は、その解を求めることで元の問題の (P)、(D) の最適解を同時に求めることができるので、主双対最適性条件と呼ばれる。この問題は、線形相補性問題というクラスに属する。以下で説明する主双対内点法の考え方は、線形相補性問題全体に対しても説明できる。

主双対内点法とは

前節から、主問題、双対問題の組を相補性条件で置き換えると、

$$\begin{cases} XS\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A^{\top}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{42}$$

となる。この問題に対し、新たにパラメータ $\mu > 0$ を定義し

$$\begin{cases} XS\boldsymbol{e} = \mu\boldsymbol{e} \\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ A^{\top}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} > \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{43}$$

を考える。

$\mu \longrightarrow 0$ とすれば、42 の解に収束する。

そこで、0 に収束する数列 $\{\mu^k\}_{k\in N}$ を考え、これが 43 の μ パラメータに入るとする。

このとき、μ^{k-1} の時の近似解が得られているのであれば、43 を線形近似した方程式で、μ^k の時の近似解を μ^{k-1} の時の近似解の差分として求めることが可能。

このようにして近似を求めていくと、それは元の問題の解に収束することが知られている。