知的画像処理特論：幾何学的変換

2025/6/9

棟近春樹

8-1 線形変換の一般形

下の式で表されるような(x, y)から(x', y')への変換を線形変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a,b,c,d:任意の実数

画像の変換：画像の各画素位置に線形変換を施す

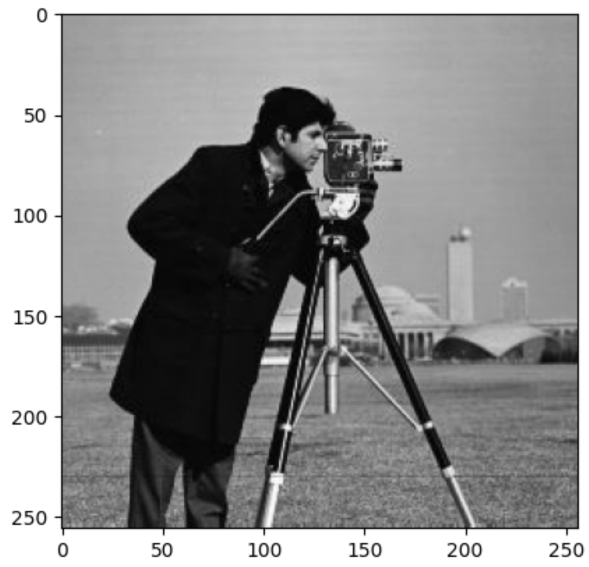
ex.拡大縮小,回転,鏡映、スキュー、合成変換

8-1-1 拡大・縮小

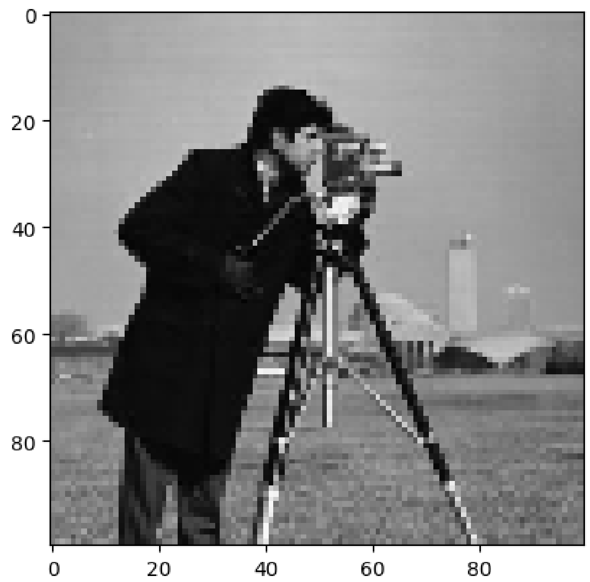
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

s_x, s_y: x,y方向での拡大(縮小)率

Original(256×256)



縮小された　100×100

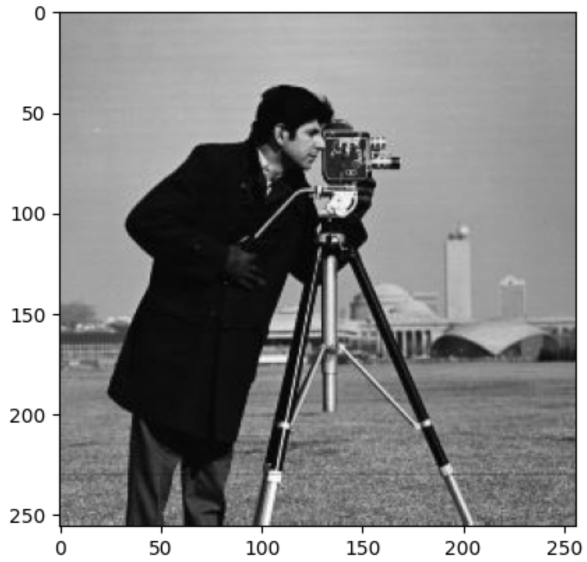


8-1-2 回転

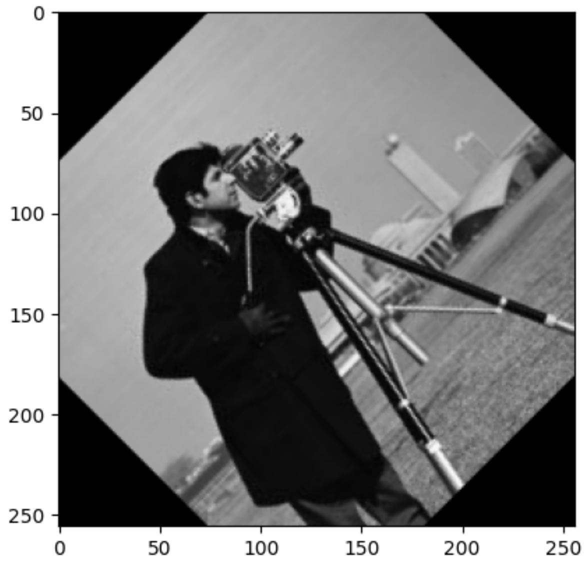
原点を中心に、反時計回りに角度θだけ回転する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Original(256×256)



中心から45度回転



8-1-3 鏡映

ある直線に対し、対称な位置に反転する変換

x軸に関して鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

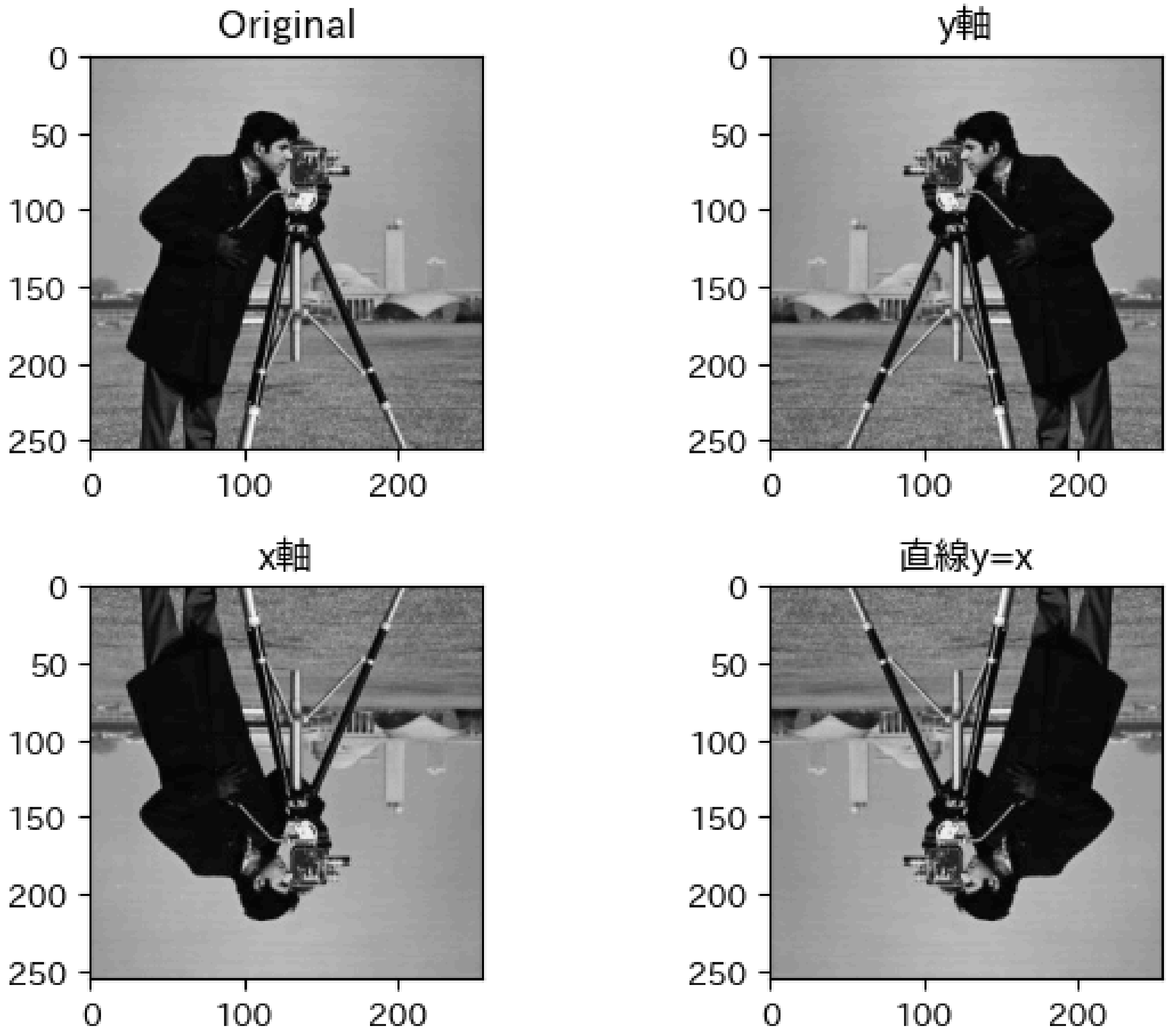
y軸に関して鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x=y直線に関して鏡映

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

例.



8-1-4 スキュー

長方形を傾け、平行四辺形にするような変換

x軸方向へのスキュー

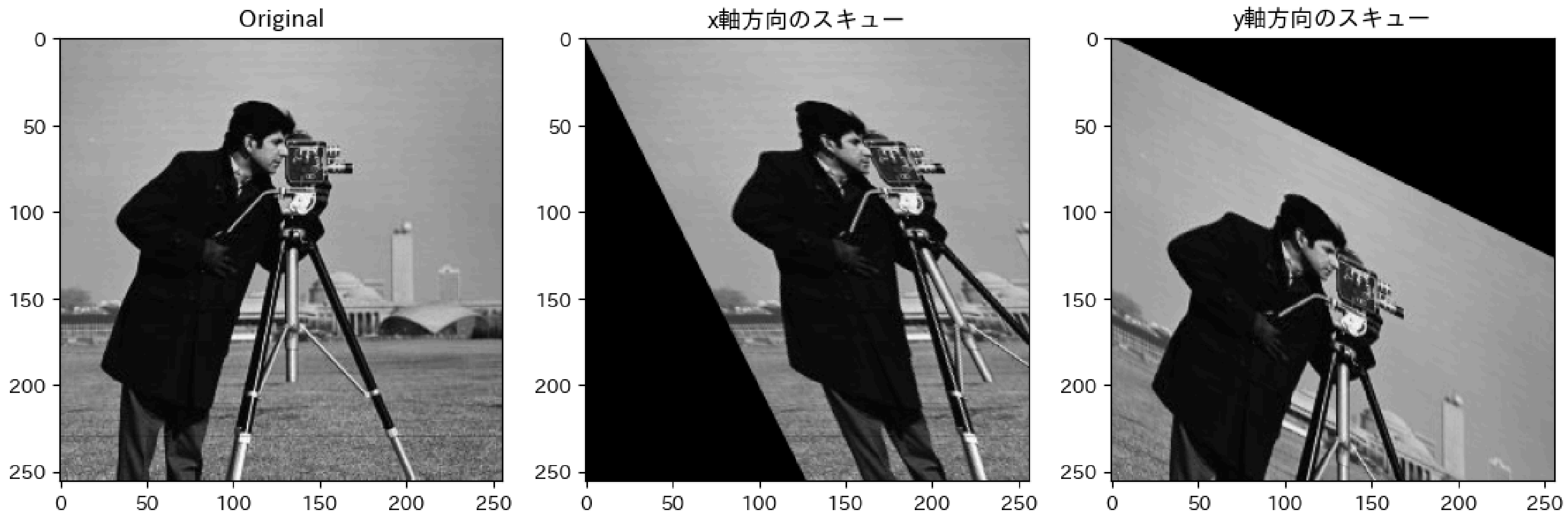
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$b = \tan\theta$$

y軸方向へのスキュー

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$c = \tan\theta$$



8-1-6 合成変換

ここまでの各種変換：$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$として、

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

と表現できる

$x \xrightarrow{A} x' \xrightarrow{B} x''$(矢印の上：変換行列)で線形変換が順次適用される合成変換を考える

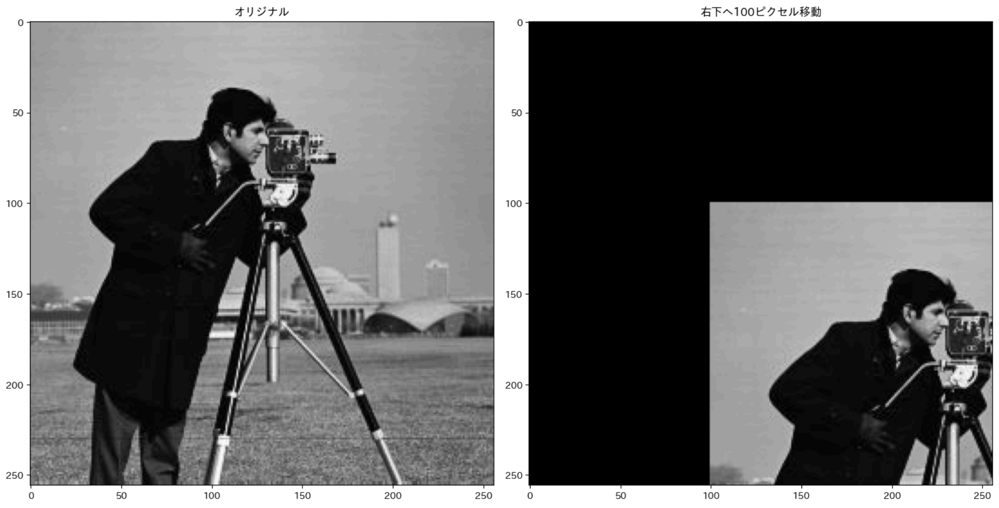
$$x'' = Bx' = B(Ax) = (BA)x$$

行列積BAもまた2×2行列なので、合成変換もまた線形変換となる

8-2-1 平行移動

x,y方向にそれぞれt_x, t_yだけの平行移動は下式で表せる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$



(右下へ100pixel平行移動)

和の計算であるため、平行移動を含む合成変換は行列の積で表せない

→同次座標を導入

8-2-2 同次座標

座標(x, y)に対す同次座標を(ξ_1, ξ_2, ξ_3)で表す

$$x = \frac{\xi_1}{\xi_3}, y = \frac{\xi_2}{\xi_3}$$

ex.(x, y)に対し、$(x, y, 1)$、$(\lambda x, \lambda y, \lambda)$同次座標としてある

同次座標の同値関係：(ξ_1, ξ_2, ξ_3)と$(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \lambda\xi_3)$のように、通常の座標に直すと同じ点を表す関係

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \lambda\xi_3 \end{pmatrix}$$

上式は$\tilde{\xi} \sim \lambda\tilde{\xi}$とも書ける

8-2-3 Affine変換

同次座標を利用した変換の表現

平行移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

線形変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def.Affine変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affine変換：平行移動と線形変換を組み合わせた変換

ex.平行移動,線形変換：縮小、回転

Euclid変換、相似変換

Affine変換の特殊な例 変換行列のみ示す

- Euclid変換：回転と平行移動の組み合わせ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 相似変換：ユークリッド変換に縦横の倍率が等しい拡大縮小を追加

$$\begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8-2-4 射影変換

射影変換：Affine変換の一般化

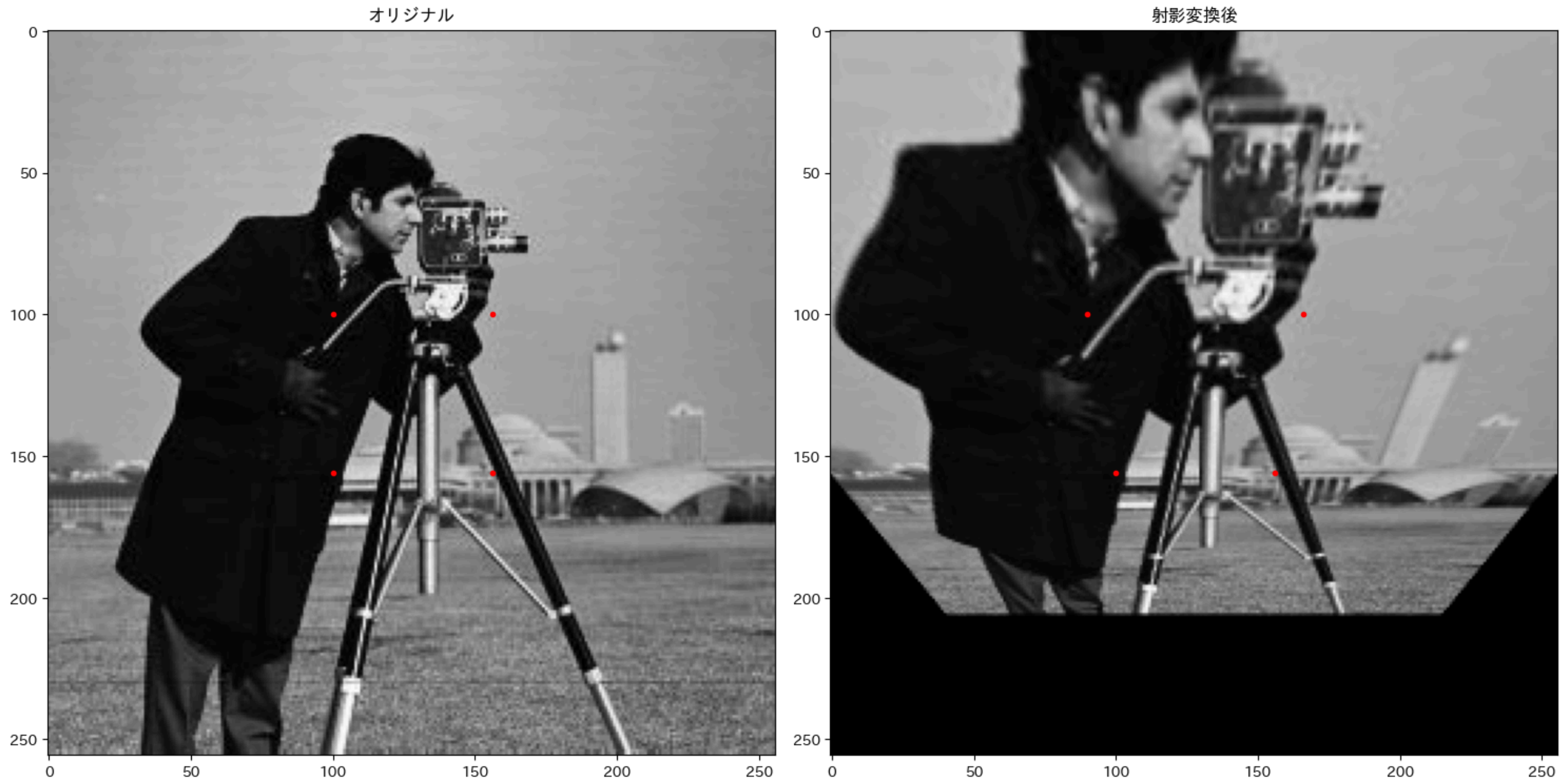
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ベクトル表現で$\tilde{\mathrm{x}}' \sim H\tilde{\mathrm{x}}$)

同次座標であることから、実際の処理は下式

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \quad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

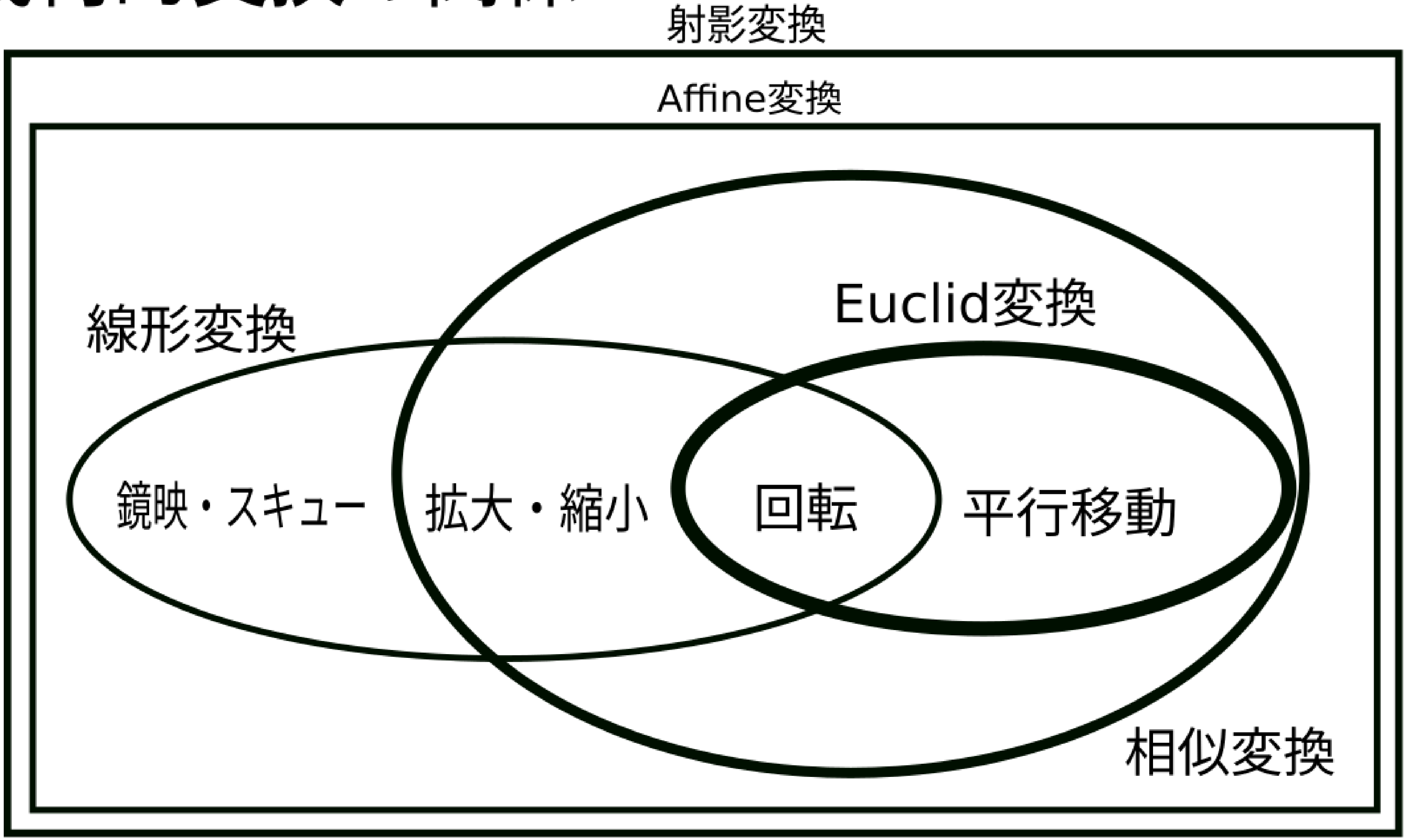
射影変換の例



線分の直交性は保たれるが、平行性が失われる

任意の四角形を別の任意の四角形に移す変換

幾何的変換の関係



8-2-5 合成変換

線形変換と同様、同次座標を利用した射影変換でも合成変換の性質は成り立つ

$$\tilde{x} \overset{H_1}{\rightarrow} \tilde{x}' \overset{H_2}{\rightarrow} \tilde{x}''$$

(変換H_1, H_2が順々に適用されるとする)
すると、

$$\tilde{x}'' \sim H_2 \tilde{x}' \sim H_2 (H_1 \tilde{x}) \sim (H_2 H_1) \tilde{x}$$

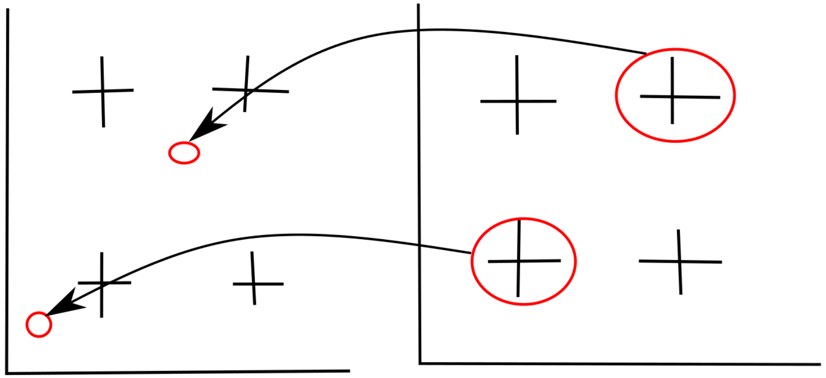
つまり、$H_2 H_1$が2つの変換を合成した変換となる

8-3-1 画像の再標本化

- 再標本化：変換時に生じる画素位置と標本化位置のずれの補正
  i. 変換後の出力画像の各画素位置(x', y')に対し、逆変換を行い、元の画像の画素位置(x, y)を求める
  ii. 補間を行い、(x, y)に対応する入力画像の画素値を求める

紹介する補間：ニアレストネイバー、バイリニア補間、バイキュービック補間

最標本化での逆変換の様子



8-3-2 ニアレストネイバー

$$I(x, y) = f([x + 0.5], [y + 0.5])$$

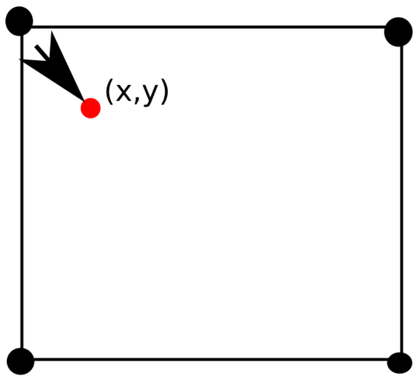
(x,y):値を求めたい位置

I(x,y):(x,y)の画素値

f(i,j):入力画像の画素値

[]:Gauss記号(小数点以下切り捨て)

ニアレストネイバー



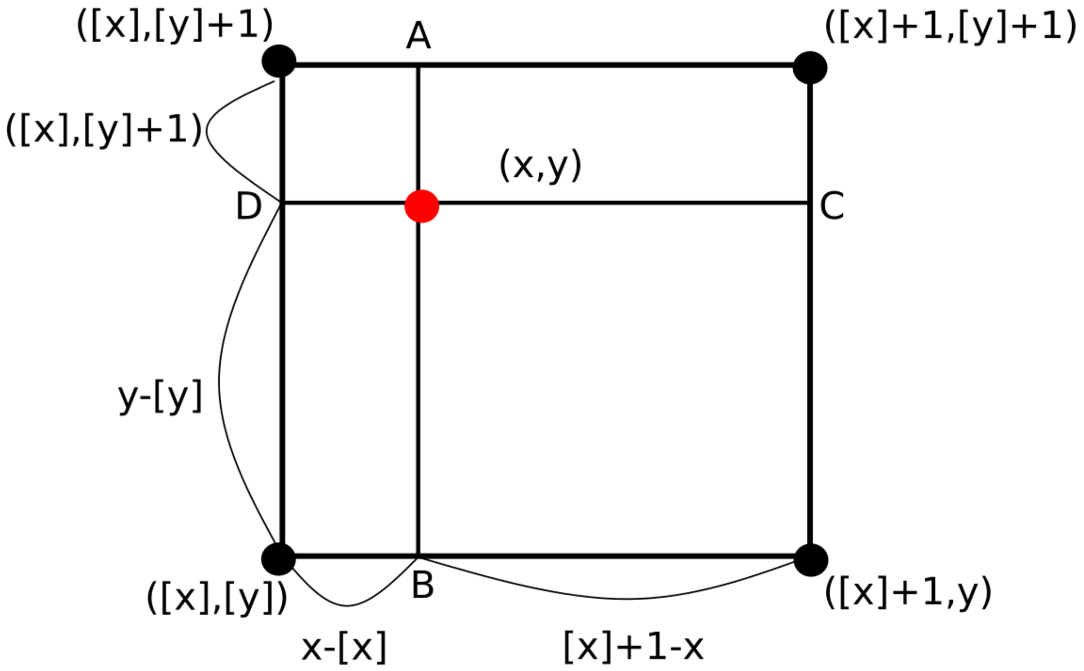
求めたい位置に最も近い画素位置の値をそのまま利用

8-3-3 バイリニア補間

まわりの4画素の値を利用する補間

$$I(x,y) = (([x]+1-x \quad x-[x])) \begin{pmatrix} f([x],[y]) & f([x],[y]+1) \\ f([x]+1,[y]) & f([x]+1,[y]+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [y]+1-y \\ y-[y] \end{pmatrix}$$

バイリニア補間



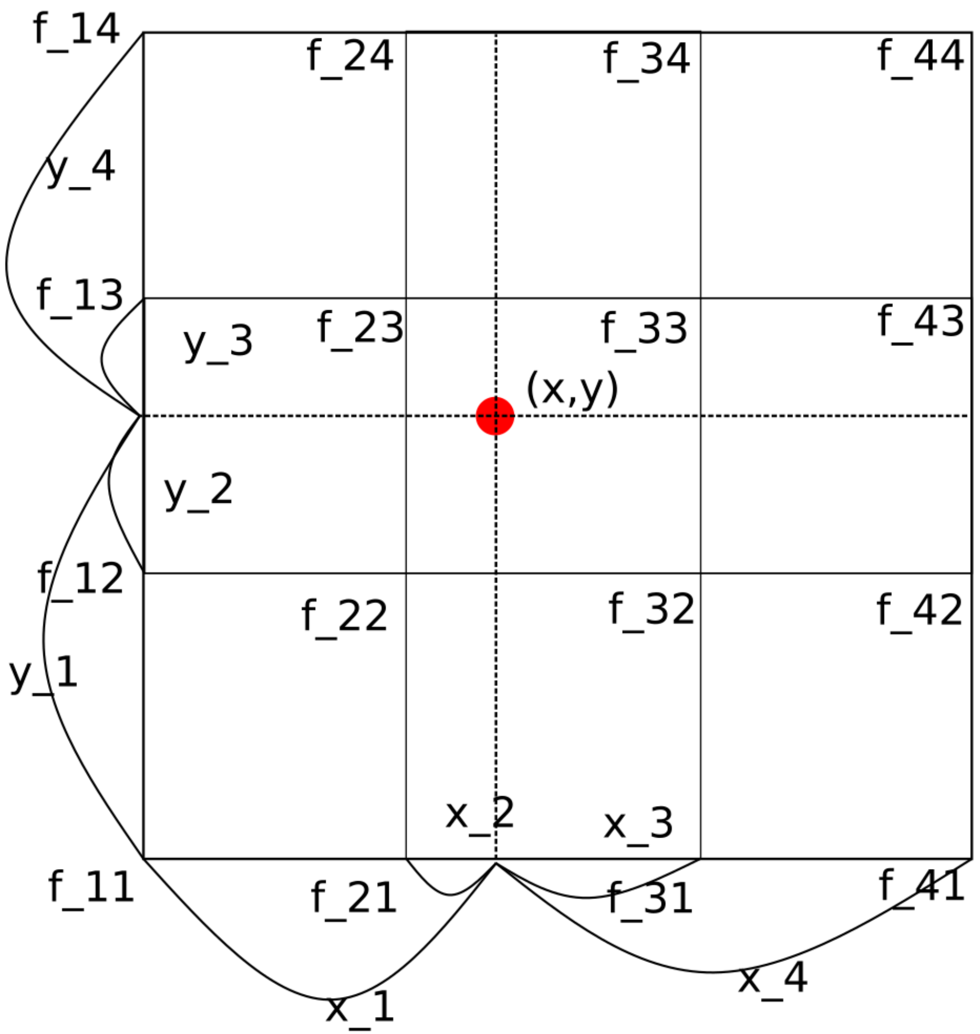
8-3-4 バイキュービック補間

まわりの16画素の値を利用する補間

$$I(x,y) = \begin{pmatrix} h(x_1) & h(x_2) & h(x_3) & h(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(y_1) \\ h(y_2) \\ h(y_3) \\ h(y_4) \end{pmatrix}$$

変数f_{ij}、x_i, y_iの定義

バイキュービック補間

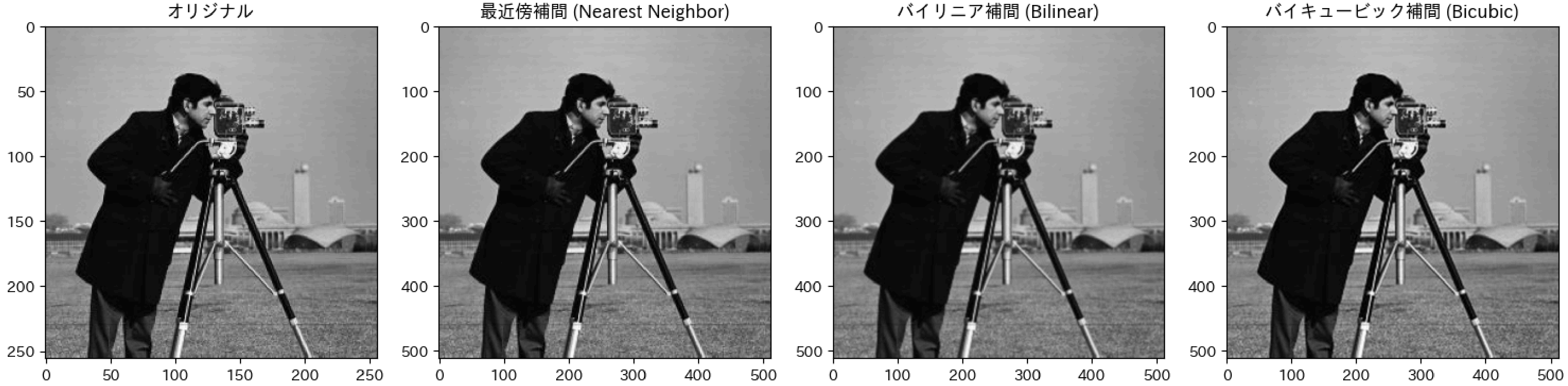


h(t):sinc関数を3次多項式で近似したもの

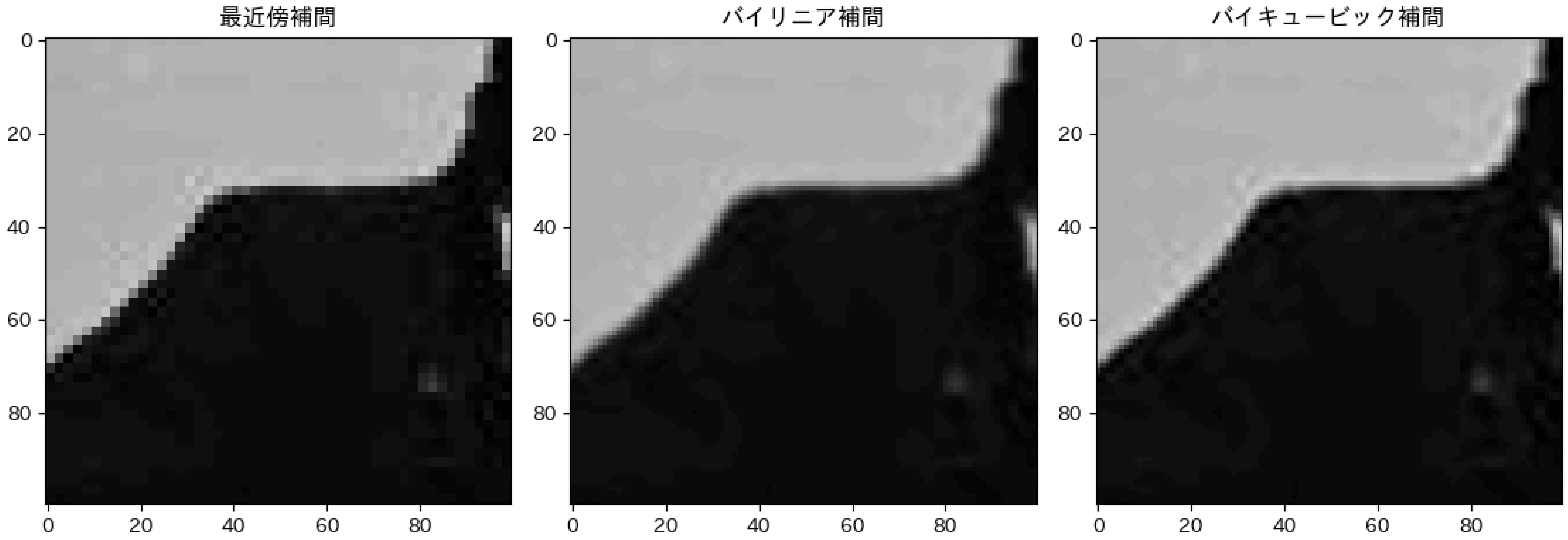
$$\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/\pi t$$

$$h(t) = \begin{cases} \|t\|^3 - 2\|t\|^2 + 1 & \text{if } \|t\| \leq 1 \\ -\|t\|^3 + 5\|t\|^2 - 8\|t\| + 4 & \text{if } 1 < \|t\| \leq 2 \\ 0 & \text{if } \|t\| > 2 \end{cases}$$

画像を拡大したときの各補間の比較



補間された画像を拡大して見てみる



バイリニア：ニアレストネイバーのようなジャギーが目立たなくなる一方、エッジがなまる
バイキュービック：バイリニアと比べて、よりシャープに

8-4-1 イメージモザイキングとその概略処理手順

イメージモザイキング：複数の画像を合成して1枚の大きな画像を作成する技術
ex.視点の異なる複数枚の画像を合成し広い範囲の画像を得る

処理概略

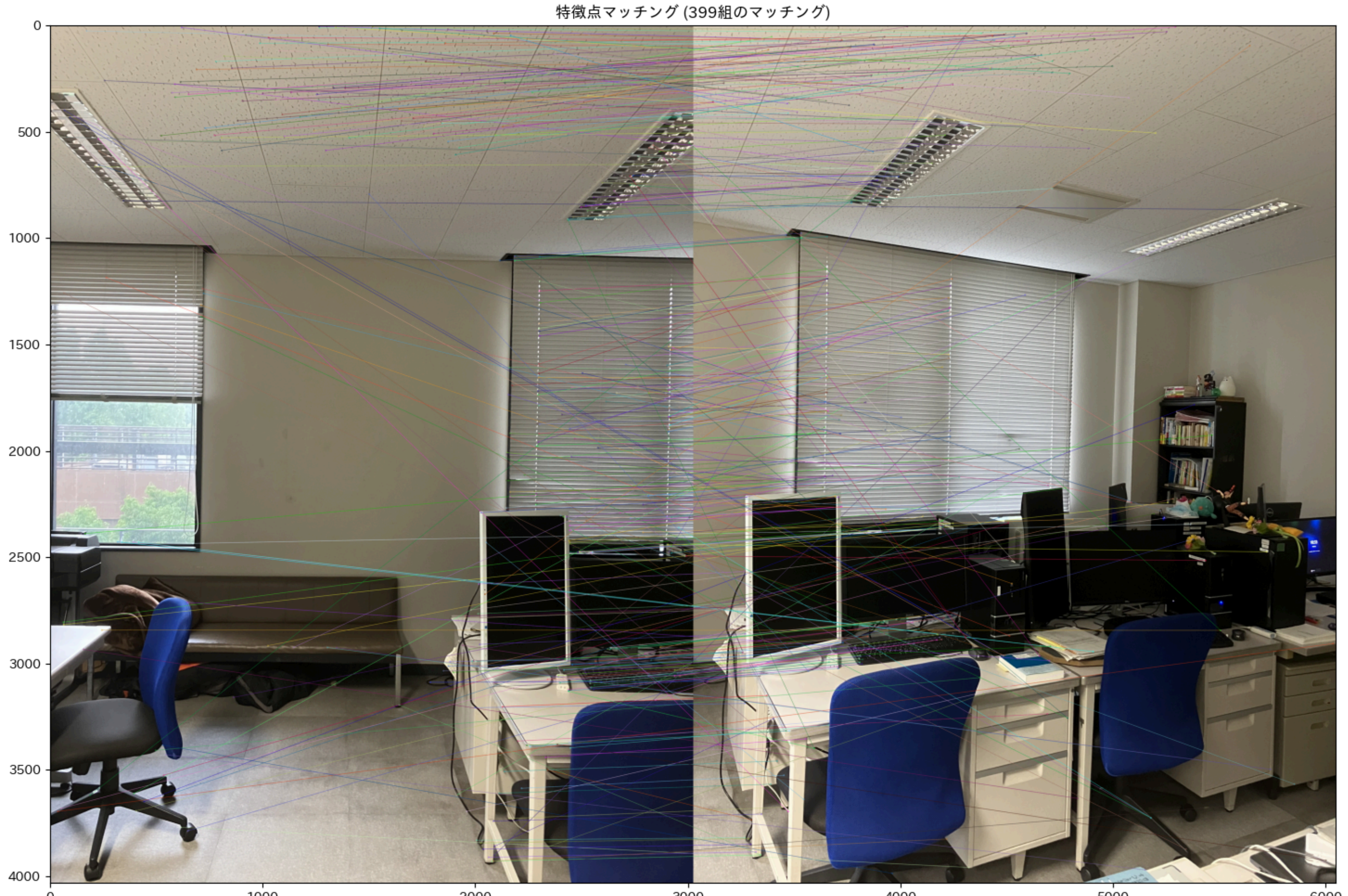
1. 特徴点の検出とマッチング
2. 幾何学的変換の推定
3. 画像の幾何学的変換と合成

2枚の画像をつなぎ合わせるイメージモザイキング処理で各ステップごとに説明する

8-4-2 特徴点の抽出とマッチング

マッチング：画像間の対応点を見つける処理

マッチングを行い画像間の対応を見つけた結果



8-4-3 幾何学的変換の推定

画像間は射影変換によって結合する

def.射影変換の式

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \quad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

$h_{33} = 1$とし、変形

$$xh_{11} + yh_{12} + h_{13} - xx'h_{31} - x'yh_{ew} = x'$$
$$xh_{21} + yh_{22} + h_{23} - xx'h_{32} - x'yh_{ew} = y'$$

マッチングでえられた対応する特徴点の座標$(x, y)(x', y')$が少なくとも４組あれば、連立方程式として解ける

各対応点から得られる式を並べると行列表現ができる

$$Ah = b$$

この式の最小二乗解、すなわち

$$E = \frac{1}{2}(Ah - b)^T(Ah - b) \to \min$$

となるようなhは、一般化逆行列解

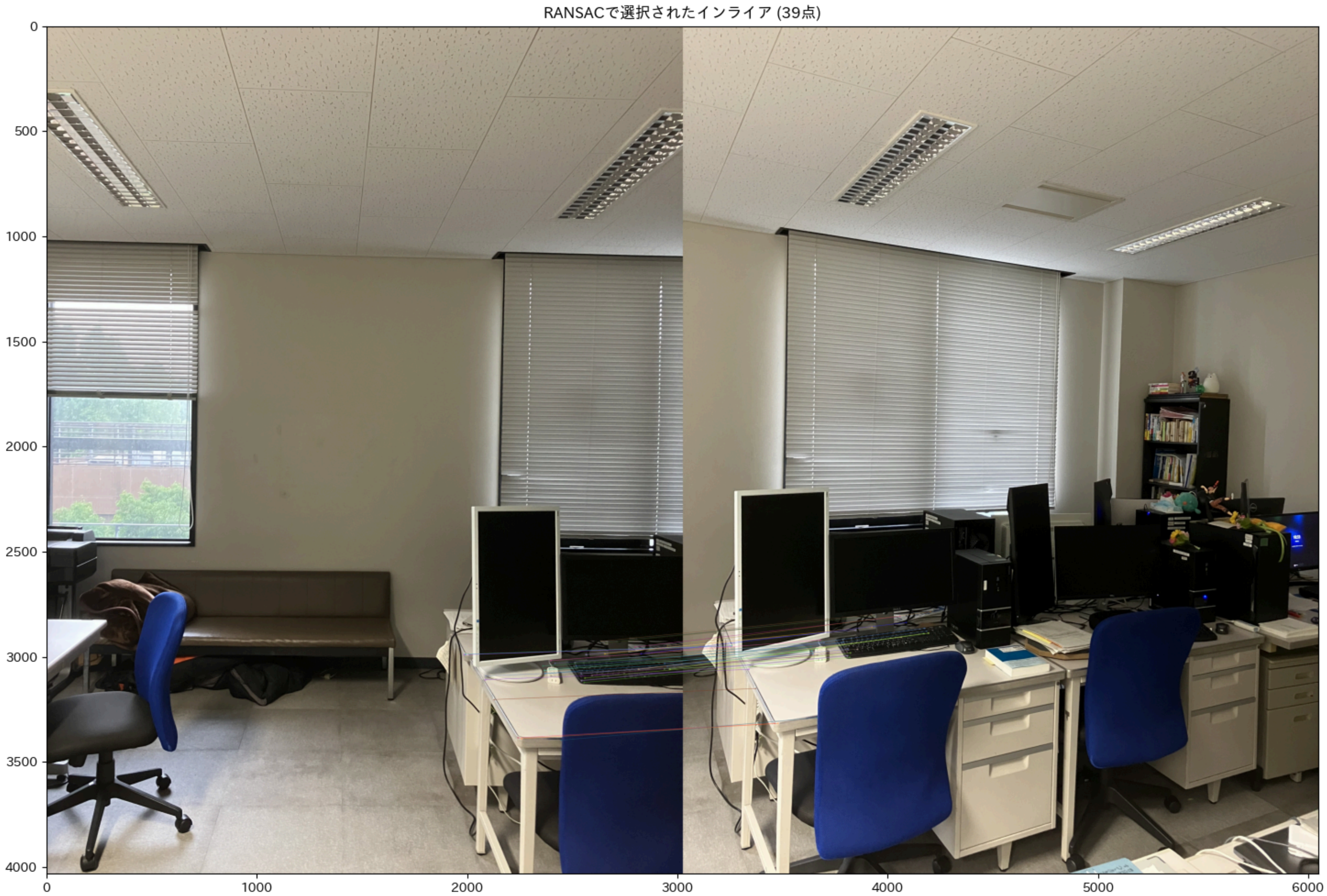
$$h = (A^T A)^{-1} A^T b$$

として得られる

アウトライヤの除去

アウトライヤ：マッチングの結果による誤った対応点

- RANSAC：アウトライヤを考慮した変換のパラメータ推定手法
    i. ランダムに4組の特徴点の対応を選択
    ii. 射影変換Hを推定
    iii. Hから正しく変換された対応点(インライア)の数を確認
    iv. 上の操作を繰り返す
    v. インライアが最も多いパラメータが採択


RANSACで選択されたインライア (39点)
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000

結合結果

合成結果

8-4-4 画像の幾何学的変換と合成

画像のつなぎ目を目立たなくさせるには、重み付き平均を計算

重なった領域の画素値の計算方法

$$\frac{d_1 I_1 + d_2 I_2}{d_1 + d_2}$$

(d_1, d_2:画像1,2からの距離 I_1, I_2:画像1,2の画素値)

単純な合成結果

改善版：重み付き平均によるブレンディング結果

8-4-5 平面パノラマ、円筒面パノラマ、球面パノラマ

射影変換で２つの画像をつなぎ合わせることで、平面パノラマの生成に成功した
これが機能する条件として

- 撮影対象が平面
- カメラが光学中心を回転中心として回転し、撮影されていること

が必要。 平面パノラマ以外にも円筒パノラマ、球面パノラマがある

平面パノラマ